

بررسی آثار حرارتی لیزر میله‌ای تحت دمش پیوسته گوسی و سوپر گوسی

مهدی مجاهدی*

استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فنی و مهندسی گلپایگان، گلپایگان، ایران

چکیده

در مقاله حاضر، توزیع غیریکنواخت دما و آثار آن در بلور میله‌ای که تحت پرتوهای گوسی و سوپرگوسی قرار دارد، به روش تحلیلی بررسی می‌شود. بلور به صورت یک میله با خواص ترمومکانیکی ایزوتروپیک فرض شده که با استفاده از پرتوهای دمش طولی برانگیخته می‌گردد. پرتوی دمش به سه صورت گوسی، سوپر گوسی مرتبه دوم و سوپر گوسی مرتبه سوم در نظر گرفته شده و اثرات هر یک بر توزیع دما و عدسی گرمایی بایکدیگر مقایسه می‌شود. با توجه به نوع پرتو دمشی، توان گرمایی ایجاد شده در داخل بلور، در هر یک از حالت‌های گوسی و سوپرگوسی محاسبه شده و معادله توزیع دما به روش تحلیلی حل شده و در ادامه یک فرم بسته برای توزیع دمای بلور تعیین می‌گردد. پاسخ به دست آمده با نتایج المان محدود و تجربی مقایسه و در نهایت توزیع دما و میزان عدسی شدگی در توان‌های مختلف محاسبه می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که در دمش سوپر گوسی، بیشینه دما کوچک‌تر از دمش گوسی بوده و نقطه کانونی در فاصله بزرگ‌تری (از سطح ورودی دمش) نسبت به حالت گوسی اتفاق می‌افتد.

واژه‌های کلیدی: پاسخ تحلیلی، دمش پیوسته، دمش سوپر گوسی، عدسی شدگی.

Analysis of Thermal Effects of Rod Laser under Gaussian and Super Gaussian Pumping

M. Mojahedi

Department of Mechanical Engineering, Golpayegan University of Technology, Golpayegan, Iran

Abstract

In this paper, thermal effects of Gaussian and super Gaussian pumping on the rod laser are analytically investigated. The crystal is considered as a rod, with isotropic thermomechanical characterizations, which is end-pumped. The intensity distribution of pumping spot is considered in three-types including Gaussian, second order and third order of super-Gaussian, and effects of any type on the thermal distribution and thermal lensing are compared with each other. First, the heat generations due to emission in the crystal are calculated for Gaussian and super Gaussian pumping and then the equation of temperature distribution is analytically solved and a closed form solution for temperature distribution of the rod laser is obtained. The analytical results are compared with the results of finite element method. Thereupon, the temperature distributions and the values of thermal lens for various pumping powers are calculated. The results show that calculated maximum temperature for Gaussian case is lower than for super-Gaussian cases. In addition, the distances between focal point and the input pumping plane obtained for super-Gaussian pumping are larger than those calculated for Gaussian pumping.

Keywords: Analytical response, Continuous pumping, Super Gaussian pumping, thermal lensing.

تشدیدگر تشکیل شده است [۲]. عناصر تشکیل دهنده یک بلور جامد، از سیستم‌های دمش برای تحریک اتم‌ها به ترازهای بالاتر، محیط فعال لیزری شامل مجموعه‌ای از اتم‌ها، مولکول‌ها و یون‌های موجود در شبکه و مواد اپتیکی که اجازه عبور یا نوسان باریکه پرتو را در داخل ماده فعال لیزر می‌دهند، تشکیل شده‌اند. پرتو لیزر دارای طول موج مشخص و به صورت تک‌رنگ می‌باشد که با توجه به مقدار انرژی آزاد شده، طول موج نور مشخص می‌شود [۳]. لیزرها با توجه به نوع ماده فعال به سه دسته لیزرهای جامد، گازی و مایع طبقه‌بندی می‌شوند. لیزرهای گازی مانند هلیوم نور مرئی تولید می‌نمایند. برای محدوده بالاتر از رنگ قرمز نیز از لیزر گازی استفاده می‌گردد. لیزر دی‌اکسیدکربن یکی از لیزرهای بالاتر از رنگ قرمز است که در فرآیند برش کاری مورد استفاده قرار می‌گیرد. لیزرهای گازی به دلیل کمتر بودن تعداد اتم‌ها در واحد حجم، نیاز به فضای بزرگ‌تری در مقایسه با لیزرهای جامد، به منظور تولید انرژی برابر، دارند. از این رو در صنایعی که نیاز به انرژی بیشتری وجود دارد از لیزرهای حالت جامد استفاده می‌شود. این لیزرها دارای توان بالا و کیفیت پرتو باریکه مناسب می‌باشند، از این رو این لیزرها در زمینه‌های تحقیقاتی، صنعتی، پزشکی و نظامی دارای کاربرد گسترده‌ای می‌باشند. لیزرهای حالت جامد دارای متنوع‌ترین منابع تابش می‌باشند، که در این لیزرها، طیف وسیعی از پارامترهای خروجی مانند حداکثر

۱- مقدمه

لیزرها ابزاری هستند که در یک فرآیند نور را با یک طول موج مشخص و به صورت پرتوهای موازی ساطع می‌نمایند. نور خروجی لیزرها به صورت تک‌رنگ و دارای طول موج مشخصی است که با توجه به مقدار انرژی آزاد شده، میزان طول موج آن مشخص می‌شود. وقتی که الکترون به لایه پایین‌تر انتقال می‌یابد نشر نور به صورت منسجم شده صورت می‌گیرد. این نور دارای پرتویی است که بسیار متمرکز است [۱]. مبنای فعالیت لیزرها از طریق وارد نمودن انرژی به الکترون‌های یک اتم و بالا بردن تراز انرژی آن‌ها هست که منجر به انتقال الکترون از مدارهای پایین به مدارهای بالا می‌گردد. الکترون انتقال یافته پس از قرارگیری در مدار جدید در موقعیت ناپایدار قرار داشته و با خارج کردن انرژی، به مدار پایینی منتقل می‌گردد. انرژی خروجی به صورت گرما و نور (فوتون) با فرکانس مشخص آزاد می‌گردد. چنانچه با تعداد زیادی از اتم‌ها این فرآیند انجام پذیرد یک پرتو نور یکنواخت تک فرکانس تک فاز تولید می‌گردد. کلمه لیزر مخفف عبارت تقویت نور توسط تابش گسیل القایی است. ابزار لیزر یک نوسانگر اپتیکی است که باریکه بسیار موازی شده شدیدی از تابش همدوس را گسیل می‌کند و از سه بخش چشمه انرژی خارجی یا دمنده، محیط تقویت کننده و کاواک اپتیکی یا

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: mojahedi@gut.ac.ir

شود. در این پژوهش‌ها با توجه به منبع دمش، جنس و پیکربندی ماده فعال به کار رفته، دمای بلور با استفاده از روش‌های مختلف تعیین گردیده است و با در نظر گرفتن دمای به دست آمده عدسی شدگی، تنش‌های حرارتی و تغییرات ضرایب شکست بلور محاسبه گردیده است. در همین زمینه اگلستون و همکاران [۱۷] و کین و همکاران [۱۸] یک طرح اولیه برای توزیع دمایی و تأثیرات ترموپلاستیکی روی بلور بره‌ای ارائه دادند. ژی‌ما و همکارانش [۴] با در نظر گرفتن دمش پیوسته طولی دیودی، اثرات حرارتی این دمش را روی بلور بره‌ای نئودیوم:وانادات مورد بررسی قرار دادند. در مدل نظری، اثرات گرادیان پرتو پمپ شده لحاظ شده است. با استفاده از روش اجزای محدود، توزیع دما و تنش در بلور تعیین گردیده و صحت نتایج عددی با نتایج تجربی به اثبات رسیده است. همچنین ژی‌ما و همکاران [۵]، بر روی بره نئودیوم:فلورایدلیتییم ایتربیم، اثرات گرادیان پرتو پمپ شده و گرمای اضافی پمپ شده را در هنگام گسیل بر روی بلور بره‌ای تحت دمش پیوسته دیودی مورد بررسی قرار دادند. از تحلیل‌های انجام‌شده جهت بررسی شکست بلور و عدسی‌شدگی آن استفاده شده است. لیو و همکاران [۱۹] توزیع گرما را در یک فیبر لیزر تحت دمش دیودی مورد مطالعه قرار داده‌اند. توزیع دما و اثرات حرارتی آن در صفحه کامپوزیتی در بلور ایتربیم:یاگ/یاگ^۲ توسط لو و همکاران [۲۰] مورد بررسی قرار گرفته است. بلور تحت دمش جانبی قرار داشته و از مدل انتقال گرمای فوریه جهت بررسی توزیع دما استفاده شده است. توزیع دما در یک محیط فعال تحت دمش پالسی طولی توسط ژانگ و همکاران [۲۱] مورد مطالعه قرار گرفته است. در این پژوهش، به‌منظور تحلیل حرارتی از روش المان محدود استفاده گردیده است. آن‌ها برای کاهش قطبیده شدن پرتو خروجی، یک‌بار با تزریق انرژی با توزیع مناسب در بلور و یک‌بار دیگر با پایین نگه‌داشتن دما در سطح جلویی و بالا نگه‌داشتن دما در سطح عقبی (محدب نمودن جلوی بلور و مقعر نمودن عقب آن)، آثار عدسی‌شدگی را تعدیل نمودند. مارمیس و همکاران [۲۲] با اندازه‌گیری تجربی و روش المان محدود، لنز گرمایی را در بلور دیسکی آلاییده شده با ماده فعال یون ایتربیم، مورد مطالعه قرار دادند. در روش تجربی، محاسبه فاصله کانونی از طریق اندازه‌گیری جهه موج صورت گرفته است. خلید و همکاران [۲۳] تحلیل ترمومکانیکی بلور میله‌ای نئودیوم:یاگ را که به دو روش پرتوگوسی و پرتو سرکلاهی تحت دمش قرار دارد، مورد بررسی قرار دادند. بلور میله‌ای توسط آب احاطه گردیده و عملیات خنک کاری از طریق سطوح جانبی صورت می‌پذیرد. از توزیع دمای به‌دست‌آمده جهت تعیین تغییر شکل بلور بهره گرفته شده است. با اتصال یک پخش‌کننده گرما روی سطح بلور دیسکی ایتربیم:یاگ و خنک نمودن سطح دیسک توسط سیال، تحلیل حرارتی در یک بلور دیسکی توسط روش‌های عددی و آزمایشگاهی توسط سراوانی و همکاران [۲۴] انجام پذیرفته است. در این پژوهش، نقش جنس پخش‌کننده روی آثار حرارتی دمش بررسی گردیده است. بابایی و صفری [۶]، از طریق روش المان محدود در محیط نرم‌افزار Ansys، به بررسی اثرات حرارتی دمش پالسی و پیوسته طولی بر بلور بره‌ای نئودیوم:یاگ پرداختند. با استفاده از آنالیز میدان‌های مرتبط دما و

قدرت، عرض پالس دلخواه، نرخ پالس متنوع و طول موج گسترده به دست می‌آید. لیزرهای حالت‌جامد در صنایع مختلف پزشکی (منبع تابش برای درمان)، نظامی (ردیاب‌ها و سیستم‌های مادون‌قرمز)، سیستم‌های اندازه‌گیری و تشخیص و فرآیندهای برش‌کاری و شکل‌دهی مورد بهره‌برداری قرار می‌گیرند. از لیزرهای حالت‌جامد می‌توان به لیزرهای نئودیوم:یاگ^۱، نئودیوم:فلورایدلیتییم ایتربیم^۲ و نئودیوم:وانادات^۳ اشاره نمود [۴-۷]. در میان این بلورها، بلور نئودیوم:یاگ، به دلیل قابلیت انتقال گرمای بالا یکی از بلورهای پرکاربرد در لیزرهای حالت‌جامد است. از مواد جامد بلوری یا غیر بلوری برای محیط فعال لیزر استفاده می‌شود، لیزرهای حالت‌جامد عموماً به شکل میله‌ای، دیسکی و بره‌ای ساخته می‌شوند. منابع دمش لیزرهای حالت‌جامد به دو صورت دیودی و لامپی پیوسته و پالسی هستند. منبع دمش لامپی، نور را در تمامی جهات و منبع دمش دیودی نور را به‌صورت صفحه‌ای منتشر می‌نماید که دارای بازده، طول عمر و کیفیت پرتو خروجی مناسب می‌باشد و در پیکربندی دمش طولی مورد استفاده قرار می‌گیرند. از لیزرهای دیودی که لیزرهای نیمه‌رسانا نیز نامگذاری می‌شوند، در دستگاه‌های چاپ و انواع رسانه‌های پخش استفاده می‌گردد [۱]. از نظر آرایش نوری لیزرهای حالت‌جامد به دو صورت طولی و عرضی تحت دمش قرار می‌گیرند. [۸، ۹]. در دمش طولی راستای پرتو ورودی و خروجی موازی یکدیگر و در راستای طولی می‌باشد و محیط بلور می‌تواند از طریق سیال روی سطوح جانبی خنک گردد. این دمش در لیزرهای بره‌ای، میله‌ای و فیبر استفاده می‌شود و دارای بازده و کیفیت پرتو مناسب می‌باشد. در دمش عرضی پرتوهای ورودی و خروجی، عمود بر هم می‌باشند. این دمش بیشتر در لیزرهای میله‌ای استفاده می‌شود. به دلیل وسیع بودن انتقال گرما، مشکلات مربوط به گرما کاهش‌یافته و لیزر می‌تواند توان خروجی بالاتری در مقایسه با دمش طولی داشته باشد. در میله‌ای تحت دمش عرضی معمولاً پرتو ورودی از سطح جانبی میله وارد و پرتو خروجی از یکی از سطوح عمود بر محور استوانه‌ساز می‌شود. هنگام دمش به‌صورت های مختلف، انرژی فوتون‌ها همراه با مقداری گرما آزاد می‌شود. بنابراین میزانی از انرژی دمشی به انرژی گرمایی تبدیل می‌گردد که منجر به ایجاد یک منبع حرارتی در بلور شده و دمای بلور را به‌صورت غیریکنواخت بالا می‌برد. بالا رفتن دمای بلور منجر به مسائلی از قبیل ایجاد تنش و کرنش و عدسی‌شدگی حرارتی می‌شود. این اثرات گرمایی در بلور لیزر می‌توانند، قطبیده شدن پرتوی خروجی، کاهش بازده خروجی، پدیده دوشکستی و حتی شکست بلور را به همراه داشته باشد. بنابراین بررسی توزیع گرما یکی از مباحث مهم در لیزرهای حالت‌جامد است [۱۰-۱۲].

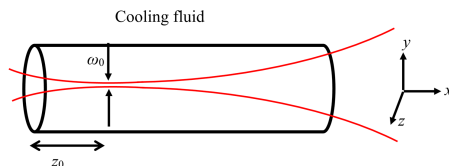
در زمینه تحلیل ترمومکانیکی لیزرهای حالت‌جامد شامل میله، بره و دیسک، فعالیت‌های گوناگونی در سال‌های اخیر انجام‌شده است [۱۳، ۱۴]. در تمامی این فعالیت‌ها توزیع دمای غیریکنواخت بلور به دست آمده و سپس با استفاده از توزیع دمای به‌دست‌آمده، آثار حرارتی مطالعه گردیده است [۱۵، ۱۶]. در ادامه مروری بر این فعالیت‌ها می-

¹ Nd:YAG

² Nd:YLF

³ Nd:Yvo4

⁴ Yb:YAG/YAG



شکل ۱- هندسه میله تحت دمش طولی

می‌باشد.

سازه، توزیع دما و تنش در بلور به‌دست آمده و میزان بیشینه توان اعمالی با استفاده از محاسبه بیشینه تنش در هر توان محاسبه‌شده است. به‌منظور بررسی اثرات گرمایی و اختلاف راه نوری در یک لیزر دیسکی ایتربیم-یاگ، ژو و همکاران [۲۵، ۲۶] مدلی تحلیلی و عددی ارائه نمودند. بر مبنای شرایط مرزی متفاوت و با توجه فرم‌های یکنواخت و سوپرگوسی لکه دمش، توزیع دما و تنش در بلور محاسبه شده و اختلاف راه نوری ناشی از گرادیان دما، کرنش گرمایی محوری، دوشکستی نوری و تغییر شکل دیسک مورد مطالعه قرار گرفته است. بر مبنای مدل انتقال گرمای غیرفوری، زارعی و مجاهدی [۲۷] به تحلیل ترمومکانیکی لیزر صفحه‌ای نئودیم: وانادات، تحت لیزر پالسی پرداخته و برای تپ‌های کوتاه نشان دادند که نظریه فوریه نمی‌تواند نتایج دقیقی ارائه دهد.

لیزرهای میله‌ای معمولاً دارای سطح مقطع دایره‌ای بوده و انتقال گرمای مناسبی دارند. همچنین لیزر دارای ماده فعال نئودیم-یاگ، از مهم‌ترین لیزرهای حالت جامد است که در صنایع پزشکی و نظامی کاربرد دارد. این لیزرها دارای خواص مکانیکی-حرارتی مناسب و بهره بالا هستند. در این مقاله با تکیه بر روش‌های تحلیلی، به محاسبه‌ی توزیع دما در بلور کریستالی حالت جامد میله‌ای نئودیم-یاگ پرداخته می‌شود. بلور تحت دمش پیوسته طولی قرار داشته و پرتوهای ورودی به‌صورت گوسی و سوپر گوسی مرتبه ۲ و ۳ در نظر گرفته می‌شود. بر مبنای سری فوریه و تبدیلات بسل یک پاسخ تحلیلی برای توزیع دما در بلور تعیین و کانتور دما محاسبه می‌گردد. با توجه به سری به‌دست آمده، مقدار بیشینه دما در حالات گوسی و سوپر گوسی محاسبه و با یکدیگر مقایسه می‌گردد. برای بررسی صحت نتایج به‌دست آمده توزیع دما روی محور طولی و شعاعی با نتایج المان محدود مقایسه شده و نتایج تحلیلی اعتبارسنجی می‌گردد. در ادامه با توجه به مقادیر به‌دست آمده، پدیده عدسی شدگی ناشی از تغییرات دما محاسبه و نقش پرتوهای گوسی و سوپرگوسی روی این نتایج مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

۲- فرضیات، شرح مدل سازی و حل

شکل ۱ یک بلور میله‌ای را تحت دمش یکنواخت طولی نشان می‌دهد. این میله دارای قطر 5mm و طول 0.1m و جنس آن از نئودیم:یاگ می‌باشد. کاربرد این بلور در فرآیندهای ساخت (حکاکی و نشانه گذاری)، نظامی (فاصله یاب‌ها)، دندانپزشکی (جراحی بافت نرم در دهان) و اتومبیل سازی (جایگزین سیستم جرقه‌زنی سنتی) می‌باشد [۱]. دمش به‌صورت دیدودی از سطح ورودی نشان داده شده و با طول موج 808nm انجام می‌پذیرد. مطابق با پژوهش‌های پیشین قسمتی از توان دمش، صرف گرم شدن محیط لیزر شده و گرما به‌صورت غیریکنواخت در میله توزیع می‌گردد. برای جلوگیری از بالا رفتن دما (که همراه)، عملیات خنک‌سازی از طریق سطوح جانبی میله انجام می‌پذیرد. در وضعیت نشان داده شده دمای سیال خنک‌کننده و سطح جانبی $T_0 = 291K$ لحاظ می‌گردد. همچنین از انتقال گرمای سطح ابتدا و انتهای میله (با توجه به کوچکی سطح آن در مقایسه با سطح جانبی بلور) با فضای اطراف صرف‌نظر می‌شود. همان‌طور که در شکل نشان داده شده است دمش از سطح جانبی اعمال گردیده و اندازه لکه پرتو در فاصله 2mm از سطح ورودی کمترین میزان و برابر با 0.002mm

مشخصات این بلور عبارت است از [۶]: ضریب شکست $n=1.82$

ضریب جذب $\alpha=4.1\text{cm}^{-1}$ ، ضریب نوری حرارتی $\frac{dn}{dT} = 7.3 \times 10^{-6}\text{K}^{-1}$

ضریب اتلاف حرارتی $\eta=42\%$ و رسانایی گرمایی $k = 14\text{ W/m.K}$

همچنین شعاع پرتو دمش تابعی از موقعیت و میزان کمینه آن

است که از طریق رابطه (۱) تعیین می‌شود [۱]:

$$\omega(z) = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{M^2 \lambda (z - z_0)}{\pi \omega_0^2}\right)^2} \quad (1)$$

در رابطه فوق λ طول موج دمش در فضای آزاد، ω شعاع لکه پرتو می‌باشد. M^2 فاکتور کیفیت بی‌بعد پرتو است و می‌توان به‌گونه‌ای انتخاب نمود که در نواحی خروجی میله، قطر لکه در حدود قطر میله گردد. دمش می‌تواند به‌صورت گوسی، سوپر گوسی مرتبه ۲ و ۳ باشد. در دمش گوسی شدت پرتو از رابطه (۲) تعیین می‌گردد [۲۸]:

$$I = I_0 \exp\left(-2\frac{r^2}{\omega^2} - \alpha z\right) \quad (2)$$

که r فاصله شعاعی از محور میله، I_0 شدت پرتو، α ضریب جذب و ω شعاع پرتو دمش می‌باشد.

با در نظر گرفتن شدت پرتو دمش، میزان گرمای جذب‌شده در واحد حجم برای حالت گوسی، با استفاده از رابطه (۳) تعیین می‌گردد:

$$Q = Q_0 \exp\left(-2\frac{r^2}{\omega^2} - \alpha z\right) \quad (3)$$

که:

$$Q_0 = \frac{\eta P}{2\pi \int_0^L \int_0^a r dr dz} \quad (4)$$

در رابطه 4 P توان ورودی، a و L شعاع و طول بلور می‌باشد.

با در نظر گرفتن دمش سوپر گوسی، شدت پرتو از رابطه (۵) می‌گردد [۲۸]:

$$I = I_0 \exp\left(-2\left(\frac{r^2}{\omega^2}\right)^n - \alpha z\right) \quad (5)$$

که برای پرتو گوسی مرتبه ۲، $n=2$ و برای پرتو گوسی مرتبه ۳، $n=3$ لحاظ می‌گردد.

و میزان گرمای جذب‌شده در حجم واحد از رابطه (۶) پیروی

می‌کند:

با شرایط مرزی:

$$\begin{cases} \hat{T}(a, z) = 0 \\ \frac{\partial \hat{T}}{\partial z}(r, 0) = \frac{\partial \hat{T}}{\partial z}(r, L) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

در تئوری و عمل شدت توزیع دمش طولی در بلور میله‌ای مستقل از مختصه محیطی است، لذا بار حرارتی به صورت متقارن نسبت به محور میله توزیع می‌شود. با توجه به تقارن محوری در هندسه و بارگذاری، تغییر دما صرفاً در جهت طولی و شعاعی می‌باشد. بنابراین در جهت محیطی دما ثابت فرض شده است.

در ادامه با توجه به دمش‌های گوسی و سوپر گوسی، حل تحلیلی معادله (۱۳) انجام شده و پاسخی همگرا برای دما و بیشینه آن (به صورت سری) ارائه می‌گردد.

برای حل معادله (۱۳)، ابتدا این معادله به صورت یک معادله همگن در نظر گرفته شده و یک تبدیل متناهی (محدود) فوریه مناسب، برای جهت طولی تعیین می‌گردد. تبدیل متناهی در جهت طولی به صورت رابطه (۱۵) در نظر گرفته می‌شود:

$$\mathbb{T}_n(r) = \mathbb{F}(\hat{T}(r, z)) = \frac{2}{L} \int_0^L \hat{T}(r, z) \cos\left(\frac{n\pi}{L}z\right) dz \quad (15)$$

که \mathbb{F} تبدیل فوریه متناهی کسینوسی (ضریب سری فوریه کسینوسی)، \hat{T} اختلاف دمای بلور با دمای سطح آن، $\mathbb{T}_n(r)$ اختلاف دمای بلور با سطح بعد از اعمال تبدیل فوریه متناهی کسینوسی و L طول بلور می‌باشد. با اعمال تبدیل فوق معادله (۱۳) به صورت معادله (۱۶) بازنویسی می‌گردد:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbb{T}_n}{\partial r} \right) - \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \mathbb{T}_n + \frac{\mathbb{Q}_n(r)}{k} = 0 \quad (16)$$

با شرط مرزی:

$$\mathbb{T}_n(a) = 0 \quad (17)$$

که:

$$\mathbb{Q}_n(r) = \frac{2}{L} \int_0^L Q(r, z) \cos\left(\frac{n\pi}{L}z\right) dz \quad n = 1, 2, \dots \quad (18)$$

$$\mathbb{Q}_0(r) = \frac{1}{L} \int_0^L Q(r, z) dz$$

با در نظر گرفتن پاسخ همگن معادله (۱۶) و شرایط مرزی آن، توابع ویژه معادله به شکل تابع بسل نوع اول مرتبه صفر می‌گردد. بنابراین پاسخ معادله (۱۶)، مطابق رابطه (۱۹) به شکل یک سری بسل در نظر گرفته می‌شود:

$$\mathbb{T}_n(r) = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\mathbb{T}}_{mn} J_0\left(\frac{\alpha_m}{a} r\right) \quad (19)$$

که α_m ریشه‌های معادله بسل صفر $J_0(x)=0$ و α_1 اولین ریشه معادله مذکور می‌باشد.

$$Q = Q_0 \exp\left(-2\left(\frac{r^2}{\omega^2}\right)^n - \alpha z\right) \quad (6)$$

با توجه به گرمای جذب شده بر واحد حجم در روابط (۳) و (۶)، بقای انرژی روی بلور میله‌ای تحت دمش به صورت رابطه (۷) برقرار است:

$$\oint_A -\vec{q} \cdot \vec{n} ds + \iiint_V Q dv = 0 \quad (7)$$

که ds و dv مساحت و حجم هر المان دیفرانسیلی بلور، A و V سطح و حجم کلی بلور، q بردار شار گذرنده از سطح، n بردار نرمال هر سطح دیفرانسیلی است. با در نظر گرفتن قانون رسانش فوریه [۲۹]:

$$\vec{q} = -k \nabla T \quad (8)$$

با جایگزینی رابطه (۸) در رابطه (۷) و استفاده از قضیه دیورژانس رابطه (۹) به دست می‌آید:

$$\iiint_V (k \nabla^2 T + Q) dv = 0 \quad (9)$$

بنابراین جهت برقرار بودن رابطه (۹)، لازم است رابطه (۱۰) برقرار شود:

$$k \nabla^2 T + Q(r, z) = 0 \quad (10)$$

در مختصات استوانه‌ای بارگذاری حرارتی مستقل از مختصه زاویه-ای است. بنابراین توزیع دما در هر حلقه از استوانه بلور، مستقل از موقعیت محیطی است. لذا با در نظر گرفتن لاپلاسی در مختصات استوانه‌ای و حذف عبارتهای وابسته به مختصه محیطی، معادله دیفرانسیل (۱۱) (جهت تعیین توزیع دما در بلور) به دست می‌آید:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{Q(r, z)}{k} = 0 \quad (11)$$

با شرایط مرزی:

$$\begin{cases} T(a, z) = T_0 \\ \frac{\partial T}{\partial z}(r, 0) = \frac{\partial T}{\partial z}(r, L) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

چنانچه دمای مرجع دمای سطح استوانه در نظر گرفته شود با انتخاب دمای $\hat{T} = T - T_0$ معادلات و شرایط مرزی به صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

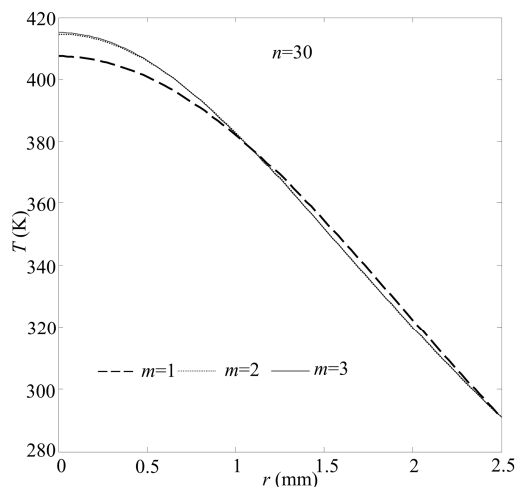
$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \hat{T}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial z^2} + \frac{Q(r, z)}{k} = 0 \quad (13)$$

$$f = \frac{1}{2L \frac{dn}{dT} a_2} \quad (26)$$

۳- نتایج

جهت صحه گذاری، نتایج تحلیلی این پژوهش برای توان ۱۲۰ وات با داده‌های تجربی لیزر میله‌ای Nd:YAG که در مرجع ارائه شده، در شکل ۲ مقایسه گردیده است. نتایج تجربی در فواصل ۱، ۵ و ۸ میلی-متر از بلور ۱۰ میلی‌متری به دست آمده است. انطباق نتایج نشان دهنده مدل‌سازی مناسب و دقت حل روش تحلیلی می‌باشد.

در ادامه با نتایج به پارامترهای داده شده در بخش مدل‌سازی، پاسخ دمای توزیع شده در بلور برای توان ۱۰۰ وات به صورت یک سری بیان گردیده است، همگرایی سری با در نظر گرفتن تعداد محدود جملات برای توابع ویژه در دو جهت شعاعی و طولی در نمودارهای شکل ۳ تا ۵ نشان داده شده است. در شکل ۳، توزیع دما برحسب موقعیت شعاعی برای حالتی که پاسخ شامل ۳۰ جمله در سری کسینوسی و به ترتیب ۱، ۲ و ۳ جمله در سری بسل است، نشان داده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، در پاسخ‌هایی که دارای دو و سه جمله بسل هستند تفاوتی مشاهده نمی‌گردد. بنابراین در نظر گرفتن سه جمله برای سری بسل مناسب است. همچنین نشان داده شده است که بیشترین میزان دما در موقعیت شعاعی روی محور (موقعیت صفر) ایجاد می‌شود.



شکل ۳- توزیع دما برحسب موقعیت شعاعی با در نظر گرفتن یک، دو و سه جمله برای سری بسل

شکل ۴ توزیع دما برحسب موقعیت طولی برای حالتی که پاسخ شامل ۳۰ جمله کسینوسی است، نشان داده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، مناسب بودن سه پاسخ برای توابع بسل در این شکل نیز مشاهده می‌گردد.

همچنین $Q_n(r)$ از طریق رابطه (۲۰) محاسبه می‌گردد:

$$Q_n(r) = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{Q}_{mn} J_0\left(\frac{\alpha_m r}{a}\right) \quad (20)$$

که:

$$\tilde{Q}_{mn} = \frac{4}{La^2 J_1(\alpha_m)} \int_0^a \int_0^L r Q(r, z) \cos\left(\frac{n\pi z}{L}\right) dz dr \quad (21)$$

با قرار دادن رابطه (۱۹) در رابطه (۱۵) و در نظر گرفتن معادله بسل:

$$\tilde{T}_{mn} = \frac{\tilde{Q}_{mn}}{k \left(\frac{\alpha_m^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right)} \quad (22)$$

بنابراین توزیع دما، با استفاده از سری رابطه (۲۲) تعیین می‌شود:

$$T(r, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{Q}_{mn}}{k \left(\frac{\alpha_m^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right)} \cos\left(\frac{n\pi z}{L}\right) J_0\left(\frac{\alpha_m r}{a}\right) + T_0 \quad (23)$$

همچنین از طبق رابطه (۲۳) ثابت می‌شود که بیشینه دما در ورودی بلور و روی محور آن ($r=0$ و $z=0$) ایجاد می‌شود و میزان آن برابر است با:

$$T_{max} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{Q}_{mn}}{k \left(\frac{\alpha_m^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right)} + T_0 \quad (24)$$

جهت به دست آوردن میزان عدسی شدگی در صفحه ورودی، ابتدا دما به صورت یک چند جمله‌ای مناسب در راستای محور r مطابق با رابطه، در نظر گرفته می‌شود:

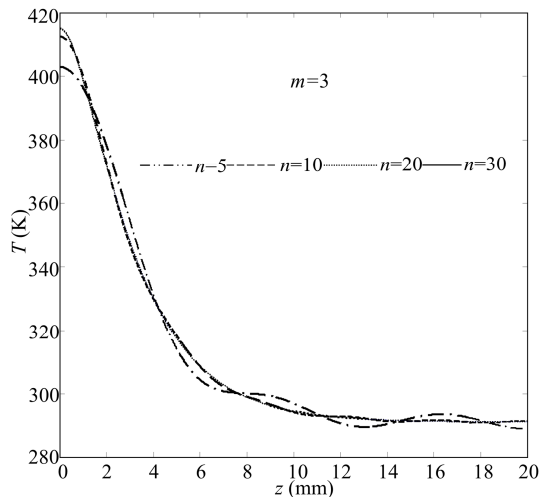
$$T(r, 0) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots \quad (25)$$

از آنجا که شعاع بلور ۰/۰۲۵ متر است، بیشینه مقدار r ، ۰.۰۰۲۵ می‌باشد. مطابق با جدول ۱، نشان داده شده است که خطای ناشی از حذف عبارت‌های دارای توان بیش از ۲ در رابطه (۲۵)، کمتر از ۰/۳ درصد است، بنابراین با تقریب مناسبی می‌توان عبارت‌های بالاتر از توان ۲ را صرف نظر نمود.

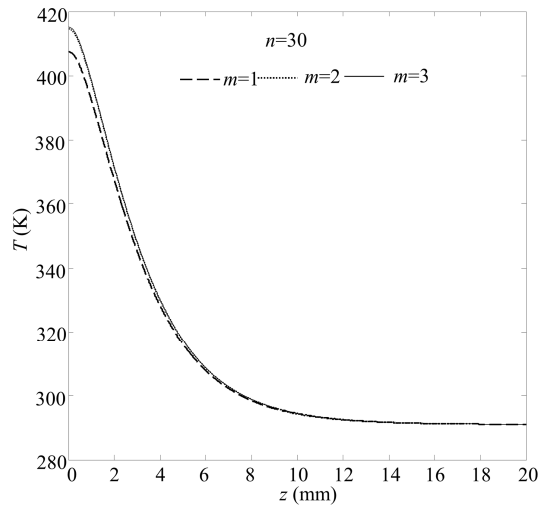
جدول ۱- خطای ناشی از حذف عبارت‌های مرتبه بالا

تقریب	حذف توان های بالاتر از توان ۲	حذف توان های بالاتر از توان ۳
بیشینه درصد میزان خطای نسبی	۰/۲۵	$6/25 \times 10^{-4}$

چند جمله‌ای به‌گونه‌ای انتخاب می‌شود که a_1 در مقایسه با a_2 ناچیز گردد. در این حالت فاصله کانونی عدسی تشکیل شده، از طریق رابطه (۲۶) به دست می‌آید [۱]:



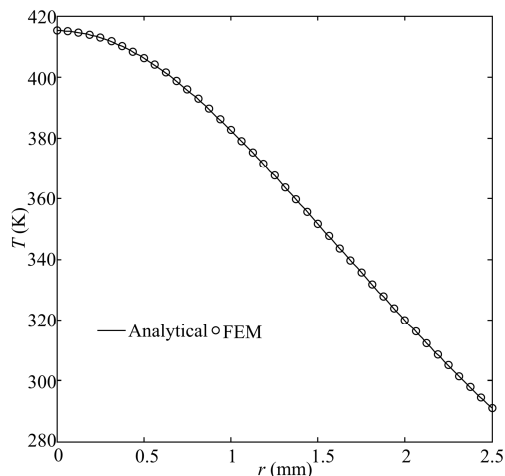
شکل ۶- توزیع دما برحسب موقعیت طولی با در نظر گرفتن ۵، ۲۰، ۱۰ و ۵۰ جمله برای سری کسینوسی



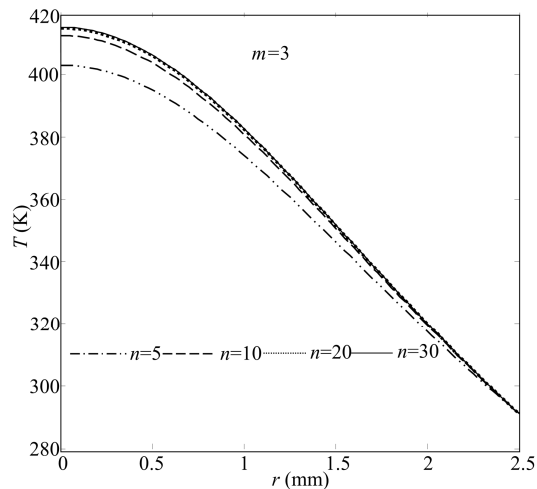
شکل ۴- توزیع دما برحسب موقعیت طولی با در نظر گرفتن یک، دو و سه جمله برای سری بسط

جهت صحت‌گذاری بیشتر، نتایج توزیع دما برحسب موقعیت‌های شعاعی و طولی به ترتیب در شکل ۷ و شکل ۸ به‌دست‌آمده و با نتایج حاصل از نرم‌افزار المان محدود Ansys مقایسه گردیده است. المان مورد استفاده المان Solid90 بوده و تعداد المان‌ها در این نرم‌افزار ۴۰۰۰۰۰ می‌باشد. نتایج تحلیلی با در نظر گرفتن سه جمله بسط و سی جمله کسینوسی به‌دست‌آمده است. شکل ۶ مقایسه بین نتایج المان محدود و حل تحلیلی را در موقعیت شعاعی نشان می‌دهد.

در شکل ۵، توزیع دما برحسب موقعیت شعاعی برای پاسخی که شامل ۴ جمله بسط و به ترتیب ۵، ۱۰، ۲۰ و ۳۰ جمله کسینوسی است، نشان داده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، در پاسخ‌هایی که دارای بیست و سی جمله کسینوسی هستند تفاوتی مشاهده نمی‌گردد. لذا در نظر گرفتن ۳۰ جمله برای توابع کسینوسی می‌تواند به‌خوبی توزیع دما را در محیط بلور پیش‌بینی نماید.



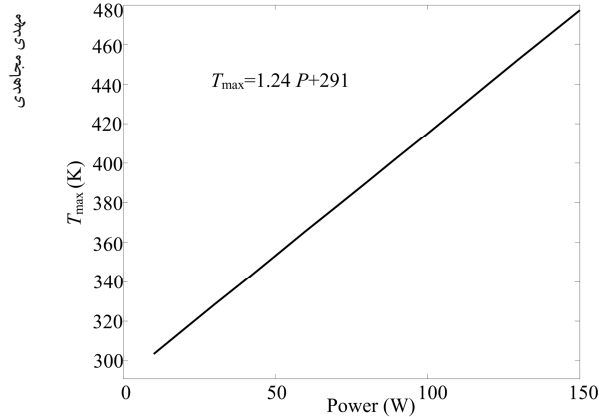
شکل ۷- نتایج تحلیلی و المان محدود برای توزیع دما در موقعیت شعاعی



شکل ۵- توزیع دما برحسب موقعیت شعاعی با در نظر گرفتن ۵، ۱۰، ۲۰ و ۳۰ جمله برای توابع کسینوسی

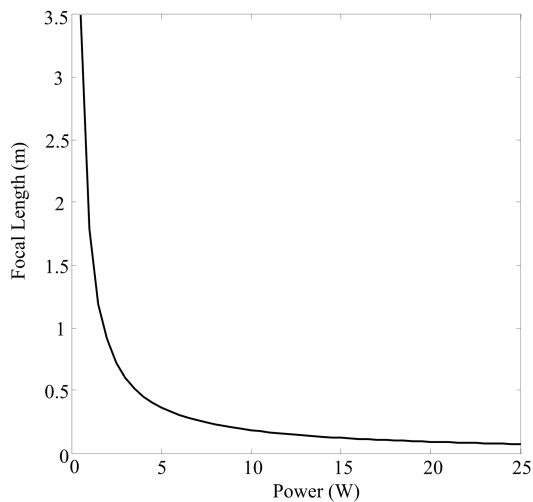
همچنین در شکل ۷ تطابق بسیار عالی بین نتایج تحلیلی و المان محدود مشاهده می‌شود.

شکل ۶ توزیع دما را برحسب موقعیت طولی برای حالتی که پاسخ شامل ۳ جمله برای سری بسط است، نشان داده شده است. همان‌طور که در این شکل نیز ملاحظه می‌شود، در نظر گرفتن ۳۰ جمله کسینوسی برای تحلیل گرمایی مناسب می‌باشد. توزیع دما در راستای محور طولی میله بعد از موقعیت طولی ۲۰ میلی‌متر ثابت گردیده و میزان دما برابر با دمای سطح خنک‌کاری شده می‌شود. از این‌رو نتایج تا فاصله ۲۰ میلی‌متری از صفحه ورودی محور طولی ترسیم گردیده است.



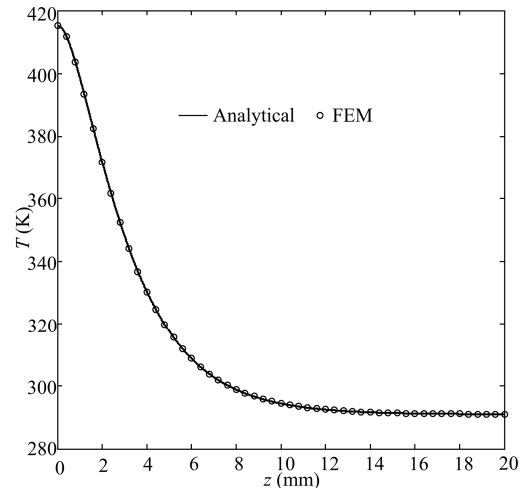
شکل ۱۰- بیشینه دمای بلور برحسب توان ورودی

در اثر توزیع حرارت در هر صفحه از بلور، عدسی گرمایی تولید و یک عدسی ایجاد می‌گردد. میزان کمی عدسی شدگی در بلور با کمیت فاصله کانونی سنجد می‌شود. در نمودار شکل ۱۱ فاصله کانونی برحسب توان ورودی نشان داده شده است، ملاحظه می‌گردد که با افزایش توان، فاصله کانونی کوچک‌تر و لنز گرمایی شدیدتر شده است. همچنین نشان داده شده است که برای توان بزرگ‌تر از ۲۰ وات، فاصله کانونی در داخل بلور قرار گرفته و کیفیت پرتو خروجی کاهش می‌یابد.



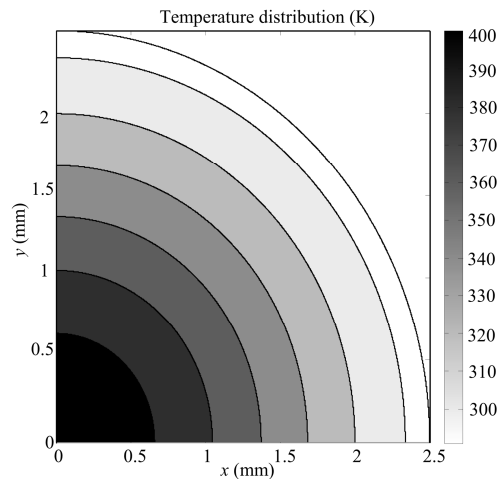
شکل ۱۱- فاصله کانونی برحسب توان ورودی

در توزیع پرتو دمشی، مدل گوسی و سوپرگوسی مطرح گردید، همان‌گونه که قبلاً گفته شد پرتو سوپرگوسی خود می‌تواند به صورت مرتبه ۲ و یا مرتبه ۳ اعمال گردد. در شکل ۱۲، یک مقایسه بین بیشینه دمای حالت‌های گوسی و سوپرگوسی برحسب توان ورودی انجام شده است. ملاحظه می‌گردد که بیشینه دمای حالت گوسی، به‌خصوص برای توان‌های بالا، بزرگ‌تر از حالت سوپرگوسی است. همچنین شیب نمودار در حالت سوپرگوسی مرتبه ۳ کوچک‌تر از شیب نمودارهای حالت‌های سوپرگوسی مرتبه ۲ و گوسی می‌باشد. این پدیده به دلیل یکنواخت‌تر بودن توزیع دمشی در حالت سوپرگوسی مرتبه ۳ نسبت به حالت سوپرگوسی مرتبه ۲ و گوسی می‌باشد.



شکل ۸- نتایج تحلیلی و المان محدود برای توزیع دما در موقعیت طولی

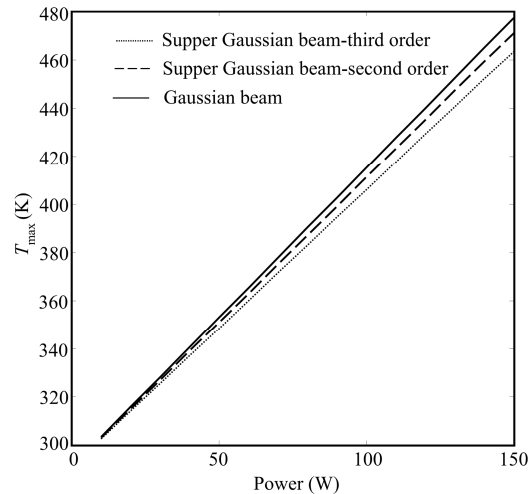
در شکل ۹ کانتور دمای یک‌چهارم میله در مختصات قطبی و در صفحه ورودی دمشی، که دارای بیشترین میزان دما می‌باشد، برای توان ورودی ۱۰۰ وات نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که بیشترین دما در مرکز میله رخ داده و هرچه فاصله شعاعی از مرکز بیشتر شود دمای به‌دست‌آمده به دمای سیال روی سطح نزدیک‌تر می‌گردد. به‌گونه‌ای که بعد از فاصله شعاعی ۲ میلی‌متری، دمای بلور تقریباً با دمای سطح خنک شده برابر است.



شکل ۹- کانتور قطبی دما محاسبه‌شده توسط روش تحلیلی در صفحه ورودی

بیشینه دمای بلور برحسب توان دمشی اعمال شده به آن، در شکل ۱۰ نشان داده شده است. همان‌طور که پیش‌بینی می‌شود با افزایش توان، دما افزایش می‌یابد. ملاحظه می‌شود که رابطه دمای بیشینه و توان اعمال شده به صورت خطی بوده و از رابطه $T_{max} = 1.24 P + 291$ پیروی می‌کند.

گرفتن ۳ جمله برای سری بسل و ۳۰ جمله برای توابع کسینوسی می‌توان به‌خوبی دمای توزیع‌شده در بلور را محاسبه نمود. نتایج به‌دست‌آمده با روش المان محدود در نرم‌افزار Ansys مقایسه شده است. تطابق عالی نتایج دو روش نشان می‌دهد که روش تحلیلی، با به دست آوردن یک رابطه صریح برای توزیع دما و بیشینه آن، می‌تواند به‌راحتی اثرات حرارتی دمش در بلور را بررسی نماید. در بلور مورد بررسی، مشاهده گردید که بیشینه دمای ایجادشده در بلور یک رابطه خطی با توان اعمالی دارد و این رابطه خطی $T_{max} = 1.24 P + 291$ برای تمامی توان‌های دمشی برقرار است. همچنین نشان داده شد که با افزایش توان، لنز گرمایی شدیدتر شده و فاصله کانونی برای توان‌های بزرگ‌تر از ۲۰ وات در دمش گوسی داخل بلور قرار می‌گیرد. مقایسه بین دمش گوسی و سوپرگوسی نشان می‌دهد که بیشینه دما در تحلیل گوسی بزرگ‌تر از دمش سوپرگوسی بوده و هر چه مرتبه سوپرگوسی بیشتر شود این اختلاف بزرگ‌تر می‌گردد و درنهایت فواصل کانونی ناشی از دمش سوپرگوسی بزرگ‌تر از دمش گوسی می‌باشد.



شکل ۱۲- بیشینه دمای بلور در حالت گوسی و سوپر گوسی مرتبه دو و سه

۵- سپاسگزاری

این پژوهش با حمایت دانشگاه فنی و مهندسی گلپایگان انجام شده است.

۶- نمادها

A	سطح بلور (m^2)
a	شعاع بلور (m)
I_0	شدت پرتو (Wm^{-3})
k	رسانایی گرمایی ($Wm^{-1}K^{-1}$)
L	طول بلور (m)
M^2	فاکتور بی‌بعد کیفیت پرتو
n	مرتبه سوپرگوسی
P	توان دمشی (W)
Q	توان جذب‌شده بر واحد حجم (Wm^{-3})
q	شار گرمایی (Wm^{-2})
T	دمای بلور (K)
T_0	دمای سطح خنک شده (K)
V	حجم کلی بلور (m^3)

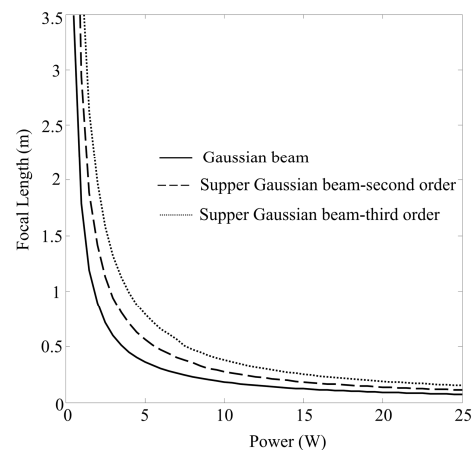
علائم یونانی

α	ضریب جذب (m^{-1})
λ	طول موج دمش در فضای آزاد (nm)
η	ضریب اتلاف حرارتی
ω	شعاع لکه پرتو

۷- مراجع

[1] Koehner W., *Solid-state laser engineering*: Springer, 2013.
 [2] Dudley N. J., West, W. C., Nanda, J., *Handbook of Solid State Batteries*: World Scientific, 2016.
 [3] Injeyan H., Pflug, G. C., Vespucci, M. T., *High Power Laser Handbook*: McGraw-Hill, 2011.
 [4] Ma Z., Li, D., Gao, J., Wu, N., Du, K., Thermal effects of the diode end-pumped Nd: YVO 4 slab. *Optics Communications*, Vol. 275, No. 1, pp. 179-185, 2007.

شکل ۱۳ تغییرات فاصله کانونی ناشی از لنز گرمایی ایجادشده در بلوری را که تحت دمش گوسی و سوپرگوسی مرتبه ۲ و ۳ است نشان می‌دهد. ملاحظه می‌گردد که با افزایش توان در هر سه حالت، فاصله کانونی کوچک می‌گردد. اما دمش سوپر گوسی مرتبه ۳ نسبت به سوپرگوسی مرتبه ۲ و گوسی دارای فاصله کانونی بزرگ‌تری می‌باشد. این اختلاف در محدوده توانی زیر ۵ وات قابل‌توجه بوده و نشان داده‌شده است که در دمش سوپرگوسی مرتبه ۲، برای توان‌های ورودی بیش از ۲۵ وات، فاصله کانونی به داخل بلور وارد می‌شود.



شکل ۱۳- فاصله‌های کانونی ایجادشده حالت‌های گوسی و سوپر گوسی

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله، توزیع دما در یک بلور میله‌ای تحت دمش پیوسته با استفاده از یک روش تحلیلی مبتنی بر سری‌های فوریه به‌صورت یک پاسخ بسته به دست آمد. در بررسی پاسخ تحلیلی مشاهده گردیده است که (علیرغم قرارگیری کمینه اندازه لکه در موقعیتی پس از صفحه ورودی) بیشینه دما روی محور میله و در صفحه ورودی دمش رخ می‌دهد. تحلیل همگرایی روی نتایج نشان داده است که با در نظر

- [23] Shibib K. S., Minshid, M. A., Alattar, N. E., Thermal and stress analysis in Nd: YAG laser rod with different double end pumping methods. *Thermal Science*, Vol. 15, pp. S399-S407, 2011.
- [24] Saravani M., Jafarnia, A., Azizi, M., Effect of heat spreader thickness and material on temperature distribution and stresses in thin disk laser crystals. *Optics & Laser Technology*, Vol. 44, No. 4, pp. 756-762, 2012.
- [25] Zhu G., Zhu, X., Dai, Z., Wang, Z., Zhu, C., Analytical model of optical path difference in an end-pumped Yb: YAG thin-disk laser with nonuniform pumping light. *Applied optics*, Vol. 54, No. 10, pp. 3024-3031, 2015.
- [26] Zhu G., Zhu, X., Wang, M., Feng, Y., Zhu, C., Analytical model of thermal effect and optical path difference in end-pumped Yb: YAG thin disk laser. *Applied optics*, Vol. 53, No. 29, pp. 6756-6764, 2014.
- [27] Zarei H. R., Mojahedi, M., Non-classical thermomechanical analysis of Nd:Yvo4 slab laser under multi-pulse end pumping using finite element method. *Mechanical Engineering Sharif*, Vol. 34, No. 2, pp. 125-132, 2018.
- [28] Ding X., Ren, Y., Lu, R., Shaping super-Gaussian beam through digital micro-mirror device. *SCIENCE CHINA Physics, Mechanics & Astronomy*, Vol. 58, No. 3, pp. 1-6, 2015.
- [29] Incropera F. P., Lavine, A. S., Bergman, T. L., DeWitt, D. P., *Principles of heat and mass transfer*: Wiley, 2013.
- [5] Ma Z., Gao, J., Li, D., Li, J., Wu, N., Du, K., Thermal stress effects of the diode-end-pumped Nd: YLF slab. *Optics Communications*, Vol. 281, No. 13, pp. 3522-3526, 2008.
- [6] Babaei Babil M., Safari, E., Thermal and stress analyses in an end-pumped Nd: YAG slab laser using finite element method. *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 28, No. 8, pp. 3231-3236, 2014.
- [7] Karoussis I. K., Kyriakidou, K., Psarros, C., Lang, N. P., Vrotsos, I. A., Nd: YAG laser radiation (1.064 nm) accelerates differentiation of osteoblasts to osteocytes on smooth and rough titanium surfaces in vitro. *Clinical Oral Implants Research*, 2016.
- [8] Lin J., Pask, H., Nd: GdVO4 self-Raman laser using double-end polarised pumping at 880 nm for high power infrared and visible output. *Applied Physics B*, Vol. 108, No. 1, pp. 17-24, 2012.
- [9] Liang D., Almeida, J., Guillot, E., Side-pumped continuous-wave Cr: Nd: YAG ceramic solar laser. *Applied Physics B*, Vol. 111, No. 2, pp. 305-311, 2013.
- [10] Ashoori V., Shayganmanesh, M., Radmard, S., *Heat generation and removal in solid state lasers*: INTECH Open Access Publisher, 2012.
- [11] Shayganmanesh M., Beirami, R., Evaluation of thermal effects on the beam quality of disk laser with unstable resonator. *Optics Communications*, Vol. 383, pp. 92-100, 2017.
- [12] Mohammadzahery Z., Jandaghi, M., Alipour, S., Dadras, S., Kazemi, S., Sabbaghzadeh, J., Theoretical study on thermal behavior of passively Q-switched microchip Nd: YAG laser. *Optics & Laser Technology*, Vol. 44, No. 4, pp. 1095-1100, 2012.
- [13] Grigore O. V., Croitoru, G., Dascalu, T., Pavel, N., Diode-laser edge-pumped Nd: YAG/YAG lens-shaped composite laser. *Optics & Laser Technology*, Vol. 94, pp. 86-89, 2017.
- [14] Mojahedi M., Shekoohinejad, H., Thermal Stress Analysis of a Continuous and Pulsed End-Pumped Nd: YAG Rod Crystal Using Non-Classic Conduction Heat Transfer Theory. *Brazilian Journal of Physics*, Vol. 48, No. 1, pp. 46-60, 2018.
- [15] Huang T., Huang, W., Wang, J., Lu, X., Pan, X., Guo, J., Fan, W., Li, X., High energy diode-pumped sapphire face-cooled Nd: glass multi-slab amplifier. *J Optics Laser Technology*, Vol. 107, pp. 415-423, 2018.
- [16] Liu J., Liu, Y., Tang, X., Wang, C., Liu, L., Chen, L., Li, N., Wang, K., Liang, X., Lü, K., A design of a surface-doped Yb: YAG slab laser with high power and high efficiency. *J Chinese Optics Letters*, Vol. 16, No. 10, pp. 101401, 2018.
- [17] Eggleston J., Kane, T., Kuhn, K., Untermahrer, J., Byer, R., The slab geometry laser--part I: theory. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, Vol. 20, No. 3, pp. 289-301, 1984.
- [18] Kane T., Eggleston, J., Byer, R., The slab geometry laser-Part II: Thermal effects in a finite slab. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, Vol. 21, No. 8, pp. 1195-1210, 1985.
- [19] Liu T., Yang, Z., Xu, S., Analytical investigation on transient thermal effects in pulse end-pumped short-length fiber laser. *Optics express*, Vol. 17, No. 15, pp. 12875-12890, 2009.
- [20] Lu F., Gong, M., Xue, H., Liu, Q., Gong, W., Analysis on the temperature distribution and thermal effects in corner-pumped slab lasers. *Optics and lasers in engineering*, Vol. 45, No. 1, pp. 43-48, 2007.
- [21] Zhang S., Xu, J., Transient thermal effect in the gain medium of pulsed and end-pumped laser, in *Proceeding of Optical Society of America*, pp. TUP4_6, 2009.
- [22] Marmois E., Cardinali, V., Le Touzé, G., Le Garrec, B., Experimental measurements and finite-element modelling of thermal effects in Yb3+ doped sesquioxide thin disk lasers, in *Proceeding of International Society for Optics and Photonics*, pp. 77210O-77210O-14, 2010.