

تحلیل عددی ضربه کم سرعت و میرایی سازه‌های ورق مستطیلی پروالاستیک

محمد شریات*

محسن جهانگیری

مسعود عسگری

استاد، دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران.

کارشناس ارشد، دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران.

استادیار، دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران.

چکیده

کاربرد سازه‌های با ساختار متخلخل با حفره‌هایی که به طور طبیعی یا ساختگی حاوی سیال هستند، در زمینه‌های مهندسی متعددی مانند ورق‌ها و فومهای حاوی رطوبت یا سیال میراساز انرژی، ورقهای چوبین در معرض رطوبت و نیز استخوان مطرح است. در مقاله کنونی، تحلیل پاسخ ضربه ورق پروالاستیک برای اولین بار صورت پذیرفته است. برای این منظور ابتدا معادلات ساختاری مواد پروالاستیک بر اساس نظریه بیوت ارایه شده و سپس معادلات حاکم بر ضربه ورق، بر پایه نظریه ورق کلاسیک و قانون تماس خطی نشده هرتز، استخراج گردیده‌اند. فرم اجزای محدود غیرخطی معادلات حاکم با استفاده از روش گلرکین بدست آمده و با الگوریتمی ویژه حل شده است. برای در نظر گرفتن وابستگی زمانی معادلات حاصله، از روش انتگرال‌گیری زمانی عددی نیومارک استفاده شده است. بر پایه کد کامپیوتری نوشته شده، اثر پارامترهای گوناگون بررسی شده است. نتایج آشکار می‌سازند که وجود و امکان حرکت سیال در حفره‌های ساختاری، می‌تواند به رفتارهایی متناقض با ورقهای عادی بینجامد. همچنین، نیروی تماس، میزان فروروی ضربه‌زن، خیز نقطه وسط ورق و گشتاور خمشی ناشی از سیال درون منافذ با افزایش ضریب نفوذ افزایش می‌یابند.

واژه‌های کلیدی: ضربه، مواد پروالاستیک، ورق، روش اجزای محدود، تحلیل دینامیکی غیرخطی.

Numerical low-velocity impact and structural damping analysis of a rectangular poroelastic plate

M. Shariyat

M. Jahangiri

M. Asgari

Faculty of Mechanical Engineering, K.N. Toosi University, Tehran, Iran

Faculty of Mechanical Engineering, K.N. Toosi University, Tehran, Iran

Faculty of Mechanical Engineering, K.N. Toosi University, Tehran, Iran

Abstract

Application of porous structures whose voids are naturally or artificially contain fluids is common in several engineering fields such as plates with foams containing humidity or damping fluids, wooden plates subject to humidity, and bones. In the present paper, impact analysis of the poroelastic plates is accomplished for the first time. In this regard, the constitutive equations of the poroelastic materials are proposed based on Biot's theory and then, the governing equations of the impact of the plate are derived based on the classical plate theory and the non-linear Hertz law. The non-linear finite element form of the governing equations is obtained based on Galerkin method and solved using a special algorithm. Newmark's numerical time integration method is employed to consider the time-dependency of the resulting equations. Based on the written computer code, effects of various parameters are investigated. Results reveal that presence and flow of the trapped fluid can lead to behaviors that are in contradiction to those of the traditional plates. Furthermore, the contact force, indentation, central deflection of the plate and the bending moment due to the trapped fluid may increase by increasing the diffusion coefficient.

Keywords: Impact, Poroelastic materials, Plate, Finite element method, Non-linear dynamic analysis.

قرار می‌گیرند.

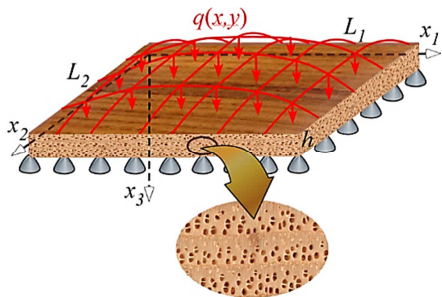
تاکنون، دو نظریه کاملاً مجزا برای مواد پروالاستیک ارائه شده‌اند. نظریه رایج‌تر و قدیمی‌تر، نظریه بیوت است که به طور مفصل به بررسی مواد متخلخل الاستیک اشیاع شده توسط سیال لزج و پاسخ های دینامیکی آن‌ها پرداخته است [۲ و ۳]. نظریه دیگر مبتنی بر قواعد اختلاط است و با نام نظریه محیط‌های متخلخل شناخته می‌شود [۴].

مقالات ارائه شده در زمینه تیرها و ورق‌های پروالاستیک، حتی برای بارگذاری‌ها و شرایط مرزی ساده، نسبتاً اندک می‌باشند. هنگامی که مواد پروالاستیک تحت بار خارجی قرار می‌گیرند، سیال داخل حفره‌ها در اثر گرادیان فشار ایجاد شده، شروع به حرکت می‌کند و چنانچه سیال لزج باشد، مسئله وابسته به زمان خواهد شد. تابر [۵] با بهره‌گیری از نظریه بیوت و صرف‌نظر از حرکت درون صفحه‌های سیال،

۱- مقدمه

یک محیط متخلخل، ساختاری جامدی با حفره‌هایی متصل یا منفصل است که در بسیاری از موارد، حفره‌های آن توسط سیال اشغال شده‌اند. اگر ساختار جامد، دارای رفتار الاستیک و سیال نفوذی، لزج باشد، ماده متخلخل، پروالاستیک نامیده می‌شود [۱]. شاید ملموس ترین مثال برای چنین موادی، مواد معدنی نظیر خاک و صخره‌ها می‌باشند که توسط آب اشیاع شده‌اند. در تحلیل‌های دقیق بیومکانیک، استخوان‌ها، عضلات و بافت‌ها با ماده پروالاستیک مدل می‌شوند. علاوه بر این، مواد پروالاستیک غیر طبیعی نظیر فوم‌ها، سرامیک‌ها و کامپوزیت‌هایی با لایه‌های پروالاستیک نیز وجود دارند که به دلیل رفتار مناسب آنها در جذب و استهلاک انرژی، به عنوان ضربه‌گیر، عایق و موارد دیگر، در صنایع خودروسازی، هوافضا و ساختمانی مورد استفاده

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: shariyat@kntu.ac.ir



شکل ۱- مختصات و پارامترهای هندسی ورق پروالاستیک مورد بررسی، با قابلیت جریان درون صفحه‌ای، تحت بار عرضی.

رابطه ساختاری یک ماده جامد به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\tau_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda e\delta_{ij} \quad (1)$$

که در آن، G ، λ ، $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ به ترتیب، مدول برشی، ضریب Lamé و کرنش حجمی بوده و $(\tau_{ij}, i, j = 1, 2, 3)$ مؤلفه‌های تنش جسم می‌باشند. بر پایه قانون میکرومکانیک (مخلوطها)، تنش متوسط در هر المان نماینده، از روابط زیر بدست می‌آید [۱۰]:

$$\tau_{ij} = \beta_s \tau_{ij}^s + \beta_f \tau_{ij}^f \quad (2)$$

که در آن، بالانویس‌های s و f به ترتیب، بیان‌گر ساختار جامد و سیال بوده و β_s و β_f به ترتیب، حجم حفره و حجم ساختار جامد در المان نماینده می‌باشد. لذا، در اثر فشار سیال درون حفره (p_f) ، تنش هیدروستاتیک زیر در ساختار پروالاستیک پدید می‌آید:

$$\sigma = -\beta_f p_f \quad (3)$$

طبق بیان بیوت، برای جسم پروالاستیک همسان‌گرد، رابطه (۳) در حالت کلی، به صورت زیر اصلاح می‌گردد [۱۱ و ۱۲]:

$$\tau_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda e\delta_{ij} - \alpha\delta_{ij}p_f \quad (4)$$

که در آن، ضریب بیوت در تنش موثر است. همچنین، فشار سیال درون حفره بر پایه رابطه زیر بدست می‌آید:

$$p_f = (\zeta - \alpha e)M \quad (5)$$

ζ تغییرات مقدار سیال، در اثر تغییرات حجم است که از رابطه (۶) محاسبه می‌گردد:

$$\zeta = \phi(\varepsilon_{ii}^s - \varepsilon_{ii}^f) \quad (6)$$

که در آن، ϕ میزان تخلخل و ε_{ii}^s و ε_{ii}^f به ترتیب، عبارتند از:

$$\varepsilon_{ii}^s = \nabla \cdot \mathbf{u}^s = \varepsilon_{11}^s + \varepsilon_{22}^s + \varepsilon_{33}^s \quad (7)$$

$$\varepsilon_{ii}^f = \nabla \cdot \mathbf{u}^f \quad (8)$$

در رابطه (۵):

$$M = \frac{K_u - K}{\alpha^2}, K_u = K \left[1 + \frac{\alpha^2 K_f}{(1 - \alpha)(\alpha - \phi)K_f + \phi K_f} \right] \quad (9)$$

که در آن، M ، K_u ، K ، K_f ، ϕ ، به ترتیب، مدول بیوت، مدول حجمی (بالک) ساختار پروالاستیک، مدول حجمی ساختار جامد، مدول حجمی سیال و میزان تخلخل است. برای ساختار پروالاستیک اشباع که در آن، سیال آزادی تحرک ندارد ($\zeta = 0$):

$$p_f = -\alpha eM \quad (10)$$

و برای حالت ساختار حفره‌دار بدون سیال، $p_f = 0$ است.

معادلات ساختاری ماده پروالاستیک همسانگرد عرضی با همسانگردی ویژگی‌های مواد در صفحه $x_1 - x_2$ بر اساس نظریه بیوت به صورت زیر می‌باشند [۱۱]:

مدلی برای بررسی رفتار ورق پروالاستیک تحت بارگذاری خمشی در حالت شبه‌استاتیکی پیشنهاد نمود. وی در این مدل، از نظریه کلاسیک ورق استفاده نموده و معادله حاکم بر ورق پروالاستیک را با استفاده از روش‌های تبدیل لاپلاس و اغتشاشات حل نمود. تئودورا کوپولوس و بسکوس [۶] نیز با استفاده از نظریه بیوت و فرضیات کلاسیک ورق و چشم‌پوشی از نفوذ درون صفحه‌ای سیال، مدلی برای بررسی رفتار دینامیکی ورق نازک پروالاستیک ارائه نمودند. لکلاری و همکاران [۷] با در نظر گرفتن فرضیات ساده‌کننده بیشتر، روشی برای حل معادلات ورق پروالاستیک دارای تکیه‌گاه‌های گیردار ارائه دادند. شانز و باسی [۸] با استفاده از نظریه بیوت و نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول ورق، مدلی برای ورق پروالاستیک ضخیم ارائه نمودند. سدریام و همکارانش [۹] تیرها و ورق‌های پروالاستیکی را مورد بررسی قرار دادند که در آنها، فرآیند نفوذ سیال تنها در جهت درون صفحه‌ای امکان پذیر بوده و فرآیند نفوذ در جهت عمودی قابل چشم‌پوشی است.

مرور خلاصه تاریخچه آشکار می‌سازد که تاکنون، رفتار سازه‌های پروالاستیک تحت بار ضربه، و قابلیت مواد پروالاستیک در میراسازی انرژی، در سطح بین‌المللی نیز بررسی نشده است. در پژوهش کنونی، به بررسی موضوع یاد شده برای ورق مستطیلی پرداخته شده است. برای این منظور، ابتدا معادلات لازم برای تشریح رفتار مواد پروالاستیک بر اساس نظریه بیوت ارائه گردیده و سپس با استفاده از این معادلات و فرضیات نظریه ورق کلاسیک، معادلات حاکم بر هر دو فاز جامد و مایع ورق پروالاستیک استخراج شده‌اند. برای مدل‌سازی ضربه، از قانون تماس غیرخطی بهبودیافته هرتز استفاده شده گردیده است. سپس با استفاده از روش گلرکین فرمول‌بندی اجزای محدود معادلات، شامل دو معادله حرکت ورق پروالاستیک و هم‌چنین معادله ضربه استخراج گردیده است. برای حل معادلات دیفرانسیل زمانی حاصله، از روش انتگرال‌گیری زمانی نیومارک استفاده شده و الگوریتمی مناسب جهت حل هم‌زمان معادلات وابسته زمانی و غیرخطی استخراج گردیده است.

۲- استخراج معادلات حرکت ورق پروالاستیک

جرم ضربه‌زن

۲-۱- یافتن فرم روابط ساختاری مواد پروالاستیک

در این بخش، فرم معادلات حاکم برای ورق پروالاستیک اشباع شده توسط یک سیال لزج دارای قابلیت جریان، ارائه خواهد شد. فرض بر این است که ساختار ماده سازنده ورق به گونه‌ای است که نفوذ و انتشار سیال در داخل ورق، عموماً در جهت درون صفحه‌ای ورق امکان پذیر بوده و نفوذ در راستای ضخامت ورق اندک بوده یا وجود ندارد. محورهای مختصات و پارامترهای هندسی ورق یاد شده، در شکل ۱ نشان داده شده‌اند. ابعاد ورق در راستای محورهای سه‌گانه، به ترتیب، با L_1 ، L_2 و h مشخص شده‌اند. به دلیل ماهیت روابط ساختاری، ورق را همسان‌گرد عرضی در نظر می‌گیریم. سپس، با بکارگیری نظریه کلاسیک خمشی ورق و استفاده از معادلات ساختاری ارائه شده توسط بیوت برای مواد پروالاستیک و هم‌چنین قانون Darcy برای حرکت سیال داخل حفره‌ها، معادلات لازم برای ورق پروالاستیک حاوی سیال لزج را بدست می‌آوریم.

$$D_{1212} = \frac{\bar{D}(1-\nu)}{2}, \quad D_{1112} = D_{1222},$$

$$\bar{D} = \bar{B}_{11} - \frac{\bar{B}_{13}^2}{\bar{B}_{33}}, \quad \nu = \frac{\bar{B}_{12} - \bar{B}_{13}^2/\bar{B}_{33}}{\bar{B}_{11} - \bar{B}_{13}^2/\bar{B}_{33}}$$

۲-۲- معادلات حاکم بر ورق تحت بار عرضی

بر اساس نظریه خمشی ورق کلاسیک، ارتباط میان مولفه‌های کرنش و جابجایی به صورت زیر می‌باشد:

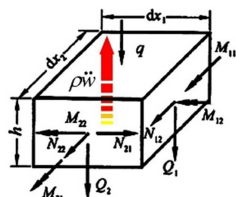
$$\varepsilon_{\alpha\beta} = -x_3 w_{,\alpha\beta} \quad (19)$$

که در آن، نماد ویرگول (.) در زیرنویس، بیانگر مشتق جزئی نسبت به مختصات مشخص شده است. با جای‌گذاری رابطه (۱۹) در رابطه اول (۱۶) و انتگرال‌گیری در راستای ضخامت، مولفه‌های گشتاور بر واحد طول به صورت رابطه (۲۰) بدست می‌آیند:

$$\begin{Bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{Bmatrix} = (-\hat{I}\bar{D}) \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{,11} \\ w_{,22} \\ w_{,12} \end{Bmatrix} + M_p \begin{Bmatrix} \eta \\ \eta \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

که در آن، M_p ، گشتاور خمشی بر واحد طول ناشی از فشار سیال درون منافذ و \hat{I} ممان اینرسی ورق بر واحد طول است:

$$M_p = - \int_{-h/2}^{h/2} p_f x_3 dx_3, \quad \hat{I} = h^3/12 \quad (21)$$



شکل ۲- نیروها و گشتاورهای بر واحد طول وارد بر المانی از ورق

بر پایه پیکره آزاد المان ورق که در شکل ۲ نشان داده شده است، معادلات حرکت ورق را می‌توان به گونه زیر نوشت:

$$M_{\alpha\beta,\beta} = Q_\alpha \quad (22)$$

$$Q_{\alpha,\alpha} + q - \rho\dot{w} = 0, \quad (\alpha = 1, 2)$$

در روابطه (۲۲)، روی نمادهای α و β جمع تسسوری انجام می‌شود. ρ چگالی جرمی واحد سطح ورق و q ، شدت بار گسترده عرضی وارد بر سطح است. از ترکیب روابط (۲۲) داریم:

$$M_{\alpha\beta,\alpha\beta} + q - \rho\dot{w} = 0, \quad (\alpha = 1, 2) \quad (23)$$

در نتیجه، با جای‌گزینی رابطه (۲۰) در رابطه (۲۳)، خواهیم داشت:

$$\bar{D}\hat{I}\nabla^4 w - \eta\nabla^2 M_p - q + \rho\dot{w} = 0$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (24)$$

که معادله حرکت ورق پروالاستیک حاوی سیال لزج، بر حسب خیز و گشتاور ناشی از فشار سیال در منافذ است. با توجه به اینکه در رابطه (۲۴)، به دلیل وجود سیال لزج، علاوه بر متغیر خیز ورق (w)، اثر فشار سیال محبوس در منافذ یا به عبارت دیگر، (M_p) ، نیز آشکار شده است، برای حل معادله حاکم بر ورق، نیاز به دانستن چگونگی نفوذ سیال داخل صفحه ورق می‌باشد. فرآیند نفوذ را می‌توان بر اساس قانون دارسی تحلیل نمود [۳ و ۱۲]:

$$\phi(\dot{u}_m - \dot{u}_m^f) = \frac{k_m}{\mu_f} p_{f,m}, \quad m = 1, 2, 3 \quad (25)$$

که در آن، \dot{u}_m و \dot{u}_m^f به ترتیب، مولفه‌های سرعت فازهای جامد و

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= 2B_1\varepsilon_{11}^s + B_1(\varepsilon_{11}^s + \varepsilon_{22}^s) + B_3\varepsilon_{33}^s + B_6\zeta \\ \tau_{22} &= 2B_1\varepsilon_{22}^s + B_2(\varepsilon_{11}^s + \varepsilon_{22}^s) + B_3\varepsilon_{33}^s + B_6\zeta \\ \tau_{33} &= B_4\varepsilon_{33}^s + B_3(\varepsilon_{11}^s + \varepsilon_{22}^s) + B_7\zeta \\ \tau_{12} &= 2B_1\varepsilon_{12}^s \\ \tau_{23} &= 2B_5\varepsilon_{23}^s \\ \tau_{13} &= 2B_5\varepsilon_{13}^s \\ p_f &= B_6(\varepsilon_{11}^s + \varepsilon_{22}^s) + B_7\varepsilon_{33}^s + B_8\zeta \end{aligned} \quad (11)$$

که در آن، ضرایب $(B_m, m = 1, \dots, 8)$ ، ضرایب بیوت ماده پروالاستیک و τ_{ij} مؤلفه‌های کلی تنش جسم هستند که در اصل، شامل تنش هر دو فاز جامد و مایع بوده و کرنش‌های ساختار جامد می‌باشند. با جایگزینی پارامتر ζ از سه معادله اول (۱۱) به کمک رابطه آخر از روابط (۱۱)، معادلات ساختاری به صورت رابطه (۱۲) درمی‌آیند:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{B}_{11} & \bar{B}_{12} & \bar{B}_{13} \\ \bar{B}_{12} & \bar{B}_{11} & \bar{B}_{13} \\ \bar{B}_{13} & \bar{B}_{13} & \bar{B}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^s \\ \varepsilon_{22}^s \\ \varepsilon_{33}^s \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} p_f$$

$$p_f = F[\zeta - \alpha_1(\varepsilon_{11}^s + \varepsilon_{22}^s) - \alpha_3\varepsilon_{33}^s]$$

$$\tau_{12} = 2G\varepsilon_{12}^s, \quad \tau_{23} = 2G\varepsilon_{23}^s, \quad \tau_{31} = 2G\varepsilon_{31}^s$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \bar{B}_{11} &= 2B_1 + B_2 - \frac{B_2^2}{B_8}, \quad \bar{B}_{12} = B_2 - \frac{B_2^2}{B_8} \\ \bar{B}_{13} &= B_3 - \frac{B_6B_7}{B_8}, \quad \bar{B}_{33} = B_4 - \frac{B_7^2}{B_8}, \quad G = \frac{\bar{B}_{11} - \bar{B}_{12}}{2} \\ G_3 &= B_5, \quad \alpha_1 = -\frac{B_6}{B_8}, \quad \alpha_3 = -\frac{B_7}{B_8}, \quad F = B_8 \end{aligned} \quad (13)$$

با توجه به اینکه، بر پایه روابط (۱۳)، مقدار G بر پایه سایر ضرایب ماده، مشخص است تنها هشت ضریب مستقل مواد وجود خواهند داشت. اکنون، بر پایه فرضیات نظریه کلاسیک ورق، به ساده‌سازی روابط الاستیسیته سه‌بعدی (۱۲) می‌پردازیم. همان‌گونه که در شکل ۱ مشاهده می‌شود، صفحه مختصاتی $x_1 - x_2$ منطبق بر لایه میانی ورق اختیار شده است. برای حالت تنش صفحه‌ای ($\tau_{33} = 0$)، از سومین رابطه معادلات (۱۱) داریم:

$$\varepsilon_{33}^s = \frac{\alpha_3 - \bar{B}_{13}(\varepsilon_{11}^s + \varepsilon_{22}^s)}{B_{33}} \quad (14)$$

با استفاده از رابطه (۱۴) جهت جای‌گزینی مقدار ε_{33}^s در دو معادله اول از رابطه (۱۱)، معادلات ساختاری به ورق به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\tau_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\gamma\delta} - \eta p_f \delta_{\alpha\beta} \quad (15)$$

$$\zeta = \beta p_f + \eta\varepsilon_{\alpha\alpha}; \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2$$

که در آن $\delta_{\alpha\beta}$ دلتای کرونیکر است و به فرم باز شده:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & 0 \\ D_{1122} & D_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & D_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^s \\ \varepsilon_{22}^s \\ \varepsilon_{12}^s \end{Bmatrix} - p_f \begin{Bmatrix} \eta \\ \eta \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

$$\zeta = \beta p_f + \eta(\varepsilon_{11}^s + \varepsilon_{22}^s)$$

که در آن، ضرایب β و η به ترتیب برابرند با:

$$\beta = \frac{1}{F} + \frac{\alpha_3^2}{B_{33}}, \quad \eta = \alpha_1 - \frac{\bar{B}_{13}}{B_{33}}\alpha_3 \quad (17)$$

لذا، روابط تنش-کرنش تنها بر حسب چهار ضریب مواد ν, \bar{D}, \hat{I} و η بیان گردیدند. با توجه به فرضیات نظریه کلاسیک ورق و رابطه (۱۲)، مولفه‌های تنش برشی τ_{23} و τ_{13} ، به دلیل صفر بودن کرنش‌های برشی عرضی، صفر هستند. برای سادگی، از این پس، بالانویس s را از روابط کرنش ساختار جامد حذف می‌کنیم. ضرایب مواد پروالاستیک همسانگرد آشکار شده در رابطه (۱۵)، را از طریق روابط زیر با ضرایب الاستیک ورق الاستیک همسان‌گرد معمولی شبیه‌سازی می‌کنیم:

$$D_{1111} = D_{2222} = \bar{D} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad D_{1122} = \nu\bar{D}, \quad (18)$$

(۳۵) $F_c = (F_c)_m [(\alpha - \alpha_0) / (\alpha_m - \alpha_0)]^{2.5}$
 که در آن، $(F_c)_m$ مقدار بیشینه نیروی تماس قبل از شروع فاز باربرداری، α_m مقدار بیشینه فروروی و α_0 میزان فروروی ماندگار است.

۴-۲- معادله حرکت ضربه زن

ارتباط میان تغییرات جابجایی جرم ضربه زن (m) با نیروی ضربه، توسط قانون دوم نیوتن برقرار می‌گردد:

$$F_c = -m\ddot{\psi} \quad (۳۶)$$

بنابر این، از ترکیب روابط (۳۱)، (۳۲) و (۳۶) داریم:

$$\ddot{\alpha} + \left(\frac{k}{m}\right) \alpha^{1.5} = \ddot{w}|_{x_c=y_c} \quad (۳۷)$$

لذا، معادله حاکم بر حرکت ضربه زن، به دلیل وابستگی به پدیده تماس، غیرخطی است. در نتیجه، برای یافتن پاسخ ضربه ورق پرولاستیک، باید دستگاهی متشکل از سه معادله کوپل آشکار شده در روابط (۳۰) و (۳۷) برحسب مقادیر خیز لایه میانی ورق (w)، نفوذ (α) و برآیند گشتاور فشار منافذ (M_p) را به شیوه اجزای محدود مناسبی حل نمود.

۵-۲- شرایط مرزی

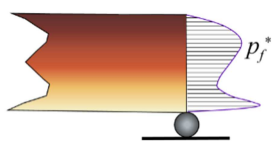
در روش اجزای محدود، شرایط مرزی پیش از حل دستگاه معادلات حاکم اعمال می‌شوند. در پژوهش کنونی، شرایط تکیه‌گاهی ورق، ساده در نظر گرفته شده‌اند:

$$w = 0, \quad M_n = 0 \quad (۳۸)$$

هم‌چنین شرایط مرزی برای فرآیند نفوذ، بر حسب گشتاور فشار منافذ می‌باشد. اگر سیال بتواند از لبه‌های ورق به درون یا خارج آن، تراوش نماید، شرط مرزی به فرم زیر خواهد بود:

$$M_p = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} p_f^*(x_3) \cdot x_3 dx_3 = \bar{M}_p \quad (۳۹)$$

که در آن، $p_f^*(x_3)$ توزیع فشار سیال درون حفره‌ها در لبه ورق در اثر تزریق سیال یا تخلیه فشار در محیط است (شکل ۴).



شکل ۴- شرایط مرزی لبه ورق

برای لبه با منافذ بسته، شرط مرزی زیر مناسب است:

$$M_{p,n} = 0 \quad (۴۰)$$

زیرا در اینحالت، سیال با محیط خارج از لبه ارتباطی نداشته و شرط کلاسیک لبه روی تکیه‌گاه ساده برقرار است.

۳- استخراج معادلات حرکت ورق پرولاستیک و

جرم ضربه زن

در بخش قبل، معادلات حاکم بر مساله بدست آمدند. برای بهره‌گیری از ویژگی تعامد پاسخ و دستگاه معادلات حاکم، از روش مانده-های وزن‌دار شده به فرم گلرکین استفاده می‌کنیم. بر پایه معادلات (۳۰) و (۳۷)، فرم دستگاه معادلات حاکم بر مساله در فاز بارگذاری به

سیال، در راستای محور x_m می‌باشند. μ_f لزجت سیال و k_m نفوذپذیری در راستای محور x_m می‌باشد. از آنجا که $\varepsilon_{ii} = u_{i,i}$ و $\varepsilon_{ii}^f = u_{ii}^f$ می‌باشد، از ترکیب رابطه (۲۵) با رابطه (۶) داریم:

$$\dot{\zeta} = \frac{k_1}{\mu_f} p_{f,aa} \quad (۲۶)$$

از جای‌گذاری رابطه کرنش (۱۹) در رابطه (۶) برای یافتن مقدار ζ و جای‌گزینی نتیجه حاصله، در رابطه (۲۶) داریم:

$$K p_{f,aa} = \dot{p}_f + \hat{\lambda} \bar{D} (-x_3 \dot{w}_{,aa}) \quad (۲۷)$$

که در آن:

$$K = \frac{k_1}{\mu_f \beta}, \quad \hat{\lambda} = \frac{\eta}{\bar{D} \beta} \quad (۲۸)$$

برای اینکه بتوان بر پایه رابطه (۲۷)، کمیت M_p را بدست آورد، با توجه به رابطه (۲۱)، ابتدا دو طرف رابطه (۲۷) را در x_3 ضرب نموده و سپس در راستای ضخامت ورق انتگرال می‌گیریم تا به رابطه نهایی زیر برسیم:

$$K \nabla^2 M_p - \dot{M}_p - \hat{\lambda} \bar{D} \nabla^2 \dot{w} = 0 \quad (۲۹)$$

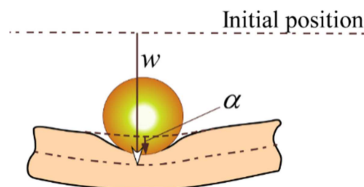
در نتیجه، بر پایه روابط (۲۴) و (۲۹)، دستگاه معادلات دیفرانسیل لازم برای تحلیل رفتار ورق پرولاستیک حاوی سیال لزج بر حسب خیز ورق (w) و برآیند گشتاور فشار منافذ (M_p)، به صورت زیر، خواهد بود:

$$\begin{cases} \bar{D} \nabla^4 w - \eta \nabla^2 M_p - q + \rho \dot{w} = 0 \\ K \nabla^2 M_p - \dot{M}_p - \hat{\lambda} \bar{D} \nabla^2 \dot{w} = 0 \end{cases} \quad (۳۰)$$

۳-۲- قانون تماس

عموماً، از قانون هرتز برای تحلیل ضربه سازه‌ها استفاده می‌شود. آسیبها زمانی چشمگیرتر خواهند بود که گلوله ضربه‌زن، صلب و سخت باشد. اگر جابجایی کلی گلوله ضربه‌زن را ψ با نشان دهیم، ارتباط میان میزان فروروی گلوله (α) با خیز، طبق شکل ۳، چنین خواهد بود:

$$\alpha = \psi - w|_{x_c=y_c} \quad (۳۱)$$



شکل ۳- ارتباط میان میزان فروروی گلوله ضربه‌زن و خیز ورق

که در آن (x_c, y_c) مختصات محل ضربه از ورق می‌باشد. برای مراحل ابتدایی فرآیند بارگذاری، رابطه نیروی تماس F_c با میزان فروروی α ، طبق قانون تماس هرتز بدین صورت بیان می‌شود [۱۳]:

$$F_c = k \alpha^{3/2} \quad (۳۲)$$

که در آن سفتی ناحیه تماس از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$k = \frac{4}{2} E R^{1/2} \quad (۳۳)$$

و در آن، R و E به ترتیب از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad \frac{1}{E} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \quad (۳۴)$$

R_1 و R_2 شعاع‌های انحنا دو جسم در تماس هستند. زیر نویس-های ۱ و ۲ به ترتیب، بیانگر ضربه‌زن و ورق و E_1, ν_1 و E_2, ν_2 به ترتیب مدول یانگ و ضریب پواسون دو جسم یاد شده هستند.

در فرآیند باربرداری، قانون تماس زیر استفاده می‌شود [۱۳]:

$$\varphi = \begin{Bmatrix} w \\ M_p \\ \alpha \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N(\xi, \eta) & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{0} & N(\xi, \eta) & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{w}^e(t) \\ \hat{M}_p^e(t) \\ \alpha(t) \end{Bmatrix} = \bar{N}\Phi \quad (46)$$

با توجه به اینکه مشتقات کمیت‌ها در رابطه (۴۱) بر حسب مختصات دکارتی هستند، باید ارتباط آنها را با مشتقات در مختصات طبیعی یافت. با استفاده از قاعده مشتق زنجیری می‌توان نوشت:

$$\begin{Bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{Bmatrix} = J_1 \begin{Bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{Bmatrix} \quad (47)$$

J_1 جاکوبی اول نگاشت می‌باشد و درایه‌های آن عبارتند از:

$$J_{11} = \sum_{i=1}^N N_{i,\xi} X_i, \quad J_{12} = \sum_{i=1}^N N_{i,\xi} Y_i \quad (48)$$

$$J_{21} = \sum_{i=1}^N N_{i,\eta} X_i, \quad J_{22} = \sum_{i=1}^N N_{i,\eta} Y_i$$

لذا رابطه بین مشتقات مرتبه اول به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{Bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{Bmatrix} = J_1^{-1} \begin{Bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{Bmatrix} \quad (49)$$

ارتباط میان مشتقات مرتبه دوم کمیت‌ها را نیز می‌توان به طریقی مشابه بدست آورد:

$$\begin{Bmatrix} N_{i,\xi\xi} \\ N_{i,\eta\eta} \\ N_{i,\xi\eta} \end{Bmatrix} = J_2 \begin{Bmatrix} N_{i,xx} \\ N_{i,yy} \\ N_{i,xy} \end{Bmatrix} \quad (50)$$

J_2 جاکوبی دوم نگاشت بوده و درایه‌های آن عبارتند از:

$$J_2 = \begin{bmatrix} J_{11}^2 & J_{12}^2 & 2J_{12}J_{11} \\ J_{21}^2 & J_{22}^2 & 2J_{21}J_{22} \\ J_{11}J_{21} & 2J_{12}J_{22} & (J_{11}J_{22} + J_{12}J_{21}) \end{bmatrix} \quad (51)$$

در نتیجه:

$$\begin{Bmatrix} N_{i,xx} \\ N_{i,yy} \\ N_{i,xy} \end{Bmatrix} = J_2^{-1} \begin{Bmatrix} N_{i,\xi\xi} \\ N_{i,\eta\eta} \\ N_{i,\xi\eta} \end{Bmatrix} \quad (52)$$

بر پایه روابط (۴۲) و (۴۶)، می‌توان رابطه (۴۱) را به فرم زیر بازنویسی نمود:

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} \rho \bar{N} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\bar{N}|_{x=x_c, y=y_c} & \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \Phi + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 \\ -\lambda \bar{D} \hat{I} \nabla^2 \bar{N} & -\bar{N} & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \Phi + \begin{bmatrix} \bar{D} \hat{I} \nabla^4 \bar{N} & -\eta \nabla^2 \bar{N} - k \delta^* \alpha^{0.5} \\ \mathbf{0} & K \nabla^2 \bar{N} & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \left(\frac{k}{m}\right) \alpha^{0.5} \end{bmatrix} \Phi = \mathbf{A}\Phi + \mathbf{B}\Phi + \mathbf{G}\Phi = \mathbf{0} \quad (53)$$

که در آن، \mathcal{R} بردار توابع خطا بوده و در روش اجزای محدود، تلاش می‌شود که مقدار آن به صفر رسانده شود و: $\delta^* = \delta(x - x_c, y - y_c)$ لذا فرم گلرکین انتگرال خطا برابر است با:

$$\int_A \bar{N}^T \mathcal{R} dA = \int_A \bar{N}^T (\mathbf{A}\Phi + \mathbf{B}\Phi + \mathbf{G}\Phi) dA = \mathbf{0} \quad (54)$$

که در آن، A سطح المان‌بندی شده است. از آنجا که بالاترین مرتبه مشتقات آشکار شده در انتگرال خطا، چهار است در حالی‌که بزرگترین توان هر یک از مختصات طبیعی آشکار شده در توابع شکل، از رابطه (۳۶)، دو است، لازم است با دو بار انتگرال‌گیری جزء به جزء، از عبارات دارای مشتقات مرتبه چهار، مرتبه آنها را به دو کاهش داد. جهت کاهش مرتبه مشتقات از نظریه گرین-گوس^۱ استفاده می‌نماییم [۱۴]:

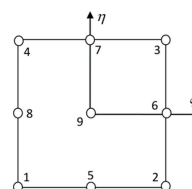
صورت زیر می‌باشد (در فاز باربرداری، باید از رابطه (۳۶) را از رابطه (۳۵) جایگزین نمود):

$$\begin{cases} \bar{D} \hat{I} \nabla^4 w - \eta \nabla^2 M_p - q + \rho \dot{w} = 0 \\ K \nabla^2 M_p - \dot{M}_p - \lambda \bar{D} \hat{I} \nabla^2 \dot{w} = 0 \\ \dot{\alpha} + \left(\frac{k}{m}\right) \alpha^{1.5} - \dot{w}|_{x=x_c, y=y_c} = 0 \end{cases} \quad (41)$$

بار وارده به ورق، متمرکز است لذا برای نشان داد تابع بار گسترده، از دلتای کرونیگر استفاده می‌نماییم؛ برای مثال، در فاز بارگذاری:

$$q(x, y) = \delta(x - x_c, y - y_c) F_c = \delta(x - x_c, y - y_c) k \alpha^{\frac{3}{2}} \quad (42)$$

برای یافتن فرم اجزای محدود معادلات حاکم، ورق را به المان‌های مستطیلی لاگرانژی با ۹ نقطه گره تجزیه می‌نماییم (شکل ۵).



شکل ۵- المان لاگرانژی نه نقطه گره‌ای مورد استفاده در پژوهش کنونی، در مختصات طبیعی

لذا، توابع شکل المان از مرتبه چهار خواهند بود [۱۴]:

$$N^T = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \\ N_7 \\ N_8 \\ N_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 - \eta) \\ \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 - \eta) \\ \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 + \eta) \\ \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 + \eta) \\ \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(\eta^2 - \eta) \\ \frac{1}{2}(\xi^2 + \xi)(1 - \eta^2) \\ \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(\eta^2 + \eta) \\ \frac{1}{2}(\xi^2 - \xi)(1 - \eta^2) \\ (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) \end{Bmatrix} \quad (43)$$

که در آن، N بردار توابع شکل و ξ و η مختصات طبیعی در راستای محورهای x و y می‌باشند. استفاده از توابع شکل مرتبه بالا، به دلیل مرتبه مشتقات معادلات حاکم (۴۱) و تأمین مناسب‌تر شرایط پیوستگی المان‌های مجاور است. ارتباط میان مختصات اولیه (x, y) و مختصات طبیعی (ξ, η) ، را می‌توان مانند رابطه تغییرات هر کمیت دیگر درون المان، بر حسب توابع شکل بیان نمود:

$$x = N(\xi, \eta)X, \quad y = N(\xi, \eta)Y \quad (44)$$

که در آن، X و Y بردارهای مختصات نقطه گره از المان اولیه (پیش از نگاشت) می‌باشند. رابطه (۴۴)، رابطه انتقال مختصات است. بر پایه تقریب کانتورویچ، می‌توان وابستگی‌های زمانی و مکانی پارامترهای مجهول معادلات حاکم را با تعریف توابع شکل، به فرم زیر جدا نمود:

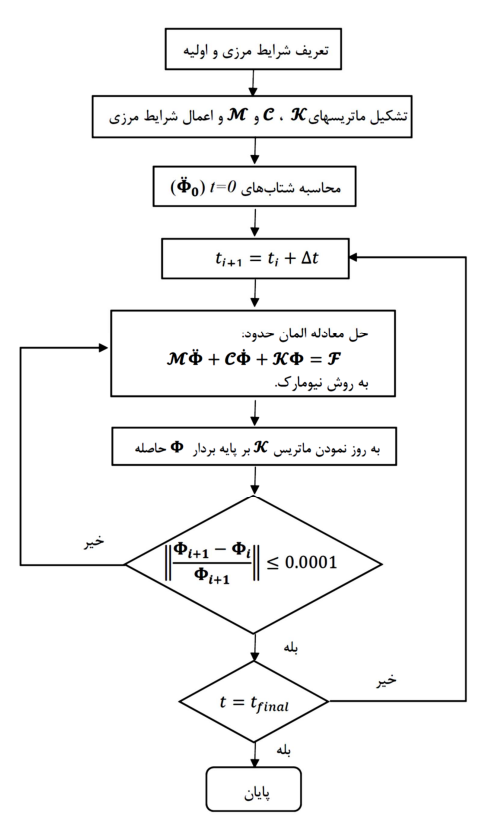
$$\begin{cases} w(x, y, t) = N_w^e(x, y) \hat{w}^e(t) \\ M_p(x, y, t) = N_{M_p}^e(x, y) \hat{M}_p^e(t) \end{cases} \quad (45)$$

که در آن، \hat{w}^e بردارهای متناظر با مقادیر کمیت‌ها در نقاط گره هستند. اگر از توابع شکل یکسان، استفاده شود، تغییرات بردار مجهولات المان بردار را می‌توان به فرم رابطه (۴۶) توصیف نمود:

¹ Green-Gauss Theorem

بردار نیرویی برای کل جسم، ترکیب می‌کنیم. لازم به ذکر است که عبارات دارای ضرایب غیر صفر برای α تنها برای المانهای دربرگیرنده نقطه گره میانی ورق معتبرند. همان‌گونه که قبلاً بیان گردید، لازم است پیش از آغاز حل، فرم اجزای محدود شرایط مرزی (۳۸) تا (۴۰) در معادلات حاکم بر جسم دخالت داده شود.

از آنجا که معادلات نهایی وابسته به زمان می‌باشند و هم چنین به دلیل استفاده از قانون تماس هرتز (آشکار شدن $\alpha^{0.5}$ در ماتریس سفتی المان) غیرخطی می‌باشند، جهت حل از شیوه تکرار پیکارد استفاده شده و در هر مرحله از حل، از اطلاعات مرحله قبل استفاده شده است. برای حل زمانی معادلات، از روش نیومارک استفاده گردید [۱۴]. با توجه به استاندارد بودن فرم روابط نیومارک، از نوشتن این روابط خودداری و به ارائه مرجع بسنده شده است. روندنمای الگوریتم حل عددی استفاده شده، در شکل ۶ نمایش داده شده است.



شکل ۶- الگوریتم حل عددی

۵- نتایج بدست آمده و بحث نتایج

در این بخش، ابتدا مثالی جهت صحت‌گذاری نتایج ارائه و سپس، به بررسی تاثیر پارامترهای مختلف بر پاسخ ضربه ورق پروالاستیک دارای تکیه‌گاه‌های، تحت ضربه مرکزی پرداخته شده است.

۵-۱- صحت‌گذاری نتایج کد کامپیوتری نوشته شده

برای اطمینان از اینکه اثر محتویات فرکانسی پاسخ با دقت خوبی در پاسخ گذرای ورق آشکار می‌گردد، گام‌های زمانی تحلیل، $10^{-5} \times 5$ ثانیه در نظر گرفته شده‌اند. تعداد المان‌ها به گونه‌ای اختیار شده است که با

$$\int_{\Omega} f_i d\Omega = \int_{\Gamma} f n_i d\Gamma \quad (55)$$

که در آن f تابع دلخواهی است. Ω بیانگر ناحیه حل و Γ بیانگر مرزهای ناحیه و n_i بردار یک‌هویه بیرون عمود بر مرز می‌باشد. از آنجا که مرتبه توابع شکل المان نسبت به هریک از مختصات، دو می‌باشد، تنها لازم است که مرتبه مشتق عبارت دارای مشتق مرتبه چهارم از انتگرال خطا را کاهش داده و مرتبه مشتق آنها را به دو برسانیم. برای این، کار ابتدا قضیه گرین-گوس را بر روی عبارت دارای مشتق مرتبه چهارم از ماتریس اعمال می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & \left(\int_A \bar{N}^T \hat{D} \hat{V}^4 \bar{N} dA \right) \mathbf{w} = \hat{D} I \int_{\Omega} \bar{N}^T (\bar{N}_{,xxxx} + 2\bar{N}_{,xxyy} \\ & \quad + \bar{N}_{,yyyy}) \mathbf{w} dA \\ & = \hat{D} I \int_{\Omega} (\bar{N}_{,xx}^T \bar{N}_{,xx} + 2\bar{N}_{,xy}^T \bar{N}_{,xy} + \bar{N}_{,yy}^T \bar{N}_{,yy}) \mathbf{w} dA \\ & \quad + \hat{D} I \int_{\Gamma} (\bar{N}^T \bar{N}_{,xxx} n_x + 2\bar{N}^T \bar{N}_{,xxy} n_x + \bar{N}^T \bar{N}_{,yyy} n_y \\ & \quad - \bar{N}_{,x}^T \bar{N}_{,xx} n_x - 2\bar{N}_{,x}^T \bar{N}_{,xy} n_y - \bar{N}_{,y}^T \bar{N}_{,yy} n_y) \mathbf{w} d\Gamma \end{aligned} \quad (56)$$

انتگرال دوم رابطه (۵۶)، حاوی شرایط مرزی طبیعی (نیرویی) مسئله می‌باشد. هر عبارت از این انتگرال که نتواند تعبیر مناسبی از شرایط مرزی پیدا کند را می‌توان به ماتریس سفتی سازه انتقال داد. از جای‌گذاری رابطه (۵۶) در رابطه (۵۴)، فرم ماتریسی اجزای محدود نهایی معادلات حاکم به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\mathbf{M}\dot{\Phi} + \mathbf{C}\Phi + \mathbf{K}\Phi = \mathbf{F} \quad (57)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \int_A \bar{N}^T \begin{bmatrix} \rho \bar{N} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\bar{N} \Big|_{x=c, y=c} & 0 & 1 \end{bmatrix} dA \\ \mathbf{C} &= \int_A \bar{N}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\lambda \hat{D} \hat{V}^2 \bar{N} & -\bar{N} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dA, \\ \mathbf{K} &= \int_A \bar{N}^T \begin{bmatrix} \hat{D} I (\bar{N}_{,xx}^T \bar{N}_{,xx} + 2\bar{N}_{,xy}^T \bar{N}_{,xy} + \bar{N}_{,yy}^T \bar{N}_{,yy}) \\ 0 \\ 0 \\ -\eta \nabla^2 \bar{N} & -k \delta^* \alpha^{0.5} \\ K \nabla^2 \bar{N} & 0 \\ 0 & \left(\frac{k}{m} \right) \alpha^{0.5} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{\Gamma} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (58)$$

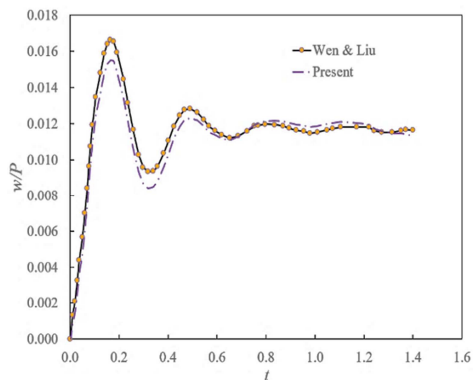
در رابطه (۵۸)، \mathbf{F}_{Γ} مربوط به عبارت انتگرال مرزی رابطه (۵۶) است. برای محاسبه ماتریس‌های المانی از روش انتگرال‌گیری عددی گوس-لژاندر بهره می‌گیریم [۱۴]:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M W_i W_j f(\xi_i, \eta_j) \quad (59)$$

که در آن، W_i و W_j توابع وزنی و (ξ_i, η_j) مختصات نقاط گوسی می‌باشند. در تحلیل کنونی، برای بالا بردن دقت نتایج انتگرال‌گیری عددی هر المان، از سه نقطه گوسی در جهت هر یک از مختصات طبیعی ξ و η بهره گرفته شده است (در مجموع، نه نقطه گوسی).

۴- الگوریتم حل معادلات غیرخطی حاصله

پس از تشکیل ماتریس‌های اینرسی، میرایی، سفتی و بردار نیروی المان برای دستیابی به ماتریس‌های اینرسی، میرایی، سفتی و



شکل ۸- نتایج پاسخ دینامیکی ورق تحت بار متمرکز پله

۵-۲- رفتار ورق پروالاستیک پایه

در این قسمت نتایج مربوط به تحلیل ضربه کم سرعت ورق پروالاستیک همسانگرد عرضی آورده شده است. ورق، مربعی و با طول ضلع ۱ متر و ضخامت ۱۲ میلیمتر اختیار شده است. ویژگی‌های هندسی و سینماتیکی ضربه‌زن فولادی به فرم زیرند:

$$\rho = 7850 \frac{kg}{m^3}, R = 7mm, m = 10gr, V = 30m/s$$

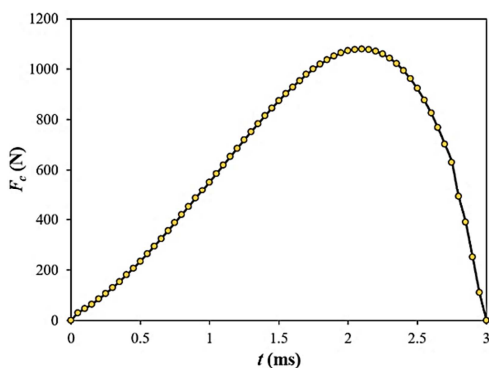
و ویژگی‌های ساختاری و نفوذ ماده پروالاستیک ورق عبارتند از:

$$\begin{aligned} \hat{B}_{13} &= 7.62 \text{ GPa}, \hat{B}_{33} = 7.62 \text{ GPa}, \hat{B}_{11} = 24.1 \text{ GPa}, \\ \hat{B}_{12} &= 6.8 \text{ GPa}, M = 15.8 \text{ GPa}, \rho_s = 2800 \text{ kg/m}^3 \\ G &= 8.66 \text{ GPa}, G_3 = 7.23 \text{ GPa}, \alpha_x = 0.733, \alpha_z = 0.749 \\ k_x &= 10^{-7}, k_z = 10^{-8} \end{aligned}$$

ویژگی‌های سیال درون حفره‌ها (آب)، به صورت زیر است:

$$\rho_f = 1000 \frac{kg}{m^3}, \mu_f = 0.89 \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$$

تاریخچه‌های نیروی تماسی، میزان فروروی، خیز و گشتاور برآیند فشار سیال درون منافذ (گشتاور ناشی از سهم سیال در تحمل گشتاور خمشی)، به ترتیب، در شکل‌های ۹ تا ۱۲ نشان داده شده‌اند.



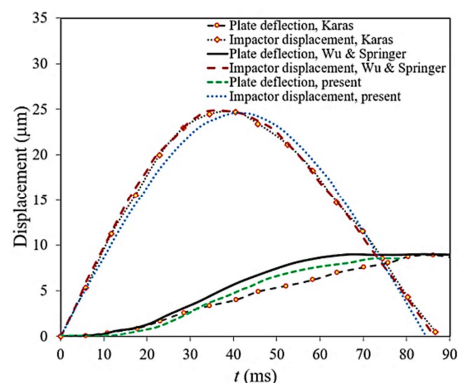
شکل ۹- تاریخچه نیروی تماسی ورق پروالاستیک

نتایج شکل ۹ آشکار می‌سازند که تاریخچه نیروی تماسی ورق، متقارن نمی‌باشد از آنجا نیروی تماسی ورق با توان ۱/۵ میزان فروروی ضربه‌زن متناسب است، نمودار تاریخچه میزان فروروی نشان داده شده در شکل ۱۰ به طور اجمالی با نمودار تاریخچه نیروی تماسی (شکل ۱۱) شباهت دارد ولی انطباق شکلی کاملی وجود ندارد. همان گونه که از مقایسه شکل‌های ۹ و ۱۱ برمی‌آید، نمودارهای خیز ورق و نیروی تماسی، غیر هم فاز هستند؛ به گونه‌ای که خیز بیشینه پس از خاتمه

افزایش آن، تغییرات حاصله ناچیز باشند. براین پایه، سرانجام یک شبکه ۲۵×۲۵ المانی برای تجزیه ورق استفاده شده است. از آنجا که پاسخ ضربه ورق پروالاستیک تاکنون بررسی نشده است، مثالی را که پیشتر توسط کراوس [۱۵] و وو و اسپرینگر [۱۶] بررسی شده، مورد آزمون مجدد قرار می‌گیرد. ورق همسانگرد و مربعی، با طول ضلع ۲۰۰ میلیمتر و ضخامت ۸ میلیمتر و ویژگی‌های مواد زیر در نظر گرفته شده است:

$$206GPa, \nu = 0.3, \rho = 7810 \frac{kg}{m^3}, R = 10mm, V = 1m/s$$

کراوس از یک روش تحلیلی مبتنی بر نظریه کلاسیک ورق استفاده نموده در حالیکه وو و اسپرینگر از روش اجزای محدود مبتنی بر استفاده از المان‌های مکعبی و قانون تماس هرترز بهره جستند. تاریخچه‌های تغییرات جابجایی ضربه‌زن و خیز ورق پیش‌بینی شده در پژوهش کنونی، در شکل ۷، با نتایج ارائه شده توسط کراوس [۱۵] و وو و اسپرینگر [۱۶] مقایسه شده‌اند. مقایسه این نتایج، هماهنگی خوبی را آشکار می‌سازد.



شکل ۷- تاریخچه‌های جابجایی ضربه‌زن و خیز ورق پیش‌بینی شده در پژوهش کنونی و نتایج کراوس [۱۵] و وو و اسپرینگر [۱۶]

برای صحت‌سنجی کد نوشته شده در ارتباط با پاسخ دینامیکی ورق، ورق مربعی پروالاستیک بررسی شده توسط ون و لیو [۱۷] مجدداً آزموده شده است. ورق یاد شده، ورق ویسکوالاستیک اشباع، با تکیه-گاه‌های ساده و مشخصات زیر است:

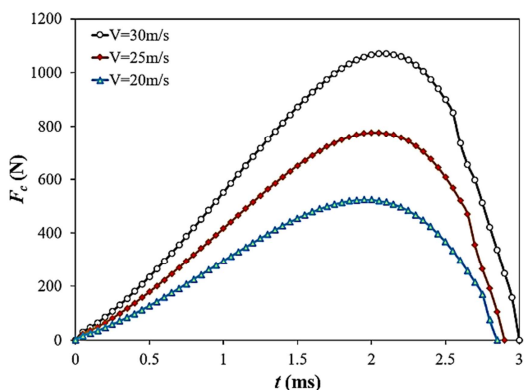
$$\begin{aligned} \frac{a}{h} &= 20, \rho_s = 2260 \frac{kg}{m^3}, \rho_f = 1000 \frac{kg}{m^3}, G = 4.2GPa, \\ \nu_s &= 0.3, k = 10^{-11}, K = 4.6GPa, K_u = 8.3GPa, \\ \mu &= 10^{-13}, \alpha = 0.95, \\ \frac{\mu h}{k\sqrt{12\rho E_s/(1-\nu_s^2)}} &= 0.5, \frac{\mu h}{kM\sqrt{12\rho(1-\nu_s^2)}/E_s} &= 0.01 \end{aligned}$$

بار عرضی، به صورت بار متمرکز در وسط ورق، با تغییرات زمانی پله و با شدت P به مرکز ورق وارد می‌آید. نتایج کنونی تاریخچه خیز ورق، در شکل ۸ با نتایج ون و لیو بر حسب زمان بی‌بعد زیر مقایسه شده‌اند:

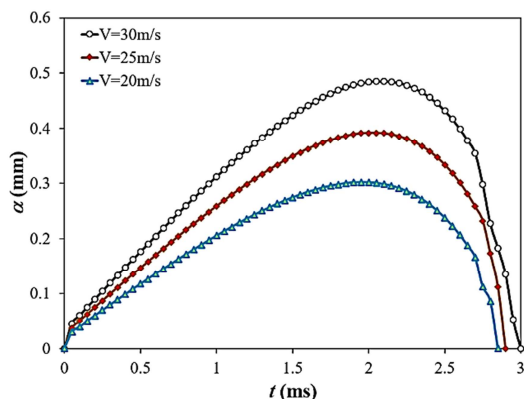
$$t = \frac{th}{a^2} \sqrt{\frac{E_s}{12(1-\nu_s^2)}}$$

همان گونه که مشاهده می‌گردد، تطابق خوبی میان نتایج برقرار است. اختلاف نتایج، ناشی از طبیعت حل عددی دو روش است. هر دو روش عددی بوده ولی متفاوتند.

پدید آمده در یک جسم دارای میرایی ساختاری را می‌توان ناشی از دو عامل صلبیت و میرایی ساختاری جسم دانست. در بخش کنونی، مساله ارائه شده در بخش قبل، برای سرعت‌های اولیه $V = 10 \frac{m}{s}, 20 \frac{m}{s}, 30 \frac{m}{s}$ ، بدون تغییر سایر پارامترها، حل گردیده و تاریخچه‌های نیروی تماسی، میزان فروروی، خیز و گشتاور برآیند فشار سیال درون منافذ، به ترتیب، در شکل‌های ۱۳ تا ۱۶ نشان داده شده‌اند.



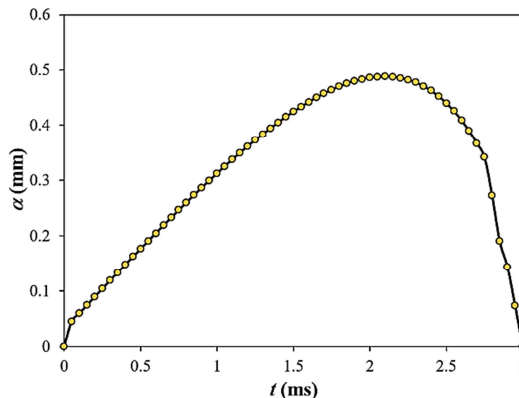
شکل ۱۳- تأثیر سرعت اولیه ضربه‌زن بر تاریخچه نیروی تماس ورق پروالاستیک



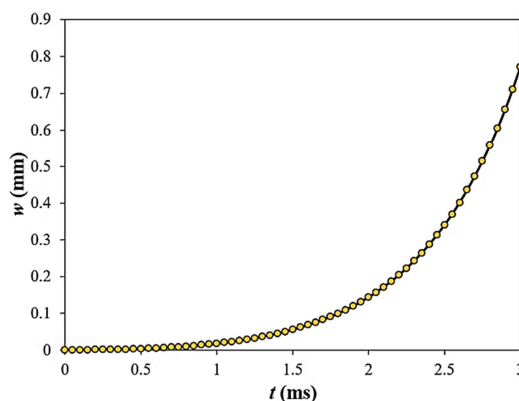
شکل ۱۴- تأثیر سرعت اولیه ضربه‌زن بر تاریخچه میزان فروروی ضربه-زن در ورق پروالاستیک

از مقایسه نتایج شکل ۱۳، می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش سرعت اولیه ضربه‌زن، گرادین تغییرات نیروی تماسی در فاز باربرداری تغییر چشم‌گیری می‌نماید. با افزایش سرعت ضربه‌زن، زمان تماس نیز اندکی افزایش یافته است. در ورق‌های با مواد غیر پروالاستیک، عکس این پدیده مشاهده می‌شود [۱۸]. به بیان دیگر، در ورق‌های عادی، با افزایش سرعت ضربه‌زن، ورق زودتر انرژی و خیز لازم برای پرتاب ضربه‌زن را بدست می‌آورد. اثرات مشابهی در شکل ۱۴ مشاهده می‌شوند. همان‌گونه که شکل ۱۵ نشان می‌دهد، به دلیل میرایی سازه‌ای، خیز بیشینه ورق در سرعت‌های اولیه بزرگتر ضربه‌زن، زمان بیشتری برای رسیدن به مقدار بیشینه نیاز دارد ولی طبیعتاً مقدار خیز بیشینه پدید آمده بزرگتر خواهد بود. با توجه به اینکه خیز ورق، مستقیماً با گشتاورهای خمشی مقاطع آن ارتباط دارد، تاریخچه تغییرات گشتاور خمشی ناشی از سیال درون منافذ (شکل ۱۶)، در مقطع میانی ورق،

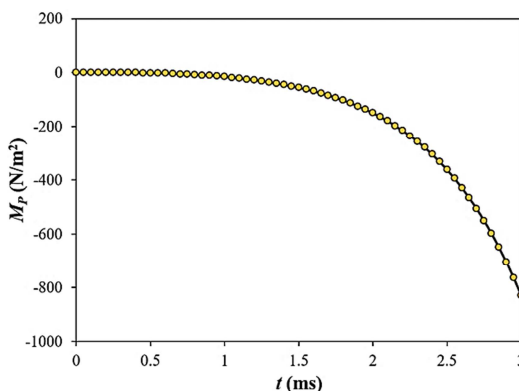
تماس و نه در زمان خیز بیشینه، روی داده است. اثر میراسازی سیال درون حفره‌ها در نتایج کنونی منعکس است. از مقایسه شکل‌های ۹ تا ۱۲ پدیده است که به دلیل تغییرات سرعت زیاد در فاز باربرداری، نیروها و در نتیجه، گشتاور برآیند فشارهای سیال (شکل ۱۲)، افزایش یافته و باعث تغییرات چشم‌گیر نیروی تماس، میزان فروروی و خیز شده است.



شکل ۱۰- تاریخچه میزان فروروی ضربه‌زن در ورق پروالاستیک



شکل ۱۱- تاریخچه خیز نقطه میانی ورق

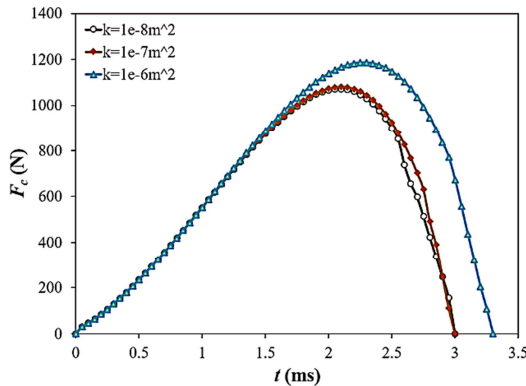


شکل ۱۲- تاریخچه گشتاور ناشی از فشار سیال درون منافذ ورق پروالاستیک

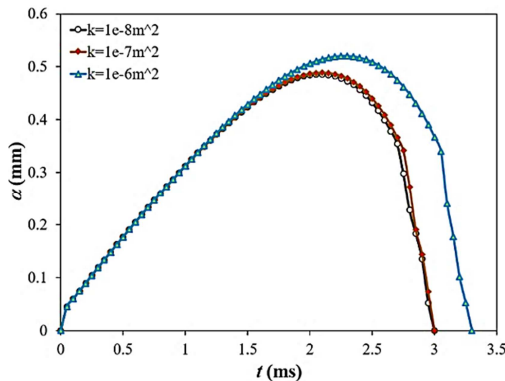
۵-۳- اثر سرعت اولیه ضربه‌زن بر رفتار ضربه ورق

در این قسمت به بررسی تأثیر سرعت اولیه ضربه‌زن، بر میزان خیز، نفوذ، نیروی تماس و گشتاور فشار منافذ می‌پردازیم. تنش‌های

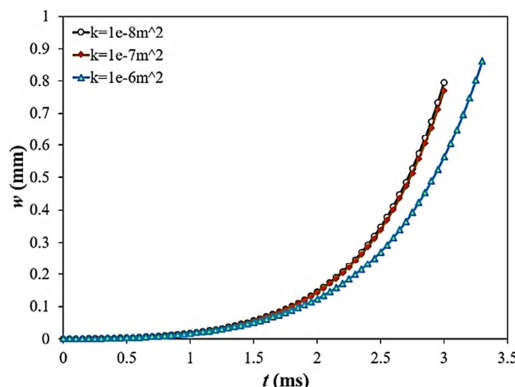
$10^{-6}m^2, 10^{-7}m^2, 10^{-8}m^2$ بدون تغییر سایر پارامترها، بدست آمده است. حالت $k = 10^{-8}m^2$ به گونه‌ای، رفتار ورق با سیال محبوس را تداعی می‌نماید.



شکل ۱۷- اثر ضریب نفوذپذیری سیال بر تاریخچه نیروی تماس ورق پروالاستیک



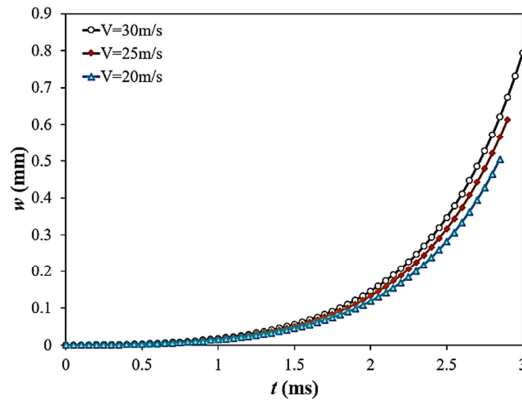
شکل ۱۸- اثر ضریب نفوذپذیری سیال بر تاریخچه میزان فروروی ضربه‌زن در ورق پروالاستیک



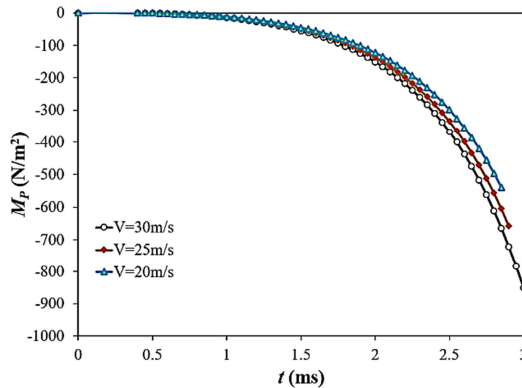
شکل ۱۹- اثر ضریب نفوذپذیری سیال بر تاریخچه خیز نقطه میانی ورق پروالاستیک

همان‌گونه که شکل‌های ۱۷ و ۱۸ نشان می‌دهند، در اثر تراوش سیال از لبه‌های ورق، به دلیل ضربه، سفتی ورق به دلیل خروج سیال تراکم‌ناپذیر و پوک شدن ورق، کاهش یافته و در نتیجه، با افزایش

بسیار شبیه به تاریخچه خیز می‌باشد (بدون احتساب علامت). اثر سرعت اولیه ضربه‌زن بر مقادیر بیشینه نیروی تماسی، فروروی، خیز نقطه میانی ورق و گشتاور خمشی ناشی از سیال درون منافذ ورق را می‌توان در جدول ۱، به طور عددی بررسی نمود.



شکل ۱۵- تأثیر سرعت اولیه ضربه‌زن بر تاریخچه خیز نقطه میانی ورق پروالاستیک



شکل ۱۶- تأثیر سرعت اولیه ضربه‌زن بر تاریخچه گشتاور خمشی ناشی از سیال درون منافذ

جدول ۱- اثر سرعت اولیه ضربه‌زن بر مقادیر بیشینه نیروی تماسی، فروروی، خیز نقطه میانی و گشتاور خمشی ناشی از سیال درون منافذ

$V(m/s)$	خیز بیشینه نقطه میانی (mm)	نیروی تماس بیشینه (N)	مقدار نفوذ بیشینه (m)	M_p بیشینه (N/m^2)
۳۰	۰/۷۹۴	۱۰۷۰/۷	۰/۴۸۵	۸۵۱/۷۴
۲۵	۰/۶۱۴	۷۷۷/۰	۰/۳۹۲	۶۵۷/۴۸
۲۰	۰/۵۰۳	۵۲۴/۵	۰/۳۰۱	۵۳۹/۴۴

۴-۵- اثر میزان نفوذپذیری بر رفتار ضربه ورق

اثر تراکم‌ناپذیری سیال بر افزایش سفتی ورق را می‌توان در این بخش مشاهده نمود. در این بخش، تأثیر میزان ضریب نفوذپذیری (k)، که با ضریب β که بیانگر تغییرات حجم سیال درون منافذ است، در ارتباط است، بر میزان نیروی تماس، فروروی و خیز به ترتیب، در شکل‌های ۱۷ تا ۱۹ نمایش داده شده‌اند. در این راستا، رفتار ورق معرفی شده در بخشهای گذشته برای مقادیر نفوذپذیری

۷- مراجع

[1] Vafai K., *Handbook of porous media*, Marcel Dekker Inc., United States, New York, 2000.

[2] Biot M., Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media, *Journal of Acoustic Society*, Vol. 34, pp. 1254-1264, 1962.

[3] Selvadurai A.P.S., *Mechanics of poroelastic media*, Springer Science, Dordrecht, 1996.

[4] Coussy O., *Mechanics and physics of porous solids*. John Wiley & Sons, Ltd, United Kingdom, Chichester, 2010.

[5] Taber, L.A., A theory for transverse deflection of poroelastic plate, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 10, pp. 628-634, 1992.

[6] Theodorakopoulos D.D., Beskos D.E. Flexural vibration of poroelastic plates, *Acta Mechanica*, Vol.103, pp. 191-203, 1994.

[7] Leclair P., Horoshenkov K.V., Swift M.J., Hothersall D.C., The vibrational response of a clamped rectangular porous plate, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.247, pp. 19-31, 2001.

[8] Schanz M., Busse A., Acoustic behavior of a poroelastic Mindlin plate, *17th ASCE Engineering Mechanics Conference*, University of Delaware, Newark, 2004

[9] Cederbaum G., Li L.P., Schulgasser, K., *Poroelastic structures*, Elsevier Science, UK, Oxford, 2000.

[10] Swan C.C., Lakes R.S., Brand R.A., Stewart K.J., Micromechanically based poroelastic modeling of fluid flow in Haversian bone, *Journal of Biomechanical Engineering*, Vol. 125, pp. 25-37, 2003.

[11] Biot M., Willis D.G., The elastic coefficient of the theory of consolidation, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 24, pp. 594-601, 1957.

[12] Behravan Rad A., Shariyat M. Three-dimensional magneto-elastic analysis of asymmetric variable thickness porous FGM circular plates with non-uniform tractions and Kerr elastic foundations, *Composite Structures*, Vol. 125, pp. 558-574, 2015.

[13] Shariyat M., Niknami A., Layerwise numerical and experimental impact analysis of temperature-dependent transversely flexible composite plates with embedded SMA wires in thermal environments, *Composite Structures*, Vol. 153, pp. 692-703, 2016.

[14] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z., *The Finite Element Method: Its basis and fundamental*, 6th Edition, Elsevier, 2005.

[15] Karas K., Platten unter seitlichem stoss, *Ingenieur Arch.*, Vol. 10, pp. 237-250, 1939.

[16] Wu H.-Y.T., Springer G.S., Impact induced stresses, strains and delaminations in composite plates, *Journal of Composite Materials*, Vol. 22, pp. 533-560, 1988.

[17] Wen P.H., Liu Y.W., The fundamental solution of poroelastic plate saturated by fluid and its applications, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 34, pp. 689-709, 2010.

[18] Shariyat M., Farzan F., Nonlinear eccentric low-velocity impact analysis of a highly prestressed FGM rectangular plate, using a refined contact law, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 83, pp. 623-641, 2013.

ضرب نفوذپذیری، میزان نیروی وارده به ورق و میزان فروروی ضربه‌زن افزایش می‌یابد. همچنین، به دلیل نرم شدن ورق و کاهش نیروی مقاوم ناشی از میرایی سازه‌ای، زمان ضربه افزایش می‌یابد. شکل ۱۹، افزایش خیز را با افزایش ضریب نفوذپذیری نشان می‌دهد که با نتیجه قبلی هماهنگ است. اثر ضریب نفوذپذیری سیال بر مقادیر بیشینه نیروی تماسی، فروروی، خیز و فشار ناشی از سیال درون منافذ را می‌توان در جدول ۲، به طور عددی بررسی نمود.

جدول ۲- اثر ضریب نفوذپذیری سیال بر مقادیر بیشینه نیروی تماسی، فروروی، خیز نقطه میانی و گشتاور خمشی ناشی از سیال درون منافذ

M_p بیشینه (N/m ²)	مقدار نفوذ بیشینه (m)	نیروی تماس بیشینه (N)	خیز بیشینه نقطه میانی (mm)	ضریب نفوذپذیری (m ²)
۸۵۱/۷۴	۰/۰۰۴۸۵	۱۰۷۰/۷	۰/۰۰۷۹۴	۸E-۱۰
۸۷۵/۳۵	۰/۰۰۴۸۸	۱۰۷۹/۸	۰/۰۰۸۱۱	۷E-۱۰
۸۹۰/۰۷	۰/۰۰۵۲۰	۱۱۵۸/۹	۰/۰۰۸۶۱	۶E-۱۰

۶- نتیجه‌گیری

در پژوهش کنونی، پاسخ ضربه کم سرعت ورق پروالاستیک به روش اجزای محدود غیرخطی مورد بررسی قرار گرفته است. روابط تماس فازهای بارگذاری و باربرداری متفاوت اختیار شده و بر خلاف اغلب پژوهش‌های موجود در زمینه تحلیل ضربه ورق‌ها و پوسته‌ها، خطی‌سازی نشده‌اند. تحلیل یاد شده، برای اولین بار در سطح بین المللی صورت پذیرفته‌است. نتایج برای ورق همسانگرد عرضی ارایه شده و بیانگر این موضوع می‌باشند که دلیل وجود سیال لزج و امکان حرکت آن درون حفره‌ها، مقداری زیادی از انرژی ضربه، توسط سیال جذب شده و میرا می‌گردد.

نتایج نشان می‌دهند که بر خلاف ورق‌های همسانگرد فلزی یا کامپوزیتی عادی، در ورق‌های پروالاستیک، زمان تماس با افزایش سرعت ضربه‌زن، اندکی افزایش می‌یابد. همچنین، هر چه میزان سرعت اولیه ضربه‌زن افزون‌تر می‌شود، نیروی تماس، میزان فروروی ضربه‌زن، خیز نقطه وسط ورق و گشتاور خمشی ناشی از سیال درون منافذ، افزایش می‌یابد. نتایج آشکار می‌سازند که در محدود تغییرات مشخص شده برای ضریب نفوذپذیری، هر چه میزان میزان نفوذپذیری ماده پروالاستیک افزایش می‌یابد، نیروی تماس، میزان فروروی ضربه‌زن، خیز نقطه وسط ورق و گشتاور خمشی ناشی از سیال درون منافذ افزایش می‌یابد. علت این امر، میرایی بیشتر انرژی در اثر حرکت سریع‌تر سیال و نرم شدن ناحیه میانی ضخامت با افزایش نفوذپذیری می‌باشد که سبب نرم تر شدن ساختار و افزایش خمش ورق و در نتیجه، وارد آمدن گشتاور بزرگتر به سیال درون حفره‌ها می‌شود. عددهای اختیار شده برای ضریب نفوذپذیری، کوچک ولی واقعی می‌باشند و اگر سیال بتواند به سادگی از ورق تخلیه شود، عکس این فرایند قابل مشاهده خواهد بود. تقریباً در تمامی موارد واقعی، مقدار نفوذپذیری سیال ناچیز است.