

# فرمول‌بندی الاستیک پوسته‌های متقارن محوری ناهمگن با انحنای دلخواه و ضخامت متغیر با نظریه برشی مرتبه اول

محمد جواد خوش‌گفتار\*، استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه اراک، اراک، ایران

## چکیده

تحلیل الاستیک پوسته‌های متقارن محوری با استفاده از نظریه برشی مرتبه اول در این مقاله ارائه شده است. ابتدا با در نظر گرفتن پوسته متقارن با انحنای دلخواه و ضخامت متغیر، فرمول‌بندی عمومی پوسته با استفاده از روش انرژی ارائه شده است. در ادامه با در نظر گرفتن سیلندر با ضخامت ثابت و همچنین ضخامت متغیر به عنوان پوسته‌های متقارن محوری، به بررسی روش‌های حل و ارائه نتایج پرداخته شده است. با ارائه نتایج عددی تحلیل حاضر با حل کلاسیک مقایسه شده است. ماده ناهمگن، تاثیر شرایط مرزی بر روی رفتار سیلندر، فشار غیر یکنواخت، انحنای دلخواه و ضخامت متغیر از مزیت‌های تحلیل ارائه شده می‌باشد. ناهمگنی به صورت تغییرات در ضخامت و به صورت تابع توانی در نظر گرفته شده است. طیف وسیعی از پوسته‌ها با در نظر گرفتن انحنای دلخواه و ضخامت متغیر با فرمول‌بندی ارائه شده قابل تحلیل می‌باشند. کاربردهای بسیار این گونه پوسته‌ها در صنعت مانند صنعت هوا فضا وجود دارد. با تحلیل حاضر توانایی رسیدن به ضخامت بهینه و همچنین خواصی مانند مقاومت گرمایی با استفاده از مواد ناهمگن وجود دارد.

واژه‌های کلیدی: پوسته متقارن، تحلیل الاستیک، نظریه برشی.

## Elastic formulation of non-homogenous symmetric shells with arbitrary curvature and variable thickness by first order shear deformation theory

M. J. Khoshgoftar

Department of Mechanical Engineering, Arak University, Arak, Iran

### Abstract

Elastic analysis of a non-homogenous symmetric shells with arbitrary curvature and variable thickness is considered in the present research. First order Shear Deformation Theory and total potential energy approach is applied for obtaining the governing equations of non-homogenous symmetric shell. As a special case, the governing equations are rewritten for a cylinder with variable thickness. Analytical method for constant thickness and Perturbation method for variable thickness are used for solving the governing equations and obtaining results. The comparison between classical theory and First order Shear Deformation Theory (FSDT) are illustrated with some numerical results. Non-homogenous material, boundary condition effects, non-uniform pressure, arbitrary curvature with variable thickness are some advantages of current work. Functionally graded material is considered as non-homogenous material. Gradation is considered for all mechanical properties along the thickness direction based on a power function. Homogenous material and non-homogenous material by difference in non-homogeneity parameter can be studied with the present research. There is some applications of varying thickness shells in industrial like aerospace engineering. We can reach to optimum design of thickness and also some property like high temperature residence by applying non homogenous material.

**Keywords:** Symmetric shell, elastic analysis, deformation theory.

شده است که تغییرات ناگهانی در ترکیب و خواص مواد سازنده‌ی یک جزء منجر به تمرکز تنش در محل مذکور می‌شود [۷]. همچنین مشخص شده است اگر این تغییرات خواص تدریجی باشد تمرکز تنش کاهش می‌یابد. با این مقدمه کاربرد هر چه بیشتر موادی که دارای تغییرات تدریجی در ساختار میکروسکوپی ترکیب‌شان هستند احساس می‌شود.

از سوی دیگر، در سال‌های اخیر با توسعه موتورهای پرقدرت صنایع هوا فضا، توربین‌ها و راکتورها و دیگر ماشین‌ها نیاز به موادی با مقاومت حرارتی بالا و دارای استحکام بالا احساس شده است. بنابر مشکلاتی که در صنایع مختلف برای مواد تحت تنش‌های حرارتی بالا وجود داشت، دانشمندان علم مواد برای اولین بار موادی تابعی یا FGM<sup>۱</sup> را به عنوان مواد با تحمل حرارتی بالا پیشنهاد نمودند.

این مواد در ساخت صفحات و پوسته‌های مخازن راکتورها و توربین‌ها و دیگر اجزای ماشین‌ها کاربرد بالایی دارند، زیرا این قطعات

### ۱- مقدمه

پوسته‌ها یکی از پرکاربردترین انواع سازه‌های مهندسی هستند که با کمترین مواد بازده مکانیکی بالایی را ایجاد می‌کنند. صنایع فضایی، دریایی، هسته‌ای، نفت، آب و عمده‌ی صنایع تولیدی از پوسته‌های مختلف استفاده می‌کنند. مخازن تحت فشار، بال و بدنه هواپیما، لوله‌ها، بدنه راکت‌ها، موشک‌ها، کلاهک‌ها، سقف‌های گنبدی، بدنه اتومبیل‌ها، پرتابه‌ها، تجهیزات تصفیه، مخازن راکتورهای اتمی، سیلوها، سدها و هزاران نوع دیگر همه از کاربردهای مختلف پوسته‌ها می‌باشند. دانش پژوهان به دنبال اعمال تغییرات بر روی هندسه و ماده پوسته‌ها بوده تا بتوانند مقاومت آنها را در برابر انواع تنش‌های مکانیکی و حرارتی افزایش و در صورت امکان وزن آنها را کاهش دهند.

بسیاری از اجزای سازه‌ای تحت شرایط خاصی قرار می‌گیرند که نیاز به عملکرد بهینه مواد استفاده شده دارند. به عنوان مثال بدنه یک چرخ‌دنده باید سفتی مناسبی داشته باشد در حالی که سطح دندانه‌های آن باید سخت و مقاوم در برابر سایش باشد. امروزه به خوبی مشخص

<sup>۱</sup> Functionally Graded Material

[۱۱] نیز حالت‌های مختلف نظریه برشی را برای سیلندر ناهمگن مورد بررسی قرار داد و حل خود را با حل الاستیسیته مقایسه نمود. او نشان داد علاوه بر اینکه نظریه برشی مرتبه اول دقت قابل قبولی برای تحلیل مسئله می‌دهد اما با بالا بردن ترم‌های نظریه برشی می‌توان به نتایج با دقت بیشتری دست پیدا کرد.

کانگ [۱۲] فرمول‌بندی عمومی برای یک پوسته متقارن محوری با انحنا و ضخامت متغیر را ارائه داد. او از روش تعادل برای رسیدن به معادلات نهایی سیستم بهره برد. در واقع او از اثر ضخامت متغیر بر سازه صرف‌نظر کرد چرا که با معادلات تعادل نمی‌توان به معادلات حاکم بر سیستم رسید و باید از روش انرژی بهره برد. وو و لیو [۱۳] به فرمول‌بندی پوسته‌های کامپوزیتی جدار ضخیم با استفاده از روش انرژی پرداختند. آنها میدان جابجایی را برای هر لایه به صورت جداگانه با استفاده از نظریه برشی مرتبه بالا در نظر گرفته و سپس با اعمال شرایط مرزی مناسب پاسخ پوسته را در حالت‌های خاص بدست آوردند. سانتوس و همکاران [۱۴] حل نیمه تحلیلی المان محدود برای پوسته ساخته شده از مواد هدفمند ارائه نمودند. آنها با بسط توابع جابجایی با استفاده از سری فوریه در راستای شعاعی؛ مسئله سه بعدی را به مسئله دوبعدی تبدیل کرده و سپس به ارائه روش حل برای آن پرداختند.

تحلیل‌های متفاوتی بر روی پوسته‌ها در حالت ترمومکانیکی نیز انجام شده است. به عنوان نمونه بهتوی و اسلامی [۱۵] حالت ترموالاستیسیته پوسته‌ای استوانه‌ای تحت بار حرارتی را مورد بررسی قرار دادند. آنها نیز از نظریه برشی مرتبه اول استفاده نموده و خواص ماده را به صورت تابعی در نظر گرفتند. خوش‌گفتار و همکاران [۱۶] آنالیز ترموالاستیک سیلندر مدرج را در سال ۲۰۰۹ ارائه کردند. آنها تمام خواص مکانیکی و الکتریکی را به صورت متغیر و بر اساس یک تابع توانی در نظر گرفتند. جباری و همکاران [۱۷] به آنالیز ترموالاستیک سیلندر ساخته شده از مواد هدفمند جدار ضخیم تحت بار حرارتی و مکانیکی پرداختند. آنها تغییر خواص مواد بر حسب تغییر مکان را به صورت متقارن و تابعی از مختصات شعاعی در نظر گرفتند. آنها در ابتدا توزیع دمای حاکم بر سیلندر در یک میدان دو بعدی متقارن در سیلندر ارائه کردند. سپس با اعمال توزیع دما در دو رابطه تعادل حاکم، دو معادله ناویر نهایی بر حسب دو متغیر تغییر مکان بدست آمد. دو معادله دیفرانسیل جزئی ناویر غیر همگن با یافتن حل‌های خصوصی و عمومی حل شدند. شائو [۱۸] به بررسی ترموالاستیک سیلندر جدار ضخیم تحت بار مکانیکی و حرارتی پرداخت. شائو سیلندر را به تعداد زیادی لایه هموزن تقسیم کرده و معادلات حاکم را برای هر لایه جداگانه حل کرد. سپس شرایط مرزی را بین هر دو لایه و همچنین برای لایه‌های داخلی و خارجی اعمال کرده و جواب نهایی مسئله را تعیین نمود. تحلیل دینامیکی ترموالاستیک سیلندر با لایه ناهمگن توسط دای و رانو [۱۹] بررسی شد. آنها از روش دیفرانسیل محدود برای حل معادلات خود استفاده کرده و دقت کار خود را نشان دادند.

نظریه برشی مرتبه اول حتی برای حالت‌های دینامیکی مختلف نیز بسیار به کار برده شده است. به عنوان نمونه زانگ و همکاران [۲۰] سیلندر ناهمگن دو سر گیردار تحت بارهای مکانیکی و حرارتی متغیر را تحلیل نمودند. آنها از اصل همیلتون استفاده کردند. آمابیلی و ردی [۲۱] ارتعاشات پوسته با انحنای دلخواه را با استفاده از نظریه برشی مرتبه بالا مورد بررسی قرار دادند. آنها با ارائه مثال سیلندر دو سر

آمادگی بالایی جهت واماندگی<sup>۱</sup> ناشی از کمانش<sup>۲</sup> حرارتی دارند. از دیگر مزایای مواد FG نسبت به مواد کامپوزیت لایه‌ای، عدم گسستگی در محل اتصال لایه‌ها می‌باشد، زیرا همان‌طور که گفته شد در مواد FG ترکیب مواد پیوسته می‌باشد.

لامی در سال ۱۸۵۲ حل دقیق یک سیلندر جدار ضخیم تحت فشار داخلی و خارجی را ارائه کرد [۱]. حل تحلیلی استوانه ناهمگن با استفاده از نظریه الاستیسیته توسط رحیمی و همکاران [۲] منتشر گردید. آنها در واقع تنها جابجایی را در راستای شعاعی در نظر گرفته و از جابجایی محوری صرف‌نظر کردند. با این فرض آنها توانستند حل تحلیلی برای سیلندر مورد نظر ارائه کنند. توتونجو و ازترک [۳] در سال ۲۰۰۱، حل دقیقی را برای مخازن استوانه‌ای و کره‌ی جدار ضخیم ساخته شده از مواد هدفمند ارائه کردند. آنها با اعمال فشار داخلی بر سیلندر و کره، تغییر مکان و تنش ایجاد شده در سیلندر و کره را محاسبه و نتایج حاصل را با نتایج سیلندر و کره ایزوتروپیک مقایسه کردند.

تاریخچه‌ای از نظریه برشی<sup>۳</sup> تا به امروز در مقاله ردی و ارسینینگا [۴] آورده شده است. آنها علاوه بر بحث در رابطه با نظریه‌های مختلف برشی برای ورق و پوسته، با ارائه مثال و نتایج عددی به بحث درباره قابلیت‌های این روش پرداختند. قناد و همکاران [۵] استوانه ساخته شده از مواد هدفمند را با استفاده از نظریه برشی مرتبه اول مورد مطالعه قرار دادند. آنها با در نظر گرفتن تنها مدول الاستیسیته به صورت تابع توانی به بازنویسی روابط بر اساس توان‌های مختلف و بدست آوردن ضرایب معادلات حاکم بر سیلندر اقدام نمودند. خوش‌گفتار و همکاران [۶] حل دقیقی برای سیلندر ناهمگن تحت فشار غیر یکنواخت داخلی با استفاده از نظریه برشی مرتبه اول ارائه نمودند. آنها با در نظر گرفتن فشار غیر یکنواخت و به کار بستن نظریه برشی مرتبه اول نشان دادند که تغییرات میدان جابجایی تنها در نزدیکی مرزها اهمیت نداشته بلکه در نقاط دور از مرز نیز حائز اهمیت می‌باشد.

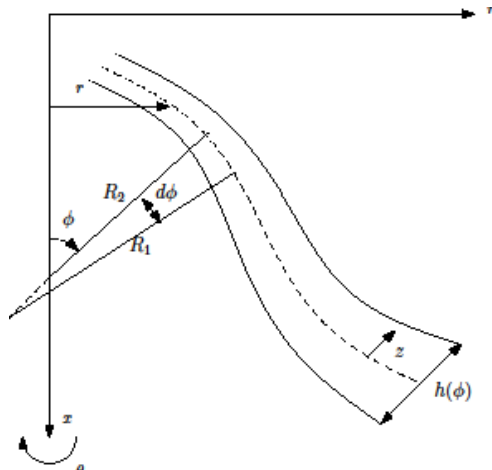
مروری بر تحقیقات انجام گرفته در پوسته‌های استوانه‌ای ساخته شده از مواد تابعی توسط دای و همکاران [۷] انجام شده است. آنها به بررسی کارهای انجام شده در این زمینه بین سالهای ۲۰۰۰ تا ۲۰۱۵ پرداخته‌اند. اسدی و همکاران [۸] نظریه برشی مرتبه اول را برای تحلیل پوسته استوانه‌ای به کار بستند. آنها با حل سه بعدی پوسته مورد نظر با استفاده از تحلیل المان محدود به مقایسه و اعتبار سنجی حل خود پرداختند. ایپکچی و همکاران [۹] تحلیل الاستیک پوسته جدار ضخیم مخروطی را انجام دادند. آنها ضخامت پوسته را متغیر و فشار داخلی را نیز غیر یکنواخت در نظر گرفتند. آنها با به کار بستن نظریه اغتشاشات<sup>۴</sup> توانستند حل نیمه تحلیلی برای پاسخ پوسته مورد نظر ارائه و با نتایج المان محدود مقایسه نمایند. عارفی و رحیمی [۱۰] با در نظر گرفتن بار حرارتی و مکانیکی، تاثیر ناهمگنی‌های مختلف و مرزها را برای سیلندر دو سر گیردار منتشر کردند. آنها نیز از روش انرژی و نظریه برشی برای تحلیل مسئله خود استفاده نمودند. زوزولیا

<sup>1</sup> failure

<sup>2</sup> buckling

<sup>3</sup> Shear deformation theory

<sup>4</sup> Perturbation theory



شکل ۱- مقطع پوسته متقارن محوری با انحنای دلخواه

به دلیل شرایط تقارن محوری، جابجایی در راستای محیطی وجود نداشته و در نتیجه تمام مشتقات در این راستا صفر می‌باشد. با انتخاب نظریه برشی مرتبه اول به صورت زیر، به تحلیل سیلندر پرداخته می‌شود [۶].

$$u_{\phi}(z, \phi) = u_0(\phi) + u_1(\phi)z$$

$$u_{\theta} = 0$$

$$u_z(z, \phi) = v_0(\phi) + v_1(\phi)z$$
(۲)

که در آن، مولفه‌های جابه‌جایی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$u_0 = u_{\phi}(0, \phi) \quad v_0 = u_z(0, \phi)$$

$$v_1 = \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)_{z=0} \quad u_1 = \left( \frac{\partial u_{\phi}}{\partial z} \right)_{z=0}$$
(۳)

در واقع مقادیر \$v\_1\$ و \$u\_1\$ میزان دوران المان پوسته در صفحه میانی را نشان می‌دهند. با توجه به فرضیات مسئله روابط کرنش-جابجایی برای مختصات عمومی به صورت زیر بازنویسی می‌شوند [۲۴].

$$\epsilon_{\phi\phi} = \frac{1}{R_2}(u_{\phi, \phi} + u_z) \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{\cos(\phi)u_{\phi} + \sin(\phi)u_z}{r}$$

$$\epsilon_{zz} = u_{z, z} \quad \epsilon_{\phi z} = \frac{1}{2}u_{\phi, z} + \frac{1}{2R_2}(u_{z, \phi} - u_{\phi})$$

$$\epsilon_{\phi\theta} = 0 \quad \epsilon_{z\theta} = 0$$
(۴)

با در نظر گرفتن روابط (۲) برای میدان جابجایی و استفاده از روابط (۴) میتوان کرنش را بر حسب مؤلفه‌های جابجایی بدست آورد:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{\phi\phi} \\ \epsilon_{\theta\theta} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{\phi z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{\phi\phi}^{(0)} \\ \epsilon_{\theta\theta}^{(0)} \\ \epsilon_{zz}^{(0)} \\ \epsilon_{\phi z}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \epsilon_{\phi\phi}^{(1)} \\ \epsilon_{\theta\theta}^{(1)} \\ \epsilon_{zz}^{(1)} \\ \epsilon_{\phi z}^{(1)} \end{Bmatrix}$$
(۵)

که در آن:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{\phi\phi}^{(0)} \\ \epsilon_{\theta\theta}^{(0)} \\ \epsilon_{zz}^{(0)} \\ \epsilon_{\phi z}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{u_{0, \phi} + v_0}{R_2} \\ \frac{\cos(\phi)u_0 + \sin(\phi)v_0}{r} \\ v_1 \\ \frac{1}{2}u_1 + \frac{v_{0, \phi} - u_0}{R_2} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \epsilon_{\phi\phi}^{(1)} \\ \epsilon_{\theta\theta}^{(1)} \\ \epsilon_{zz}^{(1)} \\ \epsilon_{\phi z}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{u_{1, \phi} + v_1}{R_2} \\ \frac{\cos(\phi)u_1 + \sin(\phi)v_1}{r} \\ 0 \\ \frac{v_{1, \phi} - u_1}{R_2} \end{Bmatrix}$$
(۶)

\$\epsilon^{(0)}\$ معرف کرنش غشایی و \$\epsilon^{(1)}\$ معرف کرنش خمشی در پوسته

گیردار، تاثیر ترم‌های غیر خطی را مورد مطالعه قرار دادند. تورنابن و ویولا [۲۲] به بررسی ارتعاشات آزاد پوسته های متقارن محوری پرداختند. آنها از نظریه برشی مرتبه اول استفاده کرده و همچنین جنس پوسته را نیز از مواد هدفمند انتخاب کردند. آنها از روش تربع دیفرانسیل<sup>۱</sup> برای حل معادلات استفاده نمودند.

در این زمینه مقالاتی نیز با در نظر گرفتن خاصیت پیزوالکتریک<sup>۲</sup> برای پوسته به چاپ رسیده است. عارفی و رحیمی [۲۳] فرمول‌بندی پوسته های ناهمگن ضخیم با خاصیت پیزوالکتریک را ارائه نمودند. آنها انحنای پوسته را دلخواه و ضخامت آن را متغیر در نظر گرفتند. تحلیل پوسته پیزوالکتریک با استفاده از نظریه کوپل تنش اصلاح شده [۲۴]، نظریه غیر محلی [۲۵] و همچنین پوسته پیزوالکتریک بر بستر وینکلر [۲۶] توسط محققان مورد بررسی قرار گرفته و فرمول‌بندی آنها بدست آمده است. همچنین تحلیل ارتعاشات پوسته پیزوالکتریک [۲۷] و فرمول‌بندی پوسته پیزوالکتریک در میدان مغناطیسی [۲۸] در مقالات اخیر بررسی شده و به چاپ رسیده است.

در این مقاله به فرمول‌بندی پوسته متقارن محوری با انحنای دلخواه و ضخامت متغیر با استفاده از نظریه برشی پرداخته خواهد شد. با بدست آوردن معادلات حاکم بر پوسته مورد نظر، به ارائه حل برای حالت‌های مختلف و بررسی نتایج پرداخته خواهد شد. با در نظر گرفتن فشار متغیر و ضخامت متغیر، ارائه ی حل با استفاده از نظریه اغتشاشات انجام شده است. تاثیر شرایط مرزی همراه با تغییرات فشار و ضخامت متغیر مورد بررسی قرار خواهد گرفت. جنس پوسته ناهمگن در نظر گرفته شده که در راستای ضخامت تغییر می‌کند. در نهایت با ارائه نتایج عددی قابلیت های فرمول‌بندی نشان داده خواهد شد.

## ۲- فرمول‌بندی عمومی پوسته متقارن محوری

در این قسمت با به کار بستن تئوری برشی مرتبه اول و روش انرژی، معادلات حاکم بر پوسته متقارن محوری با انحنای دلخواه و ضخامت متغیر ارائه می‌شود. طرحواره مقطع پوسته مورد نظر به همراه محور تقارن در شکل ۱ نشان داده شده است. همان طور که در شکل نشان داده شده است، انحنای پوسته با دو شعاع \$R\_1\$ و \$R\_2\$ تعریف می‌شود. انحنای میانی پوسته را منحنی نصف النهاری می‌نامند. \$R\_1\$ شعاع انحنای در صفحه‌ی نصف النهاری و \$R\_2\$ شعاع انحنای در صفحه عمود بر صفحه‌ی نصف النهاری می‌باشد که توسط رابطه زیر بدست می‌آیند [۱].

$$R_1 = \frac{(1+r^2)^{3/2}}{r^2}, \quad R_2 = r(1+r^2)^{1/2}$$
(۱)

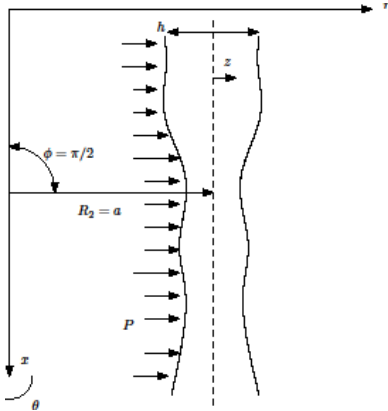
دستگاه مختصات منحنی الخط \$(\phi, z, \theta)\$ برای تعیین مختصات پوسته را می‌توان به کار برد. \$\phi\$ زاویه بین عمود بر منحنی نصف النهاری و محور تقارن، \$z\$ فاصله عمودی تا منحنی نصف النهاری و \$\theta\$ زاویه‌ی محیطی می‌باشد.

<sup>1</sup> DQM  
<sup>2</sup> piezoelectric

جدول ۱- معرفی تعدادی از انحناهای پر کاربرد

نوع پوسته	$R_1$	$R_2$
کروی	$a$	$a$
استوانه ای	$\infty$	$a$
مخروطی	$\infty$	$\frac{r}{\sin(\varphi_0)}$
سه‌موی	$\frac{2a}{\cos^3 \varphi}$	$\frac{2a}{\cos \varphi}$
بیضوی	$\frac{a^2 b^2}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{3/2}}$	$\frac{a^2}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{1/2}}$

یکی از پرکاربردترین انواع پوسته‌ها، پوسته‌های استوانه ای می‌باشد. این دسته از پوسته‌ها در مخازن، راکتورها، مبادله‌کن‌ها و سایر تجهیزات شیمیایی، هسته ای و نظامی کاربرد دارد. در این بخش، سیلندر ناهمگن با ضخامت ثابت و متغیر و فشار غیر یکنواخت مورد بررسی قرار خواهد گرفت به عنوان نمونه ای پر کاربرد از پوسته‌های متقارن مورد بررسی قرار می‌گیرد. شعاع‌های اصلی منحنی نصف النهاری در جدول ۱ آورده شده است. طرحواره سیلندر در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۲- طرحواره سیلندر

همان طور که در شکل مشاهده می‌شود،  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  و  $R_1 = \infty$  میباشد، بنابراین می‌توان متغیر جدید زیر را معرفی و روابط را بر اساس آن بازنویسی کرد.

$$R_1 d\varphi = dx \quad (11)$$

با در نظر گرفتن متغیر جدید معرفی شده در رابطه (۱۱)، روابط حاکم بر سیلندر مورد نظر پس از بازنویسی روابط (۱۰) به صورت زیر بیان خواهد شد.

می‌باشد. تغییرات انرژی بر واحد حجم را می‌توان با استفاده از رابطه زیر محاسبه نمود [۶].

$$\delta U = 2\pi \int_{\Omega} (\sigma_{\varphi\varphi} \delta \varepsilon_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz} \delta \varepsilon_{zz} + \sigma_{\theta\theta} \delta \varepsilon_{\theta\theta} + \sigma_{\varphi z} \delta \varepsilon_{\varphi z}) R_2 r d\varphi dz \quad (7)$$

با در اختیار داشتن میدان کرنش-جابجایی و روابط هوک در دستگاه مختصات عمومی، تنش‌ها با استفاده از روابط زیر محاسبه می‌شوند [۶].

$$\sigma_i = \lambda(\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) + 2G \varepsilon_i \quad i = \varphi\varphi, \theta\theta, zz$$

$$\sigma_{\varphi z} = 2G \varepsilon_{\varphi z} \quad (8)$$

با در نظر گرفتن فشار داخلی  $P$ ، تغییرات کار نیروی خارجی را می‌توان با استفاده از رابطه زیر محاسبه نمود. فشار داخلی بر حسب دستگاه مختصات تعریف شده در شکل ۱ غیر یکنواخت و به صورت فشار داخلی در نظر گرفته می‌شود.

$$\delta W = 2\pi \int_{\varphi} P(r, \varphi, z = \frac{t}{2}) \delta u_z d\varphi \quad (9)$$

با در نظر گرفتن اصل کار مجازی،  $\delta U = \delta W$ ، و جایگذاری روابط (۷) و (۹) و همچنین یک سری محاسبات ریاضی، معادلات رفتاری حاکم بر پوسته متقارن محوری به صورت روابط زیر بدست خواهد آمد.

$$\delta u_0: \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{d}{d\varphi} (r \sigma_{\varphi\varphi}) - \frac{\cos(\varphi)(R_1+z)}{\sin(\varphi)(R_2+z)} \sigma_{\theta\theta} + r \tau_{\varphi z} \right) dz = 0$$

$$\delta u_1: \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{d}{d\varphi} (r \sigma_{\varphi\varphi}) z - \frac{\cos(\varphi)(R_1+z)}{\sin(\varphi)(R_2+z)} \sigma_{\theta\theta} z - r R_1 \tau_{\varphi z} \right) dz = 0 \quad (10)$$

$$\delta v_0: \int_{-h/2}^{h/2} \left( r \sigma_{\varphi\varphi} + \frac{R_1+z}{R_2+z} \sigma_{\theta\theta} - \frac{d}{d\varphi} (r \tau_{\varphi z}) \right) dz = P r_i$$

$$\delta v_1: \int_{-h/2}^{h/2} \left( r \sigma_{\varphi\varphi} z + \frac{R_1+z}{R_2+z} \sigma_{\theta\theta} z + r \sigma_{zz} (R_1+z) - z \frac{d}{d\varphi} (r \tau_{\varphi z}) \right) dz = -P r_i \frac{h}{2}$$

معادلات بدست آمده برای پوسته با انحنای دلخواه می‌باشد. در قسمت بعد با معرفی حالت‌های خاص به بررسی پاسخ‌های مسئله می‌پردازیم.

### ۳- حالت های خاص

معادلات (۱۰) برای هر پوسته متقارن محوری با انحنای دلخواه و ضخامت متغیر بر قرار می‌باشند. نمونه‌هایی از موارد پر کاربرد پوسته‌های متقارن محوری در جدول ۱ آورده شده است.

شرط وجود جواب غیرصفر، دترمینان صفر معادله مشخصه می- باشد. این شرط در رابطه (۱۹) نشان داده شده است.

$$[A_1]m^2 + [A_2]m + [A_3] = 0 \quad (19)$$

با برابر صفر قرار دادن دترمینان، هشت مقدار برای مقادیر ویژه تابع نمایی بدست می-آید که جواب نهایی به شکل رابطه (۲۰) نشان داده شده است.

$$\{y\}_h = \sum_{i=1}^8 C_i \{v\}_i e^{m_i x} \quad (20)$$

ضرایب  $C_i$  ضرایب نامشخص جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل می-باشند که با استفاده از شرایط مرزی مسئله بدست می-آیند. در اینجا سیلندر را به صورت دو سر گیردار در نظر می-گیریم. جواب خصوصی بر اساس نحوه توزیع فشار در طول استوانه تعیین می-شود.

### ۳-۲- سیلندر ناهمگن جدار متغیر

روابط (۱۲) را برای سیلندر جدار متغیر به شکل ماتریسی به صورت زیر می-توان باز نویسی کرد.

$$\frac{d}{dx} [B_1 \frac{d\{y\}}{dx}] + \frac{d}{dx} [B_2 \{y\}] + B_3 \frac{d\{y\}}{dx} + B_4 \{y\} = F \quad (21)$$

که در آن:

$$B_1 = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 & 0 \\ B_{13} & B_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{15} & B_{16} \\ 0 & 0 & B_{17} & B_{18} \end{bmatrix} (R+z) dz$$

$$B_2 = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_{21} & B_{22} \\ 0 & 0 & B_{23} & B_{24} \\ 0 & B_{25} & 0 & 0 \\ 0 & B_{26} & 0 & 0 \end{bmatrix} (R+z) dz$$

$$B_3 = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{31} & B_{32} \\ B_{33} & B_{34} & 0 & 0 \\ B_{35} & B_{36} & 0 & 0 \end{bmatrix} (R+z) dz$$

$$B_4 = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{41} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{42} & A_{43} \\ 0 & 0 & A_{44} & A_{45} \end{bmatrix} (R+z) dz \quad (22)$$

$$y = \begin{Bmatrix} u \\ \varphi \\ w \\ \psi \end{Bmatrix}, F = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P(x)(R - \frac{t}{2}) \\ -\frac{1}{2}P(x)(R - \frac{t}{2})t \end{Bmatrix} \quad (23)$$

مابقی ضرایب در پیوست آورده شده است. رابطه (۲۱)، دستگاه معادلات دیفرانسیل ناهمگن با ضرایب متغیر می-باشد. در این قسمت با استفاده از نظریه اغتشاشات به حل این دستگاه معادلات می-پردازیم. در گام اول این رابطه را با استفاده از تغییر متغیر زیر به صورت بی بعد تبدیل می-نماییم.

$$\delta u_0: \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\frac{d}{dx}(r\sigma_{xx})) dz = 0$$

$$\delta u_1: \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\frac{d}{dx}(r\sigma_{xx})z - r\tau_{xz}) dz = 0 \quad (12)$$

$$\delta v_0: \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (r\sigma_{xx} - \frac{d}{dx}(r\tau_{xz})) dz = Pr_f$$

$$\delta v_1: \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (r\sigma_{xx}z + r\sigma_{zz} - z \frac{d}{dx}(r\tau_{xz})) dz = -Pr_f \frac{h}{2}$$

روابط (۱۲) برای سیلندر با ضخامت دلخواه بدست آمده است. در ادامه با معرفی سیلندر با ضخامت ثابت و ضخامت متغیر، به بررسی روش‌های حل و تحلیل نتایج پرداخته می-شود.

### ۳-۱- سیلندر ناهمگن جدار ثابت

روابط (۱۲) را برای سیلندر با جدار ثابت به فرم ماتریسی به صورت زیر می-توان باز نویسی کرد.

$$A_1 \frac{d^2}{dx^2} \{y\} + A_2 \frac{d}{dx} \{y\} + A_3 \{y\} = F \quad (13)$$

که در آن

$$A_1 = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ A_{13} & A_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{15} & A_{16} \\ 0 & 0 & A_{17} & A_{18} \end{bmatrix} dz$$

$$A_2 = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & A_{21} & A_{22} \\ 0 & 0 & A_{23} & A_{24} \\ A_{25} & A_{26} & 0 & 0 \\ A_{27} & A_{28} & 0 & 0 \end{bmatrix} dz \quad (14)$$

$$A_3 = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{32} & A_{33} \\ 0 & 0 & A_{34} & A_{35} \end{bmatrix} dz$$

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ v_0 \\ v_1 \end{Bmatrix}, F = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P(x)(R - \frac{t}{2}) \\ -\frac{1}{2}P(x)(R - \frac{t}{2})t \end{Bmatrix} \quad (15)$$

تمامی ضرایب در پیوست آورده شده است. جواب معادله (۱۳) را به صورت مجموع جواب عمومی و خصوصی در نظر می-گیریم (رابطه (۱۶)).

$$\{y\} = \{y\}_h + \{y\}_p \quad (16)$$

حل همگن را می-توان به صورت تابع نمایی در نظر گرفت.

$$\{y\}_h = \{v\} e^{mx} \quad (17)$$

با جایگذاری تابع نمایی در معادله همگن به معادله مشخصه

(۱۸) می-رسیم.

$$\{[A_1]m^2 + [A_2]m + [A_3]\} e^{mx} = 0 \quad (18)$$

مرتبط آغاز می شود. نظریه اغتشاش را زمانی میتوان به کاربرد که بتوان مسئله را با افزودن یک عبارت کوچک به توصیف ریاضی مسئله ای که قابل حل دقیق است، فرمول بندی نمود. نظریه اغتشاش به عبارتی به سری توانی از یک پارامتر کوچک برای پاسخ مورد نظر منجر می شود که انحرافات از مسئله ی قابل حل کامل را به صورت کمی بیان میکند. اولین جمله از این سری توانی، پاسخ مسئله ی قابل حل دقیق است و جملات بعدی، انحراف از این پاسخ به دلیل انحراف از مسئله ی اصلی را توصیف میکنند.

با جایگذاری رابطه (۲۸) در (۲۵) و برابر قرار دادن جملات هم مرتبه، به دستگاه معادلات زیر خواهیم رسید.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) = -\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} (-\rho u_i u_j) \quad (29)$$

با استفاده از روابط (۲۹) ضرایب رابطه (۲۸) با یک سری عملیات جبری قابل محاسبه می باشد. همان طور که از پیش اشاره شد، برای حل داخلی نیاز به تعریف متغیر جدید با حساسیت بیشتری می باشد. این متغیر جدید به صورت رابطه زیر بیان می شود.

$$\eta^* = \frac{x^* - a}{\varepsilon} \quad (30)$$

$a=0$  ابتدای سیلندر و  $a=1$  انتهای سیلندر را نشان می دهد. با جایگذاری رابطه (۳۰) در (۲۵) و بازنویسی آن خواهیم داشت:

$$\frac{d}{d\eta} [B_1^* \frac{d\{y^*\}}{d\eta}] + \frac{d}{d\eta} [B_2^* \{y^*\}] + [B_3^*] \frac{d\{y^*\}}{d\eta} + [B_4^*] \{y^*\} = \{F^*\} \quad (31)$$

بر اساس بسط تیلور، ضرایب رابطه و قسمت ناهمگن معادله می تواند به صورت زیر بازنویسی شود.

$$B_i^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n \eta^n}{n!} \frac{d^n B_i^*}{dx^{*n}} \Big|_{x=a} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{in}^* \varepsilon^n \quad i=1,2,3,4$$

$$F^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n \eta^n}{n!} \frac{d^n F^*}{dx^{*n}} \Big|_{x=a} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^* \varepsilon^n \quad (32)$$

همانند قبل، تابع تقریبی (۳۳) برای حل معادله دیفرانسیل (۳۱) به کار گرفته می شود.

$$y_{in}^* = y_0^* + \varepsilon y_1^* + \varepsilon^2 y_2^* + \dots \quad (33)$$

با جایگذاری رابطه (۳۳) در (۳۱) و برابر قرار دادن مرتبه های مساوی پارامتر اغتشاشی، معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله به صورت زیر بدست می آید.

$$\varepsilon^j : \sum_{i=0}^j \frac{d}{d\eta} [B_{1n}^*]_{n=i} \frac{d\{y_{j-i}^*\}}{d\eta} + \frac{d}{d\eta} [B_{2n}^*]_{n=i} \{y_{j-i}^*\} + [B_{3n}^*]_{n=i} \frac{d\{y_{j-i}^*\}}{d\eta} + [B_{4n}^*]_{n=i} \{y_{j-i}^*\} = \{F_n^*\}_{n=j} \quad j=0,1,2,\dots \quad (34)$$

رابطه (۳۴) دستگاه معادلات دیفرانسیل ناهمگن با ضرایب ثابت می باشد. حل این دستگاه معادلات را می توان به صورت زیر در نظر گرفت که در آن  $y_{ih}^*$  حل همگن و  $y_{ip}^*$  حل خصوصی دستگاه

$$t^* = \frac{t}{t_0} \quad R^* = \frac{R}{t_0} \quad x^* = \frac{x}{l}$$

$$u^* = \frac{u}{t_0} \quad w^* = \frac{w}{t_0} \quad p^* = \frac{p}{C_0} \quad (24)$$

$$C_{ij}^* = \frac{C_{ij}}{C_0} \quad i, j = 1, 2, 3$$

با اعمال رابطه (۲۴) در (۲۱)، رابطه را به فرم بدون بعد به صورت زیر بازنویسی می نماییم که در آن ضریب  $\varepsilon$  نسبت ضخامت به طول سیلندر می باشد.

$$\varepsilon^2 \frac{d}{dx} [B_1^* \frac{d\{y^*\}}{dx}] + \varepsilon \left( \frac{d}{dx} [B_2^* \{y^*\}] + [B_3^*] \frac{d\{y^*\}}{dx} \right) + [B_4^*] \{y^*\} = \{F^*\} \quad (25)$$

که در آن:

$$B_1^* = \frac{t^*}{2} \int_{-t^*/2}^{t^*/2} \begin{bmatrix} B_{11}^* & B_{12}^* & 0 & 0 \\ B_{13}^* & B_{14}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{15}^* & B_{16}^* \\ 0 & 0 & B_{17}^* & B_{18}^* \end{bmatrix} (R^* + z^*) dz^*$$

$$B_2^* = \frac{t^*}{2} \int_{-t^*/2}^{t^*/2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_{21}^* & B_{22}^* \\ 0 & 0 & B_{23}^* & B_{24}^* \\ 0 & B_{25}^* & 0 & 0 \\ 0 & B_{26}^* & 0 & 0 \end{bmatrix} (R^* + z^*) dz^*$$

$$B_3^* = \frac{t^*}{2} \int_{-t^*/2}^{t^*/2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{31}^* & B_{32}^* \\ B_{33}^* & B_{34}^* & 0 & 0 \\ B_{35}^* & B_{36}^* & 0 & 0 \end{bmatrix} (R^* + z^*) dz^*$$

$$B_4^* = \frac{t^*}{2} \int_{-t^*/2}^{t^*/2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{41}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{42}^* & B_{43}^* \\ 0 & 0 & B_{44}^* & B_{45}^* \end{bmatrix} (R^* + z^*) dz^*$$

9

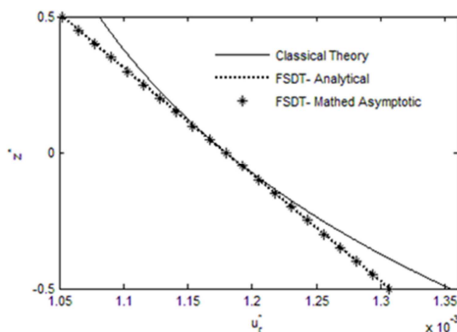
$$y^* = \begin{Bmatrix} u^* \\ \phi^* \\ w^* \\ \psi^* \end{Bmatrix}, F^* = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P(x^*) (R^* - \frac{t^*}{2}) \\ -\frac{1}{2} P(x^*) (R^* - \frac{t^*}{2}) t^* \end{Bmatrix} \quad (27)$$

در اینجا ستاره نشانه پارامترهای بدون بعد شده می باشد. برای حل معادله بدون بعد شده باید متغیرهای مختلفی در نظر گرفت چرا که با نزدیک شدن به مرزها، روند تغییرات نیز افزایش می یابد. افزایش روند تغییرات نیازمند متغیر با حساسیت بالاتری می باشد. بدین منظور ابتدا نقاط دور از مرز تحت عنوان حل بیرونی و سپس نقاط نزدیک به مرز تحت عنوان حل داخلی مورد بررسی قرار خواهد گرفت. حل بیرونی بر اساس تئوری اغتشاشات به صورت رابطه زیر بیان می شود.

$$y_{out}^* = y_0^* + \varepsilon y_1^* + \varepsilon^2 y_2^* + \dots \quad (28)$$

نظریه ی اغتشاشات، شامل روشهای ریاضی است که برای یافتن پاسخ تقریبی برای مسئله ای که پاسخ دقیق آن قابل دسترسی نیست، به کار می رود. یافتن این جواب تقریبی با یک پاسخ دقیق در یک مسئله

در جدول ۲ مقایسه حل برای سطح داخلی سیلندر و سطح خارجی آن با نظریه‌های مختلف آورده شده است. با توجه به حل لامه، سایر پاسخ‌ها نیز در میانه سیلندر ارائه شده است تا اثر شرایط مرزی در پاسخ‌ها کمترین میزان اثر خود را داشته باشند. تحلیل المان محدود در اینجا با استفاده از نرم‌افزار ANSYS انجام شده است. سیلندر مدل‌سازی شده با شعاع داخلی ۴۰ میلی‌متر، شعاع خارجی ۶۰ میلی‌متر و طول ۱ متر تحت فشار یکنواخت داخلی ۶۰ مگاپاسکال و دارای شرایط تکیه‌گاهی گیردار در دو انتهای آن می‌باشد. جهت مقایسه با حل لامه، ماده در نظر گرفته شده Zirconia با خواص الاستیک  $E = 244.26596 \text{ GPa}$  و  $\nu = 0.2882$  و همگن در نظر گرفته شده است. المان‌بندی مدل با استفاده از المان *solid* انجام شده و مدل دارای 20672 المان می‌باشد.



شکل ۳- مقدار حاصل از نظریه کلاسیک و نظریه برشی مرتبه اول

جدول ۲- جابجایی شعاعی در سطح داخلی و خارجی سیلندر با استفاده از نظریه‌های مختلف و روش المان محدود

z	Lame solution	FSDT- exact	FSDT- perturbation	FEM- Ansys
h/2	۱/۱۷۹۶۰	۱/۱۷۹۵۷	۱/۱۷۹۵۷	۱/۱۷۹۵۹
-h/2	۱/۳۵۳۶۰	۱/۳۰۶۵۲	۱/۳۰۶۵۲	۱/۳۵۰۲۲

برای بررسی قابلیت‌های بیشتر تحلیل ارائه شده، به معرفی ماده ناهمگن تابعی می‌پردازیم. مواد تابعی از نظر میکروسکوپی غیر همگن بوده و خواص مکانیکی آنها به طور پیوسته از یک سمت سازه تا سمت دیگر تغییر می‌کند. این تغییرات مواد به صورت تدریجی با تغییر نسبت حجمی دو ماده ساختاری ایجاد می‌شود. برای اولین بار این ماده در ژاپن در سال ۱۹۸۴ توسط دانشمندان ساخته شد. معمولاً این مواد از دو ماده ساختاری سرامیک و فلز ساخته می‌شود. ماده ساختاری سرامیک به علت ضریب انتقال گرمای کم و مقاومت زیاد در مقابل دما، درجات حرارت بسیار بالا را تحمل کرده و ماده ساختاری فلز انعطاف پذیری لازم را فراهم می‌کند. به علت تغییرات پیوسته خواص مکانیکی مشکلات عدم پیوستگی که در سازه‌های کامپوزیت وجود دارد به وجود نمی‌آید. از نکات بسیار برجسته این مواد بهینه نمودن تغییرات تنش در آن‌ها با تغییر مناسب پروفیل تغییرات مواد ساختاری است. مدل ریاضی زیر برای ارائه خواص ماده تابعی انتخاب شده است. با توجه به فرم انتگرالی معادلات، محدودیتی در انتخاب نحوه توزیع خواص ماده وجود ندارد.

$$p(z) = (p_c - p_m) \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{t} \right)^n + p_m \quad (40)$$

ضریب  $n$  توزیع‌های مختلف ناهمگنی در راستای سیلندر را نشان

معادلات می‌باشد.

$$v_i^* = v_{ih}^* + v_{ip}^* \quad (35)$$

همان طور که در قسمت قبل نیز اشاره شد، حل همگن را به شکل توابع نمایی می‌توان نوشت:

$$v_{ih}^* = \sum_{j=1}^8 c_j v^j e^{m_j \eta} \quad (36)$$

که در آن  $v^j$  و  $m_j$  به ترتیب مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس مشخصه رابطه (۳۴) می‌باشند. همچنین مقادیر  $c_j$  با توجه به شرایط مرزی مسئله بدست خواهند آمد. با توجه به دو انتهای سیلندر، ۱۶ ضریب مجهول وجود دارد. ۸ ضریب بر اساس شرایط انتهایی دو سیلندر بدست آمده و ۸ ضریب دیگر بر اساس وجود پاسخ محدود در شرایط معرفی شده در رابطه زیر بدست خواهند آمد.

$$\eta \rightarrow \infty \text{ for } x=0 \\ \eta \rightarrow -\infty \text{ for } x=L \quad (37)$$

پاسخ خصوصی سیستم بر اساس نحوه توزیع فشار داخلی بدست خواهد آمد. به عنوان نمونه می‌توان با انتخاب تابع مناسب و جایگذاری آن در معادلات حاکم بر سیستم، ضرایب آن را بدست آورد.

تا کنون با به کار بستن نظریه اغتشاشات به ارائه‌ی حل تحلیلی تقریبی سیلندر مورد نظر برای نقاط نزدیک مرزها و دور از آن پرداخته شد. پاسخ نهایی و عمومی سیلندر از مجموع حل داخلی و حل خارجی منهای حل هم‌پوشان بدست می‌آید.

$$v^* = v_{out}^* + v_{in}^* - v_{over}^* \quad (38)$$

$v_{over}$  قسمتی از جواب می‌باشد که در هر دو حل داخلی و خارجی تکرار شده است. قسمت هم‌پوشان با دور شدن از مرزها در حل داخلی یا نزدیک شدن به مرزها در حل خارجی بدست می‌آید که در رابطه زیر نشان داده شده است.

$$v_{over}^* = v_{out}^* |_{x \rightarrow 0} + v_{out}^* |_{x \rightarrow 1} \quad (39)$$

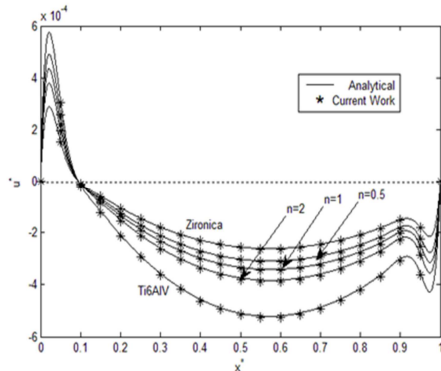
### ۳-۳ نتایج عددی

در این قسمت به بررسی نتایج حاصل از تحلیل و حل ارائه شده خواهیم پرداخت. در ابتدا با ارائه‌ی حالت‌های ساده تر، به مقایسه با کارهای قبلی می‌پردازیم. شکل ۳ مقایسه بین نظریه کلاسیک<sup>۱</sup> [۱] نظریه برشی مرتبه اول با حل تحلیلی و حل اغتشاشی برای سیلندر همگن جدار ثابت تحت فشار یکنواخت داخلی را نشان می‌دهد. با توجه به اینکه در حل لامه شرایط مرزی تاثیر ندارد و حل برای سیلندر با طول زیاد ارائه شده است، در حل با استفاده از نظریه برشی نیز میانه سیلندر در نظر گرفته شده است تا اثر شرایط مرزی در نمودار کمینه شود. همان طور که مشاهده می‌شود، نظریه کلاسیک تغییرات جابجایی در طول سیلندر را صرف نظر کرده و تنها تغییرات در راستای شعاعی و ضخامت را مد نظر قرار می‌دهد. همچنین حل بدست آمده از حل اغتشاشی با حل دقیق سیلندر بر یکدیگر تطابق دارند. بنابراین با در نظر گرفتن تعداد جملات کافی از بسط جواب، جواب اغتشاشی با حل دقیق به یکدیگر همگرا خواهد شد. با دور شدن از مرزها، حل نظریه برشی مرتبه اول و کلاسیک به یکدیگر نزدیک می‌شوند.

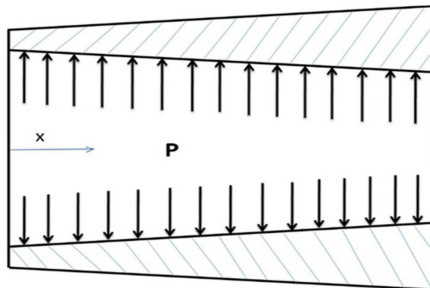
<sup>1</sup> Lamé solution



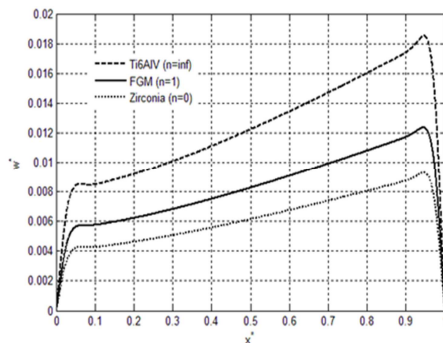
است. تغییرات ضخامت در راستای طول سیلندر به صورت خطی در نظر گرفته شده است. در اینجا نیز شرایط مرزی به صورت سیلندر دو سر گیردار تعریف شده و تنها فشار داخلی برای آن منظور گردیده است. توزیع جابجایی شعاعی در طول سطح داخلی سیلندر با ضخامت متغیر و فشار یکنواخت در شکل ۸ نشان داده شده است. در این نمودار با تغییر ضخامت و فشار، میزان جابجایی شعاعی نیز تغییر کرده و افزایش می‌یابد. پاسخ سیلندر برای حالت‌های همگن و ناهمگن با ضریب ناهمگنی ۱ با یکدیگر مقایسه شده است.



شکل ۶- توزیع جابجایی محوری در طول سطح داخلی سیلندر با ضخامت ثابت و فشار غیر یکنواخت



شکل ۷- سیلندر جدار متغیر تحت فشار داخلی

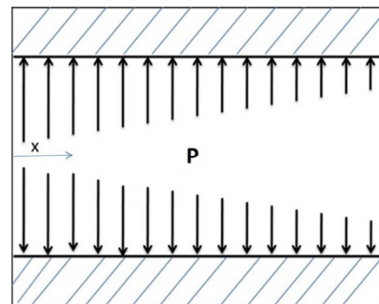


شکل ۸- توزیع جابجایی شعاعی در طول سطح داخلی سیلندر با ضخامت متغیر و فشار یکنواخت

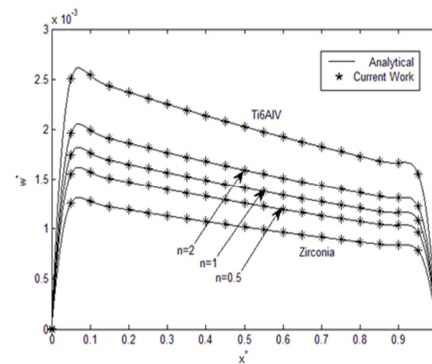
توزیع جابجایی محوری در طول سطح داخلی سیلندر با ضخامت متغیر و فشار یکنواخت در شکل ۹ آورده شده است. همان طور که مشاهده می‌شود میزان تغییرات جابجایی در راستای طول با توجه به تغییرات ضخامت و فشار در میانه سیلندر ناچیز بوده ولی تغییرات

می‌دهد. که در آن  $p_m$  و  $p_c$  خواص مکانیکی دو ماده مختلف و  $n$  ضریب ناهمگنی ماده مورد نظر می باشد.  $Zirconia$  با  $E = 244.26596 \text{ GPa}$  و  $\nu = 0.2882$  و  $Ti6AlV$  با  $E = 122.55676 \text{ GPa}$  و  $\nu = 0.28838235$  برای ارائه نتایج عددی انتخاب شده است.

در اینجا ابتدا سیلندر ناهمگن با ضخامت ثابت و فشار غیر یکنواخت که شماتیک آن در شکل ۴ نشان داده شده است، مورد بررسی قرار می‌گیرد. سیلندر مورد نظر به صورت دو سر گیردار در نظر گرفته شده و فشار به صورت فشار داخلی اعمال می‌گردد. توزیع جابجایی شعاعی در طول سطح داخلی در شکل ۵ آورده شده است. حل با استفاده از نظریه اغتشاشات (رابطه (۳۸)) با حل دقیق (رابطه (۱۶)) در این نمودار مقایسه شده است. همان طور که مشاهده می‌شود پاسخ‌های یکسانی از هر دو روش اخذ شده است. به دلیل کاهش فشار در طول سیلندر شاهد کاهش میزان جابجایی می‌باشیم.



شکل ۴- سیلندر جدار ثابت تحت فشار غیر یکنواخت داخلی



شکل ۵- توزیع جابجایی شعاعی در طول سطح داخلی سیلندر با ضخامت ثابت و فشار غیر یکنواخت

توزیع جابجایی محوری در طول سطح داخلی سیلندر با ضخامت ثابت و فشار غیر یکنواخت در شکل ۶ آورده شده است. در اینجا نیز حل ارائه شده با حل دقیق همخوانی داشته و تاثیر مرزها نیز به خوبی نشان داده است. بدلیل در نظر گرفتن تکیه گاههای ثابت در دو سر سیلندر، توضیح جابجایی محوری در طول سیلندر دو مقدار مثبت و منفی دارد. مقدار صفر جابجایی با توضیح یکنواخت فشار میانه سیلندر خواهد بود که در اینجا با توجه به فشار غیر یکنواخت جابجا شده است. در ادامه سیلندر ناهمگن با ضخامت متغیر و فشار یکنواخت که طرحواره آن در شکل ۷ نشان داده شده است، مورد مطالعه قرار گرفته



ارائه گردید. با ارائه‌ی نتایج عددی به مقایسه حالت کلاسیک و نظریه برشی مرتبه اول پرداخته شد. نتایج عددی برای ناهمگنی‌های متفاوت و همچنین فشار غیر یکنواخت ارائه گردید. با انتخاب ناهمگنی مناسب، به عملکرد بهینه پوسته خواهیم رسید.

#### ۵- پیوست

$$\begin{aligned} A_{11} &= -(c_1 1)(R+z) \\ A_{12} &= A_{13} = -(c_1 1z)(R+z) \\ A_{14} &= [-z^2(c_1 1)](R+z), A_{15} = [-(c_5 5)](R+z) \\ A_{16} &= A_{17} = [-(c_5 5)z](R+z) \\ A_{18} &= [-z^2(c_5 5)](R+z) \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} A_{21} &= [-(c_1 2)], A_{22} = [-(c_1 2 / (R+z))(z) + c_1 3](R+z) \\ A_{23} &= [-z(c_1 2 / (R+z)) + (c_5 5)](R+z) \\ A_{24} &= [-z(c_1 2 / (R+z))(z) + c_1 3 + (c_5 5z)](R+z) \\ A_{25} &= [(c_1 2)], A_{26} = [(c_1 2(z))1 / (R+z) - (c_5 5)](R+z) \\ A_{27} &= [(c_1 2)z / (R+z) + (c_1 3)](R+z) \\ A_{28} &= [(c_1 2(z))z / (R+z) + (c_1 3(z)) - z(c_5 5)](R+z) \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} A_{31} &= [(c_5 5)](R+z), A_{32} = [(c_2 2(1 / (R+z)))] \\ A_{33} &= [(c_2 2(z / (R+z)) + c_2 3)] \\ A_{34} &= [(c_2 2 + c_2 3)(1 / (R+z))]z / (R+z) \\ A_{35} &= [(c_2 2(z 1 / (R+z)) + c_2 3)z / (R+z) \\ &+ (c_2 3(z 1 / (R+z)) + c_2 3)](R+z) \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} B_{11} &= -C_{11} \quad B_{12} = B_{13} = -zC_{11} \quad B_{14} = -z^2C_{11} \\ B_{15} &= -C_{44} \quad B_{16} = B_{17} = -zC_{44} \quad B_{18} = -z^2C_{44} \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} B_{21} &= \frac{C_{12}}{R+z} \quad B_{22} = B_{21}z + C_{13} \\ B_{23} &= B_{21}z \quad B_{24} = B_{22}z \quad B_{25} = C_{44} \quad B_{26} = B_{25}z \end{aligned} \quad (45)$$

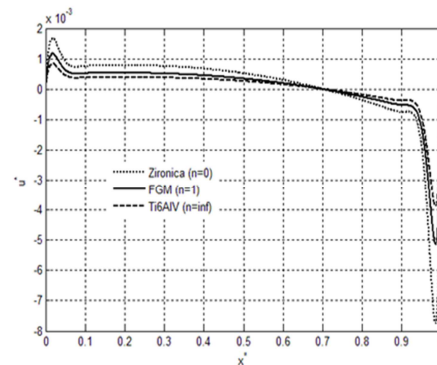
$$\begin{aligned} B_{31} &= C_{44} \quad B_{32} = B_{31}z \quad B_{33} = \frac{C_{21}}{R+z} \\ B_{34} &= B_{33}z \quad B_{36} = B_{35}z \quad B_{35} = \frac{zC_{21}}{R+z} + C_{31} \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} B_{41} &= C_{44} \\ B_{42} &= \frac{C_{22}}{(R+z)^2}, B_{45} = z^2B_{42} + \frac{z(C_{23} + C_{32})}{(R+z)} + C_{33} \\ B_{44} &= zB_{42} + \frac{C_{32}}{(R+z)}, B_{43} = \frac{zC_{22} + (R+z)C_{23}}{(R+z)^2} \end{aligned} \quad (47)$$

#### ۶- مراجع

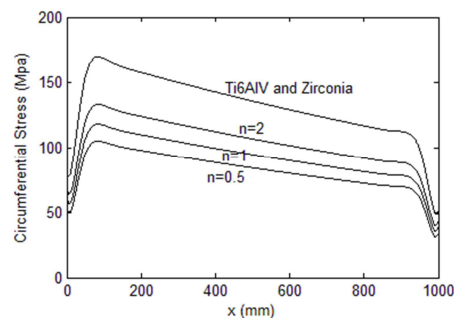
- [1] Timoshenko S., Strength of Materials, Pt. 2: Advanced Theory and Problems: R. E. Krieger Publishing Company, 1983.
- [2] Rahimi GH, Ghannad M, Esmailzadeh Khadem S, General Solution of Plane Elasticity of Axisymmetric Functionally Graded Thick Cylindrical Shells, Modares Mechanical Engineering, Vol. 10, No. 3, pp. 13, 1389. In Persian
- [3] Tutuncu N., Ozturk M., Exact solutions for stresses in functionally graded pressure vessels, Composites Part B: Engineering, Vol. 32, No. 8, pp. 683-686, 2001.
- [4] Reddy J. N., Arciniega R. A., Shear Deformation Plate and Shell Theories: From Stavsky to Present, Mechanics of

جابجایی محوری در نزدیکی مرزها در این حالت زیاد بوده و در نتیجه تنش‌های حاصل از آن نیز حائز اهمیت می‌باشد.



شکل ۹- توزیع جابجایی محوری در طول سطح داخلی سیلندر با ضخامت متغیر و فشار یکنواخت

با مشخص شدن توزیع جابجایی‌ها در مختصات مورد نظر، می‌توان با استفاده از روابط (۵) و (۸)، کرنش‌ها و تنش‌های وارد بر سیلندر مورد نظر را به آسانی محاسبه نمود. به عنوان نمونه نحوه توزیع تنش محیطی برای سیلندر معرفی شده در شکل ۴ در شکل زیر نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، اگر چه تنش محیطی به خواص ماده همگن بستگی ندارد اما مستقل از ضریب ناهمگنی نمی‌باشد. در نتیجه با انتخاب ضریب ناهمگنی مناسب می‌توانیم به کارایی بهینه پوسته مورد نظر برسیم. کاهش ضریب ناهمگنی کاهش تنش محیطی را نشان داده است. در اینجا نیز نحوه توزیع تنش با فشار وارد از لحاظ فیزیکی همخوانی دارد.



شکل ۱۰- توزیع تنش محیطی در راستای طول برای سطح داخلی

#### ۴- نتیجه گیری

فرمول‌بندی پوسته‌های متقارن محوری ناهمگن با انحنای دلخواه و ضخامت متغیر تحت فشار غیر یکنواخت با استفاده از نظریه برشی مرتبه اول در این پژوهش ارائه شد. ابتدا با در نظر گرفتن میدان جابجایی خطی برای جابجایی شعاعی و محوری، معادلات حاکم بر پوسته با استفاده از روش انرژی بدست آوردیم. در ادامه با معرفی انواع پوسته با انحنای پرکاربرد به بررسی روش‌های حل در حالات خاص و صحت سنجی روابط پرداخته شد. حل دقیق برای سیلندر جدار ثابت دو سر گیردار همگن و ناهمگن تحت فشار یکنواخت و غیر یکنواخت داخلی و حل با استفاده از تئوری اغتشاشات برای سیلندر جدار متغیر

- [23] Arefi M, Rahimi GH., Three-dimensional multi-field equations of a functionally graded piezoelectric thick shell with variable thickness, curvature and arbitrary nonhomogeneity. *Acta Mechanica*, Vol. 223, No.1, pp. 63-79, 2012.
- [24] Arefi M., Size-dependent bending behavior of three-layered doubly curved shells: Modified couple stress formulation. *Journal of Sandwich Structures & Materials*, Vol. 0, No.0, pp. 1-40, 2018.
- [25] Arefi M., Analysis of a doubly curved piezoelectric nano shell: nonlocal electro-elastic bending solution. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, Vol. 1, No.70, pp. 226-37, 2018.
- [26] Arefi M, Bidgoli EM., Electro-elastic displacement and stress analysis of the piezoelectric doubly curved shells resting on Winkler's foundation subjected to applied voltage. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 0, No.0, pp. 1-14, 2018.
- [27] Arefi M., Nonlocal free vibration analysis of a doubly curved piezoelectric nano shell. *STEEL AND COMPOSITE STRUCTURES*, Vol. 27, No.4, pp. 479-93, 2018.
- [28] Arefi M., A complete set of equations for piezo-magnetoelastic analysis of a functionally graded thick shell of revolution. *Latin American Journal of Solids and Structures*, Vol. 11, No.11, pp. 2073-92, 2014.
- Advanced Materials and Structures, Vol. 11, No. 6, pp. 535-582, 2004.
- [5] Ghannad M, RAHIMI G, ESMAEILZADEH KS., General Solution of Shear Deformation of Axisymmetric Functionally Graded Thick Cylindrical Shells, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 10, No. 4, pp. 14, 1389. In Persian
- [6] Khoshgoftar M. J., Rahimi G. H., Arefi M., Exact solution of functionally graded thick cylinder with finite length under longitudinally non-uniform pressure, *Mechanics Research Communications*, Vol. 51, No. 0, pp. 61-66, 7//, 2013.
- [7] Dai HL, Rao YN, Dai T., A review of recent researches on FGM cylindrical structures under coupled physical interactions, 2000–2015. *Composite Structures*, Vol. 15, No.152, pp. 199-225, 2016.
- [8] E. Asadi, W. Wang, M. S. Qatu, Static and vibration analyses of thick deep laminated cylindrical shells using 3D and various shear deformation theories, *Composite Structures*, Vol. 94, No. 2, pp. 494-500, 2012.
- [9] Eipakchi H., Khadem S., G. Rahimi S., Axisymmetric Stress Analysis of a Thick Conical Shell with Varying Thickness under Nonuniform Internal Pressure, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 134, No. 8, pp. 601-610, 2008.
- [10] Arefi M., Rahimi G. H., The effect of nonhomogeneity and end supports on the thermo elastic behavior of a clamped–clamped FG cylinder under mechanical and thermal loads, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 96–97, pp. 30-37, 2012.
- [11] Zozulya V. V., A high-order theory for functionally graded axially symmetric cylindrical shells, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 83, No. 3, pp. 331-343, 2013.
- [12] Kang J. H., Field equations, equations of motion, and energy functionals for thick shells of revolution with arbitrary curvature and variable thickness from a three-dimensional theory, *Acta Mechanica*, Vol. 188, No. 1-2, pp. 21-37, 2007.
- [13] Wu C., Liu C., Stress and Displacement of Thick Doubly Curved Laminated Shells, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 120, No. 7, pp. 1403-1428, 1994.
- [14] Santos H., Mota Soares C. M., Mota Soares C. A., Reddy J. N., A semi-analytical finite element model for the analysis of cylindrical shells made of functionally graded materials, *Composite Structures*, Vol. 91, No. 4, pp. 427-432, 12//, 2009.
- [15] Bahtui A., Eslami M. R., Coupled thermoelasticity of functionally graded cylindrical shells, *Mechanics Research Communications*, Vol. 34, No. 1, pp. 1-18, 1//, 2007.
- [16] Khoshgoftar M. J., Ghorbanpour Arani A., Arefi M., Thermoelastic analysis of a thick walled cylinder made of functionally graded piezoelectric material, *Smart Materials and Structures*, Vol. 18, No. 11, 2009.
- [17] Jabbari M., Bahtui A., Eslami M. R., Axisymmetric mechanical and thermal stresses in thick short length FGM cylinders, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 86, No. 5, pp. 296-306, 2009.
- [18] Shao Z. S., Mechanical and thermal stresses of a functionally graded circular hollow cylinder with finite length, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 82, No. 3, pp. 155-163, 2005.
- [19] Dai HL, Rao YN., Dynamic thermoelastic behavior of a double-layered hollow cylinder with an FGM layer. *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 36, No.9, pp. 962-984, 2013.
- [20] Zhang W., Hao Y. X., Yang J., Nonlinear dynamics of FGM circular cylindrical shell with clamped–clamped edges, *Composite Structures*, Vol. 94, No. 3, pp. 1075-1086, 2012.
- [21] Amabili M., Reddy J. N., A new non-linear higher-order shear deformation theory for large-amplitude vibrations of laminated doubly curved shells, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 45, No. 4, pp. 409-418, 2010.
- [22] Tornabene F., Viola E., Free vibration analysis of functionally graded panels and shells of revolution, *Meccanica*, Vol. 44, No. 3, pp. 255-281, 2009/06/01, 2009.