دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۰۷/۰۹
پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۰۳/۰۷

(علمی – ترویجی)

بهینه‌سازی دوسطحی: مرور مقالات، روش‌ها و کاربردهای آن در مهندسی هوافضا

سید محمدباقر ملائک[۱*]، استاد، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف

هدی مودب[۱]، کارشناس ارشد، دانشکده علوم و فنون نوین، دانشگاه تهران

* نویسنده مخاطب، آدرس: تهران، کدپستی: ۱۳۶۵-۱۱۱۵۵

روش بهینه‌سازی دوسطحی زمانی مطرح می‌شود که مسئله هدف دارای دو تصمیم‌گیرنده با سلسله مراتب مختلف باشد. در چنین مسائلی، روابط بهینه‌سازی سطح زیرین در محدوده قیود سطح بالاتر مؤثر هستند و تفکیک آنها از همدیگر امکان‌پذیر نیست. مسائل بهینه‌سازی دوسطحی گستردگی و کاربرد زیادی در موضوعات مرتبط با حمل و نقل کالا و مسافر و در کل مسائل تصمیم گیری خرد و کلان دارند. در این مقاله آخرین یافته‌های تحقیقاتی و روش‌های مدلسازی و حل چنین مسائلی با تمرکز بر سه دهه اخیر ارائه شده است. علاوه بر آن جدیدترین کاربرد این نوع بهینه‌سازی در مسائل حمل و نقل‌های هوافضایی ارائه می‌گردد. در این مقاله، همچنین به معرفی الگوریتم‌های متداول کلاسیک و ترکیبی برای حل اینگونه مسائل می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: برنامه‌ریزی دوسطحی، الگوریتم کلاسیک، الگوریتم تکاملی، بهینه‌سازی دوسطحی، حمل و نقل

Review of Bilevel Optimization Approaches and Applications in Aerospace Engineering

S.M.B. Malaek[1*], Professor, Department of Aerospace Engineering, Sharif University of Technology

H. Moaddab[2], M.Sc., Faculty of Modern Science and Technology, University of Tehran

*Corresponding Author, Postal Code: 11155-11365, Tehran, IRAN

malaek@sharif.edu

Bilevel optimization is proposed when the objective problem has two decision makers with different hierarchies. In such cases, the lower level decision is embedded within the higher-level constraints. Micro and macro decision making of transportation are considered as hierarchal problems, On the one hand, user's decision tends to choose lower cost, and the other hand is transportation company's to maximize its benefit. This paper's aim is to provide a review on research and methods with different concerns for modeling and solving bilevel problems in last three decades. In addition, the latest application of this kind of optimization is presented in aerospace transport issues. This paper also introduces the classic and heuristic algorithms for solving bilevel optimization.

Keywords: Bilevel Programming, Classical Optimization, Evolutionary Optimization, Bilevel Optimization, Transportation

فهرست علائم و اختصارات

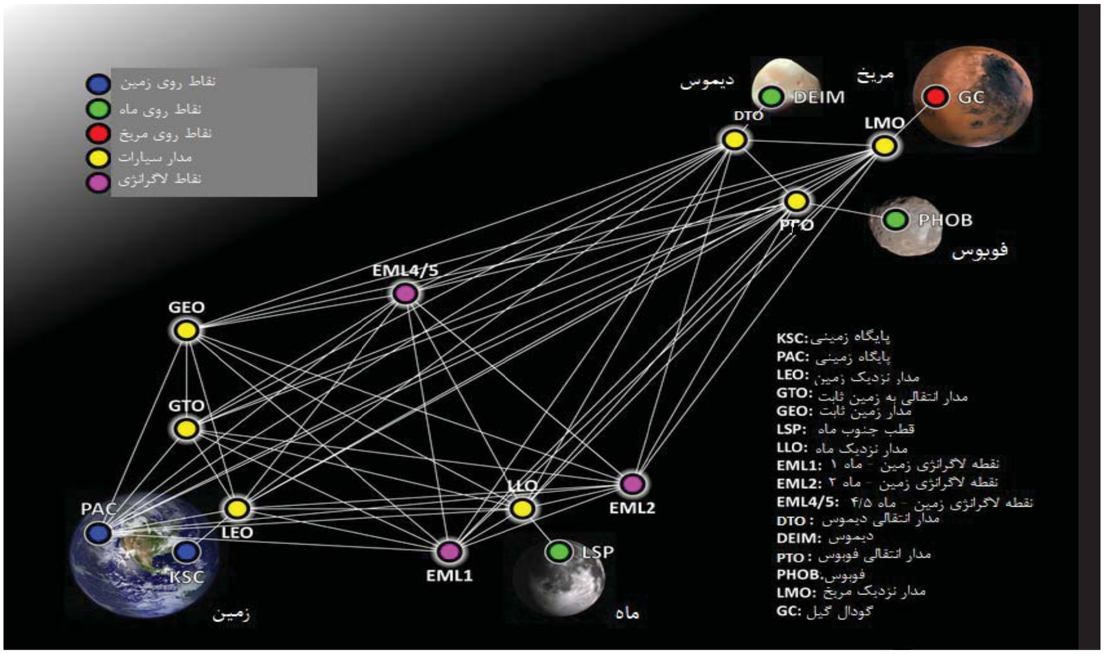
X, x	بردار سطح رهبر
Y,y	بردار سطح پیرو
F	تابع هدف سطح رهبر
G	تابع هدف سطح پیرو
L	قیود لاگرانژی
p_1	تابع جریمه الگوریتم ژنتیک
fitness	شایستگی الگوریتم ژنتیک
F^{IP}	تابع هدف سطح یک الگوریتم ژنتیک
ψ^P	قیود سطح پیرو موقعیت بدبینانه
λ	ضریب کاروش کان تاکر
g_i	قیود سطح پیرو
ψ^0	قیود سطح پیرو موقعیت خوشبینانه

۱- مقدمه

در طراحی و مدیریت سیستم‌های اجتماعی-اقتصادی به دلیل پیچیدگی‌های حاکم، ناگزیر به استفاده از روش‌های مختلف بهینه‌سازی هستیم. این ویژگی باعث پیشرفت در حل مسائل مقیاس بزرگی چون برنامه‌ریزی تولید، زمان‌بندی پروازهای هوایی، قوانین دولتی و طراحی مهندسی شده است. با توجه به سطوح مختلف تصمیم‌گیری در این مسائل، روش‌های برنامه‌ریزی ساده جوابگوی نیازهای جاری نخواهد بود. از طرفی، در برنامه‌ریزی چند هدفه با حل چند تابع هدف به‌طور همزمان سر و کار داریم که به ندرت قابل هماهنگ شدن است. به همین دلیل در شرایطی از تئوری بازی استفاده می‌شود. در این روش دینامیک متضاد درون عامل‌هایمستقل مورد توجه قرار می‌گیرد. اما در ساده‌ترین تعریف، برنامه‌ریزی دوسطحی ترکیبی از دو روش مذکور است. در این حالت مسئله را با دو تصمیم‌گیرنده به همراه دو تابع هدف که در سطوح جداگانه‌ای فعالیت می‌کنند، در نظر می‌گیریم که فعالیت‌های یکی بر انتخاب‌های دیگری تأثیر می‌گذارد. اما هیچ یک از سطوح به‌طور کامل بر دیگری تسلط نداشته و آنرا کنترل نمی‌کند. این مهم‌ترین مشخصهٔ مسائل چندسطحی است [۱].

به عنوان مثال، قوانینی که مدیران شرکت برای تخصیص منابع و مزایا برای لایه‌های پایین‌دست خود وضع می‌کنند و در نهایت شیوهٔ تعامل با آنها منجر به تغییر استراتژی مدیریت خود آنها می‌شود. از طرفی، نحوهٔ پذیرش و اجرای این قوانین از سوی سطوح پایین‌تر که تولید و بازار را بر عهده دارند، نقش تعیین‌کننده‌ای در سود و رشد نهایی شرکت دارند. برخی ویژگی‌های مشترک سیستم‌های چندسطحی عبارتند از: واحدهای تصمیم‌گیرندهٔ فعال ساختاری سلسله مراتبی نسبت به هم دارند. هر یک از سطوح زیرین، تصمیمات خود را پس از و با توجه به تصمیمات گرفته شده در سطوح بالاتر اتخاذ می‌کند. در حالی‌که هر واحد می‌تواند به طور جداگانه مزایایی را بیشینه کرده باشد، تأثیر اقدامات واحدهای دیگر در نظر گرفته و اثرات بیرونی را نیز در استراتژی‌ها و تابع هدف هر سطح مشاهده نموده است.

در نمونه‌ای دیگر فرض کنید هدف سفر به کره مریخ باشد. این سفر می‌تواند از روی کره زمین به‌طور مستقیم به سمت کره مریخ انجام شده و یا این امکان وجود دارد که ابتدا از زمین به سمت کره ماه و از آنجا به سمت مریخ مدیریت شود. در حال حاضر، تعداد ده سفر به شیوه اول به سمت مریخ انجام شده و ربات‌هایی به سطح مریخ رسیده‌اند. ولی هزینه بسیار زیاد چنین سفرهایی این سؤال را مطرح نموده که آیا اقتصادی‌تر نیست که ابتدا یک پایگاه در سطح ماه ایجاد شود و چنین پایگاهی برای رسیدن به مریخ مورد استفاده قرار گیرد. در این حالت، از ماه به عنوان پایگاهی برای نگهداری ربات‌ها و فضاپیماها، محل اقامت موقت فضانوردان و آزمایشگاه استفاده می‌شود. بدیهی است این نگرش در دسته مسائل بهینه‌سازی دوسطحی قرار می‌گیرد. بنابراین، با در نظر گرفتن مسیرهای میان این سه سیاره و مدارهای مختلف آن شبکه‌ای مانند شکل **۱** ایجاد می‌شود. با در نظر گرفتن معادلات مسیر حرکت فضاپیما برای جابجایی میان ماه، زمین و مریخ، تغییر موقعیت مریخ نسبت به زمین و زمین نسبت به ماه جز قیود مسئله به شمار می‌رود. در این مسئله می‌توان مسیری بهینه با کمترین مصرف سوخت و زمان سفر به مقصد ارائه نمود.



شکل (۱): شبکهٔ اتصالی میان مریخ، ماه و زمین [۲].

۲- مفاهیم و روابط ریاضی حاکم

برای تعریف مسائل دوسطحی به صورت روابط ریاضی فرض می‌کنیم که تصمیم‌گیرندهٔ سطح بالاتر (رهبر[۱]) بر بردار $x \in X \subseteq R^n$ و سطح زیرین (پیرو[۲]) بر بردار $y \in Y \subseteq R^m$ کنترل دارند. ابتدا رهبر x را به گونه‌ای انتخاب می‌کند که تابع $F(x, y(x))$ که ممکن است چند قید داشته باشد، کمینه شود. عبارت $y(x)$ بیانگر این است که مسئلهٔ سطح بالا، به صورت ضمنی در متغیر y وجود دارد (به عبارت دیگر، y همیشه تابعی از x خواهد بود). پیرو با در نظر داشتن اقدامات رهبر، y را به گونه‌ای انتخاب می‌کند که تابع هدف سطح مذکور f(x,y) کمینه شود، در این سطح نیز با توجه به x انتخاب شده، قیودی از متغیرهای y وجود دارد. روابط کلی حاکم بر مسائل دوسطحی به صورت زیر بیان می‌شود [۳]:

$$\min_{x\in X} F(x,y), \tag{۱}$$

$$subjecttoG(x,y) \le 0, \quad \min_{y\in Y} f(x,y), \tag{۲}$$

$$\text{Subject to } g(x,y) \le 0. \tag{۳}$$

در این روابط $F, f: R^n \times R^m \longrightarrow R^1$، $G: R^n \times R^m \longrightarrow R^p$ و $g: R^n \times R^m \longrightarrow R^q$ توابعی پیوسته و دوبار مشتق‌پذیرند. مجموعه‌های X و Y محدودیت‌هایی چون مثبت بودن یا یکپارچگی را اعمال می‌کنند. با تغییر در هر یک از توابع، مسائل مختلفی از دوسطحی حاصل می‌شود. تعریف دیگری از این مسئله را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$\Psi(x) = \underset{x\in X}{\operatorname{argmin}}\{f(x,y): g_j(x,y) \le 0; j = 1, \dots, J\}. \tag{۴}$$

اگر $\Psi: \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ باشد، رابطهٔ فوق نمایانگر قیود مسئلهٔ بهینهٔ سطح پایین است. به عبارت دیگر، $\Psi(x) \subset Y$ برای تمامی $x \in X$ باشد. بنابراین، می‌توان مسائل دوسطحی را به صورت یک مسئلهٔ بهینه‌سازی مقید نشان داد:

$$\min_{x\in X, y\in Y} F(x,y) \tag{۵}$$

$$\text{Subject to: } y \in \Psi(x) \tag{۶}$$

$$G_k(x,y) \le 0, k = 1, \dots, K \tag{۷}$$

که در آن، Ψ قید پارامتریک شده بر اساس بردار تصمیم سطح دوم y است. در مسائل دوسطحی، اگر برای سطح پایین حل‌های مختلف بهینه وجود داشته باشد، انتخاب نقطهٔ بهینه برای حل سطح اول آشکار نخواهد بود. بنابراین، در این

---
1. Leader
2. Follower

شرایط دو موقعیت خوش‌بینانه[۳] و بدبینانه[۴] در نظر گرفته می‌شود.

۲-۱- موقعیت خوشبینانه

در این حالت سطح اول انتظار دارد، سطح دوم حل بهینه‌ای برای مجموعهٔ $\Psi^O(x)$ انتخاب نماید به گونه‌ای که تابع هدف سطح اول بهترین مقدار را داشته باشد. تابع انتخاب پیرو را می‌توان به صورت زیر تعریف نمود [۵-۴]:

$$\Psi^{\mathrm{O}}(x)=\underset{\mathrm{y}\in \mathrm{Y}}{\operatorname{argmin}}\{F(\mathrm{x},\mathrm{y}): x_l\in \Psi(\mathrm{x})\}. \tag{۸}$$

بنابراین، روابط کلی بدین صورت خواهد بود:

$$\min_{x\in \mathrm{X}, y\in \mathrm{Y}} F(x,\mathrm{y}), \tag{۹}$$

$$\text{Subject to: } \mathrm{y}=\Psi^{\mathrm{O}}(x), \tag{۱۰}$$

$$G_k(\mathrm{x},\mathrm{y})\leq 0, k=1,\dots,K. \tag{۱۱}$$

در صورتی که توابع F، f، G_k و g_i به اندازهٔ کافی هموار بوده، ناحیهٔ محدود به مسئلهٔ بهینهٔ دوسطحی $\emptyset$ غیرتهی و محدود باشد و صلاحیت قیود منگازاریان-فروموویتز[۵] در تمامی نقاط برقرار باشد، مسئله دارای بهینگی خوشبینانه در ناحیهٔ ممکن می‌باشد.

۲-۲- موقعیت بدبینانه

در صورت وجود حل‌های مختلف برای سطح دوم، پیرو حالتی را انتخاب خواهد نمود به گونه‌ای که تابع هدف سطح اول بدترین مقدار را به خود بگیرد. این در حالتی است که همکاری بین دو سطح وجود نداشته یا رهبر ریسک‌پذیری پایینی داشته و در پی کاهش خسارت باشد. این نوع انتخاب را می‌توان به صورت رابطهٔ زیر تعریف نمود [۴]:

$$\Psi^{\mathrm{P}}(x)=\underset{\mathrm{y}\in Y}{\operatorname{argmin}}\{F(\mathrm{x},\mathrm{y}): \mathrm{y}\in \Psi(x)\}. \tag{۱۲}$$

با این فرض، مسئلهٔ کلی بدین صورت خواهد بود:

$$\min_{\mathrm{x}\in \mathrm{X}, y\in \mathrm{Y}} F(\mathrm{x},y), \tag{۱۳}$$

$$\text{Subject to: } y=\Psi^{P}(x), \tag{۱۴}$$

$$G_k(\mathrm{x},\mathrm{y})\leq 0, k=1,\dots,K. \tag{۱۵}$$

در روابط حاکم بر حالت خوش‌بینانه، در صورتی که سطح دوم محدب باشد، با استفاده از تغییرات نامساوی امکان تبدیل مسئله به یک سطحی وجود دارد، اما برای حالت بدبینانه این امکان وجود ندارد. با توجه به اینکه برای حل مسائل دوسطحی باید بدترین حالت را نیز در نظر گرفته و آن را حل نمود، بنابراین، باید فرضیات قوی‌تری برای حل این حالت اتخاد نمود. اگر توابع F، f، G_k و g_i به اندازهٔ کافی هموار بوده، ناحیهٔ محدود به مسئلهٔ بهینهٔ دوسطحی $\emptyset$ غیرتهی و محدود باشد و ψ^P برای تمام مقادیر سطوح بالا نیمه‌پیوسته[۶] باشد، در این صورت مسئله حل بدبینانه خواهد داشت.

۳- تاریخچه و کاربرد

مطالعات اولیه در زمینه تصمیم‌گیری سلسله مراتبی (چند سطحی) را می‌توان به دو بخش تقسیم‌بندی نمود. بخش اول مربوط به نظریهٔ بازی‌هاست که استاکلبرگ[۷] از برنامه‌ریزی دوسطحی برای ایجاد مدل توصیفی رفتار تصمیم و تعادل نظریهٔ بازی[۸] استفاده نمود. بخش دوم مربوط به برنامه‌ریزی ریاضی است که مسائل به صورت بهینه‌سازی دوسطحی خود را نشان می‌دهند. در این مسائل سطح درونی بهینه‌سازی به عنوان قیدهای سطح بیرونی بود [۴]. در ادامه تاریخچهٔ مسائل بهینه‌سازی دوسطحی به تفکیک روش حل ارائه شده است.

در سال ۱۹۸۳، بارد[۹] برای حل مسائل برنامه‌ریزی دوسطحی الگوریتم جستجوی شبکه‌ای[۱۰] معرفی نمود. این الگوریتم بر مبنای مجموعه‌ای از شرایط لازم است که به کمک این شرایط بهینگی محلی و نقاط سکون مشخص می‌شود. با تغییر پارامتر یک بعدی در بازهٔ واحد و حل مسئلهٔ اصلی، توالی کران پایین برای تابع هدف تصمیم‌گیرندهٔ اول تشکیل می‌شود. اگر حل مسئلهٔ اصلی تحت اغتشاشات کوچک پایدار باشد، توالی به نقطهٔ بهینهٔ محلی همگرا خواهد شد [۱].

در سال ۱۹۹۲ هانسن[۱۱] و همکاران، روش شاخه و حد[۱۲] با قوانین جدید را برای حل مسائل دوسطحی پیشنهاد نمودند. در این الگوریتم، برای ساده‌سازی، شرایط بهینگی لازم در قالب فشردگی[۱۳] قیود سطح پیرو مشخص شده، شاخه ایجاد شده و توابع جریمه مشابه برنامه‌ریزی عدد صحیح به دست می‌آید. نتایج عددی حاصل از استفاده از این روش، نشانگر موفقیت

3. Optimistic
4. Pessimistic
5. Mangasarian-Fromovitz Constraint Qualification
6. Semi-continuous
7. Stackelberg
8. Game-theory Equilibria
9. Bard
10. Grid Search
11. Hansen
12. Branch and Bound
13. Thighness

استفاده از این روش برای مسائل با قیود و متغیرها با تعداد بالاست [۶].

الگوریتمی برای حل برنامه‌ریزی غیرخطی دوسطحی ترکیبی سطحی در سال ۱۹۹۲ توسط ادموندز و بارد[14] معرفی شد. در مطالعه آنها به بررسی مسائل دوسطحی با متغیرهای سطح اول گسسته و پیوسته پرداخته شد که تابع هدف غیرخطی محدب کمینه می‌شود. تابع هدف سطح زیرین محدب درجهٔ دو پیوسته بوده و تمامی قیود خطی هستند. از الگوریتم شاخه و حد برای یافتن نقطهٔ بهینگی استفاده شده است. نتایج حاصل از این تحقیق بیانگر آن است که استفاده از این الگوریتم برای حل تمامی مسائل به خصوص با متغیرهای سطح دو عدد صحیح مناسب نیست [۷].

در سال ۱۹۹۳ بن عاید[15] در مقاله‌ای مروری بر مسائل خطی دوسطحی داشته است. در این مقاله، روش‌ها و کاربردهای پیشین و جدید در این حوزه معرفی شده است [۸].

میگ‌دالاس[16] مقاله‌ای تحت عنوان «برنامه‌ریزی دوسطحی در مدلسازی، روش‌ها و چالش‌های حمل و نقل» را در سال ۱۹۹۵ ارائه نمود. در مسائل حمل و نقلی، تصمیمات فرد توسط عوامل دیگری نیز کنترل می‌شود. بنابراین، می‌توان گفت این مسائل از نوع برنامه‌ریزی چند سطحی می‌باشد. میگ‌دالاس در این مقاله، مروری بر مطالعات مربوط به بهینه‌سازی دوسطحی در مسائل حمل و نقلی داشته است [۹]. در سال ۱۹۹۷ اسمیت[17] و همکاران در مقاله‌ای بهینه‌سازی دوسطحی را برای زمان و هزینهٔ شبکهٔ حمل و نقل زمینی انجام دادند. به کمک این روش، رانندگان می‌توانستند بهترین مسیر را انتخاب نموده و پارامترهای دیگر حمل و نقل را نیز پیش‌بینی نمایند. در این مسئله، روش دوسطحی برای جریان شبکه در نظر گرفته شده که در صورت استفاده از روش‌های دیگر برای شبکه‌های بزرگتر بسیار پیچیده بود [۱۰]. در سال ۲۰۰۱ حجازی و معماریانی راه‌حلی برای برنامه‌ریزی دوسطحی با استفاده از الگوریتم ژنتیک ارائه نمودند [۱۱].

در سال ۲۰۰۳ نیز نیشیزاکی[18] و همکاران با ارائهٔ الگوریتم ژنتیک به دنبال حلی برای مسائل استاکلبرگ دوسطحی بودند. همانند مفهوم اصلی الگوریتم ژنتیک، از دسته‌ها[19] نیز استفاده شد. لازم است تا هر دسته تمامی قیود را ارضا نموده و تصمیات سطح زیرین، تصمیمات سطح بالا را نیز برآورده سازد. مقایسهٔ داده‌های عددی حاصل از اعمال این روش و روش شاخه و حد، حاکی از کارا بودن الگوریتم ارائه شده بود [۱۲].

گوموش و فلوداس[20] در سال ۲۰۰۵ در مقاله‌ای روش حلی برای دو مسئله غیرخطی دوسطحی را معرفی نموده‌اند. در مسئلهٔ اول، متغیرهای بیرونی ترکیبی عدد صحیح غیر خطی[21] و متغیرهای درونی غیرخطی مرتبهٔ دو است. در مسئلهٔ دوم، متغیرهای بیرونی[22] را توابع غیرخطی ترکیبی عدد صحیح تشکیل داده و متغیرهای درونی[23] می‌تواند ترکیبی از توابع غیرخطی ترکیبی عدد صحیح، خطی یا چندحمله‌ای با متغیرهای درونی عدد صحیح و خطی با متغیرهای درونی پیوسته باشد. روش حل مسئلهٔ دوم براساس بهبود حل مسئلهٔ ترکیبی عدد صحیح سطح درونی صورت گرفته است [۱۳].

در سال ۲۰۰۷، ونگ[24] و همکاران، الگوریتم همگرا برای مسائل دوسطحی غیرخطی را در مقاله‌ای مورد بررسی قرار دادند. در این الگوریتم با استفاده از تئوری دوگانه[25] برنامه‌ریزی دوسطحی به چند مسئلهٔ برنامه‌ریزی رایج نامقید تبدیل شده است [۱۴]. در سال ۲۰۰۸، سون[26] و همکاران الگوریتم حلی برای یافتن محل مناسب مراکز توزیع ارائه نمودند. به منظور در نظر گرفتن سود مربوط به مشتریان و شرکت‌های توزیع کننده، از برنامه‌ریزی دوسطحی استفاده شد. سطح اول مربوط به محل بهینهٔ شرکت‌ها با هدف کاهش هزینه‌های آنها و هدف سطح دوم کاهش هزینهٔ مشتریان می‌باشد. برای حل این مسائل از الگوریتم ترکیبی ساده استفاده شد [۱۵].

رصافی و باوقار به بررسی تحت عنوان «حل مسئله طراحی شبکه حمل و نقل مواد خطرناک» پرداختند. با توجه به دو تصمیم‌گیرندهٔ اصلی در این شبکه یعنی دولت و رانندگان، از روش برنامه‌ریزی دوسطحی استفاده شد. تصمیم‌گیرندهٔ درونی را رانندگان و بیرونی را دولت تشکیل می‌دهد. برای حل این مسئله روش ترکیبی ارائه شد که از روش کوتاهترین مسیر در شبکه استفاده نمودند [۱۶].

در سال ۲۰۱۰ دومنیگز و پیستیکوپولوس[27] الگوریتم‌های پایهٔ برنامه‌ریزی چند پارامتری[28] را برای حل مسائل برنامه‌ریزی

14. Edmunds and Bard
15. Ben-Ayed
16. Migdalas
17. Smith
18. Nishizaki
19. Individual

20. Gümüş and Floudas
21. Mixed-integer Nonlinear
22. Outer Variables
23. Inner Variables
24. Wang
25. Dual Theory
26. Sun
27. Domínguez and Pistikopoulos
28. Multiparametric programming

دوسطحی[۲۹] خطی عدد صحیح و ترکیبی عدد صحیح معرفی نمودند. در الگوریتم اول متغیرهای صحیح سطح بیرونی به صورت خطی یا چند جمله‌ای در سطح درونی خود را نشان می‌دهند. در این الگوریتم از روش‌های معمول بهینه‌سازی برای محدب کردن عبارات غیرخطی استفاده شده است که بدین منظور از روابط خطی‌سازی[۳۰] استفاده گردیده است. سپس، الگوریتم برنامه‌ریزی چندپارامتری پیوسته برای حل مسئلهٔ محدب درونی به کار گرفته می‌شود. در هر دو الگوریتم، پارامترهای چندگانه درون سطح اول جاسازی شده‌اند به گونه‌ای که مجموعه‌ای از مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی ترکیبی عدد صحیح یک سطحی را تشکیل دهند. برای حل این مسائل از روش‌های معمول استفاده می‌شود [۱۷].

حمیدی و میش‌مست مقاله‌ای تحت عنوان «برنامه‌ریزی خطی دوسطحی با پارامترهای فازی» را در سال ۲۰۱۱ منتشر نمودند. هدف از این مقاله بیان برنامه‌ریزی خطی دوسطحی با پارامترهای غیردقیق بود. آنها جهت حل مسئله از اعداد فازی و روش برنامه‌ریزی خطی دوسطحی بازه‌ای[۳۱] استفاده کردند [۱۸].

در سال ۲۰۱۲، مولایی و پیروزه مدل جدید دوسطحی تحلیل پوششی داده‌ها[۳۲] به منظور بررسی عملکرد سیستم در محیط عدم قطعیت ارائه شد. در ادامه برای حل این نوع مسائل، الگوریتمی معرفی شد که ترکیبی از تئوری دوگانه[۳۳] و شرایط بهینگی کاروش-کان-تاکر[۳۴] بود. مدل ارائه شده به یک مسئلهٔ برنامه‌ریزی خطی تبدیل شد. به کمک این مدل شرکت‌های غیرمتمرکز[۳۵] قادر خواهند بود تا با دادن ورودی چندگانه و گرفتن خروجی‌های چندگانه مقرون به صرفه عملکرد خود را بهینه نمایند [۱۹].

در سال ۱۳۹۲، خدامرادی، گودرزی و راعی مقاله‌ای را جهت بهینه‌سازی سبد سهام ارائه نمودند. با توجه به دخیل بودند معیارهای مختلف در فرآیند انتخاب سبد سهام از روش دوسطحی برای حل آن استفاده شده است. نتایج حاصل از مقایسهٔ این روش با اعداد واقعی، نشانگر بهبود بازدهی است [۲۰].

در سال ۲۰۱۴، حرباوی مقاله‌ای تحت عنوان برنامه‌ریزی دوسطحی درجه دو منتشر نمود. هدف از این مقاله، ارائهٔ روش بهینه برای حل مسائل دوسطحی درجهٔ دو با استفاده از سری تیلور است. بدین منظور، هر دو تابع هدف با استفاده از سری تیلور بسط داده شده و معادل تابع هدف درجهٔ دو می‌باشد. بنابراین، این مسئله را می‌توان به توابع یک مرحله‌ای تبدیل کرد که سطح اول و دوم براساس اهمیت وزن‌دهی می‌شوند [۲۱].

در سال ۲۰۱۴، کالوته[۳۶] و همکاران مقاله‌ای مرتبط با برنامه‌ریزی شبکهٔ توزیع غیرمتمرکز[۳۷] منتشر نمودند که برای حل آن از بهینه‌سازی دوسطحی استفاده شده است. با در نظر گرفتن این روش می‌توان اثرات تصمیمات سطح اول و دوم را در زنجیرهٔ تأمین و مرحلهٔ تولید را مشخص نمود. با این فرضیات مسئله به برنامه‌ریزی دوسطحی ترکیبی عدد صحیح تبدیل شده است که برای حل آن از روش فرا ابتکاری[۳۸] استفاده شده است [۲۲].

آلوس و کوستا[۳۹] مقاله‌ای را تحت عنوان «الگوریتمی بر پایهٔ بهینه‌سازی ازدحام ذرات[۴۰] برای حل مسائل چند هدفهٔ دوسطحی خطی» در سال ۲۰۱۴ منتشر نمودند. هدف از ارائهٔ این الگوریتم تشکیل جبههٔ پرتو مناسب برای مسئله است. در این الگوریتم از روش هیبرید برای بهترین انتخاب و جهش تطبیقی استفاده شده است. ترکیب این روش‌ها منجر به بهبود الگوریتم‌های مشابه پیشین شده است [۲۳].

در سال ۲۰۱۵، کارامیا و ماری[۴۱] الگوریتم‌های دقیق پیشرفته را برای مسائل خطی دوسطحی گسسته ارائه نمودند. در مطالعهٔ آنها دو الگوریتم و نوع بهبود یافتهٔ آنها معرفی شد. در نهایت بین نحوهٔ عملکرد این الگوریتم با الگوریتم‌های موجود مقایسه ای صورت پذیرفت [۲۴]. در سال ۲۰۱۷، سینها[۴۲] و همکاران مقاله‌ای به منظور مرور روش‌های حل و کاربرد بهینه‌سازی دوسطحی ارائه نمودند. در این مقاله، علاوه بر ارائهٔ روش‌های کلاسیک روش‌های تکاملی نیز مورد بررسی قرار گرفته است [۵]. در سال ۲۰۱۸، آگور و ازالتین[۴۳] در مقاله‌ای از بهینه‌سازی دوسطحی برای مدل انتخاب متغیر[۴۴] استفاده نمودند. در این مقاله از الگوریتم ژنتیک و بهینه‌سازی غیرمشتقی[۴۵] کمک گرفته شده است [۲۵]. در سال ۲۰۱۸، ابوسرور و عدلی[۴۶] شرایط لازم و کافی برای مسائل برنامه‌ریزی دوسطحی قوی را در مقاله‌ای معرفی نمودند که جدید بوده و جز شرایط max-min با قیود مرتبط محسوب می‌شود [۲۶].

29. Bilevel
30. Reformulation Linearization Technique
31. Interval
32. Data Envelopment Analysis (DEA)
33. Dual Theory
34. Kraush- Kuhn- Tucker
35. Decentralized Companies
36. Calvete
37. Decentralized Distribution Network
38. Metaheuristic
39. Alves and Costa
40. Particle Swarm Optimization (PSO)
41. Caramia and Mari
42. Sinha
43. Agor and Özaltın
44. Feature Selection
45. Derivative-free Optimization
46. Aboussoror and Adly

در سال ۲۰۱۸، پایریون[۴۷] و همکاران در مقاله‌ای الگوریتم‌ها و کاربرد مسائل برنامه‌ریزی خطی دوسطحی ابتکاری عدد صحیح را مورد بررسی قرار دادند. در تمامی مسائل مورد بررسی، متغیرهای سطح اول باینری بوده و متغیرهای سطح دوم به صورت ترکیب خطی در قیود سطح اول دیده می‌شود. در این مقاله، برای حل مسائل از الگوریتم‌های جدید برش و ردیف و ستون استفاده شده است [۲۷].

«مدل دوسطحی برای مسائل جریان شبکه» عنوان مقاله‌ای بود که بافر[۴۸] و همکاران در سال ۲۰۱۸ منتشر نمودند. هدف از ارائهٔ این مقاله، ارائهٔ جریانی است که تمامی نقاط شبکه در برابر حملهٔ مقاوم باشد. برای حل این مسئله، الگوریتم دقیقی بر پایهٔ بهینه‌سازی دوسطحی ارائه شد [۲۸].

در سال ۲۰۱۸، ال-سبکی و ابو-الانگا[۴۹] در مقاله‌ای روشی جدید برای حل مسائل بهینه‌سازی دوسطحی غیرخطی ارائه نمودند. روش مذکور ادامهٔ ایدهٔ مجموعهٔ فعال[۵۰] و روش جریمه[۵۱] بود تا به کمک آن مسائل دوسطحی غیرخطی به مسائل بهینه‌سازی نامقید تبدیل شود. روش ارائه شده در مواردی ممکن است ساده‌تر از روش‌های دیگر بوده و نیاز به محاسبات مربوط به فضای خالی[۵۲] نیست. به منظور عمومی‌سازی الگوریتم از روش فضای اعتماد[۵۳] استفاده شده است [۲۹].

در سال ۲۰۱۸، کومار[۵۴] و همکاران برای بهینه‌سازی تصمیم‌های عملیاتی در شبکهٔ ریلی از روش برنامه‌ریزی دوسطحی استفاده نمودند. این مقاله به منظور بهبود عملکرد قطارها در مسیرهای خاص و زمان‌های پرترافیک است. حل مسئلهٔ فوق، مدل جدیدی از برنامه‌ریزی دوسطحی ابتکاری عدد صحیح در نظر گرفته شده است که سطح یک مربوط به خط آهن و سطح دو تمامی رقبا را نشان می‌دهد. سطح یک با تصمیمات مربوط به مسیرها، زمان‌بندی قطارهای فعال و هزینهٔ بلیط به دنبال بیشینه کردن درآمد خط آهن با توجه به تمامی قیود و تأمین تقاضای پیش‌بینی شده در سطح دوم می‌باشد. استفاده از این روش برای سیستم ریلی هند نشان از موفقیت مدل در قیمت بلیط و برنامهٔ مناسب برای قطارها دارد [۳۰].

در سال ۲۰۱۹، مقاله‌ای با عنوان «اندازهٔ مجاورت[۵۵] کاروش- کان- تاکر برای حل مسائل بهینه‌سازی دوسطحی» توسط سینها و همکارانش منتشر شد. در این مقاله، از روش‌های ساده شده برای سطح دوم استفاده شده است که از دقت حل می‌کاهد، اما امکان محدود کردن تقریب‌ها وجود دارد. در شرایط KKT جدید، اندازهٔ مجاورت تعریف شده است که فاصله و خطا را از نقطهٔ بهینگی نشان می‌دهد. بررسی‌ها نشان داده که ترکیب این روش با الگوریتم‌های تکاملی باعث افزایش سرعت محاسبات (به خصوص در سطح دوم) می‌شود [۳۱].

در سال ۲۰۱۹، مارچی و گرتس[۵۶] از روش دوسطحی برای کنترل پیش‌بین استفاده نمودند. در این مقاله، راه‌حلی برای مسائل کنترل بهینه خطی درجه دو با زمان نهایی نامحدود و قیود نهایی حالت ارائه شد که برای کنترل‌های بازخورد آنلاین مناسب است. به منظور جلوگیری از این مشکل، در این مقاله از روش کنترل بهینهٔ دوسطحی استفاده شده است. استفاده از این روش باعث کاهش زمان بهینه می‌شود [۳۲].

۳-۱- کاربرد بهینه‌سازی دوسطحی درمسائل هوافضا

در سال ۲۰۱۱، زیتو[۵۷] و همکاران در مطالعه‌ای به مدلسازی رقابت شرکت‌های هواپیمایی با شرکت‌های حمل و نقل زمینی در تعیین قیمت و تعداد سفرها پرداختند. در این مسئله از بهینه‌سازی دوسطحی استفاده شد که سطح اول به دنبال کاهش هزینه‌های شرکت هواپیمایی و سطح دوم قیمت سفرهای هوایی را کمینه می‌کرد. با توجه به هزینه‌های کم سفرهای زمینی، شرکت‌های هواپیمایی همیشه در حال رقابت با شرکت‌های حمل و نقل زمینی هستند. برای حل مسئلهٔ دوسطحی از نرم‌افزار GAMS-MPEC استفاده شده است [۳۳].

در سال ۲۰۱۳، لیو[۵۸] و همکاران مقاله‌ای منتشر نمودند که در آن از روش‌های دوسطحی و الگوریتم جستجوی گسسته[۵۹] برای یافتن مسیر سازگار پهپاد استفاده شده بود. هدف جستجوی مسیر بی‌درنگ[۶۰] با در نظر گرفتن محدودیت سرعت، مانورپذیری و توانایی سنسور هر پهپاد است. نتایج مدلسازی حاکی از بهبود کارایی مسیریابی و سازگاری آن با تغییرات عملکرد پهپاد بود [۳۴].

در سال ۲۰۱۴، میرشمس و ناصح طراحی مفهومی موتور سوخت مایع را با روش بهینه‌سازی چندهدفی فازی انجام دادند که بدین منظور از الگوریتم ژنتیک استفاده شده است. به کمک

47. Poirion
48. Baffier
49. El-Sobky and Y. Abo-Elnaga
50. Active Set
51. Penalty Method
52. Null-space
53. Trust-region Technique
54. Kumar
55. Proximity Measure

56. Marchi and Gerdts
57. Zito
58. Liu
59. Discrete Search
60. Real-time

این روش می‌توان در مراحل ابتدایی توابع هدف و متغیرهای طراحی را یافت. در این مقاله هدف طراحی موتوری با وزن کمتر و حداکثر تکانهٔ ویژه و با در نظر گرفتن چند متغیر طراحی مستقل است. به منظور بررسی دقت و کارایی این روش مدلسازی بر روی موتور F-1 انجام گرفت [۳۵].

فاضلی و همکاران در مقاله‌ای در سال ۲۰۱۶ به طراحی مفهومی سیستم پیشرانش فضاپیما پرداخته است. در این مقاله روش بهینه‌سازی چندمنظوره، چندهدفی به کار رفته است. هدف از این طراحی کمینه کردن وزن پیشرانش و بالابردن تکانه برای طراحی سیستم پیشرانش فضایی دوگانه است که به کمک الگوریتم ژنتیک و برنامه‌ریزی درجهٔ دو متوالی انجام شد [۳۶].

عمل‌نیک و همکاران در مطالعه‌ای برنامه‌ریزی زمان پرواز و تخصیص باند به هر هواپیما را مورد بررسی قرار دادند. در این مقاله که در سال ۲۰۱۶ منتشر شد، به منظور حل این مسئله در شرایط عدم قطعیت از برنامه‌ریزی دوسطحی و الگوریتم تجزیهٔ بندر استفاده نمودند. تابع هدف سطح اول زمان انتظار برای اختصاص باند را براساس اهمیت پرواز و تابع هدف سطح دوم نیز مسافت طی شده برای مسافرین درون فرودگاه را کمینه خواهند نمود. مقایسه نتایج با داده‌های واقعی حاکی از کاهش قابل توجه هزینه را داشت [۳۷].

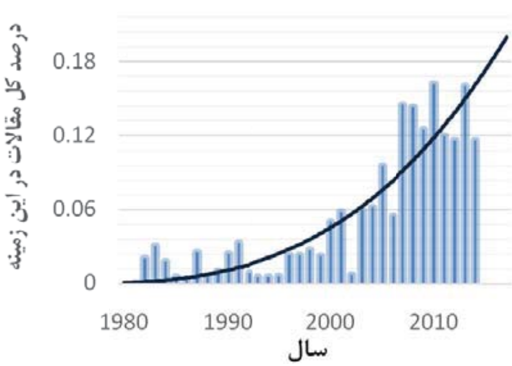
در سال ۲۰۱۷، پالاگاشف[61] در پایان نامه دکتری خود، با استفاده از بهینه‌سازی دوسطحی به حل معادلات کنترلی – مسائل غیرخطی– رباتها پرداخته است. بدین منظور وی، کوآدروتوری را در نظر گرفته که به دنبال هدف متحرک در مسیر ثابت است [۳۸]. دومین مسئله‌ای که پالاگاشف به آن پرداخت مربوط به برنامه‌ریزی پروازها بود. در این مسئله، از طرفی باید زمان نشست و برخاست به گونه‌ای تنظیم می‌شد تا زمان تأخیر به حداقل برسد و از سوی دیگر زمان پرواز یا مصرف سوخت باید کمینه شود. وی برای حل هر دو مسئله از روش شاخه و حد استفاده نموده است.

در سال ۲۰۱۸، سون[62] طی مطالعه‌ای روش دوسطحی را برای بهینه‌سازی مسیر پهپاد به کار برد. وی در این بررسی سعی در بهینه‌سازی متغیرهای حالت و زمان داشت. با توجه به غیرخطی بودن مسئله از روش دوسطحی استفاده شد. حل این مسئله به کمک تبدیل مسئله با شرایط کاروش–کان–تاکر به یک سطحی و روش گرادیان کاهشی صورت گرفت. به کار بردن روش دوسطحی در مسائل غیرخطی دیگر باعث بهبود کارایی نتایج می‌شود. در این مسئله نیز ۸ برابر سریع‌تر به نقطهٔ بهینه همگرا شد [۳۹].

در سال ۲۰۱۸، پیپرک و هلزاپفل[63] به بهینه‌سازی مسیر مانوری پهپاد عمود پرواز پرداختند. در این مقاله برای حل مسئله از کنترل بهینهٔ دوسطحی استفاده شد. الگوریتم به کار رفته ترکیبی از الگوریتم ژنتیک و جستجوی گرادیانی بود. در معادلات سطح زیرین عوامل متعدد تأثیرگذار شرایط عدم قطعیت مسیر مانور در نظر گرفته شد. نتایج حاکی از بهبود قدرت[64] مسیر بهینه بود [۴۰].

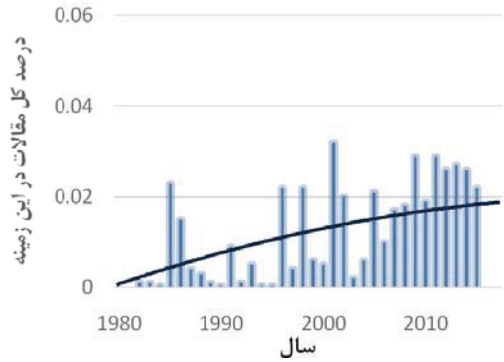
در سال ۲۰۱۸، ژنگ[65] و همکاران روشی برای ردگیری چند وسیله توسط ماهواره در شرایط ناسازگار ارائه نمودند. با توجه به کیفیت کم تصاویر ارسالی ماهواره ممکن است برخی از اطلاعات دریافتی ناقص باشد. به منظور غلبه بر این مشکل، احتمال جابجایی وسیله به کمک فیلتر کالمن در بازه‌های زمانی بزرگ ساخته می‌شود. طبق نتایج حاصل از به کارگیری این روش، ردگیری و شناسایی وسیله‌های در حرکت بهبود یافته بود [۴۱].

در شکل‌های **۱-۴** می‌توان روند استفاده از بهینه‌سازی دوسطحی را از سال ۱۹۸۰ در مقالات مختلف اشاره شده در اسکوپوس مشاهده نمود. با بررسی مقالات مختلف می‌توان به روند افزایشی کاربرد بهینه‌سازی دوسطحی پی برد. همان‌طورکه در شکل‌ها نیز قابل مشاهده است، روند افزایشی کاربرد این نوع بهینه‌سازی در زنجیرهٔ تأمین و حمل و نقل ریلی قابل مشاهده است. اما در دو زمینهٔ دیگر، کاربرد این روند کاهشی است. اگرچه کاربرد بهینه‌سازی دوسطحی در مسائل تجاری کمتر شده اما، این روش از سال‌های پیشین در مسائل تجاری مورد توجه بوده است [۴۲].

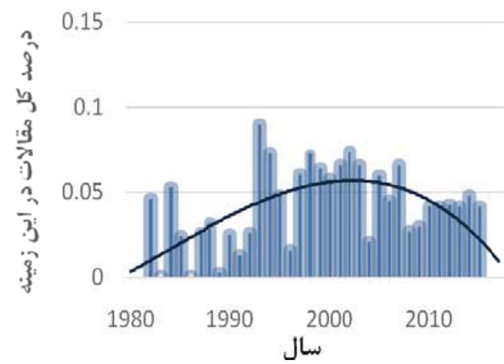


شکل (۱): کاربرد بهینه‌سازی دوسطحی در مدیریت زنجیرهٔ تأمین از سال ۱۹۸۰ [۴۲].

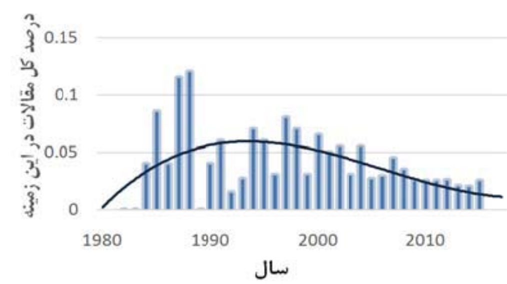
61. Palagachev
62. Sun
63. Piprek and Holzapfel
64. Robust
65. Zhang



شکل (۲): کاربرد بهینه‌سازی دوسطحی در حمل و نقل ریلی از سال ۱۹۸۰ [۴۲].



شکل (۳): کاربرد بهینه‌سازی دوسطحی در مسائل تجاری از سال ۱۹۸۰ [۴۲].



شکل (۳): کاربرد بهینه‌سازی دوسطحی در معماری شبکه از سال ۱۹۸۰ [۴۲].

۴- الگوریتم‌های حل

همان‌طورکه در بخش تاریخچه نیز بیان شد برای حل مسائل بهینه‌سازی دوسطحی بنا به سال ارائه و نوع مسئله، الگوریتم‌های مختلف به کار رفته است. جدول **۱** الگوریتم‌های به کار رفته در برخی از مطالعات را نشان می‌دهد که می‌تواند الگوی خوبی برای انتخاب الگوریتم مناسب جهت حل مسائل باشد. این جدول به خوبی بیانگر گسترهٔ روش‌های حل از کلاسیک تا تکاملی می‌باشد. همان‌طورکه مشاهده می‌شود استفاده از الگوریتم‌های فراابتکاری و تکاملی در سال‌های اخیر کاربرد بیشتری داشته است. در ادامه پنج الگوریتم پرکاربرد به طور اجمالی معرفی خواهد شد.

جدول (۱): نمونه‌ای از الگوریتم‌های به کار رفته برای حل مسائل مختلف بهینه‌سازی دوسطحی.

الگوریتم حل	کاربرد	نویسنده و سال ارائه
گرادیان کاهشی	شبکه حمل و نقل شهری	اسمیت و ژیانگ، ۱۹۹۷ [۱۰]
	طراحی شبکه حمل و نقل	پاتریکسون و روکافلار، ۲۰۰۲ [۴۳]
روش ابتکاری	تعیین مکان مراکز توزیع	هوی جون، ژی یو، ۲۰۰۸ [۱۵]
	شبکه حمل و نقل مواد خطرناک	رصافی و باوقار، ۲۰۰۹ [۱۶]
	برنامه‌ریزی حمل و نقل ریلی	سین‌ها و سالسینگیکار، ۲۰۱۶ [۴۲]
	قیمت‌گذاری در شرکت‌های هواپیمایی	کوته و مارکوت، ۲۰۰۳ [۴۴]
ازدحام ذرات	برنامه‌ریزی حمل و نقل و زنجیره تأمین	چیونگ و داکال، ۲۰۰۹ [۴۵]
	تعیین دینامیکی هزینه برق مصرفی	آلوس و آنتونس، ۲۰۱۷ [۴۶]
کلونی مورچگان[۶۶]	برنامه‌ریزی توزیع محصولات	کالوته و گاله، ۲۰۱۱ [۴۷]
الگوریتم تکاملی	شبکه توزیع محصولات	لوگیون و لیفوگ، ۲۰۱۲ [۴۸]
	شبکه توزیع محصولات	کالوته و گاله، ۲۰۱۴ [۲۲]
تئوری دوگانه و کاروش کان تاکر	زنجیره تأمین	مولایی و پیروزه، ۲۰۱۲ [۱۹]
الگوریتم تجزیه بندر[۶۷]	شبکه ترافیکی	فونتن و مینر، ۲۰۱۴ [۴۹]
شاخه و برش	شبکه بزرگراهی	لاب و مارکوت، ۱۹۹۸ [۵۰]
سیمپلکس	شبکه حمل بار ریلی	لین و وو، ۲۰۱۸ [۵۱]
الگوریتم ژنتیک	شبکه حمل و نقل ریلی	کومار و گوپتا، ۲۰۱۸ [۳۰]
	تعیین دینامیکی هزینه برق مصرفی	آلوس و آنتونس، ۲۰۱۸ [۵۲]

66. Ant Colony
67. Benders Decomposition

۴-۱- کاروش- کان- تاکر

روش‌های مختلفی برای تبدیل مسئلهٔ بهینه‌سازی دوسطحی به مسائل مختلف وجود دارد. یکی از روش‌های معمول استفاده از شرایط کاروش-کان-تاکر در سطح زیرین مسئله است. در صورت محدب بودن سطح دوم مسئله می‌توان این روش را به کار برد. استفاده از این روش به این نکته توجه دارد که مسئلهٔ رهبر به طور ضمنی خود را در متغیرهای پیرو y خود را نشان می‌دهد. در این تبدیل کنترل متغیرهای سطح پیرو به سطح رهبر منتقل می‌شود. شرایط KKT خود را به صورت ضرایب لاگرانژی و قیود تکمیلی نشان داده و مسئلهٔ بهینه‌سازی دوسطحی را به مسئلهٔ بهینه‌سازی تک‌سطحی تبدیل می‌نماید. این شرایط برای مسائل خوش‌بینانه قابل اعمال است. با فرضیات گفته شده، روابط اصلی مسئله عبارتند از [۳]:

$$\min_{X\in X, y\in Y} F(x,y), \quad (۱۶)$$

$$\text{Subject to} \quad (۱۷)$$
$$G_k(x,y) \le 0, k = 1,2,\dots,K,$$

$$\nabla_y L(x,y,\lambda) = 0, \quad (۱۸)$$

$$g_j(x,y) \le 0, j = 1,2,\dots,J, \quad (۱۹)$$

$$\lambda_j g_j(x,y) = 0, j = 1,\dots,J, \quad (۲۰)$$

$$\lambda_j \ge 0, j = 1,2,\dots,J, \quad (۲۱)$$

که در آن، $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \sum_{j=1}^{J} \lambda_j g_j(x,y)$ بوده و λ ضریب کاروش کان تاکر می‌باشد. در شرایط محدب و خطی نیز ممکن است قیود لاگرانژی غیرمحدب باشد. اما، اعمال شرایط مسئله را به یک مسئلهٔ خطی ترکیبی عددصحیح تبدیل می‌نماید. برای حل چنین مسائلی، روش‌های مختلفی وجود دارد که به تفصیل در مراجع [۴-۳] شرح داده شده است.

۴-۲- شاخه و حد

پس از جایگزینی مسئله، با شرایط کاروش-کان-تاکر، ریشهٔ درخت مسئله (مربوط به قید ۱۸) حذف می‌شود. در نقطه‌ای از درخت شاخه و حد که قید مکمل ارضا نمی‌شود، جدایش به ترتیب زیر صورت می‌گیرد: دو نقطهٔ جدید ساخته می‌شود، نقطهٔ اول با فرض $\lambda_i = 0$ به عنوان قید اضافی و نقطهٔ دیگر با فرض $g_i(x,y) = 0$. مقادیر بهینه برای این مسائل به عنوان قید سطح دوم درخت دومی خواهد بود [۵۳، ۲۱].

در صورت نبود قید برای سطح اول، راه‌حل منطقی می‌تواند حل مسئلهٔ پایین دست که نتیجهٔ جایگذاری x در حل بهینهٔ جزئی[68] از مسئلهٔ تقریبی[69] است، باشد. در روش شاخه و حد برای مسائل دوسطحی برخلاف روش معمول، حل ممکن در هر نقطهٔ ضمنی در درخت تولید شده و به تبع آن، سطح دوم نیز به روز می‌شود. برای مطالعه بیشتر می‌توان به مرجع [۵۳] رجوع نمود.

۴-۳- روش کاهشی

با فرض اینکه حل بهینهٔ سطح دوم یکتا و تعریف y به عنوان تابع ضمنی از x باشد، در این صورت می‌توان مسئله را فقط با متغیرهای سطح یک در نظر گرفت. اگر x نقطهٔ ممکن باشد، هدف مسئله یافتن راستایی d است که تابع هدف سطح اول کاهش یابد. در این صورت، نقطهٔ جدید x+αd (α>۰) باید به گونه‌ای باشد که تابع F در محدودهٔ ممکن بوده و کاهش نیز یابد. مهم‌ترین نکته در این روش، وجود گرادیان تابع F در نقطهٔ انتخاب شده است. با استفاده از قانون زنجیرهٔ مشتق، خواهیم داشت [۳]:

$$\nabla_x F\big(x,y(x)\big) = \nabla_x F(x,y) + \nabla_y F(x,y)\nabla_x y(x). \quad (۲۲)$$

تمامی توابع در تکرار اول مقداردهی می‌شوند. روابط حاکم بر مسائلی که سطح اول مقید نباشد متفاوت خواهد بود. در این حالت برای قیود سطح دوم داریم:

$$g_i(x,y) \le ., i \in I, \quad (۲۳)$$

$$g_j(x,y) = 0, j \in J. \quad (۲۴)$$

راستای کاهشی سطح اول در نقطهٔ x بردار $d \in \mathbb{R}^{n_1}$ است، رابطهٔ کلی عبارتست از:

$$\nabla_x F(x,y*)d + \nabla_y F(x,y*)w(x,d) < 0, \quad (۲۵)$$

که در آن، برای y*=y(x) و $w \in \mathbb{R}^{n_2}$ داریم:

$$\min_w (d^T, w^T)\nabla_{xy}^2 L(x,y*,\lambda))d, w) \quad (۲۶)$$

$$subject\ to\ \ \nabla_y g_i(x,y*)w \le -\nabla_x g_i(x,y*)d, i \in I(x), \quad (۲۷)$$

$$\nabla_y g_j(x,y*)w = -\nabla_x g_i(x,y*)d, j \in J, \quad (۲۸)$$

$$\nabla_y f(x,y*)w = -\nabla_x f(x,y*)d + \nabla_x L(x,y*,\lambda)d, \quad (۲۹)$$

در روابط بالا $I(x)=\{i\in I: g_i(x,y*) = 0\}$ است و

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \sum_{i\in I(x)\cup J} \lambda_i g_i(x,y). \quad (۳۰)$$

68. Partial
69. Relaxed Problem

رابطهٔ ذکر شده لاگرانژ سطح دوم و قید فعال است. در این حالت، شیب کاهشی با حل بهینهٔ مسئلهٔ دوسطحی خطی درجه دو منطبق خواهد بود و داریم:

$$\min_{d} \nabla_x F(x,y*)d + \nabla_y F(x,y*)w(x,d), \quad (۳۱)$$

$$subject\ to\ \parallel d \parallel \leq 1. \quad (۳۲)$$

W(x,d) از حل روابط ۲۵ الی ۲۹ به دست می‌آید. برای روابط فوق حل‌های دقیقی در [۳، ۵۴] ارائه شده است.

۴-۴- الگوریتم ژنتیک

الگوریتم ژنتیک مربوط به مسائل دوسطحی[۷۰] را می‌توان روشی برگرفته از اصول الگوریتم ژنتیک اصلی دانست. برای حل مسئلهٔ دوسطحی خطی متغیر تصمیم رهبر x براساس تعاریف GA تولید مثل کرده و متغیر تصمیم پیرو y با حل برنامه‌ریزی خطی سطح دوم به دست می‌آید. آزمون شایستگی همانند آزمون تعریف شده در الگوریتم ژنتیک پایه است. در این الگوریتم، مسئلهٔ دوسطحی با استفاده از شرایط بهنگی به مسئلهٔ یک سطحی 1-0 تبدیل می‌شود [۵۳، ۱۲].

برنامهٔ تولید مثل GABBA توسط عملگر، اندازهٔ جمعیت، درصد آللها در هر ساختاری برای تولید مثل، تعداد ساختار جدید برای تولید هر نسل تصادفی و استراتژی انتخاب کنترل می‌کند. علی‌رغم الگوریتم ژنتیک، در GABBA تنها جهش را در نظر گرفته و از تقاطع استفاده نشده است که برخی این نکته را از مهم‌ترین مشکل این روش می‌دانند. در این روش، ابتدا با اعمال شرایط کاروش-کان-تاکر برای سطح دوم و تبدیل آن به مسئلهٔ یک سطحی، الگوریتم به ترتیب زیر اعمال می‌شود.

گام یک: حد بالای هر متغیر تصمیم تقریب زده شده و طول رشتهٔ بیت هر یک محاسبه می‌شود. سپس، جمعیت اولیهٔ N برای یک دسته[۷۱] (رشته‌های بیت ۰-۱ برای یک جفت متغیر تصمیم (x,y) را می‌گویند)، به صورت تصادفی انتخاب می‌شود.

گام دو: شایستگی هر دسته با استفاده از روابط زیر به دست می‌آید. بر اساس انتخاب الیت- رولت[۷۲]، جمعیت نسل دیگر شکل می‌گیرد.در صورتی که $F(x,y)=c_1x+d_1y$، $f(x,y)=c_2x+d_2y$ و $g_i(x,y)=A_ix+B_iy\leq b_i$ تعریف گردد، خواهیم داشت:

$$d_i=\begin{cases}0 & if\ A_ix+B_iy\leq b_i,\\ \dfrac{A_ix+B_iy-b_i}{|b_i|} & if\ A_ix+B_iy\geq b_i,\end{cases} \quad (۳۳)$$

که در آن، A_i، B_i و b_i المان i ام از بردارهای A، B و b قید i ام هستند. با داشتن رابطهٔ (۳۳)، رابطهٔ جریمه بدین صورت رابطهٔ (۳۴) تعریف می‌شود.

$$p_1=\exp\left\{-\sum_{i=1}^{l}d_i\right\}, \quad (۳۴)$$

در ادامه، برای یافتن حد بالا و پایین f به ترتیب خواهیم داشت:

$$\min f(x,y)=c_2x+d_2y, \quad (۳۵)$$

$$\text{Subject to: } Ax+By\leq b, \quad (۳۶)$$

$$x_i\geq 0, i=1,\dots,m, \quad (۳۷)$$

$$y_j\geq 0, j=1,\dots,n, \quad (۳۸)$$

و

$$\min \mathrm{f(x,y)}=c_2x+d_2y, \quad (۳۹)$$

$$subject\ to: By\leq b-Ax, \quad (۴۰)$$

$$y_j\geq 0, j=1,\dots,n. \quad (۴۱)$$

اگر f_{worst} و f_{best} به ترتیب مقادیر حد پایین و بالای f باشند، در این صورت، جریمهٔ ایجاد پاسخ غیرمنطقی با رابطهٔ (۴۲) محاسبه خواهد شد.

$$p_2=exp\left\{-\frac{f^{IP}-f_{best}}{f_{worst}-f_{best}}\right\} \quad (۴۲)$$

با استفاده از روابط فوق و فرض اینکه F_{max} مقدار بهینهٔ رابطهٔ دوسطحی، بدون در نظر گرفتن تابع هدف سطح دوم است. در این صورت شایستگی به صورت زیر خواهد بود:

$$fitness=p_1p_2\{F_{max}-F^{IP}\}, \quad (۴۳)$$

که در آن، F^{IP} مقدار تابع هدف سطح یک برای یک جفت (x,y) است. در صورتی که به دنبال کاهش زمان محاسبات باشیم، از مقدار p_1 می‌توان به عنوان مقدار شایستگی استفاده نمود.

گام سوم: با توجه به احتمال تقاطع، برای تشکیل یک دستهٔ جدید تقاطع در یک نقطه انجام می‌گیرد (به [۵۳] مراجعه شود).

گام چهارم: بر اساس احتمال جهش، برای تشکیل نسل جدید یک دسته، جهش با بیت معکوس صورت می‌گیرد (به [۵۵] مراجعه شود).

70. Genetic Algorithm Based Bilevel Programming Algorithm (GABBA)

71. Individual

72. Elite-roulette

گام پنجم: در صورتی که تعداد نسل‌ها از تعداد مشخص شده تجاوز کرد، بهترین دستهٔ محاسبه شده به عنوان جواب مسئله در نظر گرفته می‌شود. در غیر این صورت از گام ۲ حل تکرار خواهد شد.

۴-۵- بهینه‌سازی ازدحام ذرات

در این بخش، الگوریتم PSO را برای مسائل دوسطحی خطی بررسی می‌نماییم. در این روش، از الگوریتم PSO برای محاسبهٔ x استفاده می‌شود. سپس، با در دست داشتن x، y از روش‌های برنامه‌ریزی خطی محاسبه می‌شود [۲۳، ۴۵، ۵۶].

فرض می‌کنیم w=(x,y) حل رابطهٔ اصلی است. الگوریتم دو جمعیت را در حین مرحلهٔ جستجو ذخیره می‌کند: مجموعهٔ ازدحام P که در آن هر یک از ذرات i یک حل ممکن $w^i=(x^i,y^i)$ را نشان می‌دهد و بایگانی خارجی Q که حل‌های غالب را نشان می‌دهد. حل w در صورتی که غالب شناخته می‌شود که حل دیگری همچون ’w وجود نداشته باشد تا آن را تحت سلطه قرار دهد.

مجموعهٔ P با N ذره $w^i=(x^i,y^i), i=1,\dots,N$ شکل می‌گیرد که در آن $x^i \in X$ به صورت تصادفی تولید می‌شود. سپس، با داشتن x^i مقدار y^i از حل سطح دوم به دست می‌آید. بردار سرعت v^i که حرکت هر ذره i را نشان می‌دهد، در ابتدا برابر صفر فرض می‌شود. بهترین مکان برای ذره i را با p^i نمایش داده که در ابتدا مکان فعلی هر ذره خواهد بود. مقدار اولیهٔ Q را نیز ذرات غالب تشکیل می‌دهد. در هر مرحله، هر نسل به ترتیب زیر حرکت خواهند کرد.

ابتدا، بهترین راهنمای سراسری g^i برای هر ذرهٔ i در مجموعهٔ Q انتخاب می‌شود. g^i و p^i برای تنظیم بردار سرعت v^i و بردار سرعت برای مشخص نمودن حرکت x^i هر ذره مورد استفاده قرار می‌گیرد. آشفتگی[۷۳] (جهش) نیز برای x^i اعمال می‌شود. پس از این مراحل، اگر مؤلفه‌ای از x^i در خارج از محدودهٔ تعریف شده توسط X باشد، به درون محدوده هدایت می‌شود. سپس، با در نظر گرفتن x^i در سطح دوم مسئله، y^i جدید محاسبه می‌شود. اگر حل غیرممکن باشد، در این صورت ذره به موقعیت قبلی خود بازگشته و سرعت برابر صفر در نظر گرفته می‌شود.

با به دست آمدن حل جدید w^i مقدار p^i جدید به دست می‌آید. اگر مقدار جدید غالب بود انتخاب خواهد شد. اگر هیچ یک از w^i و p^i غالب نبودند، انتخاب تصادفی بین این دو مقدار جدید p^i را مشخص خواهد نمود.

زمانی که تمامی ذرات حرکت کردند، مجموعهٔ Q به روز خواهد شد. برای هر ذرهٔ i، w^i زمانی وارد مجموعهٔ Q خواهد شد که این مقدار در ارتباط با اعضای دیگر مغلوب نشده یا حداقل بر یک عضو غالب آید. در حالت دوم، تمامی اعضای مغلوب شده توسط این عضو از مجموعه حذف خواهد شد. برای کنترل تعداد اعضای Q، مقدار فاصلهٔ ازدحام تعریف شده که در صورت بالا رفتن تعداد اعضا از مقدار مشخص شده، برخی حذف می‌شود. این مقدار با استفاده از توابع نرمال و در فضای هدف محاسبه می‌شود. در هر مرحله برای هر تابع هدف مقدار کمینه و بیشینه به دست می‌آید که برای نرمال کردن مقدار فاصله استفاده خواهد شد. حلقهٔ اصلی الگوریتم تا رسیدن به تعداد تکرار تعریف شده، ادامه پیدا می‌کند. مقدار نهایی Q جواب مسئله خواهد بود.

۵- نرم‌افزارها و کتابخانه‌های کاربردی

پس از معرفی الگوریتم حل، چند نرم‌افزار و کتابخانه جهت حل مسائل بهینه‌سازی چند سطحی که کاربرد فراوانی دارند، در ذیل معرفی می‌شوند:

- **GAMS**: این سیستم مدلسازی که برای حل مسائل بهینه‌سازی و برنامه‌ریزی مورد استفاده قرار می‌گیرد. این سیستم با ارائهٔ محیطی برای کدنویسی و سالور مربوط به بهینه‌سازی چندسطحی، امکان حل مسائل بزرگ بهینه‌سازی را با تعریف توابع هدف و قیود برای کاربران فراهم می‌آورد [۵۷].
- **Pyomo**: بستهٔ مدلسازی است که با استفاده از زبان پایتون طراحی شده است. با افزودن این کتابخانه به پایتون می‌توان با تعریف مدل ریاضی مسئله، به کمک سالورهای مختلفی چون CPLEX و CPC این مدل را حل کرد. با توجه به سرعت بالای زبان پایتون در حل مسائل بزرگ ریاضی و ساده بودن یادگیری آن نسبت به زبان‌های دیگر، این کتابخانه به راحتی قابل استفاده خواهد بود [۵۸].
- **BOLIB**: این کتابخانه که به رایگان در اختیار عموم قرار گرفته است، مجموعه‌ای از ۱۲۴ مسائل بهینه‌سازی غیرخطی دوسطحی است. این کتابخانه قابل استفاده بر روی نرم‌افزار matlab است [۵۹] و
- **CONOP**: این سالور که به کمک زبان فرترن نوشته شده است. این سالور قادر به حل مسائل بهینه‌سازی غیرخطی بوده و قابلیت افزوده شدن بر روی زبان‌های

73. Turbulence

AMPL و نرم‌افزارهایی مانند matlab و GAMS را دارد [۶۰].

۶- نتیجه‌گیری

همان‌طورکه پیشتر نیز اشاره شد، با توجه به کاربردهای فراوان بهینه‌سازی دوسطحی در مسائل واقعی، اخیراً به یکی از موضوعات مهم در مطالعات برنامه‌ریزی ریاضی مبدل شده که تعداد مقالات در سال‌های اخیر نشانگر این مسئله است. با گسترش مطالعات در این زمینه، دسته‌بندی‌های مختلف به وجود آمده که نتیجهٔ آن ارائهٔ روش‌ها و الگوریتم‌های حل گوناگون است. در این مقاله نیز تلاش شده بود تا با ارائهٔ مفاهیم اولیه، خوانندگان را با این نوع مسائل آشنا نماید. همچنین، مرور بر مطالعات گذشته نشان می‌دهد که هر یک از الگوریتم‌ها مختص چه نوع مسائلی بوده و موجب تسهیل در انتخاب روش حل برای موارد مشابه می‌شود. مروری بر مطالعات مهندسی هوافضا در ده سال اخیر و تاریخچهٔ آن بیانگر کاربرد بهینه‌سازی دوسطحی در حل مسائل حمل و نقل هوایی، تعیین مسیرهای بهینهٔ حرکتی پهپاد و هواپیما و استفاده از این روش در حل مسائل کنترل بهینه است. همان‌طورکه در بخش تاریخچه نیز مشاهده شد، مطالعات در این زمینه فراوان بوده است. اما همچنان روش‌های حل برای مسائل غیرخطی محدود بوده و از دقت کافی برخوردار نیستند که ارائهٔ روش‌های جدیدتر می‌تواند این مشکل را برطرف نماید. علاوه بر آن، الگوریتم‌های مختلفی برای حل هر یک از مطالعات به کار رفته است، اما دستورات آمادهٔ زبان‌های مختلف کامپیوتری و نرم‌افزارهای حل به گستردگی دیگر مسائل برنامه‌ریزی و بهینه‌سازی ریاضیات نیست. بنابراین، یکی از مطالعات آینده می‌تواند ارائهٔ چنین نرم‌افزارهایی باشد.

۶- مراجع

[1] Bard, J.F., "An Algorithm for Solving the General Bilevel Programming Problem", *Mathematics of Operations Research,* Vol. 8, No. 2, pp. 260-272, 1983.

[2] Ho, K., De Weck, O.L., Hoffman, J.A., and Shishko, R., "Dynamic Modeling and Optimization for Spacelogistics, Using Time-expanded Networks", *Acta Astronautica,* Vol. 105, No. 2, pp. 428-443, 2014.

[3] Dempe, S., *Foundations of Bilevel Programming*, Springer Science & Business Media, Berlin, Germany, 2002.

[4] Dempe, S., Kalashnikov, V., Pérez-Valdés, G.A., and Kalashnykova, N., *Bilevel Programming Problems*, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2015.

[5] Sinha, A., Malo, P., and Deb, K., "A Review on Bilevel Optimization: from Classical to Evolutionary Approaches and Aapplications", *IEEE Transactions on Evolutionary Computation,* Vol. 22, No. 2, pp. 276-295, 2018.

[6] Hansen, P., Jaumard, B., and Savard, G., "New Branch-and-bound Rules for Linear Bilevel Programming", *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing,* Vol. 13, No. 5, pp. 1194-1217, 1992.

[7] Edmunds, T.A. and Bard, J.F., "An Algorithm for the Mixed-integer Non-linear Bilevel Programming Problem", *Annals of Operations Research,* Vol. 34, No. 1, pp. 149-162, 1992.

[8] Ben-Ayed, O., "Bilevel Linear Programming", *Computers & Operations Research,* Vol. 20, Nno. 5, pp. 485-501, 1993.

[9] Migdalas, A., "Bilevel Programming in Traffic Planning: Models, Methods and Challenge", *Journal of Global Optimization,* Vol. 7, No. 4, pp. 381-405, 1995.

[10] Smith, M., Xiang, Y., and Yarrow, R., "Bilevel Optimisation of Signal Timings and Roadprices on Urban Road Networks", *IFAC Proceedings Volumes,* Vol. 30, No. 8, pp. 609-614, 1997.

[11] Hejazi, S., Memariani, A., Jahanshanloo, G., and Sepehri, M., "Bilevel Programming Solution by Genetic Algorithms", *The First National Industrial Engineering Conference*, Sharif University of Technology, Tehran, Iran, 2001.

[12] Nishizaki, I., Sakawa, M., and Kan, T., "Computational Methods through Genetic Algorithms for Obtaining Stackelberg Solutions to Two Level Integer Programming Problems", *Electronics and Communications in Japan (Part III :Fundamental Electronic Science),* Vol. 86, No. 6, pp. 59-66, 2003.

[13] Gümüş, Z.H. and Floudas, C.A., "Global Optimization of Mixed-integer Bilevel Programming Problems", *Computational Management Science,* Vol. 2, No. 3, pp. 181-212, 2005.

[14] Wang, G., Wang, X., Wan, Z., and Lv, Y., "A Globally Convergent Algorithm for a Class of Bilevel Non-linear Programming Problem", *Applied Mathematics and Computation,* Vol. 188, No. 1, pp. 166-172, 2007.

[15] Sun, H., Gao, Z., and Wu, J., "A Bi-level Programming Model and Solution Algorithm for the Location of Logistics Distribution Centers", *Applied Mathematical Modelling,* Vol. 32, No. 4, pp. 610-616, 2008.

[16] Rassafi, A.A. and Bavaghar Zaeimi, M., "Solve the Problem of Designing the Transportation Network of Hazardous Materials", *The 8th International Civil Engineering Congress*, Shiraz University, Shiraz, Iran, 2009 (In Persian).

[17] Domínguez, L.F. and Pistikopoulos, E.N., "Multiparametric Programming Based Algorithms for Pure Integer and Mixed-integer Bilevel Programming Problems", *Computers & Chemical*

Engineering, Vol. 34, No. 12, pp. 2097-2106, 2010.

[18] Hamidi, F. and Mishmast Nehi, H., "Bilevel Linear Programming with Fuzzy Parameters", *Iranian Journal of Fuzzy Systems,* Vol. 10, No. 4, pp. 83-99, 2013.

[19] Abbasi Molai, A., Pirouzeh, Z., and Jafari, A., "Bilevel Internal Data Envelopment Analysis: A Bilevel Programing Approah", *The 4th Conference on Data Envelopment Analysis,* University of Mazandaran, Babolsar, Iran, 2002 (In Persian).

[20] Khodamoradi, S., Torabi Goodarzi, M., and Raei Ezabadi, M., "A Two-step Mathematical Approach to Portfolio Optimization", Vol. 4, No. 14, pp. 136-167, 2013 (In Persian).

[21] Harbavi, M., "Optimization Quadratic Bilevel Programming Problems", *The 1st International Conference on Management, Accounting and Economics*, Rasht, Iran, 2014.

[22] Herminia, C.G., Calvete, I., and Iranzo, J.A., "Planning of a Decentralized Distribution Network, Using Bilevel Optimization", *Omega Journal*, Vol. 49, No. 2, pp. 30-41, 2014.

[23] Alves, M.J. and Costa, J.P., "An Algorithm Based on Particle Swarm Optimization for Multi-objective Bilevel Linear Problems", *Applied Mathematics and Computation,* Vol. 247, pp. 547-561, 2014.

[24] Caramia, M. and Mari, R., "Enhanced Exact Algorithms for Discrete Bilevel Linear Problems", *Optimization Letters,* Vol. 9, No. 7, pp. 1449-1468, 2015.

[25] Agor, J., and Özaltın, O.Y., "Feature Selection for Classification Models Via Bilevel Optimization", *Computers & Operations Research,* Vol. 106, pp. 156-168, 2018.

[26] Aboussoror, A. and Adly, S., "New Necessary and Sufficient Optimality Conditions for Strong Bilevel Programming Problems", *Journal of Global Optimization,* Vol. 70, No. 2, pp. 309-327, 2018.

[27] Poirion, P.-L., Toubaline, S., D'Ambrosio, C., and Liberti, L., "Algorithms and Applications for a Class of Bilevel MILPs", *Discrete Applied Mathematics,* Vol. 272, pp. 75-89, 2020.

[28] Baffier, J.-F., Poirion, P.-L., and Suppakitpaisarn, V., "Bilevel Model for Adaptive Network Flow Problem", *Electronic Notes in Discrete Mathematics,* Vol. 64, pp. 105-114, 2018.

[29] El-Sobky, B. and Abo-Elnaga, Y., "A Penalty Method with Trust-region Mechanism for Non-linear Bilevel Optimization Problem", *Journal of Computational and Applied Mathematics,* Vol. 340, pp. 360-374, 2018.

[30] Kumar, A., Gupta, A., and Mehra, A., "A Bilevel Programming Model for Operative Decisions on Special Trains: An Indian Railways Perspective", *Journal of Rail Transport Planning & Management,* Vol. 8, No'S. 3-4, pp. 184-206, 2018.

[31] Sinha, A., Soun, T., and Deb, K., "Using Karush-kuhn-tucker Proximity Measure for Solving Bilevel Optimization Problems", *Swarm and Evolutionary Computation,* Vol. 44, pp. 496-510, 2019.

[32] De Marchi, A. and Gerdts, M., "Free Finite Horizon LQR: A Bilevel Perspective and Its Application to Model Predictive Control", *Automatica,* Vol. 100, pp. 299-311, 2019.

[33] Zito, P., Salvo, G., and La Franca, L., "Modelling Airlines Competition on Fares and Frequencies of Service by Bi-level Optimization", *Procedia-Social and BehavioralSciences,* Vol. 20, pp. 1080-1089, 2011.

[34] Liu, W., Zheng, Z., and Cai, K., "Adaptive Path Planning for Unmanned Aerial Vehicles, Based on Bi-level Programming and Variable Planning Time Interval", *Chinese Journal of Aeronautics,* Vol. 26, No. 3, pp. 646-660, 2013.

[35] Mirshams, M., Naseh, H., Taei, H., and Fazeley, H., "Liquid Propellant Engine Conceptual Design by Using a Fuzzy-Multi-objective Genetic Algorithm (MOGA) Optimization Method", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering,* Vol. 228, No. 14, pp. 2587-2603, 2014.

[36] Fazeley, H., Taei, H., Naseh, H., and Mirshams, M., "A Multi-objective, Multidisciplinary Design Optimization Methodology for the Conceptual Design of a Spacecraft Bi-propellant Propulsion System", *Structural and Multidisciplinary Optimization,* Vol. 53, No. 1, pp. 145-160, 2016.

[37] Nik, A. Sadegh, M. Ansarifar, J., and Akhavizadegan, F., "Benders' Decomposition Algorithm to Solve Bi-level Bi-Objective Scheduling of Aircrafts and Gate Assignment Under Uncertainty", *Journal of Industrial and Systems Engineering,* Vol. 9, No. 3, pp. 111-126, 2016.

[38] Palagachev, K., "Mixed-Integer Optimal Control and Bilevel Optimization: Vanishing Constraints and Scheduling Tasks", Ph.D. Desertation, Aerospace Engineering, Bundeswehr University Munich, Institut für Mathematik und Rechneranwendung, Germany 2017.

[39] Sun, W., Tang, G., and Hauser, K., "Fast UAV Trajectory Optimization, Using Bilevel Optimization with Analytical Gradients", *CoRR,* 2018 ([Online]. Available: http://arxiv.org/abs/1811.10753).

[40] Piprek, P. and Holzapfel, F., "Robust Trajectory Optimization of Vtol Transition Maneuver, Using Bi-level Optimal Control", *The 31st Congress of the International Council og the Aeronautica Science*, Belo Horizonte, Brazil, 2018.

[41] Zhang, J., Jia, X., Hu, J., and Tan, K., "Satellite Multi-Vehicle Tracking under Inconsistent Detection Conditions by Bilevel K-Shortest Paths Optimization", *Digital Image Computing: Techniques and Applications (DICTA)*, Canberra, Australia, 2018.

[42] Sinha, S.K. Salsingikar, S., and SenGupta, S., "An Iterative Bi-level Hierarchical Approach for Train Scheduling", *Journal of Rail Transport Planning & Management,* Vol. 6, No. 3, pp. 183-199, 2016.

[43] Patriksson, M. and Rockafellar, R.T., "A Mathematical Model and Descent Algorithm for Bilevel Traffic Management", *Transportation Science,* Vol. 36, No. 3, pp. 271-291, 2002.

[44] Côté, J.-P., Marcotte, P., and Savard, G., "A Bilevel Modelling Approach to Pricing and Fare Optimisation in the Airline Industry", *Journal of Revenue and Pricing Management,* Vol. 2, No. 1, pp. 23-36, 2003.

[45] Chiong, R. and Dhakal, S., *Natural Intelligence for Scheduling, Planning and Packing Problems*, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2009.

[46] Carrasqueira, P., Alves, M.J., and Antunes, C.H. "Bi-level Particle Swarm Optimization and Evolutionary Algorithm Approaches for Residential Demand Response with Different User Profiles", *Information Sciences,* Vol. 418, pp. 405-420, 2017.

[47] Calvete, H.I., Galé, C., and Oliveros, M.-J., "Bilevel Model for Production–Distribution Planning Solved by Using Ant Colony Optimization", *Computers & Operations Research,*Vol. 38, No. 1, pp. 320-327, 2011.

[48] Legillon, F. Liefooghe, A., and Talbi, E.-G., "Cobra: A Cooperative Coevolutionary Algorithm for Bi-level Optimization", *IEEE Congress on Evolutionary Computation*, Brisbane, QLD, Australia, 2012.

[49] Fontaine, P., and Minner, S., "Benders Decomposition for Discrete–continuous Linear Bilevel Problems with Application to Traffic Network Design", *Transportation Research Part B: Methodological,* Vol. 70, pp. 163-172, 2014.

[50] Labbé, M., Marcotte, P., and Savard, G., "A Bilevel Model of Taxation and Its Application to Optimal Highway Pricing", *Management Science,* Vol. 44, No. 12-part-1, pp. 1608-1622, 1998.

[51] Lin, B., Wu, J., Wang, J., Duan, J., and Zhao, Y. "A Bi-level Programming Model for the Railway Express Cargo Service Network Design Problem", *Symmetry,* Vol. 10, No. 6, pp. 227, 2018.

[52] Alves, M.J. and Antunes, C.H., "A Semivectorial Bilevel Programming Approach to Optimize Electricity Dynamic Time-of-use Retailpricing", *Computers & Operations Research,* Vol. 92, pp. 130-144, 2018.

[53] Bard, J.F., *Practical Bilevel Optimization: Algorithms and Applications (Non-convex Optimization and Its Applications, No. 30)*, Springer, New Yourk, USA, 1998.

[54] Florian, M., and Chen, Y., "A Coordinate Descent Method for the Bi-level OD Matrix Adjustment Problem", *International Transactions in Operational Research,* Vol. 2, No. 2, pp. 165-179, 1995.

[55] Calvete, H.I., Gale, C., and Mateo, P.M., "A New Approach for Solving Linear Bilevel Problems, Using Genetic Algorithms", *European Journal of Operational Research,* Vol. 188, No. 1, pp. 14-28, 2008.

[56] Jiang, Y., Li, X., Huang, C., and Wu, X., "Application of Particle Swarm Optimization Based on CHKS Smoothing Function for Solving Non-linear Bilevel Programming Problem", *Applied Mathematics and Computation,* Vol. 219, No. 9, pp. 4332-4339, 2013.

[57] https://www.gams.com/latest/docs/UG_EMP_NBilevel.html.

[58] https://pyomo.readthedocs.io/en/stable/modeling_extensions/bilevel.html.

[59] Zhou, S., Zemkoho, A.B., and Tin, A., "BOLIB: Bilevel Optimization LIBrary of Test Problems", *arXiv preprint arXiv:1812.00230,* 2018.

[60] http://www.conopt.com.