

## تحلیل ترموالاستیک کوپل استوانه جدار ضخیم دارای ترک محیطی کامل با در نظر گرفتن نظریه‌های گرین-لیندزی و گرین-نقدی نوع II

ادریس فرهی‌نژاد

علی نوری\*

عنایت ا... حسینیان

کارشناس ارشد، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، تهران، ایران

استادیار، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، تهران، ایران

استادیار، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، تهران، ایران

### چکیده

در این مقاله، ضریب شدت تنش مود I ترک محیطی در یک استوانه همسانگرد، تعیین شده است. استوانه جدار ضخیم تحت شوک گرمایی یک‌بعدی طبق نظریه‌های کلاسیک ترموالاستیسیته، گرین-لیندزی و گرین-نقدی قرار دارد. فرم متحد معادلات حاکم، شامل نظریه کلاسیک و نظریه‌های تعمیم‌یافته گرین-لیندزی و گرین-نقدی می‌باشد. معادلات انرژی و تعادل در استوانه به صورت همزمان با در نظر گرفتن اثر کوپل میدان‌های دما و کرنش و نیز اثر جمله اینرسی در معادلات حاکم حل شده است. ضریب شدت تنش نوک ترک محیطی با استفاده از روش تابع وزنی تعیین می‌شود. در نظر گرفتن زمان‌های آسایش در معادلات حاکم نظریه‌های تعمیم‌یافته، موجب پیش‌بینی مقادیر بزرگتر دما و تنش نسبت نظریه کلاسیک می‌شود. همچنین، ضریب شدت تنش نظریه‌های تعمیم‌یافته به طور قابل ملاحظه‌ای از نظریه کلاسیک بزرگتر است. در هر لحظه ضریب شدت تنش بیشینه نظریه‌های تعمیم‌یافته، برای ترکی اتفاق می‌افتد که نوک آن در موقعیت پیشانی موج تنش قرار دارد. نظریه گرین-نقدی نوع II به دلیل در نظر نگرفتن استهلاک در معادلات حاکم خود، مقدار بیشینه تنش و ضریب شدت تنش بزرگتری نسبت به نظریه گرین-لیندزی دارد.

واژه‌های کلیدی: نظریه گرین-نقدی، نظریه گرین-لیندزی، روش تابع وزنی، شوک گرمایی، ترک محیطی در استوانه.

## The Coupled thermoelasticity analysis of circumferentially cracked thick-walled cylinder considering Green-Lindsay and Green-Naghdi type II

E. Farahinejad

Department of Aerospace Eng., Shahid Sattari Aeronautical University of Science and Technology, Tehran, Iran

A. Nouri

Department of Aerospace Eng., Shahid Sattari Aeronautical University of Science and Technology, Tehran, Iran

E. Hossiniean

Department of Aerospace Eng., Shahid Sattari Aeronautical University of Science and Technology, Tehran, Iran

### Abstract

In this paper, the stress intensity factor for circumferential crack in an isotropic cylinder has been determined. The thick-walled cylinder is subjected to a one-dimensional axisymmetric thermal shock on the outer surface according to the classic thermoelasticity (CTE), Green-Lindsay (G-L) and Green-Naghdi (G-N) theories. The considered unified form of governing equations involves CTE, G-L and G-N theories. The effects of temperature-strain coupling and the inertia term in governing equations are considered. The circumferential crack stress intensity factor determinates using weight function method. Considering relaxation times in generalized theories governing equations result in predicting higher temperature and stress values in comparison with CTE. Also, generalized theories stress intensity factor is higher than CTE significantly. Moreover, the maximum stress intensity factor in generalized theories occurs for a crack that the peak of stress wave reaches to its tip. Because of neglecting energy dissipation in G-N type II governing equations, its maximum of stress and stress intensity factor is higher than G-L theory.

**Keywords:** Green-Naghdi Theory, Green-Lindsay, Weight Function Method, Thermal Shock, Circumferential Crack in Cylinder.

دماهای پایین نزدیک به صفر مطلق نتایج قابل قبولی ندارد [۳].

نظریه‌های تعمیم‌یافته (هذلولوی) ترموالاستیسیته که برای رفع مشکل بی‌نهایت شدن سرعت انتشار گرما در قانون فوریه و نظریه کلاسیک ارائه شده‌اند، سرعت محدود موج گرما (اثر صوت ثانویه) را تأیید می‌کنند. در نظریه گرین-لیندزی، رابطه ساختاری جدیدی برای تنش و آنتروپی ارائه شده است، به طوری که نرخ دما به معادلات ساختاری تنش و آنتروپی اضافه شده است [۴]. نظریه هذلولوی گرین-نقدی توسط گرین و نقدی در سه مدل مختلف ارائه شده است [۵]. نظریه گرین-نقدی نوع II، انتشار گرما در جسم با سرعت بی‌نهایت را نشان می‌دهد و نتایج آن بر نظریه کلاسیک منطبق است. نظریه گرین-نقدی نوع II، ترموالاستیسیته بدون اتلاف انرژی نام دارد که در آن از قانون فوریه به همراه رابطه گرادیان جابه‌جایی شار-دما استفاده شده است. این مدل منجر به معادله رسانش گرما، بدون جمله نرخ دمایی می‌شود که در نتیجه موج ترموالاستیک حاصل از این نظریه نامیرا می‌شود. نظریه

### ۱- مقدمه

تنش‌ها و تغییرشکل‌های گرمایی در مواردی چون مخازن تحت فشار، راکتورهای هسته‌ای، لوله‌های تفنگ و توپ، موتورهای احتراق داخلی، نازل موشک‌ها، موتورهای جت و قالب‌های تولید قطعات در فرایندهای سردکاری و گرم کاری اهمیت دارد. نظریه کلاسیک ترموالاستیسیته که توسط دوهمال [۱] ارائه شده از نظریه‌های قدیمی است که از آن برای محاسبه نتایج تحلیل‌های گرمایی مثل میدان‌های دما و تنش‌های گرمایی استفاده می‌شود. در معادلات نظریه کلاسیک، معادله انرژی بر اساس رابطه ساختاری قانون فوریه و معادله تعادل کوپل می‌باشند. از آنجا که معادله انرژی این نظریه سهموی است، سرعت انتشار امواج گرما را بی‌نهایت پیش‌بینی می‌کند که از نظر فیزیکی قابل قبول نیست [۲]. این نظریه زمانی که طول مشخصه محیط، در مقابل میانگین مسیر انتقال انرژی قابل صرف نظر نباشد یا در

\* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: anouri@ssau.ac.ir

قاجار [۲۱]، با استفاده از روش المان محدود، ضرایب تابع وزنی ترک محیطی را برای محدوده وسیعی از نسبت شعاع‌های خارجی به داخلی در استوانه‌های جدار ضخیم تعیین کردند و با استفاده از آن ضریب شدت تنش گرمایی برای بارگذاری حرارتی پایا را به دست آوردند. آنها از روش اجزاء محدود جهت تعیین توابع وزنی ترک و حل بسته ای را برای تعیین ضرایب شدت تنش گرمایی ارائه نمودند. آنها همچنین ضرایب تابع وزنی پیشنهادهی گلینکا و شن را برای یک نسبت شعاع خارجی به داخلی خاص، به صورت توابع متعالی از ابعاد هندسی ارائه کردند [۲۲]. عاصمی و نظری [۲۳]، ضریب شدت تنش نوک ترک محیطی در سطح داخلی استوانه تحت بارگذاری گرمایی طبق نظریه هذلولوی را با استفاده از روش تابع وزنی محاسبه کردند. فرهی نژاد و همکاران [۲۴]، ضریب شدت تنش نوک ترک محیطی در سطح داخلی استوانه تحت بارگذاری گرمایی طبق نظریه تأخیر فاز دوگانه را با استفاده از روش تابع وزنی محاسبه نمودند.

در زمینه تعیین ضریب شدت تنش در استوانه‌های دارای ترک محیطی، پژوهش‌های محدودی انجام شده که در آنها از مدل‌های رسانش گرمای غیرکویل استفاده شده است که اثر جمله اینرسی و کوپل میدان‌های کرنش-دما در معادلات حاکم آنها لحاظ نشده است. برخی از تحقیقات نیز با استفاده از روش‌های عددی انجام شده‌اند که با تغییر هندسه، شرایط مرزی و بارگذاری باید تحلیل ضریب شدت تنش تکرار شود؛ اما در روش تابع وزنی به علت تفکیک اثر بارگذاری و هندسه بر ضریب شدت تنش، با تغییر بارگذاری و شرایط مرزی نیازی به انجام تحلیل مجدد نیست.

در مقاله حاضر، رفتار ترموالاستیک یک استوانه جدار ضخیم بلند شامل ترک محیطی کامل در سطح داخلی استوانه جدار ضخیم با استفاده از روش تابع وزنی طبق نظریه‌های کوپل گرین-لیندزی و گرین-نقدی نوع II مورد بررسی قرار گرفته است. میدان‌های دما و تنش محوری به‌صورت تحلیلی در فضای لاپلاس حل شده و نتایج با استفاده از روش‌های عددی به فضای زمان نگاشت شده است. اثر جمله اینرسی و کوپل میدان‌های کرنش-دما نیز در معادلات حاکم در نظر گرفته شده است.

## ۲- میدان دما

استوانه توخالی به‌اندازه کافی بلند مطابق شکل ۱، به شعاع داخلی  $r_i$  و خارجی  $r_o$  در دمای اولیه  $T_0$  و شرایط مرزی گرمایی متقارن محوری قرار دارد. روابط ساختاری بر اساس نظریه‌های کلاسیک، گرین-لیندزی و گرین-نقدی به صورت روابط (۱) قابل بیان هستند [۲۵].

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \sigma + \rho b &= \rho \ddot{u} \\ E &= \frac{1}{2} (\nabla u + (\nabla u)^T) \\ \sigma &= CE - \beta (T - T_0 + t_1 \dot{T}) \\ \nabla \cdot q &= R_s - T_0 \dot{S} \\ S &= \left( \frac{\rho C}{T_0} \right) (T + t_2 \dot{T} - T_0) + \beta \cdot E - \frac{1}{T_0} \dot{C} \cdot \nabla T \\ q + \eta \dot{q} + t_3 \dot{q} &= -\eta K \nabla T - t_3 K \nabla \dot{T} - t_3 K^* \nabla T - \dot{C} \dot{T} \end{aligned} \quad (1)$$

در معادله بالا، به ترتیب، رابطه اول معادله حرکت، دوم رابطه کرنش-جابه‌جایی خطی، سوم قانون هوک در مواد ترموالاستیک خطی، چهارم معادله تعادل انرژی، پنجم رابطه آنتروپی و آخری رابطه رسانش گرما

گرین-نقدی نوع III مشابه نظریه نوع II بوده ولی با این تفاوت که در این نظریه، ترموالاستیسیته با اتلاف انرژی همراه بوده و موج ترموالاستیک ناشی از آن میرا شونده است. در نظریه لرد-شولمان معادله ساختاری رسانش گرما قانون فوریه با اضافه شدن زمان آسایش شار گرمایی اصلاح شده است [۶]. شریف و انور در نظر گرفتن نظریه لرد-شولمان و با استفاده از روش‌های تبدیل لاپلاس و تابع پتانسیل جابه‌جایی، میدان‌های دما، جابه‌جایی و تنش‌های گرمایی در استوانه بلند توخالی تک لایه [۷] و دولایه [۸] را با استفاده از نظریه ترموالاستیسیته تعمیم یافته با یک زمان آسایش مورد مطالعه قرار دادند. فو و همکاران [۹]، رفتار ترموالاستیک کویل استوانه چندلایه مدرج تابعی تحت بارگذاری عمومی مکانیکی و گرمایی را با استفاده از روش تبدیل لاپلاس مورد بررسی قرار دادند. آنها از نظریه ترموالاستیسیته تعمیم یافته و مدل رسانش سهموی دو گانه برای توصیف طبیعت گرمایی بی نهایت و سرعت موج الاستیک استفاده نمودند. قاسمی و مرادی اثر بار حرارتی سکیلی روی کاهش خواص مکانیکی کامپوزیت‌های ماتریس پلیمری سوراخدار را به صورت تجربی مورد بررسی قرار دادند. آنها نشان دادند که تغییرات خواص کششی نمونه‌های با سوراخ ریز بیشتر از نمونه‌های با سوراخ درشت می‌باشد [۱۰]. آنها همچنین با استفاده از روش تاگوچی، اثر پارامترهای اختلاف دما، چیدمان لایه‌ها، نسبت حجمی الیاف و چرخه‌های گرمایی را بر رفتار کامپوزیت‌های تحت بارگذاری چرخه‌ای گرمایی مورد مطالعه قرار دادند [۱۱]. چن [۱۲]، ضریب شدت تنش در یک استوانه شامل ترک محیطی با استفاده از روش تفاضل محدود را مورد مطالعه قرار داد. وی همچنین اثر طول استوانه بر میزان ضریب شده تنش ترک را مورد بررسی قرار داد. اردوغان و راتوانی [۱۳]، یک غشای استوانه‌ای شامل ترک محیطی تحت کشش محوری را در نظر گرفتند. ایشان مؤلفه‌های خمشی و غشایی ضریب شدت تنش برای توزیع تنش یکنواخت دور از ترک را بیان کردند. آنها نشان دادند که، رشد ترک خستگی استوانه را می‌توان با استفاده از مدل‌های ورق تخت با جنس و ضخامت یکسان پیش‌بینی نمود. ایردل و اردوغان [۱۴]، ضریب شدت تنش برای بار محوری یکنواخت و تنش‌های گرمایی حالت پایا را برای استوانه بلند جدار ضخیم شامل ترک حلقه‌ای داخلی یا ترک لبه‌ای را با استفاده از تکنیک تبدیل استاندارد بصورت معادله انتگرالی که دارای یک کرنل ساده برای ترک داخلی و یک کرنل کوشی تعمیم یافته برای ترک لبه‌ای بود، محاسبه نمودند. نید و اردوغان [۱۵]، مسئله تنش‌های گرمایی گذرا در استوانه توخالی الاستیک شامل ترک محیطی در سطح داخلی تحت شرایط متقارن محوری با صرف‌نظر از اثر اینرسی را در نظر گرفتند. فو و همکاران، ضریب شدت تنش ترک داخلی یا لبه‌ای در استوانه توپر [۱۶] و توخالی [۱۷] را با استفاده از حل معادله انتگرالی تکین و در نظر گرفتن معادله رسانش گرما هذلولوی ارائه کرده‌اند. مشی و واتانابی [۱۸]، ضریب شدت تنش گذرای ترک محیطی متقارن محوری در استوانه کوتاه جدار نازک تحت سرمایه‌ی یکنواخت در سطح داخلی را مورد بررسی قرار دادند. آنها همچنین ضریب شدت تنش را در استوانه ای تحت بار خمشی متقارن محوری محاسبه نمودند [۱۹]. وارفلومیف و بوش [۲۰]، ضریب شدت تنش مود I ترک محیطی کامل در سطح داخلی یک استوانه توخالی تحت بارگذاری متقارن محوری با استفاده از روش تابع وزنی و روش المان مرزی محاسبه نمودند. نبوی و

متغیرهای بدون بعد زیر جهت سادگی تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \frac{r}{l}, & t' &= \frac{v}{l}t, & \bar{u} &= \frac{\lambda + 2\mu}{l\beta T_d} \\ \bar{t}_0 &= \frac{v}{l}t_0, & \bar{t}_1 &= \frac{v}{l}t_1, & \bar{t}_2 &= \frac{v}{l}t_2 \\ \bar{t}_3 &= \frac{v}{l}t_3, & \bar{T} &= \frac{T - T_0}{T_d}, & \bar{\sigma} &= \frac{\sigma}{\beta T_d} \\ \bar{q} &= \frac{q}{\rho c v T_d}, & \bar{R}_s &= \frac{l R_s}{\rho c v T_d}, & \bar{b} &= \frac{\beta l T_d}{(\lambda + 2\mu)v^2} b \end{aligned} \quad (4)$$

که در روابط فوق،  $l$  طول مشخصه،  $v$  سرعت مشخصه و  $T_0$  دمای مشخصه است. جهت سادگی علامت بار از روی متغیرها برداشته می‌شود. روابط (۲) و (۳) برحسب پارامترهای بدون بعد به صورت زیر بیان می‌شوند.

$$\begin{aligned} t_3 \left( c_T^2 \nabla^2 T + c_K^2 \nabla^2 \dot{T} \right) + \eta \frac{c_K^2}{t_0} \int_0^t \exp\left(-\frac{\tau - \bar{t}}{t_0}\right) (\nabla^2 T) d\bar{t} - \\ \eta \dot{T} (t_2 + t_3) \bar{T} - \varepsilon [t_3 \nabla \cdot \bar{u} + \eta \nabla \cdot \bar{u}] + \eta R_s + t_3 \dot{R}_s = 0 \\ c_T^2 \nabla^2 \bar{u} + (c_T^2 - c_K^2) \nabla (\nabla \cdot \bar{u}) - c_T^2 (\nabla T + t_1 \nabla \dot{T}) + \bar{b} = \bar{u} \\ \eta q + t_3 \dot{q} = -\eta c_K^2 \nabla T - t_3 c_K^2 \nabla \dot{T} - t_3 c_T^2 \nabla T \end{aligned} \quad (5)$$

که

$$\begin{aligned} c_T^2 &= \frac{\lambda + 2\mu}{\rho v^2}, & c_K^2 &= \frac{\mu}{\rho v^2}, & c_T^* &= \frac{\kappa}{\rho c v^2} \\ c_K^2 &= \frac{k}{\rho c l v}, & \varepsilon &= \frac{\beta^2 T_0}{\rho c (\lambda + 2\mu)} \end{aligned} \quad (6)$$

$c_T$  سرعت اتساع الاستیک بدون بعد،  $c_K$  سرعت موج برشی بدون بعد،  $c_T$  سرعت انتشار موج گرما،  $c_K$  ضریب میرایی مدل گرین-نقدی و پارامتر ترموالاستیک کوپل است. روابط (۵) در مختصات استوانه‌ای و در شرایط متقارن محوری به صورت روابط (۷) بیان می‌شوند.

$$\begin{aligned} t_3 c_T^2 \left[ \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\partial^2}{\partial R^2} \right] T + t_3 c_K^2 \left[ \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right] \dot{T} - (t_2 + t_3) \dot{T} + \\ \eta \frac{c_K^2}{t_0} \int_0^t \exp\left(-\frac{\tau - \bar{t}}{t_0}\right) \left[ \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right] T d\bar{t} - \eta \dot{T} + \eta R_s + \\ t_3 R_s - \varepsilon \left[ t_3 \left( \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R} \right) \bar{u} + \eta \left( \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R} \right) \dot{\bar{u}} \right] = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

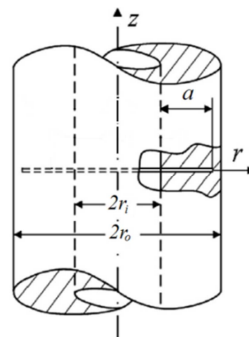
که در آن،  $u$  مؤلفه شعاعی جابه‌جایی،  $b_r$  مؤلفه شعاعی نیروی حجمی و  $q_r$  مؤلفه شعاعی شار گرمایی است. شرایط اولیه دما، جابه‌جایی و شار گرمایی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند.

$$\begin{aligned} u(R, 0) = 0, \quad \dot{u}(R, 0) = 0, \quad T(R, 0) = 0 \\ \dot{T}(R, 0) = 0, \quad q(R, 0) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

روابط (۷) در فضای لاپلاس با توجه به شرایط اولیه، منجر به معادلات دیفرانسیل معمولی برحسب متغیر مکان می‌شوند.

$$\begin{aligned} \left( t_3 c_T^2 + s t_3 c_K^2 \right) \left[ \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right] T' + \eta \frac{c_K^2}{t_0 s + 1} \left[ \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right] T' \\ + (\eta + t_3 s) R_s - (t_2 + t_3) s^2 T' - \eta s T' - \\ \varepsilon \left[ t_3 s^2 + \eta s \right] \times \left( \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R} \right) u' = 0 \\ c_T^2 \frac{\partial}{\partial R} \left[ \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R} \right] u' - c_T^2 (1 + t_1 s) \frac{\partial T'}{\partial R} + b_r = s^2 u' \\ (\eta + \eta_0 s + t_3 s) q_r' = -(\eta c_K^2 + t_3 c_T^2 + s t_3 c_K^2) \frac{\partial T'}{\partial R} \end{aligned} \quad (9)$$

است. در روابط فوق  $\rho$  چگالی جرمی،  $\sigma$  تانسور تنش کوشی،  $u$  بردار جابه‌جایی،  $b$  بردار نیروی حجمی در واحد جرم،  $q$  بردار شار گرمایی،  $T_0$  دمای مرجع،  $T$  دمای مطلق،  $S$  آنترپی در واحد حجم،  $R_s$  تولید گرمای داخلی در واحد حجم و زمان،  $E$  تانسور کرنش،  $\beta$  تانسور مرتبه دوم مدول تنش-دما و  $K$  تانسور مرتبه دوم رسانایی گرمایی است.  $C$  تانسور مرتبه چهارم مدول الاستیک،  $c$  گرمای ویژه،  $t_1$  و  $t_2$  زمان‌های آسایش،  $\bar{C}$  بردار خواص جدید مواد پیشنهادی گرین و لیندزی و  $K^*$  بردار خواص جدید مواد در نظریه گرین-نقدی است. همچنین  $\eta$  و  $t_3$  پارامترهای مورد استفاده جهت فرم متحد معادلات حاکم هستند. در رابطه (۱)،  $(\nabla)$  نشان دهنده گرادیان تابع و  $(\nabla \cdot)$  عملگر دیورژانس است. همچنین  $E: \beta$  در رابطه فوق نشان‌دهنده تریس (اثر) حاصل ضرب دو تانسور است [۲۵]. معادلات حاکم نظریه کلاسیک با فرض  $\tau = \bar{C} = 0$  و  $t_1 = t_2 = t_3$  و  $\eta = 1$  و معادلات حاکم بر اساس نظریه گرین-لیندزی با فرض  $\tau = 0$  و  $\eta = 1$  و  $t_3 = 0$  و معادلات حاکم بر اساس نظریه گرین-نقدی نوع III با فرض  $\tau = 0$  و  $\bar{C} = 0$  و  $t_3 = 1$  و  $\eta = t_1 = t_2$  بدست می‌آیند معادلات حاکم نظریه گرین-نقدی نوع I و II به ترتیب با  $K^* \rightarrow 0$  و  $\kappa \rightarrow 0$  از روابط نظریه گرین-نقدی نوع III به دست می‌آید.



شکل ۱- هندسه استوانه شامل ترک محیطی [۲۴]

در ابتدا استوانه در دمای محیط قرار دارد که از زمان  $t=0$  به بعد تحت شوک گرمایی به صورت متقارن محوری قرار می‌گیرد. اعمال شوک گرمایی به استوانه جدار ضخیم به گونه‌ای است که در لحظه  $t=0$  استوانه در دمای اولیه قرار دارد و در زمان  $t=0^+$  دمای سطوح داخلی و خارجی استوانه مطابق با شرایط مرزی حاکم بر مسئله دچار تغییر می‌شود. معادلات انرژی و جابه‌جایی طبق نظریه‌های کلاسیک، گرین-لیندزی و گرین-نقدی به صورت روابط (۲) قابل بیان هستند [۲۵].

$$\begin{aligned} t_3 \kappa^* \nabla^2 T + t_3 k \nabla^2 \dot{T} + \eta \frac{k}{t_0} \int_0^t \exp\left(-\frac{t - \bar{t}}{t_0}\right) (\nabla^2 T) d\bar{t} - \\ \rho c \times (t_2 + t_3) \dot{T} - \rho c \eta \dot{T} - \rho T_0 \beta (\nabla \cdot \dot{u}) - t_3 T_0 \beta (\nabla \cdot \dot{u}) + \\ \eta R_s + t_3 \dot{R}_s = 0 \\ \mu \nabla^2 u + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot u) - \beta \nabla (T + t_1 \dot{T}) + \rho b = \rho \ddot{u} \end{aligned} \quad (2)$$

که در روابط فوق،  $\nabla^2$  عملگر لاپلاسین است. رابطه رسانش گرمایی گرین-لیندزی و گرین-نقدی نیز برای مواد همگن و همسانگرد به صورت زیر قابل بیان است [۲۵].

$$\eta q + t_3 \dot{q} = -\eta k \nabla T - t_3 k \nabla \dot{T} - t_3 \kappa^* \nabla T \quad (3)$$

پس از تعیین ضرایب مجهول با استفاده از شرایط مرزی (۱۸)، میدان دما با استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس عددی به حوزه زمان نگاشت می‌شود [۲۹]. جهت نگاشت نتایج به حوزه زمان از مقادیر زیر که مربوط به پارامترهای بی‌بعد هستند استفاده شده است.

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 0.535, \quad \varepsilon = 0.02 \quad (19)$$

جهت استخراج نتایج مربوط به نظریه گرین-لیندزی، مقادیر زیر برای پارامترهای بی‌بعد با توجه به مرجع [۲۵] انتخاب شده است.

$$t_1 = 4, \quad t_2 = 4, \quad t_3 = 4 \quad (20)$$

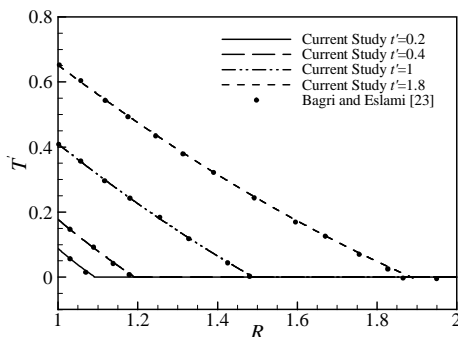
با توجه به مقادیر فوق، سرعت موج گرمایی در نظریه گرین-لیندزی به صورت زیر قابل بیان است.

$$\frac{c_K}{\sqrt{t_2}} = 0.5 \quad (21)$$

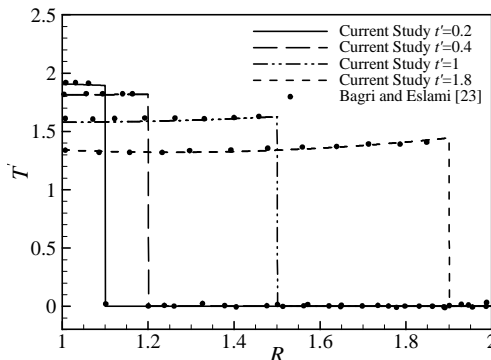
نتایج نظریه گرین-نقدی نوع II با توجه به مقادیر زیر به دست آمده است.

$$t_3 = 4, \quad c_T = 0.5, \quad c_K = 0 \quad (22)$$

سرعت موج گرما در نظریه گرین-نقدی  $c_T = 0.5$  می‌باشد. جهت بررسی درستی نتایج، توزیع دمای حاصل از نظریه‌های گرین-لیندزی و گرین-نقدی با مرجع [۲۵] مقایسه شده‌اند. در مرجع مورد نظر، شعاع داخلی استوانه  $R_i = 1$  و خارجی  $R_o = 2$  در نظر گرفته شده و با استفاده از فرم متحد معادلات حاکم، میدان‌های دما، تنش محیطی، تنش شعاعی و جابه‌جایی در حوزه لاپلاس به صورت تحلیلی حل شده و با استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس عددی به فضای زمان نگاشت شده است. شکل‌های ۲ و ۳ با توجه به شرایط مرزی (۲۳) در نظر گرفته شده در مرجع مذکور به دست آمده‌اند. مقایسه نتایج، در چهار زمان انجام شده است که نشان می‌دهد نتایج از دقت کافی برخوردارند.



شکل ۲- توزیع دما در استوانه طبق نظریه گرین-لیندزی



شکل ۳- توزیع دما در استوانه طبق نظریه گرین-نقدی

که در آن،  $s$  متغیر استاندارد تبدیل لاپلاس است.  $u'$  تبدیل لاپلاس  $u$  و  $r$  میدان دما را در حوزه لاپلاس نمایش می‌دهد. تابع پتانسیل جابه-جایی به صورت زیر معرفی می‌شود.

$$u' = \frac{\partial \psi}{\partial R} \quad (10)$$

روابط (۹) در غیاب تولید گرمای داخلی و نیروی حجمی، با استفاده از تابع پتانسیل جابه‌جایی به صورت رابطه (۱۱) بازنویسی می‌شوند.

$$\begin{aligned} \beta_1 \nabla^2 \psi &= \beta_2 \nabla^2 T' - T' & \beta_1 \nabla^2 \psi &= \beta_2 \nabla^2 T' - T' \\ \beta_3 \nabla^2 \psi - s^2 \psi &= \beta_4 T' & q_r &= -\beta_5 \frac{\partial T'}{\partial R} \end{aligned} \quad (11)$$

که در روابط فوق،

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\varepsilon [t_3 s^2 + \eta s]}{(t_2 + t_3) s^2 + \eta s} \\ \beta_2 &= \frac{t_3 c_T^2 + s t_3 c_K^2 + \eta \frac{c_K^2}{t_0 s + 1}}{(t_2 + t_3) s^2 + \eta s} \\ \beta_3 &= c_1^2, \quad \beta_4 = c_1^2 (1 + t_1 s) \\ \beta_5 &= \frac{(\eta c_K^2 + t_3 c_T^2 + s t_3 c_K^2)}{(\eta + \eta t_0 + t_3 s)} \end{aligned} \quad (12)$$

با حذف  $r$  از رابطه (۱۱)، منجر به معادله دیفرانسیل معمولی با ضرایب ثابت (۱۳) می‌شود.

$$A \nabla^4 \psi + B \nabla^2 \psi + C \psi = 0 \quad (13)$$

ضرایب رابطه (۱۳)، به شکل رابطه (۱۴) بیان می‌شوند

$$A = \frac{\beta_3 \beta_2}{\beta_4}, \quad B = -\frac{\beta_2 s^2}{\beta_4} - \frac{\beta_3}{\beta_4} - \beta_1, \quad C = \frac{s^2}{\beta_4} \quad (14)$$

حل معادله دیفرانسیل معمولی خطی (۱۳)، برحسب توابع بسل اصلاح شده به صورت زیر قابل بیان است.

$$\psi(R, s) = D_1 I_0(\xi_1 R) + D_2 K_0(\xi_1 R) + D_3 I_0(\xi_2 R) + D_4 K_0(\xi_2 R) \quad (15)$$

میدان‌های جابه‌جایی و دما به ترتیب با جاگذاری رابطه فوق در روابط (۱۰) و (۱۱) تعیین می‌شوند.

$$\begin{aligned} u' &= \xi_1 [D_1 I_1(\xi_1 R) - D_2 K_1(\xi_1 R)] + \xi_2 [D_3 I_1(\xi_2 R) - D_4 K_1(\xi_2 R)] \\ T' &= \gamma_1 [D_1 I_0(\xi_1 R) + D_2 K_0(\xi_1 R)] + \gamma_2 [D_3 I_0(\xi_2 R) + D_4 K_0(\xi_2 R)] \end{aligned} \quad (16)$$

که در آن،  $I_\nu(\xi_i R)$  و  $K_\nu(\xi_i R)$  توابع بسل پیراسته نوع اول و دوم مرتبه  $\nu$  هستند و  $\xi_i$  ریشه‌های معادله مرتبه دوم بوده و با استفاده از ثابت-های رابطه (۱۴) تعیین می‌شوند. ضرایب  $\gamma_1$  و  $\gamma_2$  نیز به صورت زیر قابل بیان هستند.

$$\gamma_1 = \frac{\beta_3 \xi_1^2 - s^2}{\beta_4}, \quad \gamma_2 = \frac{\beta_3 \xi_2^2 - s^2}{\beta_4} \quad (17)$$

میدان‌های دما، جابه‌جایی و شار گرمایی به صورت تحلیلی در فضای لاپلاس تعیین شده‌اند و ضرایب مجهول  $(D_i, i=1,2,3,4)$ ، با توجه به شرایط مرزی در نظر گرفته شده برای مسئله تعیین می‌شوند. شرایط مرزی گرمایی و مکانیکی بی‌بعد در سطح داخلی و خارجی استوانه عبارتند از:

$$\begin{aligned} T'(R_i, s) &= 0, & T'(1, s) &= 1/s \\ u'(R_i, s) &= 0, & u'(1, s) &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} T(R_i, t) &= T_i, & T(R_o, t) &= T_o \\ \sigma_{rr}(R_i, t) &= 0, & \sigma_{rr}(R_o, t) &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

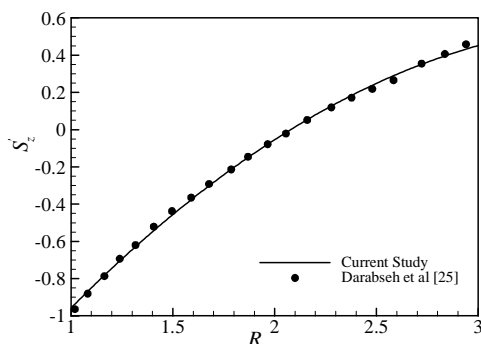
شعاع داخلی استوانه  $R_i = 1$ ، دمای سطح داخلی  $T_i = 1800$ ، شعاع خارجی  $R_o = 3$  و دمای سطح خارجی استوانه  $T_o = 300$  در نظر گرفته شده است. با توجه به شکل نشان داده شده نتایج از دقت کافی برخوردارند.

#### ۴- تعیین ضریب شدت تنش ترک محیطی

##### ۴-۱- روش تابع وزنی

روش تابع وزنی در محاسبه ضریب شدت تنش اثر بارگذاری و هندسه جسم را از هم جدا می‌کند. به عبارت دیگر، اگر تابع وزنی برای یک ترک در یک جسم با هندسه مشخص تعیین شده باشد؛ می‌توان ضریب شدت تنش برای هر بارگذاری دلخواه را به دست آورد. با فرض مشخص بودن تابع وزنی  $m(r, a)$  برای یک هندسه خاص، ضریب شدت تنش با انتگرال‌گیری از حاصل ضرب توزیع تنش در هندسه بدون ترک،  $\sigma(r)$  و تابع وزنی روی سطح فرضی ترک تعیین می‌شود [۲۱].

$$K = \int_{r_i}^{r_i+a} m(r, a) \sigma(r) dr \quad (30)$$



شکل ۴- توزیع تنش محوری گرمایی طبق نظریه گرین-لیندزی

تابع وزنی پیشنهادی شن و گلینکا برای استوانه دارای ترک محیطی در سطح داخلی تحت بارگذاری مود 1 به صورت زیر است [۲۱]:

$$\begin{aligned} m(r, a) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{1}{r_i + a - r}} + M_1 \sqrt{\frac{2}{\pi a}} + M_2 \sqrt{\frac{2}{\pi a}} \frac{1}{a} \\ &\times \sqrt{r_i + a - r} + M_3 \sqrt{\frac{2}{\pi a^3}} \sqrt{r_i + a - r} \end{aligned} \quad (31)$$

که در آن،  $r = r_i + a$  موقعیت نوک ترک نسبت به محور استوانه است. ضرایب  $M_i$  با توجه به دو ضریب شدت تنش مرجع، متناظر با بارگذاری‌های مرجع روی سطح ترک و صفر بودن مشتق دوم تابع وزنی در دهانه ترک تعیین می‌شوند [۲۱].

$$\begin{aligned} M_1 &= -\sqrt{2\pi} Y_1 + 3\sqrt{2\pi} \frac{1}{a} Y_2 - \frac{24}{5}, & M_2 &= 3 \\ M_3 &= 3\sqrt{2\pi} Y_1 - 6\sqrt{2\pi} \frac{1}{a} Y_2 + \frac{8}{5} \end{aligned} \quad (32)$$

که در آن  $Y_1$  و  $Y_2$  توابع چندجمله‌ای از طول نسبی ترک هستند. ضرایب  $Y_1$  و  $Y_2$  در مرجع [۲۱] برای نسبت شعاع  $2 \leq R_o / R_i \leq 1.1$  به صورت زیر بیان شده‌اند.

$$q'_r(R_i, s) = \frac{10000}{s(s+100)^2}, \quad u'(R_i, s) = 0 \quad (23)$$

$$T'(R_o, s) = 0, \quad S'_r(R_o, s) = 0$$

با توجه به شکل‌های ۲ و ۳، دو نظریه گرین-لیندزی و گرین-نقدی سرعت محدود موج گرما را تأیید می‌کنند و در هر لحظه، تنها دمای نقاطی که بین دیواره داخلی و پیشانی موج گرما قرار دارند تغییر کرده است. همچنین شکستگی نمودار دما با سرعت موج گرما مطابقت دارد.

#### ۳- میدان تنش محوری

در این بخش، میدان تنش محوری در استوانه با توجه به اثر کوپل میدان‌های کرنش و دما و نیز اثر جمله اینرسی ارائه شده است. شوک گرمایی در استوانه منجر به ایجاد تنش‌های گرمایی در استوانه جدار ضخیم می‌شود. دو سر استوانه برای حرکت در راستای محور استوانه آزاد در نظر گرفته می‌شود (شرایط تنش صفحه‌ای در راستای محوری). این شرط مرزی به صورت زیر اعمال می‌شود.

$$\int_{r_i}^{r_o} r \sigma_z dr = 0 \quad (24)$$

تنش محوری در استوانه با توجه به میدان دما در مرجع [۲۶]، به صورت رابطه (۲۵) پیشنهاد شده است.

$$\sigma_z = \frac{2E\alpha}{(1-\nu)(r_o^2 - r_i^2)} \int_{r_i}^{r_o} r T dr - \frac{E\alpha}{1-\nu} T \quad (25)$$

تنش محوری رابطه (۲۵) به صورت رابطه زیر بی‌بعد می‌شود.

$$S'_z = \frac{\sigma_z(1-\nu)}{E\alpha T_d} \quad (26)$$

با قرار دادن توزیع تنش (۲۵) در رابطه فوق، رابطه تنش محوری بدون بعد استخراج می‌شود.

$$S'_z(R, s) = \frac{2}{1-R_i^2} \int_{R_i}^1 RT'(R, s) dR - T'(R, s) \quad (27)$$

پس از جایگذاری میدان دمای رابطه (۱۶) در رابطه (۲۷) تنش محوری در استوانه در حوزه لاپلاس به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} S'_z(R, s) &= \frac{2}{1-R_i^2} \left\{ \frac{D_1^2 - \omega_1^2}{\gamma D_1^2} [A_1 I_1(D_1) + B_1 K_1(D_1)] - \right. \\ &R_i [A_1 I_1(D_1 R_i) + B_1 K_1(D_1 R_i)] + \frac{D_2^2 - \omega_1^2}{\gamma D_2^2} [A_2 I_1(D_2) \\ &+ B_2 K_1(D_2) - R_i (A_2 I_1(D_2 R_i) + B_2 K_1(D_2 R_i))] \left. \right\} \\ &- \frac{D_1^2 - \omega_1^2}{\gamma D_1} (A_1 I_0(D_1 R) - B_1 K_0(D_1 R)) - \\ &\frac{D_2^2 - \omega_1^2}{\gamma D_2} (A_2 I_0(D_2 R) - B_2 K_0(D_2 R)) \end{aligned} \quad (28)$$

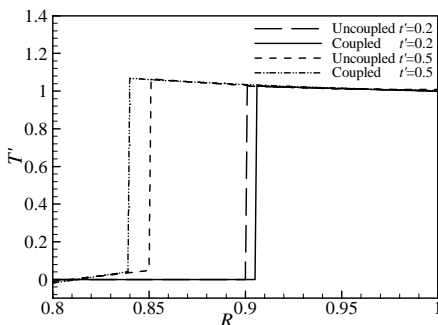
پس از حل تحلیلی رابطه تنش محوری در فضای لاپلاس، میدان تنش در حوزه زمان با استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس عددی تعیین می‌شود.

در شکل ۴، تنش محوری حالت پایای نظریه گرین-لیندزی با مرجع [۲۷] مقایسه شده است. در این مرجع معادلات حاکم نظریه گرین-لیندزی با استفاده از روش المان محدود گلرکین برای استوانه‌های از جنس تیتانیوم حل شده و میدان‌های دما، جابه‌جایی و تنش‌های

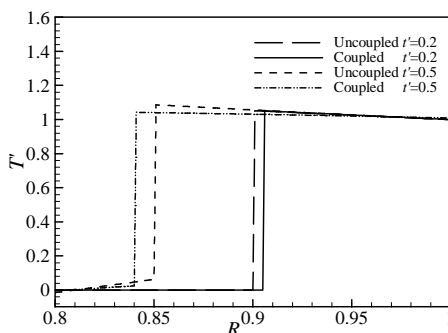
در این بخش دو مسئله شوک دمایی در سطح خارجی استوانه و شوک شار گرمایی در سطح داخلی استوانه در نظر گرفته شده و نتایج دما، تنش و ضریب شدت تنش هر دو مسئله ارائه می‌شود.

### ۵-۱- شوک دمایی در سطح خارجی استوانه

با توجه به شرایط مرزی در نظر گرفته شده در رابطه (۱۸)، در این قسمت موج گرمایی در نمودارهای دما، تنش و ضریب شدت تنش از دیواره خارجی استوانه به سمت دیواره داخلی حرکت می‌کند. شکل‌های ۵ و ۶، اثر پارامتر ترموالاستیک کوپل بر توزیع دمای نظریه گرین-لیندزی و گرین-نقدی برحسب شعاع را نشان می‌دهند.



شکل ۵- توزیع دمای نظریه گرین-لیندزی



شکل ۶- توزیع دمای نظریه گرین-نقدی

سرعت محدود موج گرما در نمودار به‌وضوح قابل مشاهده است. سرعت موج گرمای نظریه گرین-لیندزی با مقدار بدست آمده در رابطه (۲۱) و سرعت موج گرما در نظریه گرین-نقدی با رابطه دوم (۲۳) سازگاری دارد. با توجه به نمودار دما در زمان  $t' = 0.5$ ، پس از رسیدن موج گرما به دیواره داخلی و بازگشت به سمت دیواره خارجی، دمای تمام نقاط استوانه تغییر کرده است؛ اما در نمودار دما در زمان  $t' = 0.2$ ، تنها دمای نقاط بین دیواره خارجی و پیشانی موج گرما تغییر کرده است و سایر نقاط در دمای اولیه هستند. نتایج نشان می‌دهد که در حالت غیرکوپل (که به ازای پارامتر ترموالاستیک  $\epsilon = 0$  رسم شده است)، سرعت موج گرما از حالت کوپل (که به ازای  $\epsilon = 0.02$  رسم شده است) بیشتر است. این مسئله از اثر کوپل میدان‌های کرنش-دما ناشی می‌شود که باعث کاهش سرعت موج گرما در حالت کوپل می‌شود. نظریه کلاسیک برخلاف نظریه‌های تعمیم‌یافته منجر به سرعت بی-نهایت برای موج گرمایی می‌شود. شکل ۷، توزیع دمای حاصل از نظریه‌های گرین-لیندزی، گرین-نقدی و کلاسیک برحسب ضخامت

$$Y_1 = A_{10} + \exp\left(\sum_{n=1}^6 A_{1n} \left(\frac{a}{t}\right)^{n-1}\right) \quad (33)$$

$$Y_2 = A_{20} \tan\left(\sum_{n=1}^6 A_{2n} \left(\frac{a}{t}\right)^n\right)$$

ثابت‌های روابط (۳۳) در مرجع [۲۱] آمده است. ضریب شدت تنش گرمایی نیز به‌صورت زیر بی‌بعد شده است.

$$K = \frac{(1-\nu)\sqrt{r_0}}{EaT_d} K_I \quad (34)$$

### ۴-۲- تعیین ضریب شدت تنش

انتگرال‌گیری از نتایج عددی تنش در رابطه (۳۰) منجر به نوسان مقادیر ضریب شدت تنش می‌شود [۲۳]. برای حل این مشکل، از برازش دو منحنی دوجمله‌ای بر عبارت تنش گرمایی بدون بعد در هر زمان استفاده شده است. این برازش منحنی، به‌خصوص در زمان‌های ابتدایی اعمال شوک گرمایی قابل قبول است. اگر موقعیت ناپیوستگی  $\rho$  باشد، توزیع تنش محوری به دو بخش قبل و بعد از ناپیوستگی تقسیم می‌شود تا برازش منحنی دقیق‌تری صورت گیرد.

$$S'_{21} = A_1 R^2 + B_1 R + C_1, \quad R_i \leq R \leq R_i + \rho \quad (35)$$

$$S'_{22} = A_2 R^2 + B_2 R + C_2, \quad R_i + \rho \leq R \leq R_o$$

به‌منظور صحت سنجی نتایج ضریب شدت تنش مدل فوریه با مراجع [۱۲] و [۲۳] در جدول ۱، مقایسه شده است. معادله انرژی نظریه کلاسیک با فرض  $\epsilon = 0$  به قانون فوریه کاهش می‌یابد. جهت محاسبه ضرایب شدت تنش ارائه شده در جدول ۱، شرایط مرزی گرمایی و مکانیکی به‌صورت رابطه (۳۶) در نظر گرفته شده‌اند و ضریب شدت تنش نیز در استوانه به نسبت شعاع  $R_o/R_i = 2$  طبق رابطه (۳۷) بی-بعد شده است.

$$T(R_i, 0) = -100^\circ\text{C}, \quad P_i = 10\text{ MPa} \quad (36)$$

$$P_o = 0.1\text{ MPa}$$

$$K_N = \frac{K}{P_i \sqrt{\pi a}} \quad (37)$$

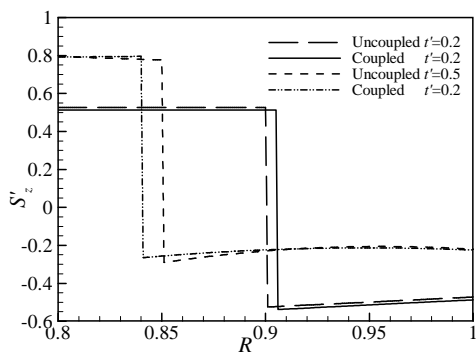
جدول ۱- ضریب شدت تنش نوک ترک محیطی طبق قانون فوریه

$a/t$	گرین-نقدی	گرین-لیندزی	نتایج منتشر شده [12]	نتایج منتشر شده [23]
0.1	31.82	31.8	31.9	31.79
0.2	28.36	28.35	28.36	28.35
0.3	25.61	25.6	25.59	25.61
0.4	23.34	23.34	23.33	23.35
0.5	21.52	21.52	21.53	21.52
0.6	20.21	20.2	20.22	20.16
0.7	19.44	19.43	19.49	19.4
0.8	19.67	19.67	19.75	19.63

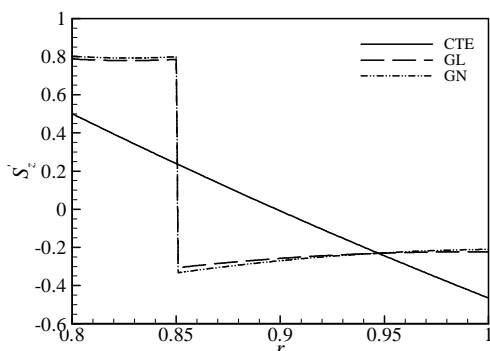
### ۵- بحث و نتایج

در این بخش، نتایج تحلیل ترموالاستیک یک استوانه بلند حاوی یک ترک محیطی کامل ارائه شده است. میدان‌های دما و تنش محوری با استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس عددی از روابط (۱۶) و (۲۸) به دست می‌آیند. سپس ضریب شدت تنش با استفاده از روش تابع وزنی رابطه (۳۰) برحسب طول نسبی ترک تعیین می‌شود.

در شکل ۱۰، تنش محوری نظریه‌های کلاسیک، گرین-لیندزی و گرین-نقدی در زمان  $t' = 0.3$  مقایسه شده‌اند. مطابق شکل، نظریه‌های تعمیم‌یافته گرین-لیندزی و گرین-نقدی بیشینه تنش محوری بزرگتری نسبت به نظریه کلاسیک پیش‌بینی کرده‌اند و خاصیت موج گونه تنش در این دو نظریه مشهود است. در حالی که نظریه کلاسیک تنش را به صورت پیوسته در استوانه پیش‌بینی کرده است که توزیع تنش محوری پایا در استوانه جدار ضخیم است.

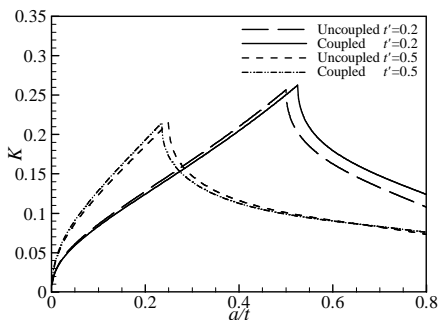


شکل ۹- توزیع تنش محوری نظریه گرین-نقدی



شکل ۱۰- توزیع تنش محوری نظریه‌های کلاسیک، گرین-لیندزی و گرین-نقدی در زمان  $t' = 0.3$

در شکل ۱۱، ضریب شدت تنش نوک ترک محیطی بر اساس توزیع تنش حاصل از نظریه گرین-لیندزی در زمان‌های مختلف و در دو حالت کوپل و غیرکوپل نشان داده شده است.

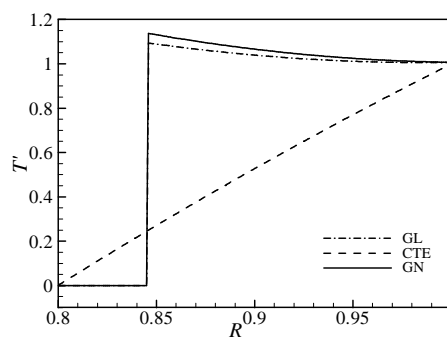


شکل ۱۱- ضریب شدت تنش گرین-لیندزی در زمان‌های مختلف

ضریب شدت تنش در ابتدا با افزایش طول نسبی ترک افزایش می‌یابد و سپس تا مقدار پایا کاهش می‌یابد که از فشاری شدن تنش محوری

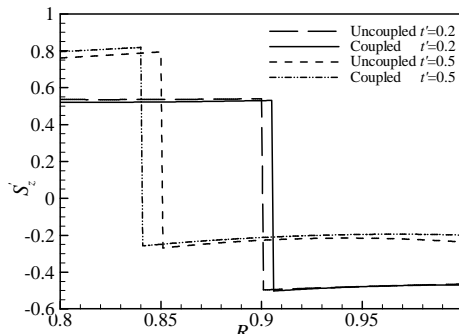
استوانه در زمان  $t' = 0.3$  را نشان می‌دهد. توزیع دمای این نظریه، نزدیک به توزیع دمای پایا در استوانه تحت شوک گرمایی در سطح خارجی است.

با توجه به شکل مشاهده می‌شود که دو نظریه گرین-لیندزی و گرین-نقدی سرعت محدود موج گرما را نشان می‌دهند (تنها دمای نقاطی که بین دیواره خارجی و پیشانی موج گرما قرار دارند تغییر کرده است). اما توزیع دمای حاصل از نظریه کلاسیک؛ نشان می‌دهد که دمای تمام نقاط جز نقاط مرزی استوانه تغییر کرده است. از طرف دیگر، بیشینه دمای پیش‌بینی شده در نظریه‌های تعمیم‌یافته به دلیل در نظر گرفتن زمان‌های آسایش- از نظریه کلاسیک بیشتر است. در نقطه ناپیوستگی نمودار دما ( $R=0.85$ )، مقدار پیش‌بینی شده دمای بی‌بعد توسط نظریه کلاسیک تقریباً ۲۵٪ دمای حاصل از نظریه گرین-لیندزی و ۲۳٪ دمای حاصل از نظریه گرین-نقدی است.



شکل ۷- توزیع دمای نظریه‌های گرین-لیندزی، گرین-نقدی و کلاسیک در زمان  $t' = 0.3$

شکل‌های ۸ و ۹، اثر پارامتر ترموالاستیک کوپل بر تنش محوری گرمایی در استوانه بر اساس نظریه گرین-لیندزی و گرین-نقدی را نشان می‌دهد. با توجه به شکل مشهود است که مشابه نمودار دما، سرعت موج تنش در حالت غیرکوپل از حالت کوپل بیشتر است. اما برخلاف رفتار توزیع دما، تنش محوری گرمایی در تمام نقاط استوانه به محض اعمال شوک گرمایی تغییر می‌کند. این مسئله به خاطر اعمال شرایط نیرویی (۲۴) و وجود تعادل اتفاق می‌افتد. با توجه به نمودار مشهود است که به دلیل شرایط مرزی در نظر گرفته شده، تنش محوری در نقاط بین دیواره داخلی و پیشانی موج تنش، کششی و در سایر نقاط فشاری است. همچنین در یک زمان خاص، سطح زیر نمودار تنش محوری به دلیل صفر بودن بارهای مکانیکی صفر است.



شکل ۸- توزیع تنش محوری نظریه گرین-لیندزی

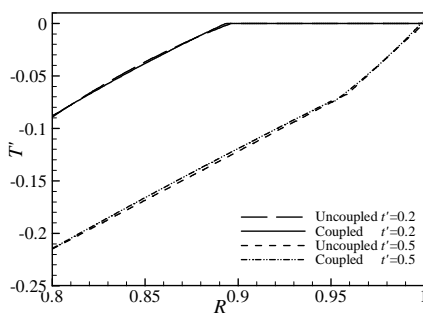
نظریه‌های تعمیم‌یافته در  $a/t=0.25$  اتفاق می‌افتد که در نقطه مذکور ضریب شدت تنش گرین-لیندزی  $K=0.2083$ ، ضریب شدت تنش گرین-نقدی  $K=0.2119$  و کلاسیک  $K=0.0935$  می‌باشد. همچنین بیشینه ضریب شدت تنش نظریه کلاسیک  $K=0.10367$  است که در  $a/t=0.45$  اتفاق می‌افتد. با توجه به نتایج ارائه شده، در طول ترک-های پایانی مقادیر ضریب شدت تنش حاصل از نظریه‌های تعمیم‌یافته به مقدار ضریب شدت تنش حاصل از نظریه کلاسیک نزدیک شده‌اند.

### ۵-۲- شوک شار گرمایی در سطح داخلی استوانه

شرایط مرزی برای استوانه به شکل زیر در نظر گرفته شده‌اند.

$$\begin{aligned} \dot{q}_r(R_i, s) &= -\frac{10000}{s(s+100)^2}, & u'(R_i, s) &= 0 \\ T'(R_o, s) &= 0, & S'_r(R_o, s) &= 0 \end{aligned} \quad (38)$$

شرایط مرزی در نظر گرفته شده منجر به سرمایش سطح داخلی استوانه و کاهش دمای آن نسبت به دمای محیط می‌شود. در شکل‌های ۱۳ و ۱۴ توزیع دمای نظریه‌های گرین-لیندزی و گرین-نقدی نشان داده شده‌اند. با توجه به شکل مشاهده می‌شود که موج گرما با سرعت محدود در استوانه منتشر می‌شود. در زمان  $t'=0.2$ ، تنها دمای نقاط بین دیواره داخلی و پیشانی موج گرما تغییر کرده و در زمان  $t'=0.5$  دمای تمام نقاط استوانه دچار تغییر شده است.

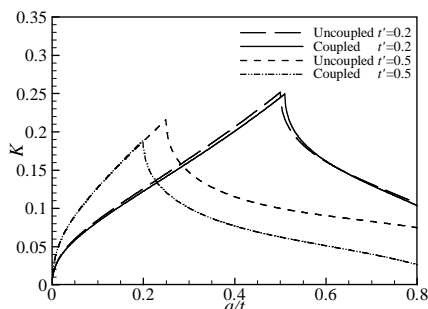


شکل ۱۳- توزیع دمای نظریه گرین-لیندزی

از مقایسه شکل‌های ۱۳ و ۱۴ مشاهده می‌شود که توزیع دمای دو نظریه کاملاً باهم اختلاف دارند و در نظریه گرین-لیندزی شکستگی ناگهانی به شکستگی در بازه سطح داخلی استوانه تا پیشانی موج گرما تغییر کرده است. این اختلاف از معادله رسانش گرمایی دو نظریه گرین-لیندزی و گرین-نقدی ناشی می‌شود. در نظریه گرین-لیندزی، معادله رسانش گرمای فوریه مورد استفاده قرار گرفته و شار گرمایی به گرادیان دما وابسته است. همچنین نرخ شار گرمایی در رابطه رسانایی نظریه گرین-لیندزی وارد نشده است. در حالی که در رابطه رسانش گرمای نظریه گرین-نقدی نوع II، نرخ شار گرمایی به گرادیان دما وابسته است. روابط رسانش گرما دو نظریه به صورت زیر قابل بیان هستند.

$$(q_r)_{GL} = -c_K^2 \frac{\partial T}{\partial R}, \quad (q_r)_{GN} = -c_T^2 \frac{\partial T}{\partial R} \quad (39)$$

در نقاط بین پیشانی موج تنش و دیواره خارجی ناشی می‌شود. قبل از رسیدن موج تنش به دیواره داخلی، ضریب شدت تنش در نظریه گرین-لیندزی برای ترکی بیشینه است که موج تنش در موقعیت نوک آن قرار دارد. ضریب شدت تنش نوک ترک محیطی بر اساس نظریه گرین-نقدی در دو زمان در شکل ۱۲، ارائه شده است.



شکل ۱۲- ضریب شدت تنش گرین-نقدی در زمان‌های مختلف

با توجه به شکل، ضریب شدت تنش از مقدار صفر شروع شده و برای ترکی که در موقعیت پیشانی موج گرما واقع شده است بیشینه شده و سپس تا مقدار پایا کاهش می‌یابد. با توجه به وجود تنش کششی بین دیواره داخلی و پیشانی موج، برای ترک‌هایی که پیشانی موج تنش به نوک آنها نرسیده است؛ مقدار ضریب شدت تنش با افزایش طول ترک بیشتر می‌شود. در حالی که وجود تنش فشاری بین پیشانی موج و دیواره خارجی، باعث کاهش ضریب شدت تنش برای ترک‌هایی می‌شود که پیشانی موج تنش از نوک آنها گذشته است. همچنین، تکینی تابع وزنی در نوک ترک، موجب کاهش شدید ضریب شدت تنش پس از عبور موج تنش می‌شود. تکینی تابع وزنی در نوک ترک اثر بیشتر توزیع تنش اطراف ترک در محاسبه ضریب شدت تنش را به دنبال دارد. با توجه به شکل، به علت کاهش سرعت موج گرما و تنش در حالت کوپل، موقعیت شکستگی نمودار ضریب شدت تنش با حالت غیر کوپل متفاوت است.

در جدول ۲، ضریب شدت تنش نوک ترک محیطی بر اساس نظریه‌های کلاسیک، گرین-لیندزی و گرین-نقدی در زمان  $t'=0.3$  مقایسه شده‌اند.

### جدول ۲- ضریب شدت تنش نظریه‌های کلاسیک، گرین-لیندزی و

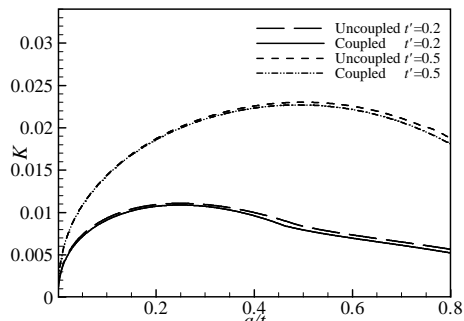
گرین-نقدی در زمان  $t' = 0.3$

طول نسبی ترک	نظریه گرین-نقدی	نظریه گرین-لیندزی	نظریه کلاسیک ترموالاستیسیته
0.1	0.12104	0.118915	0.06676
0.2	0.182846	0.179681	0.08712
0.3	0.148185	0.147252	0.09808
0.4	0.111956	0.112852	0.10307
0.5	0.093249	0.095028	0.103031
0.6	0.080767	0.082937	0.098016
0.7	0.07041	0.072629	0.087591
0.8	0.05947	0.061469	0.0706297

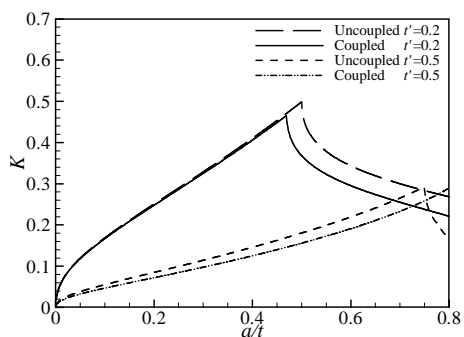
مطابق نتایج، ضریب شدت تنش نظریه کلاسیک از دو نظریه دیگر کمتر است و نظریه‌های تعمیم‌یافته مقادیر مشابهی برای ضریب شدت تنش پیش‌بینی کرده‌اند؛ اختلاف اندک آنها نیز از صفر بودن اتلاف انرژی در نظریه گرین-نقدی ناشی می‌شود. ضریب شدت تنش بیشینه



نظریه گرین-لیندزی و گرین-نقدی را به وضوح مشاهده کرد. اما با مقایسه نتایج در حالت کوپل و غیر کوپل هر نظریه مشاهده می شود که سرعت موج گرما و تنش در حالت کوپل از حالت غیر کوپل کمتر است و برخلاف مرجع [۲۸]، در مقادیر بیشینه اختلاف چندانی ایجاد نمی شود.



شکل ۱۷-ضریب شدت تنش گرین-لیندزی در زمان های مختلف

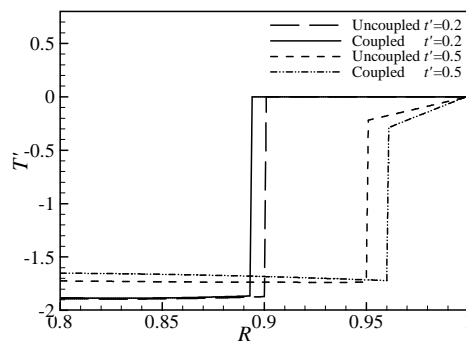


شکل ۱۸-ضریب شدت تنش گرین-نقدی در زمان های مختلف

در مرجع [۲۸]، اثر جمله اینرسی بر رشد ترک در یک دامنه محدود دو بعدی با استفاده از نظریه تعمیم یافته لرد-شولمان و روش های المان مرزی مورد بررسی قرار گرفته است و ضریب شدت تنش با استفاده از انتگرال [ تعیین شده است. در این مرجع موج های گرمایی و الاستیک در راستای عمود بر لبه های ترک منتشر می شوند و در حالت کوپل هر دو موج باعث باز شدن لبه های ترک می شوند. در حالت غیر کوپل نیز به دلیل صرف نظر از جمله اینرسی، موج الاستیک حذف شده و تنها موج گرمایی باعث باز شدن لبه های ترک در دامنه محدود دوبعدی می شود. در تحقیق حاضر استوانه بلند تحت شرایط متقارن محوری قرار دارد و موج های گرمایی و الاستیک در جهت شعاع استوانه منتشر می شوند. از طرف دیگر به دلیل قرارگیری ترک در راستای محور استوانه و انتشار امواج گرمایی در راستای عمود بر آن و نیز بلند بودن استوانه، وجود یا حذف موج الاستیک در حالت های کوپل و غیر کوپل تأثیر چندانی بر بیشینه مقادیر تنش محوری و ضریب شدت تنش ترک محیطی ندارد.

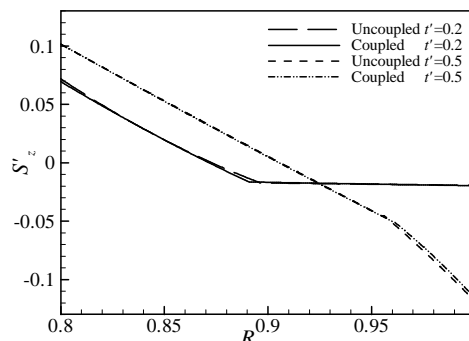
### ۶- نتیجه گیری

در این مقاله، ضریب شدت تنش برای یک ترک محیطی کامل در سطح داخلی استوانه تحت شوک گرمایی، طبق نظریه های کلاسیک و تعمیم یافته گرین-لیندزی و گرین-نقدی تعیین شده است. مهمترین نتایج این تحقیق را به صورت زیر می توان بیان نمود:

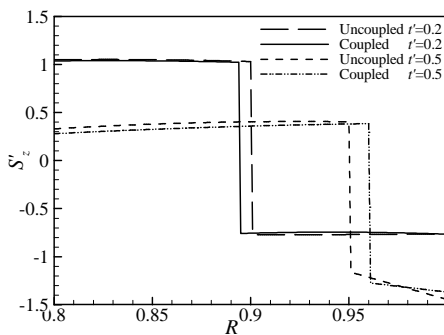


شکل ۱۴-توزیع دمای نظریه گرین-نقدی

در شکل های ۱۵ و ۱۶ توزیع تنش محوری دو نظریه گرین-لیندزی و گرین-نقدی نشان داده شده اند. توزیع تنش محوری برخلاف توزیع دما به محض اعمال شوک گرمایی در استوانه تغییر می کند و با توجه به شرایط مرزی در سطح داخلی کششی و در سطح خارجی استوانه فشاری می شود. مقایسه دو شکل نشان می دهند که توزیع های تنش محوری دو نظریه با هم اختلاف دارند. در هر زمان، شکستگی در نمودار تنش محوری نیز با نمودار دما متناظر است.



شکل ۱۵-تنش محوری نظریه گرین-لیندزی



شکل ۱۶-توزیع تنش محوری نظریه گرین-نقدی

در شکل های ۱۷ و ۱۸ ضریب شدت تنش نظریه های گرین-لیندزی و گرین-نقدی نشان داده شده اند. مقایسه آنها نشان می دهد که، ضریب شدت تنش پیش بینی شده توسط گرین-لیندزی از گرین-نقدی کوچکتر است. این مسئله از توزیع تنش پیش بینی شده توسط این نظریه در شکل ۱۵ ناشی می شود که در مقایسه با مقادیر تنش محوری گرین-نقدی مقادیر کمتری ارائه پیش بینی کرده است. از مقایسه نتایج ارائه شده می توان اختلاف نتایج دو

[13] Erdogan F., Ratwani M., Fatigue and fracture of cylindrical shells containing a circumferential crack, *International journal of fracture mechanics*, Vol. 6, No. 4, pp. 379-392, 1970.

[14] Erdol R., Erdogan F., A thick-walled cylinder with an axisymmetric internal or edge crack, *Journal of applied mechanics*, Vol. 45, No. 2, pp. 281-286, 1978.

[15] Nied H. F., Erdogan F., Transient thermal stress problem for a circumferentially cracked hollow cylinder, *Journal of thermal stresses*, Vol. 6, No. 1, pp. 1-14, 1983.

[16] Fu J. W., Chen Z. T., Qian L. F., Hu K. Q., Transient thermoelastic analysis of a solid cylinder containing a circumferential crack using the C-V heat conduction model, *Journal of thermal stresses*, Vol. 37, No. 2, pp. 1324-1345, 2014.

[17] Fu J. W., Chen Z. T., Qian L. F., Xu Y. D., Non-Fourier thermoelastic behavior of a hollow cylinder with an embedded or edge circumferential crack, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 128, No. 1, pp. 103-120, 2014.

[18] Meshii T., Watanabe K., Maximum stress intensity factor for a circumferential crack in a finite-length thin-walled cylinder under transient radial temperature distribution, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 63, No. 1, pp. 23-38, 1999.

[19] Meshii T., Watanabe K., Closed form stress intensity factor of an arbitrary located inner-surface circumferential crack in an edge-restraint cylinder under linear radial temperature distribution, *Engineering fracture mechanics*, Vol. 60, No. 5-6, pp. 519-527, 1998.

[20] Varfolomeyev I. V., Busch M., Stress intensity factor for internal circumferential cracks in thin- and thick- walled cylinders, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 60, No. 5-6, pp. 491-500, 1998.

[21] Nabavi S. M., Ghajar R., Analysis of thermal stress intensity factors for cracked cylinders using weight function method, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 48, No. 12, pp. 1811-1823, 2010.

[22] Ghajar R., Nabavi S. M., Closed-form thermal stress intensity factors for an internal circumferential crack in a thick-walled cylinder, *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, Vol. 33, No. 8, pp. 504-512, 2010.

[23] Asemi O., Nazari M.B., Evaluation of the stress intensity factor for circumferential cracked cylinders under non-classical thermal shock, *Journal of solid and fluid mechanics*, Vol. 5, No. 3, pp. 101-112, 2016. (In Persian).

[24] Farahinejad E., Nazari M. Mahdizadeh Rokhi B., M., Thermoelastic analysis of circumferential cracks in thick-walled cylinders considering dual phase lag theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 12, pp. 249-258, 2016, (in Persian).

[25] Bagri A., Eslami M. R., A unified generalized thermoelasticity; solution for cylinders and spheres, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 49, No. 12, pp. 1325-1335, 2007.

[26] Hetnarski R. B., Eslami M. R., *Thermal Stresses: Advanced Theory and Applications*, New York, Springer, pp. 255-256, 2009.

[27] Darabseh T., Yilmaz N., Bataineh M., Transient thermoelasticity analysis of functionally graded thick hollow cylinder based on Green-Lindsay model, *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, Vol. 8, No. 3, pp. 247-255, 2012.

[28] Hosseini-Tehrani P., Hosseini-Godarzi A. R., Tavangar M., Importance of inertia term in dynamic crack problems considering Lord-Shulman theory of thermoelasticity, *Journal of thermal stresses*, Vol. 28, No. 3, pp. 267-283, 2005

[29] Honig G., Hirdes U., A method for the numerical inversion of Laplace transform, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 10, No. 1, pp. 113-132, 1984.

۱- در نظریه‌های تعمیم‌یافته گرین-لیندزی و گرین-نقدی، زمان-های آسایش موجب پیش‌بینی مقادیر بزرگتر دما و تنش نسبت به نظریه کلاسیک می‌شود.

۲- نظریه‌های گرین-لیندزی و گرین-نقدی به ازای شرط مرزی نوع اول دمایی نتایج دما، تنش و ضریب شدت تنش مشابهی را پیش-بینی کرده‌اند و اختلاف جزئی نتایج در این حالت، در نتیجه صرف‌نظر نمودن از استهلاک در نظریه گرین-نقدی ناشی می‌شود.

۳- به ازای شرط مرزی شار گرمایی، توزیع دما و تنش و همچنین ضریب شدت تنش دو نظریه گرین-لیندزی و گرین-نقدی با هم اختلاف زیادی دارد که از روابط رسانش گرمایی این نظریه‌ها ناشی می-شود.

۴- در طول ترک‌هایی که موج تنش به آن‌ها نزدیک شده است، ضریب شدت تنش نظریه کلاسیک از نظریه‌های تعمیم‌یافته کمتر است.

۵- در نظریه‌های تعمیم‌یافته و برای  $0.1 < a/t < 0.8$  ضریب شدت بیشینه در هر لحظه برای ترکی اتفاق می‌افتد که پیشانی موج تنش در موقعیت نوک آن قرار دارد.

۶- اثر کوپل میدان‌های کرنش-دما موجب کاهش سرعت موج گرما نسبت به حالت غیرکوپل می‌شود؛ در نتیجه موقعیت ناپیوستگی در نمودارهای دما، تنش و ضریب شدت تنش در حالت کوپل و غیرکوپل اختلاف دارند.

## ۷-مراجع

[1] Duhamel J. M., Second memoire sur les phenomenes thermo-mecaniques, *Ecole Polytechnique*, vol. 15, No.25, pp. 1-57, 1837.

[2] Bagri A., Eslami M. R., A unified generalized thermoelasticity formulation; Application to thick functionally graded cylinders, *Journal of thermal stresses*, Vol. 30, No. 9-10, pp. 911-930, 2007.

[3] Bagri A., Eslami M. R., Generalized coupled thermoelasticity of disks based on the Lord-Shulman model, *Journal of thermal stresses*, Vol. 27, No. 8, pp. 691-704, 2004.

[4] Green A. E., Lindsay K. A., Thermoelasticity, *Journal of Elasticity*, Vol. 2, No. 1, pp. 1-7, 1972.

[5] Green A. E., Naghdi P. M., Thermoelasticity without energy dissipation, *Journal of Elasticity*, Vol. 31, No. 3, pp. 189-208, 1993.

[6] Lord H. W., Shulman Y., A generalized dynamical theory of thermoelasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 15, No. 5, pp. 299-309, 1967.

[7] Sherief H. H., Anwar M. N., A problem in generalized thermoelasticity for an infinitely long annular cylinder, *International journal of engineering science*, Vol. 26, No. 3, pp. 301-306, 1988.

[8] Sherief H. H., Anwar M. N., A problem in generalized thermoelasticity for an infinitely long annular cylinder composed of two different materials, *Acta mechanica*, Vol. 80, No. 1-2, pp. 137-149, 1989.

[9] Fu J. W., Chen Z. T., Qian L. F., Coupled thermoelastic analysis of a multi-layered hollow cylinder based on the C-T theory and its application on functionally graded materials, *Composite Structures*, Vol. 131, No. 1, pp. 139-150, 2015.

[10] Ghasemi A.R., Moradi M., Effect of thermal cycling and open-hole size on mechanical properties of polymer matrix composites, *Polymer Testing*, Vol. 59, pp.20-28, 2017.

[11] Ghasemi A.R., Moradi M., Low thermal cycling effects on mechanical properties of laminated composite materials, *Mechanics of Materials*, Vol. 96, pp. 126-137, 2016.

[12] Chen Y. Z., Stress intensity factors in a finite length cylinder with a circumferential crack, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 77, No. 8, pp. 439-444, 2000.