

## بررسی رفتار استاتیکی و خزش وابسته به زمان در دیسک دوار مگنتوالکتروالاستیک تابعی مدرج در محیط حرارتی

استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه قم، قم، ایران

مهدی سعادتفر\*

### چکیده

در این مقاله به ارائه یک حل تحلیلی برای بررسی رفتار خزشی وابسته به زمان دیسک چرخان ساخته شده از مواد مگنتوالکتروالاستیک تابعی مدرج پرداخته شده است. خواص ماده در راستای شعاعی بصورت تابع توانی از شعاع در نظر گرفته شده‌اند. ابتدا معادله دیفرانسیلی شامل کرنش‌های خزشی با استفاده از روابط تنش-کرنش، کرنش-جابجایی، معادله تعادل و معادله گرما در حالت تنش صفحه‌ای به دست می‌آید. سپس، با حذف کرنش‌های خزشی، یک حل تحلیلی برای معادله دیفرانسیل مذکور بصورت تحلیلی به دست می‌آید، که در واقع پاسخ زمان صفر است. سپس، با وجود کرنش‌های خزشی و با ثابت در نظر گرفتن شرایط مرزی دما ثابت، نرخ تنش‌های خزشی با حل تحلیلی یک معادله دیفرانسیل به دست می‌آیند. در نهایت می‌توان تنش‌های شعاعی و محیطی، جابجایی شعاعی و اختلاف پتانسیل‌های الکتریکی و مغناطیسی را با استفاده از یک روش تکرارشونده محاسبه کرد. در مثال‌های عددی، تأثیر فرآیند خزش، شرایط مرزی دمایی و سرعت چرخش به تفصیل بررسی شده‌اند.

واژه‌های کلیدی: دیسک دوار، تابعی مدرج، مگنتوالکتروالاستیک، تحلیل ترموالاستیک، خزش وابسته به زمان.

### Static and time-dependent creep behavior of a functionally graded magneto-electro-elastic rotating disc in thermal environment

M. Saadatfar

Department of Mechanical Engineering, University of Qom, Qom, Iran

### Abstract

In this article, an analytical solution for the problem of time-dependent creep analysis of a functionally graded magneto-electro-elastic rotating disc is presented. The material properties are considered to be power function of radius through radial direction. Firstly, using the stress-strain relation and strain-displacement relation together with equilibrium equation and heat equation in plane-stress condition, a differential equation containing creep strains is found. Then, eliminating creep strains, an analytical solution for the mentioned differential equation is obtained which is actually the response in time zero. Then, considering fixed temperature boundary conditions, creep strains are kept and creep stress rates are found by an analytical solution of the obtained differential equation. Finally, the radial stress, hoop stress, radial displacement, electric potential and magnetic potential can be calculated using an iterative method in every desired time. In the numerical examples, the effects of creep evolution, temperature boundary conditions and speed of rotation are investigated comprehensively.

**Keywords:** Rotating disc, Functionally graded, Magneto-electro-elastic, Thermoelastic analysis, Time-dependent creep.

بارگذاری‌های زیاد خواص ویسکوالاستیک<sup>۴</sup> از خود نشان می‌دهند، بنابراین تحلیل رفتار خزش<sup>۵</sup> در این مواد به منظور طراحی دقیق‌تر ضروری به نظر می‌رسد [۵]. از سوی دیگر دیسک‌های دوار به دلیل کاربردهای فرار در صنعت، مورد توجه بسیاری از پژوهشگران بوده‌اند [۶]. استفاده از دیسک‌های مگنتوالکتروالاستیک تابعی مدرج در صنایع مختلف می‌تواند انتخاب‌های جدیدی در طراحی سازه‌های هوشمند به منظور پایش وضعیت و کاهش ارتعاشات را به طراحان ارائه دهد.

در زمینه تحلیل‌های خزشی، مقالاتی در زمینه بررسی خزش در دیسک‌های هوشمند و یا تابعی مدرج در سابقه پژوهش وجود دارد. در زمینه مواد تابعی مدرج: گاپتا و همکاران [۷] به بررسی رفتار خزشی دیسک تابعی مدرج پرداختند. دیپاک [۸] خزش در دیسک تابعی مدرج با ضخامت متغیر خطی را بررسی کرد. خزش در دیسک با ضخامت متغیر در محیط حرارتی توسط حسینی و لیوانی [۹] بررسی شد. بوس و راتان [۱۰] خزش حالت پایدار را در دیسک تابعی مدرج با توابع مختلف تحلیل کردند. گاپتا و سینگ [۱۱] رفتار خزشی در

### ۱- مقدمه

در سال‌های اخیر مواد مگنتوالکتروالاستیک<sup>۱</sup>، به دلیل داشتن قابلیت تبدیل انرژی‌های الکتریکی، مغناطیسی و مکانیکی به یکدیگر، مورد توجه زیادی قرار گرفته‌اند. مگنتوالکتروالاستیک‌ها در واقع کامپوزیتی از مواد پیزوالکتریک<sup>۲</sup> و پیزومگنتیک<sup>۳</sup> هستند که کوپل الکترومغناطیسی در آن‌ها به وجود می‌آید. در برخی موارد قدرت عملگری این کامپوزیت‌ها تا صد برابر پیزوالکتریک‌ها گزارش شده است [۱]. همچنین امروزه مواد تابعی مدرج به عنوان موادی پرکاربرد که عیوب سازه‌های لایه‌لایه را ندارند مطرح هستند. در مورد مواد هوشمند نشان داده شده است که قدرت عملگری و حسگری آنها در حالت تابعی مدرج می‌تواند افزایش چشمگیری داشته باشد [۲-۴]. کاربرد مگنتوالکتروالاستیک‌ها به عنوان حسگر و عملگر در شرایط بارگذاری و محیطی مختلف و گاهی سخت است. با توجه به اینکه این مواد در

<sup>1</sup> Magneto-electro-elastic

<sup>2</sup> Piezoelectric

<sup>3</sup> Piezomagnetic

<sup>4</sup> Viscoelastic

<sup>5</sup> Creep

\* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: m.saadatfar@gmail.com

$$\sigma_{\theta} = c_{12}(\epsilon_{rr} - \epsilon_{rr}^c) + c_{22}(\epsilon_{\theta\theta} - \epsilon_{\theta\theta}^c) + c_{23}(\epsilon_{zz} - \epsilon_{zz}^c) - c_{12}E_r - q_{12}H_r - \lambda_2 T \quad (3)$$

$$\sigma_z = c_{13}(\epsilon_{rr} - \epsilon_{rr}^c) + c_{23}(\epsilon_{\theta\theta} - \epsilon_{\theta\theta}^c) + c_{33}(\epsilon_{zz} - \epsilon_{zz}^c) - c_{13}E_r - q_{13}H_r - \lambda_3 T \quad (4)$$

$$D_r = e_{11}(\epsilon_{rr} - \epsilon_{rr}^c) + e_{12}(\epsilon_{\theta\theta} - \epsilon_{\theta\theta}^c) + e_{13}(\epsilon_{zz} - \epsilon_{zz}^c) + \beta_{11}E_r + e_{11}H_r + p_1 T \quad (5)$$

$$B_r = q_{11}(\epsilon_{rr} - \epsilon_{rr}^c) + q_{12}(\epsilon_{\theta\theta} - \epsilon_{\theta\theta}^c) + q_{13}(\epsilon_{zz} - \epsilon_{zz}^c) + e_{11}E_r + d_{11}H_r + m_1 T \quad (6)$$

که در آن [۱۸]:

$$\lambda_1 = c_{11}\alpha_r + c_{12}\alpha_{\theta} + c_{13}\alpha_z \quad (7)$$

$$\lambda_2 = c_{12}\alpha_r + c_{22}\alpha_{\theta} + c_{23}\alpha_z$$

$$\lambda_3 = c_{13}\alpha_r + c_{23}\alpha_{\theta} + c_{33}\alpha_z$$

در غیاب نیروی حجمی، شارژ الکتریکی و چگالی جریان الکتریکی، معادلات تعادل، الکترواستاتیک و مگنتواستاتیک برای دیسک چرخان به صورت زیر قابل بیان است:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{(\sigma_r - \sigma_{\theta})}{r} + \rho r \omega^2 = 0. \quad (8)$$

$$\frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{D_r}{r} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{B_r}{r} = 0. \quad (10)$$

جواب معادلات (۹) و (۱۰) به شکل زیر است:

$$D_r = A_1 r^{-1}, \quad (11)$$

$$B_r = A_2 r^{-1}, \quad (12)$$

که  $A_1$  و  $A_2$  ثوابت مجهول هستند. از شرایط تنش صفحه‌ای داریم:

$$\sigma_z = 0 \Rightarrow (\epsilon_{zz} - \epsilon_{zz}^c) = -\frac{c_{13}}{c_{33}}(\epsilon_{rr} - \epsilon_{rr}^c) - \frac{c_{23}}{c_{33}}(\epsilon_{\theta\theta} - \epsilon_{\theta\theta}^c) \quad (13)$$

$$+ \frac{e_{13}}{c_{33}}E_r + \frac{q_{13}}{c_{33}}H_r + \frac{\lambda_3}{c_{33}}T$$

روابط کرنش-جابجایی و میدان-اختلاف پتانسیل به شکل زیر است:

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r}, \quad E_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad H_r = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (14)$$

با جایگذاری روابط (۱۴) و (۱۳) در معادلات (۲)-(۶) داریم:

$$\sigma_r = c'_{11} \frac{\partial u}{\partial r} + c'_{12} \frac{u}{r} + e'_{11} \frac{\partial \phi}{\partial r} + q'_{11} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \lambda'_1 T - c'_{11}\epsilon_{rr}^c - c'_{12}\epsilon_{\theta\theta}^c \quad (15)$$

$$\sigma_{\theta} = c'_{12} \frac{\partial u}{\partial r} + c'_{22} \frac{u}{r} + e'_{12} \frac{\partial \phi}{\partial r} + q'_{12} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \lambda'_2 T - c'_{12}\epsilon_{rr}^c - c'_{22}\epsilon_{\theta\theta}^c \quad (16)$$

$$D_r = e'_{11} \frac{\partial u}{\partial r} + e'_{12} \frac{u}{r} - \beta'_{11} \frac{\partial \phi}{\partial r} - e'_{11} \frac{\partial \psi}{\partial r} + p'_1 T - e'_{11}\epsilon_{rr}^c - e'_{12}\epsilon_{\theta\theta}^c \quad (17)$$

$$B_r = q'_{11} \frac{\partial u}{\partial r} + q'_{12} \frac{u}{r} - e'_{11} \frac{\partial \phi}{\partial r} - d'_{11} \frac{\partial \psi}{\partial r} + m'_1 T - q'_{11}\epsilon_{rr}^c - q'_{12}\epsilon_{\theta\theta}^c \quad (18)$$

که در آن‌ها:

دیسک با ضخامت متغیر را مورد بررسی قرار دادند. ژرفی و اختراعی به بررسی خزش در دیسک های تابعی مدرج با ضخامت متغیر [۱۲] در محیط حرارتی [۱۳] و ضخیم [۱۴] پرداختند. در زمینه مواد هوشمند: یک پاسخ نیمه‌تحلیلی برای مسئله تنش‌های خزشی در یک دیسک چرخان از مواد پیزوالکتریک تابعی مدرج در میدان مغناطیسی توسط لقمان و همکاران [۱۵] ارائه شد. همچنین، لقمان و اعظمی [۱۶] خزش در دیسک پیزوالکتریک غیر خطی را در محیط حرارتی بررسی کردند.

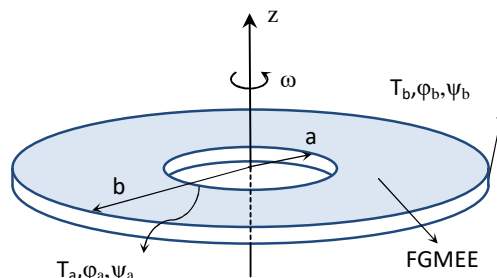
بررسی سابقه پژوهش نشان می‌دهد که خزش وابسته به زمان در دیسک مگنتوالکتروالاستیک تابعی مدرج در محیط حرارتی هنوز مورد بررسی قرار نگرفته‌اند؛ بنابراین این مقاله برای نخستین بار به بررسی خزش وابسته به زمان در دیسک چرخان از مواد مگنتوالکتروالاستیک تحت بارهای حرارتی، مکانیکی، الکتریکی و مغناطیسی در شرایط تنش صفحه‌ای و تقارن محوری می‌پردازد.

## ۲- معادلات پایه

یک دیسک در حال چرخش مطابق شکل ۱ در نظر گرفته شده است. جنس دیسک از مواد مگنتوالکتروالاستیک تابعی مدرج است که در راستای شعاعی به لحاظ الکتریکی و مغناطیسی قطبی شده است. تمام ضرایب مادی در راستای شعاعی تابع توانی از شعاع در نظر گرفته می‌شوند، بنابراین:

$$\xi(r) = \bar{\xi}_r \beta, \quad (1)$$

که  $\bar{\xi}$  معرف ضرایب مادی و  $\beta$  ضریب ناهمگنی است. دیسک تحت پتانسیل الکتریکی، پتانسیل مغناطیسی و حرارت در سطح داخلی و خارجی است. به دلیل تقارن و شرایط تنش صفحه‌ای، مؤلفه‌های غیر صفر تنش، جابجایی، توزیع حرارت، پتانسیل الکتریکی و پتانسیل مغناطیسی فقط تابعی از شعاع هستند.



شکل ۱- دیسک دوار مگنتوالکتروالاستیک تابعی مدرج

## ۱-۲- معادلات حاکم

در صورتی که کرنش کل به صورت مجموع کرنش‌های مکانیکی، حرارتی، الکتریکی، مغناطیسی و خزشی در نظر گرفته شوند، معادلات تنش-کرنش برای ماده مگنتوالکتروالاستیک به صورت زیر قابل بیان است [۱۷]:

$$\sigma_r = c_{11}(\epsilon_{rr} - \epsilon_{rr}^c) + c_{12}(\epsilon_{\theta\theta} - \epsilon_{\theta\theta}^c) + c_{13}(\epsilon_{zz} - \epsilon_{zz}^c) - c_{11}E_r - q_{11}H_r - \lambda_1 T \quad (2)$$

$$M_1 = \frac{C_1(\beta+1)+C_2-E_1}{C_1}, \quad M_2 = \frac{C_2\beta-E_2}{C_1},$$

$$M_3 = \frac{(\bar{\lambda}'_1(2\beta+1)-\bar{\lambda}'_2)}{C_1}, \quad M_4 = \frac{E_5-C_5(\beta+1)}{C_1},$$

$$M_5 = \frac{C_5}{C_1}, \quad M_6 = \frac{\bar{\lambda}'_1}{C_1}, \quad M_7 = \frac{E_3}{C_1}, \quad M_8 = \frac{E_4}{C_1}, \quad (27)$$

$$M_{13} = \frac{\bar{\rho}\omega^2}{C_1}, \quad M_{14} = \frac{C_1(\beta+2)-2E_1}{C_1},$$

$$M_{15} = \frac{C_2(\beta+2)-2E_2}{C_1}, \quad M_{16} = \frac{C_2}{C_1}$$

شرایط مرزی در نظر گرفته شده نیز به صورت زیر قابل بیان هستند:

$$\sigma_r(a) = 0, \quad \sigma_r(b) = 0,$$

$$\phi(a) = \phi_a, \quad \phi(b) = \phi_b,$$

$$\psi(a) = \psi_a, \quad \psi(b) = \psi_b,$$

$$T(a) = T_a, \quad T(b) = T_b \quad (28)$$

### ۲-۲- معادله توزیع دما

معادله توزیع دما برای دیسک متقارن بدون منبع گرمایی در حالت پایا به صورت زیر است [۱۹]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rk T \frac{\partial T}{\partial r}) = 0, \quad (29)$$

### ۳- حل معادلات

معادله توزیع دما (۲۹) با دو مرتبه انتگرال گیری به صورت زیر قابل نوشتن است:

$$T(r) = W_1 r^{-\beta} + W_2 \quad (30)$$

با استفاده از شرایط مرزی حرارتی بیان شده در رابطه (۲۸)، ثابت‌های  $W_1$  و  $W_2$  به دست خواهند آمد:

$$W_1 = \frac{T_b - T_a}{b^{-\beta} - a^{-\beta}}, \quad W_2 = \frac{T_a b^{-\beta} - T_b a^{-\beta}}{b^{-\beta} - a^{-\beta}} \quad (31)$$

### ۳-۱- حل تحلیلی معادله در زمان صفر

برای به دست آوردن معادله حاکم اولیه (زمان صفر)، با حذف کرنش‌های خزشی در معادله (۲۶) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{M_1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{M_2}{r^2} u = M_3 W_2 r^{\beta-1} + W_1 (M_4 + M_5 \beta) r^{-\beta-1}$$

$$+ (M_4 W_2 + W_1 (M_3 - M_6 \beta)) r^{-1} + M_8 A_1 r^{-\beta-2}$$

$$+ M_7 A_2 r^{-\beta-2} - M_{13} r \quad (32)$$

جواب کامل این معادله شامل جواب عمومی و خصوصی به صورت زیر قابل ارائه است:

$$u = B_1 r^{m_1} + B_2 r^{m_2} + B_3 r + B_4 r^{\beta+1} + B_5 r^{1-\beta} + B_6 r^3 + B_7 A_2 r^{-\beta} + B_8 A_1 r^{-\beta} \quad (33)$$

که  $B_1$  و  $B_2$  ثابت‌های مجهول هستند و داریم:

$$B_3 = \frac{M_4 W_2 + W_1 (M_3 - M_6 \beta)}{M_1 + M_2}, \quad B_4 = \frac{M_3 W_2}{M_2 + (\beta+1)(\beta+M_1)}$$

$$B_5 = \frac{W_1 (M_4 + M_5 \beta)}{\beta(\beta-1) + M_1(1-\beta) + M_2}, \quad B_6 = \frac{-M_{13}}{6 + 3M_1 + M_2}, \quad (34)$$

$$B_7 = \frac{M_7}{\beta(\beta+1-M_1) + M_2}, \quad B_8 = \frac{M_8}{\beta(\beta+1-M_1) + M_2}$$

با جایگذاری رابطه (۳۳) در روابط (۲۰) و (۲۱) و انتگرال گیری خواهیم داشت:

$$c'_{11} = c_{11} - \frac{c'_{13}}{c_{33}}, \quad c'_{12} = c_{12} - \frac{c_{13}c_{23}}{c_{33}}, \quad c'_{22} = c_{22} - \frac{c'_{23}}{c_{33}}$$

$$e'_{11} = e_{11} - \frac{c_{13}e_{13}}{c_{33}}, \quad e'_{12} = e_{12} - \frac{c_{23}e_{13}}{c_{33}}, \quad q'_{11} = q_{11} - \frac{c_{13}q_{13}}{c_{33}}$$

$$q'_{12} = q_{12} - \frac{c_{23}q_{13}}{c_{33}}, \quad \lambda'_1 = \lambda_1 - \frac{c_{13}\lambda_3}{c_{33}}, \quad \lambda'_2 = \lambda_2 - \frac{c_{23}\lambda_3}{c_{33}} \quad (19)$$

$$m'_1 = m_1 + \frac{\lambda_3 q_{13}}{c_{33}}, \quad d'_{11} = d_{11} + \frac{q'_{13}}{c_{33}}, \quad \beta'_{11} = \beta_{11} + \frac{e'_{13}}{c_{33}}$$

$$e'_{11} = e_{11} + \frac{e_{13}q_{13}}{c_{33}}, \quad p'_1 = p_1 + \frac{e_{13}\lambda_3}{c_{33}}$$

با جایگذاری روابط (۱۰) و (۱۱) در روابط (۱۷) و (۱۸)، بعد از مرتب سازی داریم:

$$\frac{\partial \phi(r)}{\partial r} = L_1 \frac{\partial u}{\partial r} + L_2 \frac{u}{r} + L_3 \frac{A_2}{r^{1+\beta}} + L_4 T - L_5 \frac{A_1}{r^{1+\beta}} \quad (20)$$

$$-L_1 \varepsilon_{rr}^c - L_2 \varepsilon_{\theta\theta}^c$$

$$\frac{\partial \psi(r)}{\partial r} = P_1 \frac{\partial u}{\partial r} + P_2 \frac{u}{r} + P_3 \frac{A_1}{r^{1+\beta}} + P_4 T - P_5 \frac{A_2}{r^{1+\beta}} \quad (21)$$

$$-P_1 \varepsilon_{rr}^c - P_2 \varepsilon_{\theta\theta}^c$$

که در آن:

$$L_1 = \frac{\bar{e}'_{11} \bar{d}'_{11} - \bar{e}'_{11} \bar{q}'_{11}}{\bar{\beta}'_{11} \bar{d}'_{11} - \bar{e}'_{11}}, \quad L_2 = \frac{\bar{e}'_{12} \bar{d}'_{11} - \bar{e}'_{11} \bar{q}'_{12}}{\bar{\beta}'_{11} \bar{d}'_{11} - \bar{e}'_{11}}$$

$$L_3 = \frac{\bar{e}'_{11}}{\bar{\beta}'_{11} \bar{d}'_{11} - \bar{e}'_{11}}, \quad L_4 = \frac{\bar{d}'_{11} \bar{p}'_1 - \bar{e}'_{11} \bar{m}'_1}{\bar{\beta}'_{11} \bar{d}'_{11} - \bar{e}'_{11}}, \quad L_5 = \frac{\bar{d}'_{11}}{\bar{\beta}'_{11} \bar{d}'_{11} - \bar{e}'_{11}}, \quad (22)$$

$$P_1 = \frac{\bar{q}'_{11} \bar{\beta}'_{11} - \bar{e}'_{11} \bar{e}'_{11}}{\bar{\beta}'_{11} \bar{d}'_{11} - \bar{e}'_{11}}, \quad P_2 = \frac{\bar{q}'_{12} \bar{\beta}'_{11} - \bar{e}'_{12} \bar{e}'_{11}}{\bar{\beta}'_{11} \bar{d}'_{11} - \bar{e}'_{11}}$$

$$P_3 = \frac{\bar{e}'_{11}}{\bar{\beta}'_{11} \bar{d}'_{11} - \bar{e}'_{11}}, \quad P_4 = \frac{\bar{\beta}'_{11} \bar{m}'_1 - \bar{e}'_{11} \bar{p}'_1}{\bar{\beta}'_{11} \bar{d}'_{11} - \bar{e}'_{11}}, \quad P_5 = \frac{\bar{\beta}'_{11}}{\bar{\beta}'_{11} \bar{d}'_{11} - \bar{e}'_{11}}$$

با استفاده از روابط (۲۰) و (۲۱) در روابط (۱۵) و (۱۶) می‌توان نوشت:

$$\sigma_r = C_1 r^\beta \frac{\partial u}{\partial r} + C_2 r^\beta \frac{u}{r} + C_3 \frac{A_2}{r} + C_4 \frac{A_1}{r} + C_5 r^\beta T$$

$$-\bar{\lambda}'_1 r^{2\beta} T - C_1 r^\beta \varepsilon_{rr}^c - C_2 r^\beta \varepsilon_{\theta\theta}^c, \quad (23)$$

$$\sigma_\theta = E_1 r^\beta \frac{\partial u}{\partial r} + E_2 r^\beta \frac{u}{r} + E_3 \frac{A_2}{r} + E_4 \frac{A_1}{r} + E_5 r^\beta T$$

$$-\bar{\lambda}'_2 r^{2\beta} T - E_1 r^\beta \varepsilon_{rr}^c - E_1 r^\beta \varepsilon_{\theta\theta}^c, \quad (24)$$

که در آن:

$$C_1 = \bar{c}'_{11} + \bar{e}'_{11} L_1 + \bar{q}'_{11} P_1, \quad C_2 = \bar{c}'_{12} + \bar{e}'_{11} L_2 + \bar{q}'_{11} P_2,$$

$$C_3 = \bar{e}'_{11} L_3 - \bar{q}'_{11} P_5, \quad C_4 = -\bar{e}'_{11} L_5 + \bar{q}'_{11} P_3,$$

$$C_5 = \bar{e}'_{11} L_4 + \bar{q}'_{11} P_4, \quad E_1 = \bar{c}'_{12} + \bar{e}'_{12} L_1 + \bar{q}'_{12} P_1, \quad (25)$$

$$E_2 = \bar{c}'_{22} + \bar{e}'_{12} L_2 + \bar{q}'_{12} P_2, \quad E_3 = \bar{e}'_{12} L_3 - \bar{q}'_{12} P_5,$$

$$E_4 = -\bar{e}'_{12} L_5 + \bar{q}'_{12} P_3, \quad E_5 = \bar{e}'_{12} L_4 + \bar{q}'_{12} P_4,$$

با استفاده از معادلات (۲۳) و (۲۴) در معادله (۸) می‌توان معادله دیفرانسیل حاکم را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} M_1 \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} M_2 u = M_3 r^{\beta-1} T + M_4 \frac{T}{r}$$

$$+ (M_6 r^\beta - M_5) \frac{\partial T}{\partial r} + M_7 \frac{A_2}{r^{2+\beta}} + M_8 \frac{A_1}{r^{2+\beta}} \quad (26)$$

$$- M_{13} r + M_{14} r^{-1} \varepsilon_{rr}^c + \frac{\partial \varepsilon_{rr}^c}{\partial r} + M_{15} r^{-1} \varepsilon_{\theta\theta}^c + M_{16} \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}^c}{\partial r}$$

که در آن:

$$\varepsilon_e^c = B(r)\sigma_e^{n(r)} \quad (41)$$

$$B(r) = b_0 r^{b_1}, \quad n(r) = n_0$$

که  $b_1$  و  $b_0$ ,  $n_0$  ثابت هستند. با استفاده از رابطه (41) در رابطه (40) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_r^c &= b_0 r^{b_1} \sigma_e^{n_0-1} (\sigma_r - .5\sigma_\theta) \\ \dot{\varepsilon}_\theta^c &= b_0 r^{b_1} \sigma_e^{n_0-1} (\sigma_\theta - .5\sigma_r) \end{aligned} \quad (42)$$

$$\dot{\varepsilon}_z^c = -(\dot{\varepsilon}_r^c + \dot{\varepsilon}_\theta^c)$$

تنش معادل فون مایز نیز به صورت زیر ارائه شده است:

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2} - \sigma_r \sigma_\theta \quad (43)$$

مشابه با بخش قبلی، پاسخ کامل معادله (39) به صورت زیر قابل بیان است:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= D_1 r^{m_1} + D_2 r^{m_2} + G_1 r^{m_1} + G_2 r^{m_2} + B_7 \dot{A}_2 r^{-\beta} \\ &+ B_8 \dot{A}_1 r^{-\beta} \end{aligned} \quad (44)$$

که  $\dot{A}_1$ ,  $\dot{A}_2$ ,  $D_1$  و  $D_2$  ثابت‌های مجهول هستند و  $G_1$  و  $G_2$  با استفاده از روش تغییرات پارامترها به دست می‌آیند [16]:

$$\begin{aligned} G_1(r) &= \frac{1}{m_2 - m_1} \int \left( r^{1-m_1} (M_{14} r^{-1} \dot{\varepsilon}_{rr}^c + \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{rr}^c}{\partial r} + M_{15} r^{-1} \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}^c \right. \\ &\left. + M_{16} \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}^c}{\partial r} \right) dr \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} G_2(r) &= \frac{-1}{m_2 - m_1} \int \left( r^{1-m_2} (M_{14} r^{-1} \dot{\varepsilon}_{rr}^c + \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{rr}^c}{\partial r} + M_{15} r^{-1} \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}^c \right. \\ &\left. + M_{16} \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}^c}{\partial r} \right) dr \end{aligned}$$

مشتق‌گیری نسبت به زمان از روابط (20) و (21) و همچنین (23) و (24) منجر خواهد شد به:

$$\dot{\sigma}_r = r^\beta \left( C_1 \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} + C_2 \frac{\dot{u}}{r} - C_1 \dot{\varepsilon}_{rr}^c - C_2 \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}^c \right) + C_3 \frac{\dot{A}_2}{r} + C_4 \frac{\dot{A}_1}{r} \quad (46)$$

$$\dot{\sigma}_\theta = r^\beta \left( E_1 \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} + E_2 \frac{\dot{u}}{r} - E_1 \dot{\varepsilon}_{rr}^c - E_2 \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}^c \right) + E_3 \frac{\dot{A}_2}{r} + E_4 \frac{\dot{A}_1}{r} \quad (47)$$

$$\frac{\partial \dot{\phi}}{\partial r} = L_1 \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} + L_2 \frac{\dot{u}}{r} + L_3 \frac{\dot{A}_2}{r^{1+\beta}} - L_5 \frac{\dot{A}_1}{r^{1+\beta}} - L_1 \dot{\varepsilon}_{rr}^c - L_2 \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}^c \quad (48)$$

$$\frac{\partial \dot{\psi}}{\partial r} = P_1 \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} + P_2 \frac{\dot{u}}{r} + P_3 \frac{\dot{A}_1}{r^{1+\beta}} - P_5 \frac{\dot{A}_2}{r^{1+\beta}} - P_1 \dot{\varepsilon}_{rr}^c - P_2 \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}^c \quad (49)$$

با استفاده از رابطه (44) در معادلات (46)-(49) و همچنین انتگرال‌گیری از معادلات (48) و (49) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_r &= D_1 (m_1 C_1 + C_2) r^{\beta+m_1-1} + D_2 (m_2 C_1 + C_2) r^{\beta+m_2-1} \\ &+ ((C_2 - \beta C_1) B_8 + C_4) \frac{\dot{A}_1}{r} + ((C_2 - \beta C_1) B_7 + C_3) \frac{\dot{A}_2}{r} + \\ &C_1 r^\beta \left( \frac{\partial G_{11}}{\partial r} r^{m_1} + G_{11} m_1 r^{m_1-1} + \frac{\partial G_{21}}{\partial r} r^{m_2} + G_{21} m_2 r^{m_2-1} \right) \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} &+ C_2 r^{\beta-1} (G_{11} r^{m_1} + G_{21} r^{m_2}) \\ &- b_0 r^{b_1 + \beta} \sigma_e^{n_0-1} (C_1 (\sigma_r - .5\sigma_\theta) + C_2 (\sigma_\theta - .5\sigma_r)) \\ \dot{\sigma}_\theta &= D_1 ((m_1 E_1 + E_2) r^{\beta+m_1-1}) + D_2 ((m_2 E_1 + E_2) r^{\beta+m_2-1}) \\ &+ ((E_2 - \beta E_1) B_8 + E_4) \frac{\dot{A}_1}{r} + ((E_2 - \beta E_1) B_7 + E_3) \frac{\dot{A}_2}{r} \\ &+ E_1 r^\beta \left( \frac{\partial G_{11}}{\partial r} r^{m_1} + G_{11} m_1 r^{m_1-1} + \frac{\partial G_{21}}{\partial r} r^{m_2} + G_{21} m_2 r^{m_2-1} \right) \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} &+ E_2 r^{\beta-1} (G_{11} r^{m_1} + G_{21} r^{m_2}) \\ &- b_0 r^{b_1 + \beta} \sigma_e^{n_0-1} (E_1 (\sigma_r - .5\sigma_\theta) + E_2 (\sigma_\theta - .5\sigma_r)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(r) &= L_1 (B_1 r^{m_1} + B_2 r^{m_2} + B_3 r + B_4 r^{\beta+1} + B_5 r^{1-\beta} + B_6 r^3 \\ &+ (B_7 A_2 + B_8 A_1) r^{-\beta}) + L_2 \left( \frac{B_1}{m_1} r^{m_1} + \frac{B_2}{m_2} r^{m_2} + B_3 r \right. \\ &\left. + \frac{B_4}{\beta+1} r^{\beta+1} + \frac{B_5}{1-\beta} r^{1-\beta} + \frac{B_6}{3} r^3 - (B_7 A_2 + B_8 A_1) \frac{r^{-\beta}}{\beta} \right) \end{aligned} \quad (35)$$

$$+ L_4 \left( \frac{W_1}{-\beta+1} r^{-\beta+1} + W_2 r \right) + (L_5 A_1 - L_3 A_2) \frac{r^{-\beta}}{\beta} + Z_1$$

$$\begin{aligned} \psi(r) &= P_1 (B_1 r^{m_1} + B_2 r^{m_2} + B_3 r + B_4 r^{\beta+1} + B_5 r^{1-\beta} \\ &+ B_6 r^3 + (B_7 A_2 + B_8 A_1) r^{-\beta}) + P_2 \left( \frac{B_1}{m_1} r^{m_1} + \frac{B_2}{m_2} r^{m_2} + B_3 r \right. \\ &\left. + \frac{B_4}{\beta+1} r^{\beta+1} + \frac{B_5}{1-\beta} r^{1-\beta} + \frac{B_6}{3} r^3 - (B_7 A_2 + B_8 A_1) \frac{r^{-\beta}}{\beta} \right) \end{aligned} \quad (36)$$

$$+ P_4 \left( \frac{W_1}{-\beta+1} r^{-\beta+1} + W_2 r \right) + (P_5 A_2 - P_3 A_1) \frac{r^{-\beta}}{\beta} + Z_2$$

که  $Z_1$  و  $Z_2$  ثابت‌های مجهول هستند. با جایگذاری روابط (30) و (33) در رابطه (23) و (24)، تنش‌های شعاعی و محیطی به دست خواهند آمد:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= C_1 r^\beta (B_1 m_1 r^{m_1-1} + B_2 m_2 r^{m_2-1} + B_3 + B_4 (\beta+1) r^\beta \\ &+ B_5 (1-\beta) r^{-\beta} + 3B_6 r^2 - (B_7 A_2 + B_8 A_1) \beta r^{-\beta-1}) \\ &+ C_2 r^\beta (B_1 m_1 r^{m_1-1} + B_2 m_2 r^{m_2-1} + B_3 + B_4 r^\beta + B_5 r^{-\beta} + B_6 r^2 \\ &+ (B_7 A_2 + B_8 A_1) r^{-\beta-1}) + (C_5 r^\beta - \bar{\lambda}_1 r^{2\beta}) (W_1 r^{-\beta} + W_2) \\ &+ C_4 \frac{A_1}{r} + C_3 \frac{A_2}{r} \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= E_1 r^\beta (B_1 m_1 r^{m_1-1} + B_2 m_2 r^{m_2-1} + B_3 + B_4 (\beta+1) r^\beta \\ &+ B_5 (1-\beta) r^{-\beta} + 3B_6 r^2 - (B_7 A_2 + B_8 A_1) \beta r^{-\beta-1}) \\ &+ E_2 r^\beta (B_1 m_1 r^{m_1-1} + B_2 m_2 r^{m_2-1} + B_3 + B_4 r^\beta + B_5 r^{-\beta} \\ &+ B_6 r^2 + (B_7 A_2 + B_8 A_1) r^{-\beta-1}) + E_3 \frac{A_2}{r} + E_4 \frac{A_1}{r} \\ &+ (E_5 r^\beta - \bar{\lambda}_2 r^{2\beta}) (W_1 r^{-\beta} + W_2) \end{aligned} \quad (38)$$

اکنون مجهولات  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $Z_1$  و  $Z_2$  با استفاده از شرایط مرزی قابل محاسبه هستند. با استفاده از شش شرط مرزی یک دستگاه معادلات جبری خطی با شش معادله و شش مجهول به دست می‌آید. با حل این دستگاه، تنش‌ها، جابجایی شعاعی، پتانسیل الکتریکی و مغناطیسی در زمان شروع به دست می‌آیند.

### 3-2- حل معادله خزش وابسته به زمان

با پایا در نظر گرفتن شرایط حرارتی، مشتق‌گیری از معادله (26) نسبت به زمان منجر خواهد شد به:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} M_1 \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} M_2 \dot{u} &= M_7 \frac{\dot{A}_2}{r^{2+\beta}} + M_8 \frac{\dot{A}_1}{r^{2+\beta}} \\ &+ M_{14} r^{-1} \dot{\varepsilon}_{rr}^c + \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{rr}^c}{\partial r} + M_{15} r^{-1} \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}^c + M_{16} \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}^c}{\partial r} \end{aligned} \quad (39)$$

معادلات پرندهتل-ریوس برای ارتباط بین کرنش خزشی با تنش‌ها و معادلات ساختاری خزش ماده ارائه شده است [16]:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_r^c &= \frac{\dot{\varepsilon}_e^c}{\sigma_e} (\sigma_r - 0.5(\sigma_\theta + \sigma_z)) \\ \dot{\varepsilon}_\theta^c &= \frac{\dot{\varepsilon}_e^c}{\sigma_e} (\sigma_\theta - 0.5(\sigma_r + \sigma_z)) \\ \dot{\varepsilon}_z^c &= \frac{\dot{\varepsilon}_e^c}{\sigma_e} (\sigma_z - 0.5(\sigma_\theta + \sigma_r)) \end{aligned} \quad (40)$$

قانون نورتن نیز برای مدل ساختاری خزش مواد به شکل زیر ارائه شده است:

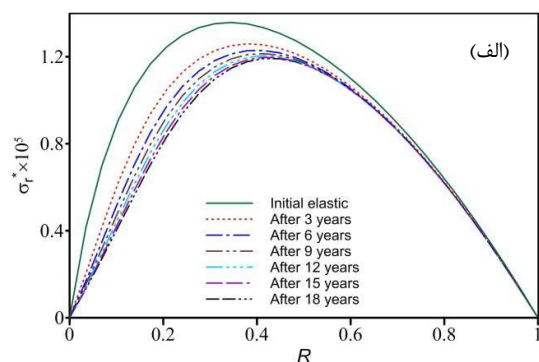
$q_{11} (N/Am)$	345	$\alpha_r (1/K)$	$6 \times 10^{-6}$
$q_{12} (N/Am)$	265	$b_0$	$0.11 \times 10^{-36}$
$n_0$	3	$\rho (kg/m^3)$	7530
$b_1$	-5		

در این مقاله بازه زمانی  $dt=5 \times 10^4 s$  انتخاب شده است. بازتوزیع تنش‌ها و جابجایی شعاعی در شکل ۲ نشان داده شده است. در این حالت شرایط زیر در نظر گرفته شده است:

$$T_a = 0, T_b = 100, \phi_a = \psi_a = 0, \phi_b = \psi_b = 3000, \omega = 30\pi, \beta = 0.8 \quad (\Delta 7)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود تنش شعاعی در شعاع داخلی و خارجی با زمان ثابت است که نشان‌دهنده تأمین شدن شرایط مرزی در طول فرایند است. شکل ۲ الف نشان می‌دهد که تنش شعاعی با زمان با نرخی کاهش کمتری می‌شود. شکل ب نشان می‌دهد که تنش محیطی مثبت در سطح داخلی و تنش منفی در سطح خارجی با زمان کاهش پیدا می‌کند. البته این تغییرات در سطح داخلی بیشتر است. مطابق شکل ۲ ج، جابجایی شعاعی با زمان افزایش می‌یابد. شکل ۳ تغییرات تنش‌های شعاعی و معادل و جابجایی شعاعی و پتانسیل الکتریکی را با زمان نشان می‌دهد. مطابق شکل، تنش‌ها و پتانسیل الکتریکی بعد از ۱۰ سال تغییرات بسیار کمی خواهند داشت که قابل چشم‌پوشی است.

اکنون تاثیر ضریب ناهمگنی بر رفتار استاتیکی و خزشی بررسی می‌شود. در این حالت شرایط مرزی مشابه قبل است. از شکل ۴ الف مشاهده می‌شود که با افزایش ضریب ناهمگنی تنش شعاعی اولیه و خزشی کاهش می‌یابند. همچنین مشاهده می‌شود که با افزایش ضریب ناهمگنی اختلاف بین توزیع تنش اولیه و خزشی کمتر می‌شود. شکل ۴ ب نشان می‌دهد که یک نقطه ثابت در شعاع وجود دارد که تنش محیطی در آن مستقل از ضریب ناهمگنی است. علاوه، تنش محیطی فشاری در سطح خارجی و کششی در سطح داخلی با افزایش ضریب ناهمگنی کاهش دارند. همچنین، بیشینه تنش‌های محیطی خزشی برای ضریب ناهمگنی‌های کوچکتر دارای افزایش است.



$$\phi = D_1 r^{m_1} \left( L_1 + \frac{L_2}{m_1} \right) + D_2 r^{m_2} \left( L_1 + \frac{L_2}{m_2} \right) - (B_8 (L_2 - L_1 \beta) - L_5) \frac{r^{-\beta}}{\beta} \dot{A}_1 - (B_7 (L_2 - L_1 \beta) + L_3) \frac{r^{-\beta}}{\beta} \dot{A}_2 \quad (\Delta 2)$$

$$+ \int \left( L_1 \left( \frac{\partial G_1}{\partial r} r^{m_1} + G_1 m_1 r^{m_1-1} + \frac{\partial G_2}{\partial r} r^{m_2} + G_2 m_2 r^{m_2-1} \right) + L_2 \left( +G_1 r^{m_1-1} + G_2 r^{m_2-1} \right) - L_1 \dot{\epsilon}_{rr}^c - L_2 \dot{\epsilon}_{\theta\theta}^c \right) dr + J_1$$

$$\psi = D_1 r^{m_1} \left( P_1 + \frac{P_2}{m_1} \right) + D_2 r^{m_2} \left( P_1 + \frac{P_2}{m_2} \right) - (B_8 (P_2 - P_1 \beta) + P_3) \frac{r^{-\beta}}{\beta} \dot{A}_1 - (B_7 (P_2 - P_1 \beta) - P_5) \frac{r^{-\beta}}{\beta} \dot{A}_2 \quad (\Delta 3)$$

$$+ \int \left( P_1 \left( \frac{\partial G_1}{\partial r} r^{m_1} + G_1 m_1 r^{m_1-1} + \frac{\partial G_2}{\partial r} r^{m_2} + G_2 m_2 r^{m_2-1} \right) + P_2 \left( +G_1 r^{m_1-1} + G_2 r^{m_2-1} \right) - P_1 \dot{\epsilon}_{rr}^c - P_2 \dot{\epsilon}_{\theta\theta}^c \right) dr + J_2$$

که  $J_1$  و  $J_2$  ثابت‌های مجهول هستند. مشابه با بخش قبلی، شش مجهول با استفاده از شش معادله شرط مرزی به صورت یک دستگاه معادله جبری خطی قابل محاسبه هستند. در طول فرایند خزش شرایط مرزی مکانیکی، پتانسیل الکتریکی و مغناطیسی روی سطح داخلی و خارجی دیسک ثابت در نظر گرفته می‌شود؛ بنابراین:

$$\begin{aligned} \sigma_r(a) = 0, \quad \sigma_r(b) = 0, \\ \phi(a) = 0, \quad \phi(b) = 0, \\ \psi(a) = 0, \quad \psi(b) = 0. \end{aligned} \quad (\Delta 4)$$

با داشتن نرخ تغییرات، برای به دست آوردن تاریخچه تنش‌ها و پتانسیل‌های الکتریکی و مغناطیسی از یک روش تکرارشونده استفاده می‌شود. ابتدا باید یک بازه زمانی مناسب  $(dt^{(i)})$  برای افزایش در هر مرحله در نظر گرفت. زمان سپری‌شده در هر مرحله به صورت جمع بازه‌های زمانی تا قبل از آن در نظر گرفته می‌شود. برای محاسبه تنش‌ها در هر مرحله، تنش‌ها و پتانسیل‌های الکتریکی و مغناطیسی در مرحله قبل در دسترس است و نرخ تغییرات تنش‌ها هم قابل محاسبه است. با استفاده از رابطه تکرارشونده زیر در هر مرحله می‌توان تنش‌ها و پتانسیل‌های الکتریکی و مغناطیسی را محاسبه نمود:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}^{(i)}(r, t_i) = \mathfrak{R}^{(i-1)}(r, t_{i-1}) + \mathfrak{R}^{(i-1)}(r, t_{i-1}) dt^{(i)}, \\ \mathfrak{R} = \sigma_r, \sigma_\theta, \phi, \psi \end{aligned} \quad (\Delta 5)$$

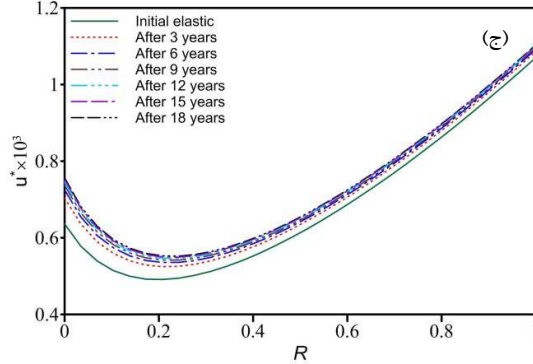
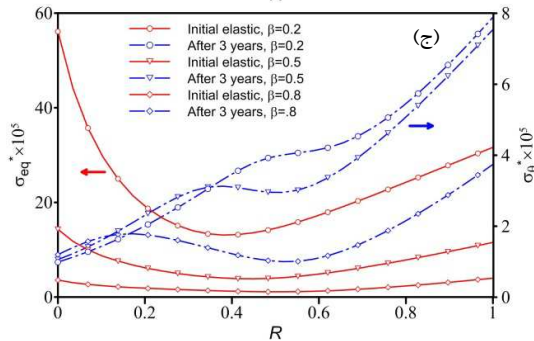
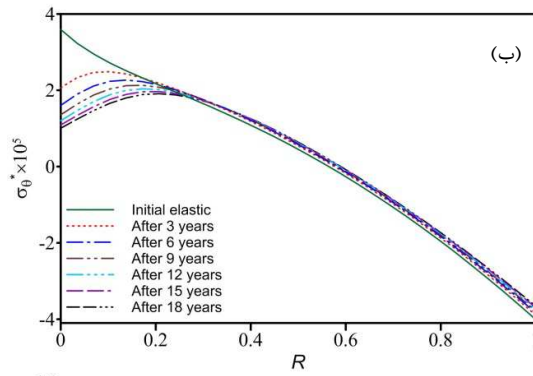
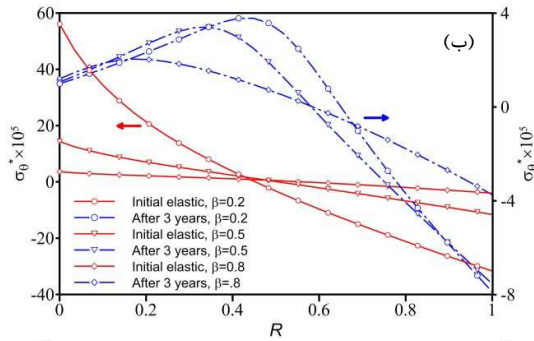
#### ۴- نتایج

در این بخش به ارائه مثال‌های عددی برای بررسی تأثیر پارامترهای مختلف پرداخته می‌شود. خواص مادی مورد استفاده در این بخش در جدول ۱ آورده شده است. شعاع داخلی و خارجی به ترتیب  $0.04$  و  $0.2$  متر انتخاب شده‌اند. پارامترهای بدون بعد زیر در نشان دادن نتایج مورد استفاده قرار گرفته‌اند:

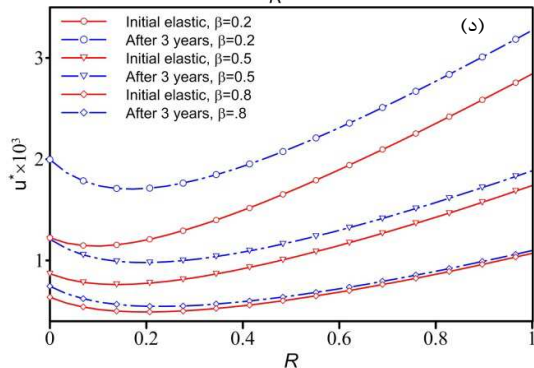
$$R = \frac{r-a}{b-a}, \quad u^* = \frac{u}{a}, \quad \sigma_i^* = \frac{\sigma_i}{P_a}, \quad \phi^* = \frac{\beta_{11} \phi}{c_{11} b}, \quad \psi^* = \frac{d_{11} \psi}{c_{11} b} \quad (\Delta 6)$$

جدول ۱ ثابت‌های مادی

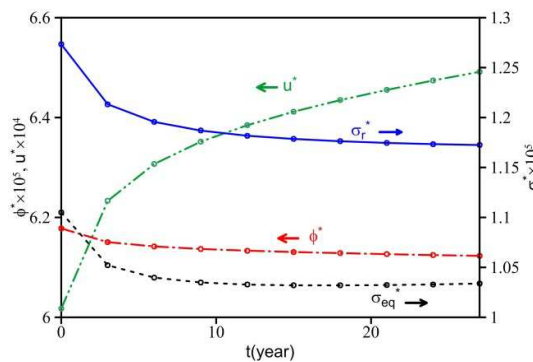
$c_{11} (GPa)$	215	$P_1 (C^2/m^2k)$	$-2.5 \times 10^{-5}$
$c_{12} (GPa)$	120	$\dot{m}_1 (N/AmK)$	$2.5 \times 10^{-5}$
$c_{22} (GPa)$	120	$\epsilon_{11} (Ns/VC)$	$2.82 \times 10^{-9}$
$c_{22} (GPa)$	218	$d_{11} (Ns^2/C^2)$	$95 \times 10^{-6}$
$\epsilon_{11} (C/m^2)$	7.5	$\beta_{11} (C^2/N m^2)$	$5.8 \times 10^{-9}$
$\epsilon_{12} (C/m^2)$	-2.5	$\alpha_\theta (1/K)$	$15 \times 10^{-6}$



شکل ۲- تغییرات (الف) تنش شعاعی (ب) تنش محیطی (ج) جابجایی شعاعی ناشی از خزش



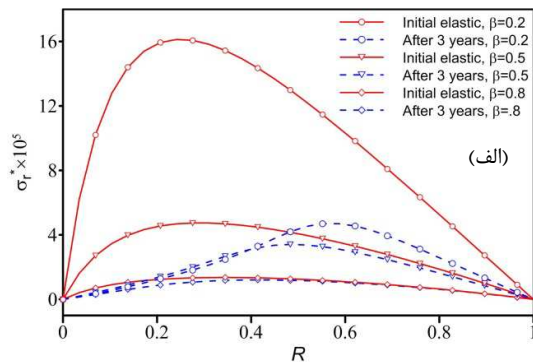
شکل ۴- تأثیر ضریب ناهمگنی بر (الف) تنش شعاعی (ب) تنش محیطی (ج) تنش معادل (د) جابجایی شعاعی اولیه و خزشی



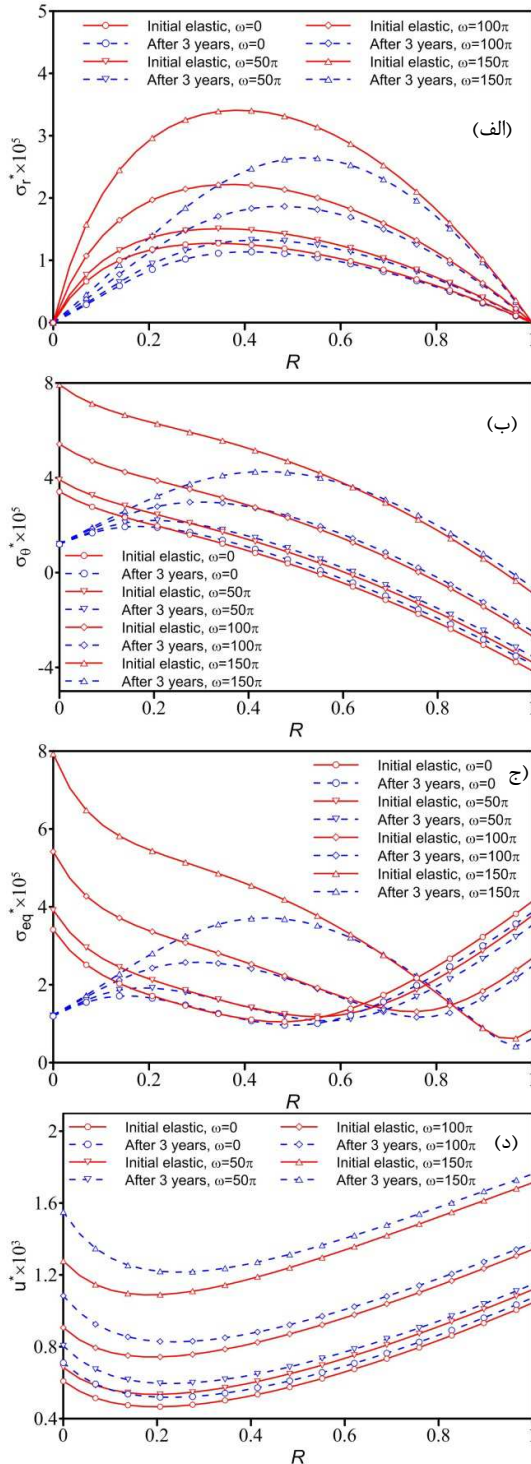
شکل ۳- تغییرات تنش شعاعی، محیطی و معادل، جابجایی شعاعی و اختلاف پتانسیل با زمان

شکل ۴ ج نشان می‌دهد که با افزایش ضریب ناهمگنی تنش معادل اولیه کاهش و تنش معادل خزشی در سطح خارجی کاهش و داخلی افزایش را تجربه میکند. شکل ۴ د نشان می‌دهد که جابجایی شعاعی در هر دو حالت اولیه و خزشی با افزایش ضریب ناهمگنی کاهش خواهند داشت. البته، مشاهده میشود که با افزایش ضریب ناهمگنی

اختلاف بین توزیع جابجایی اولیه و خزشی کمتر می‌شود. حال به بررسی تأثیر دمای خارجی بر توزیع تنش‌های اولیه و خزشی پرداخته می‌شود. همان‌طور که در شکل ۵ الف مشاهده می‌شود، تنش شعاعی اولیه و خزشی با افزایش دما افزایش می‌یابد. همچنین، با افزایش دما اختلاف بین توزیع تنش شعاعی اولیه و خزشی افزایش می‌یابد. بنا بر شکل ۵ ب، هر دو تنش محیطی اولیه و خزشی دارای نقطه ای ثابت هستند که تنش محیطی آن نقطه مستقل از دما است. با افزایش دما، برای هر دو حالت اولیه و خزشی، تنش محیطی فشاری در سطح خارجی و تنش محیطی کششی در سطح داخلی کاهش را تجربه می‌کنند. شکل ۵ ج نشان می‌دهد که جابجایی شعاعی در هر دو حالت اولیه و پس از خزش، با افزایش دما افزایش می‌یابد. همچنین، با افزایش



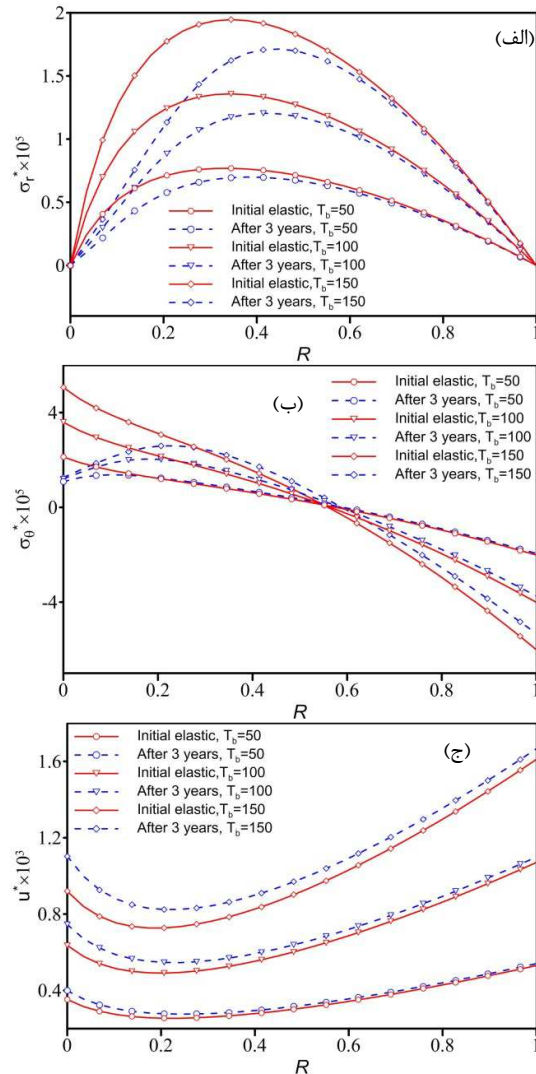




شکل ۶- تاثیر سرعت دوران بر مقادیر اولیه و خزشی (الف) تنش شعاعی (ب) تنش محیطی (ج) تنش معادل (د) جابجایی شعاعی

شکل ۶ ب نشان می‌دهد که با افزایش سرعت دوران، تنش محیطی اولیه فشاری در سطح خارجی کاهش و تنش محیطی کششی در سطح داخلی افزایش را تجربه می‌کنند. در مورد تنش محیطی خزشی، در سطح خارجی کاهش یافته و در سطح داخلی تغییرات ناچیز

دما اختلاف بین توزیع جابجایی شعاعی اولیه و خزشی افزایش می‌یابد. پارامتر بعدی که تأثیر آن بر رفتار دیسک موردنظر بررسی می‌شود، سرعت دوران است. بر اساس شکل ۶ الف، با افزایش سرعت دورانی، تنش شعاعی اولیه و خزشی افزایش پیدا می‌کنند. با افزایش سرعت دوران اختلاف بین توزیع اولیه و خزشی چشمگیرتر است.

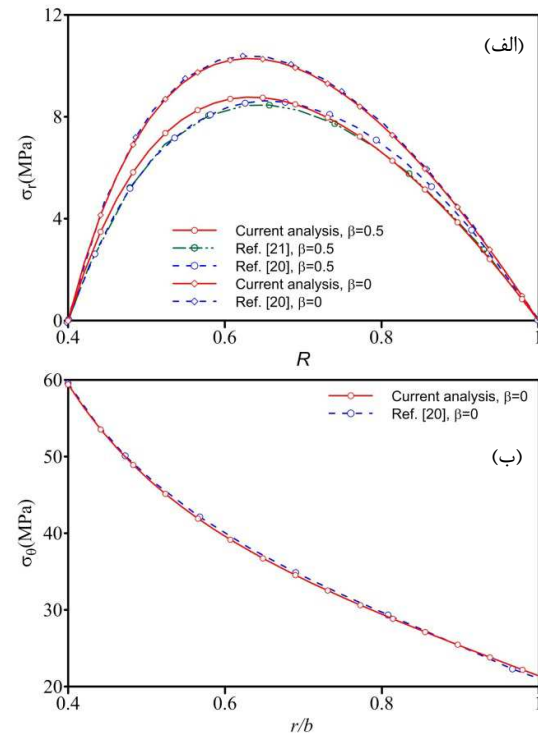


شکل ۵- تاثیر محیط حرارتی بر (الف) تنش شعاعی (ب) تنش محیطی (ج) جابجایی شعاعی اولیه و خزشی

- مشاهده می‌شود که با افزایش ضریب ناهمگنی تنش شعاعی و جابجایی شعاعی در هر دو حالت اولیه و خزشی، اندازه تنش محیطی اولیه و ماکزیمم تنش‌های محیطی خزشی کاهش خواهند داشت.
- مشاهده میشود که با افزایش ضریب ناهمگنی اختلاف بین توزیع تنش شعاعی و جابجایی شعاعی اولیه و خزشی کمتر می‌شود.
- تنش شعاعی و اندازه تنش محیطی اولیه و خزشی با افزایش دما کاهش را تجربه می‌کنند اما جابجایی شعاعی در هر دو حالت اولیه و پس از خزش افزایش می‌یابد. همچنین، با افزایش دما اختلاف بین توزیع جابجایی و تنش شعاعی اولیه و خزشی افزایش می‌یابد.
- با افزایش سرعت دورانی، تنش و جابجایی شعاعی اولیه و خزشی افزایش پیدا می‌کنند که با افزایش سرعت دوران اختلاف بین توزیع اولیه و خزشی چشمگیرتر است. ماکزیمم تنش معادل اولیه با افزایش سرعت دوران افزایش می‌یابد و از سطح خارجی به داخلی منتقل می‌شود.

است. در شکل ۶ ج مشاهده می‌شود که بیشینه تنش معادل اولیه با افزایش سرعت دوران افزایش می‌یابد و از سطح خارجی به داخلی منتقل می‌شود. همچنین، بیشینه تنش معادل خزشی با افزایش سرعت دوران از سطح خارجی به میانه جداره منتقل می‌شود. شکل ۶ د نشان دهنده آن است که با افزایش سرعت دوران، جابجایی شعاعی اولیه و خزشی افزایش دارند.

با توجه به اینکه تاکنون خزش دیسک دوار مگنتوالکتروالاستیک در مقاله‌ای گزارش نشده است. به جهت اعتبار سنجی، نتایج برای یک حالت ساده از رفتار استاتیکی دیسک تابعی مدرج مورد مقایسه قرار داده می‌شوند. نتایج بدست آمده بر اساس پارامترها و شرایط مربوط به مراجع استفاده شده در شکل ۷ نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که نتایج همخوانی بسیار خوبی دارند.



شکل ۷- (الف) تنش شعاعی (ب) تنش محیطی در دیسک تابعی مدرج

#### ۶- نمادها

القا مغناطیسی	$B_r$
ضرایب الاستیک (GPa)	$c_{ij}$
جابجایی الکتریکی	$D_r$
ضریب مغناطیسی ( $Ns^2/C^2$ )	$d_{11}$
ضریب پیزوالکتریک ( $C/m^2$ )	$e_{ij}$
ضریب نفوذ رطوبت	$k^C$
ضریب انتقال گرما	$k^T$
ضریب پیرومگنتیک (N/AmK)	$m_l$
ضریب پیروالکتریک ( $C^2/m^2k$ )	$p_l$
ضریب پیرومگنتیک (N/Am)	$q_{ij}$
ضریب انبساط گرمایی	$\alpha_i$
ضریب دی‌الکتریک ( $C^2/Nm^2$ )	$\beta_{11}$
ضریب الکترومگنتیک (Ns/VC)	$\epsilon_{11}$
نرخ کرنش خزشی مؤثر	$\dot{\epsilon}_{\theta}^e$
نرخ کرنش خزشی	$\dot{\epsilon}_{\theta}^p$
مدول حرارتی	$\lambda_i$
چگالی ( $kg/m^3$ )	$\rho$
تنش مؤثر (Pa)	$\sigma_e$
تنش‌ها (Pa)	$\sigma_i$
پتانسیل الکتریکی	$\phi$
پتانسیل مغناطیسی	$\psi$
سرعت زاویه‌ای (rad/sec)	$\omega$

#### ۷- مراجع

[1] Saadatfar M., Aghaie-Khafri M., Hygro-thermo-magneto-electro-elastic analysis of a functionally graded magneto-electro-elastic hollow sphere resting on an elastic foundation, *Smart Materials and Structures*, Vol. 23. No. 3, 035004, 2014.

[2] Saadatfar M., Aghaie-Khafri M., On the behavior of a rotating functionally graded hybrid cylindrical shell with imperfect

#### ۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، برای نخستین بار، یک حل تحلیلی برای رفتار خزشی وابسته به زمان در یک دیسک چرخان از جنس مواد مگنتوالکتروالاستیک تابعی مدرج ارائه شده است. دیسک تحت بارهای الکتریکی، مغناطیسی و حرارتی در نظر گرفته شده است. همچنین خواص ماده در راستای شعاعی بصورت تابع توانی در نظر گرفته شده است. برای تحلیل خزش از قانون نورتن و معادله پراندتل-ریوس استفاده شده است. نتایج زیر از این تحلیل قابل استخراج است:

- اندازه تنش شعاعی و تنش محیطی با زمان با نرخی کاهشی کمتر می‌شود و جابجایی شعاعی با زمان افزایش می‌یابد.
- تنش‌ها و پتانسیل الکتریکی بعد از ۱۰ سال تغییرات بسیار کمی خواهند داشت که قابل چشم پوشی است.



- Hollow Cylinder in Thermal Environment, Vol. 11, No. 6, 1950053, 2019.
- [20] Callioglu H., Behlul Bektas N., Sayer M., Stress analysis of functionally graded rotating discs: analytical and numerical solutions, *Acta Mechanica Sinica*, Vo. 27, No. 6, pp. 950–955, 2011.
- [21] Dai T., Dai H.L., Thermo-elastic analysis of a functionally graded rotating hollow circular disk with variable thickness and angular speed, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 40 pp. 7689–7707, 2016.
- bonding subjected to hygrothermal condition, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 38, pp. 854–881, 2015.
- [3] Saadatfar M., Effect of multiphysics conditions on the behavior of an exponentially graded smart cylindrical shell with imperfect bonding, *Meccanica*, Vol. 50, pp. 2135–2152, 2015.
- [4] Saadatfar M., Aghaie-Khafri M., On the magneto-thermo-elastic behavior of a FGM cylindrical shell with pyroelectric layers featuring interlaminar bonding imperfections rested in an elastic foundation, *Journal of Solid Mechanics*, Vol. 7, No. 3, pp. 344–363, 2015.
- [5] Zhou D., Kamlah M., Room-temperature creep of soft PZT under static electrical and compressive stress loading, *Acta Materials*, Vol. 54, pp. 1389–1396, 2006.
- [6] Ghorbanpour Arani A., Jafarzadeh Jazi A., Abdollahian M., Mozdianfard M.R., Mohammadimehr M., Amir S., Exact Solution for Electrothermoelastic Behaviors of a Radially Polarized FGPM Rotating Disk, *Journal of Solid Mechanics*, Vol. 3, No. 3, pp. 244–257, 2011.
- [7] Gupta V.K., Singh S.B., Chandrawat H.N., Ray S., Creep behavior of a rotating functionally graded composite disc operating under thermal gradient, *Metallurgical Materials Transaction A*, Vol. 35, pp.1381–1391, 2004.
- [8] Deepak D., Gupta V. K., Dham A.k., Creep modeling in functionally graded rotating disc of variable thickness, *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 24, No. 11, pp. 2221–2232, 2011.
- [9] Hosseini Kordkheili S.A., Livani M., Thermoelastic creep analysis of a functionally graded various thickness rotating disk with temperature-dependent material properties, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 111, pp. 63–74, 2011.
- [10] Bose T., Rattan M., Effect of thermal gradation on steady state creep of functionally graded rotating disc, *European Journal of Mechanics / A Solids*, Vol. 67, pp. 169–176, 2018.
- [11] Gupta V., Singh S.B., Mathematical modeling of creep in a functionally graded rotating disc with varying thickness, *Regenerative Engineering and Translational Medicine*, Vol. 2, No. 3, pp. 126–140, 2016.
- [12] Zharfi H. and Ekhteraei Toussi, H., Creep Analysis of FGM Rotating Disc with non-Uniform Profiles, *Journal of Science and Technology of Composite*, Vol. 1, No. 2, pp. 29–36, 2015
- [۱۳] ژرفی ح., اختراعی طوسی ح., تاثیر دما و نحوه توزیع ذرات بر رفتار خزشی دیسک‌های دوار تابعی مدرج, مجله مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز, د. ۴۶, ش. ۲, ص ۵۱–۵۹, ۱۳۹۵.
- [14] Zharfi H., EkhteraeiToussi H., Time dependent creep analysis in thick FGM rotating disk with two-dimensional pattern of heterogeneity, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 140, pp. 351–360, 2018.
- [15] Loghman A., Abdollahian M., Jafarzadeh Jazi A., Ghorbanpour Arani A., Semi-analytical solution for electromagnetothermoelastic creep response of functionally graded piezoelectric rotating disk, *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 65, pp. 254–266, 2013.
- [16] Loghman A., Azami M., A novel analytical-numerical solution for nonlinear time-dependent electro-thermo-mechanical creep behavior of rotating disk made of piezoelectric polymer, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 40, pp. 4795–4811, 2016.
- [17] Akbarzadeh A. H. and Chen Z. T., Magneto-electroelastic behavior of rotating cylinders resting on an elastic foundation under hygrothermal loading, *Smart Materials and Structures*, Vol. 21, 125013, 2012.
- [18] Saadatfar M., Effect of Interlaminar Weak Bonding and Constant Magnetic Field on the Hygrothermal Stresses of a FG Hybrid Cylindrical Shell Using DQM, *Journal of Stress Analysis*, Vol. 3, No. 1, pp. 93–110, 2018.
- [19] Saadatfar M., Analytical Solution for the Creep Problem of a Rotating Functionally Graded Magneto–Electro–Elastic