

بررسی ارتعاش جانبی مته در فرایند سوراخ کاری بتن

عباس رهی*

استادیار دانشکده مهندسی مکانیک و انرژی، پردیس فنی و

مهندسی شهید عباسپور، دانشگاه شهید بهشتی

a_rahi@sbu.ac.ir

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۶/۲۲

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۲/۲۱

چکیده

مته‌ها در صنایع کاربردهای متعددی دارند. یکی از کاربردهای آنها در فرایند سوراخ کاری بتن (کرگیری یا مغزه‌گیری^۱) است که می‌توان آن را به صورت یک سیستم روتور-سراویز^۲ روتور-دیسک مدل‌سازی کرد. در این مقاله ارتعاش جانبی یک مته سوراخ کاری بتن، که به صورت یک سیستم سراویز-روتور-دیسک تحت تأثیر نیروی محوری مدل‌سازی شده است، مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای این منظور ابتدا معادلات حاکم بر ارتعاش جانبی سیستم و شرایط مرزی آن با استفاده از اصل همپلتون استخراج می‌شود. سپس معادلات حاکم با استفاده از روش مودهای فرضی حل شده و دو فرکانس طبیعی اول ارتعاش جانبی سیستم به روش تحلیلی محاسبه می‌شوند. در ادامه اثر تغییر پارامترهای اصلی سیستم همانند سرعت دورانی مته، قطر مته و مقدار نیروی محوری، بر مقدار فرکانس‌های طبیعی مورد مطالعه قرار می‌گیرد و نتایج به صورت نمودارهایی ارائه می‌شوند. نتایج حاصل نشان می‌دهد پارامترهای اصلی سیستم همانند طول مته، قطر مته، نیروی محوری و سرعت دورانی تأثیر قابل توجهی روی مقدار فرکانس طبیعی سیستم دارد. با توجه به اینکه فرکانس طبیعی سیستم به صورت نیمه تحلیلی استخراج شده است، نتایج می‌تواند مورد استفاده مهندسان طراح، برای بهینه‌سازی اینگونه سیستم‌ها قرار گیرد.

واژگان کلیدی: مته، سوراخ کاری بتن، روتور-سراویز، ارتعاشات جانبی، فرکانس طبیعی

۱. مقدمه

مته‌ها و به خصوص مته‌هایی که برای سوراخ کاری بتن به کار می‌روند از جمله سیستم‌های روتور-سراویز هستند که در صنعت کاربردهای فراوان و متعددی دارند. در این نوع سیستم‌ها روتور در یک طرف یاتاقان قرار می‌گیرد و طرف دیگر آن آزاد است. معمولاً در عملیات سوراخ کاری بتن (کرگیری)، در انتهای روتور یک دیسک نیز وجود دارد که

تصویرهای واقعی از آنها در شکل ۱ آمده است. این نوع سیستم‌ها، به عنوان سیستم سراویز روتور-دیسک شناخته می‌شوند که مطالعه فرکانس‌های طبیعی آنها از اهمیت بالایی برخوردار است.

عبدالعزیز و واکیس^۳ [۱]، ارتعاش و پاسخ دینامیکی یک روتور-سراویز با وجود یاتاقان معیوب را به روش عددی و تجربی مورد بررسی قرار دادند. آنها روتور-سراویز را به

صورت یک مدل پیوسته مدل‌سازی کردند و اثر ژيروسکوپي را نیز در نظر گرفتند. ادوسی و البدور^۴ [۲]، پاسخ دینامیکی و ارتعاش یک روتور سرآویز با وجود ترک را به روش تجربی مورد مطالعه قرار دادند. آنها اثر مشخصات ترک و بار جانبی را روی پاسخ دینامیکی یک روتور سرآویز مورد مطالعه قرار دادند. کین و همکاران^۵ [۳]، پاسخ دینامیکی غیرخطی یک روتور سرآویز در هنگام برخورد با جداره خارجی (استاتور) را بررسی کردند. آنها سیستم را به المان‌های ارتجاعی با تکیه‌گاه الاستیک، شافت و دیسک تقسیم کردند و سپس براساس روش ماتریس انتقال معادلات حاکم بر سیستم را استخراج کرده و آنها را به روش نیومارک حل کردند. آنها نشان دادند که افزایش سفتی تکیه‌گاه می‌تواند پاسخ سیستم را پراشوب کند. بیم و ریو^۶ [۴]، اثر مقدار گشتاور پیچشی را روی پایداری دینامیکی روتورهای سرآویز را به روش تحلیلی مطالعه کردند. آنها همچنین پارامترهای دیگری همچون میرایی خارجی، جرم محور و اثر ژيروسکوپي را در مطالعه خود مورد توجه قرار دادند و برای آنالیز سیستم از ماتریس انتقال استفاده کردند. آنها نشان دادند که پایداری سیستم به شدت به مود شکل و نسبت میرایی سیستم وابسته است. بین بیم و بیم^۷ [۵]، رفتار دینامیکی روتورهای سرآویز تحت اثر نیروهای محوری را با استفاده از روش ماتریس انتقال مورد بررسی قرار دادند. آنها ماتریس انتقال متعارف را برای در نظر گرفتن نیروی محوری بهبود دادند و سپس از یک برنامه کامپیوتری برای بررسی اثر نیروی محوری برای بررسی پایداری و فرکانس‌های طبیعی سیستم‌های روتور سرآویز استفاده کردند. نتایج تحقیق آنها نشان داد که اثر ژيروسکوپي و مقدار نیروی محوری اعمالی به روتور به شدت بر رفتار دینامیکی و پایداری سیستم شافت-دیسک تحت اثر نیروی محوری تأثیرگذار است.

زلی و همکاران^۸ [۶]، دینامیک غیرخطی مدل ساده شده دو درجه آزادی یک سیستم روتور سرآویز تحت تأثیر

برخورد جانبی با استاتور را مطالعه کردند. مرادی تیاکی و همکاران^۹ [۷]، ارتعاش اجباری روتورهای سرآویز با دیسک نابالانس را مورد بررسی قرار دادند. آنها روتور را به صورت یکسر گیردار ارتجاعی و دیسک را صلب فرض کردند. آنها نشان دادند که تغییر شکل اولیه استاتیکی شافت ناشی از گرانش، مودهای پیشرو^{۱۰} را تحریک می‌کند. فو و همکاران^{۱۱} [۸]، پاسخ دینامیکی یک روتور سرآویز با عدم قطعیت در خارج از مرکزی را مطالعه کردند. آنها از روش المان‌های محدود برای مدل‌سازی و استخراج نتایج استفاده کردند. نتایج آنها نشان داد که عدم قطعیت و انحراف از مرکز روتور اثرات قابل توجهی بر رفتار دینامیکی سیستم روتور دارد و می‌تواند منجر به نوسانات زیادی در پاسخ‌های دینامیکی سیستم شود. شیپاتو و همکاران^{۱۲} [۹]، اثر اصطکاک بین روتور و استاتور را روی دینامیک غیرخطی یک روتور سرآویز مطالعه کردند. آنها برای این منظور از یک مدل دو درجه آزادی با در نظر گرفتن اثر برخورد روتور با استاتور استفاده نموده و پس از استخراج معادلات حاکم، آنها را بدون بعد کردند. همچنین شیپاتو و همکاران [۱۰]، اثر گرانش در یک موتور جت هوایی را روی ارتعاش و دینامیک غیرخطی یک روتور سرآویز مورد بررسی قرار دادند. آنها برای این منظور از یک مدل دو درجه آزادی با پارامترهای متمرکز استفاده کردند و از اثر اصطکاک در هنگام تماس روتور با استاتور صرف نظر نمودند. آنها نشان دادند که رفتار و پاسخ سیستم در حالت بدون گرانش و در حالت با در نظر گرفتن گرانش، با یکدیگر متفاوت است. نومانوی و جیرافون^{۱۳} [۱۱]، کاهش ارتعاش در جهت‌های جانبی یک سیستم سرآویز را با استفاده از کنترل کننده‌های مختلف مورد مطالعه قرار دادند. آنها برای این منظور از یک یاتاقان مغناطیسی فعال استفاده کردند. مرادی تیاکی و همکاران [۱۲]، ارتعاش آزاد غیرخطی یک شافت انعطاف‌پذیر دارای یک دیسک در انتهای آزاد آن (روتور سرآویز) را مورد بررسی قرار دادند. آنها از تئوری ریلی

طبیعی سیستم مورد مطالعه قرار می‌گیرد و نتایج به صورت نمودارهایی ارائه می‌شوند. نتایج تحلیلی حاصل می‌تواند محققان و مهندسان را برای طراحی بهینه سیستم یاری نماید.

۲. مدل‌سازی و استخراج معادلات حاکم

تصویرهای واقعی از یک مته سوراخ‌کاری بتن (کر گیری) در شکل ۱ آمده است. همچنین شماتیکی از مدل‌سازی مته سوراخ‌کاری بتن به صورت یک سیستم سرآویز روتور-دیسک تحت اثر نیروی محوری در شکل ۲ نشان داده شده است. روتور دارای شعاع R ، طول L ، جرم حجمی ρ ، سطح مقطع A ، ممان دوم سطح مقطع عرضی I است. فرض می‌شود که دیسک صلب بوده و دارای جرم M_d ، و شعاع R_d ، و ممان دوم جرمی I_d است. مطابق شکل ۲ روتور تحت اثر نیرو محوری ثابت P قرار دارد و با سرعت زاویه‌ای ثابت Ω می‌چرخد.

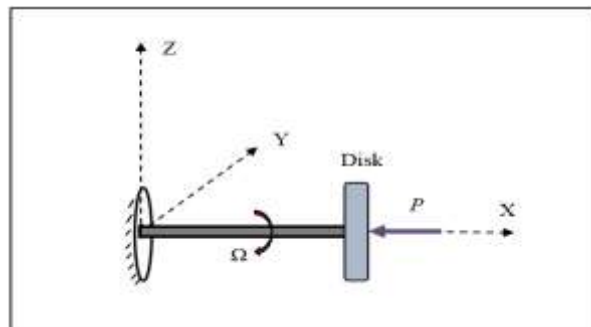
استفاده کردند و ارتعاش سیستم را در دو حالت وجود و یا عدم وجود جاذبه (روتورهای افقی و عمودی) مورد مطالعه قرار دادند.

در این پژوهش رفتار ارتعاش جانبی یک مته سوراخ‌کاری بتن مورد مطالعه قرار می‌گیرد. برای این منظور مته به صورت یک روتور سرآویز با یک دیسک صلب در انتهای آن و تحت اثر نیروی محوری مدل‌سازی می‌شود. ابتدا انرژی پتانسیل کرنشی و انرژی جنبشی سیستم استخراج شده و سپس معادلات حاکم بر ارتعاش جانبی سیستم و شرایط مرزی آن با استفاده از اصل همپلتون استخراج می‌شود.

در ادامه معادلات حاکم به روش مودهای فرضی حل شده و به این ترتیب دو فرکانس طبیعی اول ارتعاش جانبی سیستم به روش تحلیلی محاسبه می‌شوند. در انتها نیز اثر تغییر پارامترهای اصلی سیستم همانند سرعت دورانی مته، مقدار نیروی محوری و قطر مته، بر مقدار فرکانس‌های



شکل ۱. تصویرهایی واقعی از مته سوراخ‌کاری بتن (کر گیری) [۱۳ و ۱۴]



شکل ۲. نمایی از مدل‌سازی مته سوراخ‌کاری بتن به صورت یک سیستم روتور سرآویز روتور-دیسک تحت اثر نیرو محوری P

$$u_1 = u(x, t) - y \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} - z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \quad (4)$$

$$u_2 = v(x, t)$$

$$u_3 = w(x, t)$$

که در آن $u(x, t)$ تغییر شکل محوری، $v(x, t)$ و $w(x, t)$ تغییر شکل‌های جانبی محور خنثی روتور بر حسب x و زمان است.

با استفاده از روابط ۲ و ۳، مؤلفه غیر صفر تانسور کرنش به صورت رابطه ۵ نوشته می‌شود:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (5)$$

همچنین مؤلفه غیر صفر تانسور تنش را می‌توان به صورت رابطه ۶ استخراج کرد:

$$\sigma_{xx} = E \left(\frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (6)$$

مقدار انرژی کرنشی سیستم با استفاده از رابطه‌های ۱ الی ۶، برای یک روتور یکنواخت تحت اثر نیروی محوری به صورت رابطه ۷ محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}) dV \\ &- \frac{1}{2} \int_0^L P \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \left\{ [Ey^2] \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + [Ez^2] \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right. \\ &- \left. \frac{1}{2} \int_0^L P \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx \right\} dA dx \quad (7) \end{aligned}$$

انرژی پتانسیل کرنشی روتور تحت اثر نیروی محوری P با فرض تغییر شکل الاستیک خطی و ایزوتروپیک را می‌توان از رابطه ۱ محاسبه کرد [۵]:

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}) dV \\ &- \frac{1}{2} \int_0^L P \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (1) \end{aligned}$$

که در آن ε_{ij} مؤلفه‌های تانسور کرنش و σ_{ij} مؤلفه‌های تانسور تنش، u تغییر شکل محوری، v و w تغییر شکل‌های جانبی محور خنثی روتور و V حجم کل روتور الاستیک است. باید توجه کرد که در شکل ۲ نیروی محوری وارد به روتور به صورت فشاری در نظر گرفته شده است. مؤلفه‌های تانسور کرنش و مؤلفه‌های تانسور تنش کوشی یا واقعی را می‌توان به صورت رابطه ۲ بیان کرد.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$$

که در آن u_i مؤلفه بردار تغییر شکل الاستیک در جهت‌های اصلی x ، y و z ، $u_{i,j}$ مشتق مؤلفه‌های تغییر شکل نسبت به جهت‌های اصلی x ، y و z بوده و همچنین λ و μ نیز ثابت‌های لامه هستند و مطابق رابطه ۳ داریم:

$$\lambda = \frac{\vartheta E}{(1 + \vartheta)(1 - 2\vartheta)} \quad (3)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \vartheta)}$$

که در آن ϑ ضریب پواسون و E مدول یانگ^{۱۴} است. اگر u_1 ، u_2 و u_3 به ترتیب مؤلفه‌های بردار تغییر شکل در جهت‌های x ، y و z برای همه المان‌های روتور باشند، با فرض تئوری تیر اولر برنولی در رابطه ۴ داریم:

رابطه فوق را می‌توان به صورت رابطه ۸ بازنویسی کرد. دقت نمایید که نیروی محوری به صورت نیروی فشاری در نظر گرفته شده است):

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ EI_r \left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right] + EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - P \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} dx \quad (8)$$

که در آن مقدار I_r برای یک روتور یکنواخت با شعاع R به صورتی که در رابطه ۹ آمده است، محاسبه می‌شود:

$$I_r = \int_A z^2 dA = \int_A y^2 dA = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{AR^2}{4} \quad (9)$$

همچنین انرژی جنبشی سیستم سرآویز روتور-دیسک را نیز می‌توان از رابطه ۱۰ محاسبه کرد:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ [\rho A + M_d \delta(x-L)] (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) + [\rho I_r + I_d \delta(x-L)] \left[\left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{v}}{\partial x} \right)^2 \right] + \rho A \Omega^2 (v^2 + w^2) + 2\Omega (\rho A + M_d \delta(x-L)) (v\dot{w} - w\dot{v}) \right\} dx + (\rho I_r L + I_{dp}) \Omega^2 \quad (10)$$

که در آن T انرژی جنبشی سیستم، π انرژی پتانسیل کرنشی سیستم، و W کار انجام شده توسط سایر نیروهای خارجی غیر پایستار سیستم است.

که در آن $\delta(x)$ تابع دلتای دیراک، و Ω سرعت زاویه‌ای روتور است و مطابق رابطه ۱۱ داریم:

$$I_d = \frac{M_d R_d^2}{4} \quad (11)$$

$$I_{dp} = \frac{M_d R_d^2}{2}$$

با جای‌گذاری روابط ۸ و ۱۰ در رابطه ۱۲ و ساده‌سازی آن، روابط ۱۳ و ۱۴ حاصل می‌شود:

که در آن R_d شعاع و M_d جرم دیسک صلب نازک است. برای استخراج معادلات حاکم بر سیستم می‌توان از اصل همپلتون به صورت رابطه ۱۲ استفاده کرد:

$$EI_r \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + [\rho A + M_d \delta(x-L)] (\ddot{v} - 2\Omega \dot{w} - \Omega^2 v) - \rho I_r \frac{\partial^2 \ddot{v}}{\partial x^2} - I_d \left\{ \frac{\partial [\delta(x-L)]}{\partial x} \frac{\partial \ddot{v}}{\partial x} + \delta(x-L) \frac{\partial^2 \ddot{v}}{\partial x^2} \right\} = 0 \quad (13)$$

$$EI_r \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + [\rho A + M_d \delta(x-L)] (\ddot{w} + 2\Omega \dot{v} - \Omega^2 w) - \rho I_r \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial x^2} - I_d \left\{ \frac{\partial [\delta(x-L)]}{\partial x} \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} + \delta(x-L) \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial x^2} \right\} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} (L^+, t) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (L^+, t) = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} (L^+, t) = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} (L^+, t) = 0$$

که در آن طول مجازی L^+ اندکی بزرگ‌تر از طول واقعی روتور (طول مجازی روتور اندکی بعد از دیسک صلب

معادله‌های ۱۳ و ۱۴ معادلات حاکم بر ارتعاش جانبی سیستم را نشان می‌دهد و همچنین شرایط مرزی سیستم نیز به صورت روابط ۱۵ و ۱۶ استخراج می‌شود:

$$v(0, t) = w(0, t) = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} (0, t) = \frac{\partial w}{\partial x} (0, t) = 0 \quad (15)$$

$$v(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m(x) V_m(t), \quad (17)$$

$$w(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m(x) W_m(t)$$

$$\psi_m(x) = 1 - \cos\left(\frac{m\pi x}{2L}\right) \quad (18)$$

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

با جای‌گذاری رابطه‌های ۱۷ و ۱۸ در معادلات ۱۳ و ۱۴ و ضرب طرفین آن در مدهای اورتوگونال (عمودی) $\psi_n(x)$ (که در آن n یک عدد طبیعی است)، و انتگرال‌گیری در طول روتور، رابطه‌های ۱۹ و ۲۰ را خواهیم داشت:

$$\int_0^L \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[EI_r \left(\frac{m\pi}{2L}\right)^4 V_m + -P \left(\frac{m\pi}{2L}\right)^2 V_m + pI_r \left(\frac{m\pi}{2L}\right)^2 \dot{V}_m \right] \cos\left(\frac{m\pi x}{2L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{2L}\right) + [\rho A + M_d \delta(x-L)] (\dot{V}_m - 2\Omega \dot{W}_m - \Omega^2 V_m) \left(1 - \cos\left(\frac{m\pi x}{2L}\right)\right) \left(1 - \cos\left(\frac{m\pi x}{2L}\right)\right) + I_d \left[\frac{\partial \delta(x-L)}{\partial x} \left(\frac{m\pi}{2L}\right) \dot{V}_m\right] \sin\left(\frac{m\pi x}{2L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{2L}\right) + I_d \left[\delta(x-L) \left(\frac{m\pi}{2L}\right)^2 \dot{V}_m\right] \cos\left(\frac{m\pi x}{2L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) \right\} dx = 0 \quad (19)$$

$$\int_0^L \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[EI_r \left(\frac{m\pi}{2L}\right)^4 W_m - P \left(\frac{m\pi}{2L}\right)^2 W_m + \rho I_r \left(\frac{m\pi}{2L}\right)^2 \ddot{W}_m \right] \cos\left(\frac{m\pi x}{2L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) + [\rho A + M_d \delta(x-L)] (\ddot{W}_m - 2\Omega \dot{V}_m - \Omega^2 V_m) \left(1 - \cos\left(\frac{m\pi x}{2L}\right)\right) \left(1 - \cos\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)\right) + I_d \left[\frac{\partial \delta(x-L)}{\partial x} \left(\frac{m\pi}{2L}\right) \ddot{W}_m\right] \sin\left(\frac{m\pi x}{2L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) + I_d \left[\delta(x-L) \left(\frac{m\pi}{2L}\right)^2 \ddot{W}_m\right] \cos\left(\frac{m\pi x}{2L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) \right\} dx = 0 \quad (20)$$

۲۲ حاصل می‌شوند:

نازک) است. لازم به ذکر است که در این تحقیق ارتعاش طولی روتور بررسی نشده است چرا که مقدار ارتعاش طولی روتور در مقابل ارتعاش جانبی آن قابل صرف نظر کردن است.

۳. حل تحلیلی معادلات حاکم

در این بخش معادلات حاکم بر ارتعاش عرضی مته سوراخ‌کاری بتن، با استفاده از روش موده‌های فرضی حل می‌شوند. برای این منظور تغییر شکل جانبی $v(x, t)$ و $w(x, t)$ به صورت روابط ۱۷ در نظر گرفته می‌شود، که در آن ψ_m تابع شکل است که باید شرایط مرزی هندسی سیستم را ارضاء کند و $V_m(t)$ و $W_m(t)$ توابعی از زمان هستند. تابع شکل به صورت رابطه ۱۸ در نظر گرفته می‌شود.

با انتگرال‌گیری و ساده‌سازی روابط فوق رابطه‌های ۲۱ و

$$\begin{aligned}
 & \frac{L}{2} \left[EI_r \left(\frac{n\pi}{2L} \right)^4 V_n - P \left(\frac{n\pi}{2L} \right)^2 V_n + pl_r \left(\frac{n\pi}{2L} \right)^2 \ddot{V}_n \right] \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} \rho AL [\ddot{V}_m - 2\Omega \dot{W}_m - \Omega^2 V_m] \\
 & - \sum_{m=1}^{\infty} \rho A [\ddot{V}_m - 2\Omega \dot{W}_m - \Omega^2 V_m] \left(\frac{2L}{n\pi} \right) \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) - \sum_{m=1}^{\infty} \rho A [\ddot{V}_m - 2\Omega \dot{W}_m \\
 & - \Omega^2 V_m] \left(\frac{2L}{m\pi} \right) \sin \left(\frac{m\pi}{2} \right) + \frac{\rho AL}{2} [\ddot{V}_n - 2\Omega \dot{W}_n - \Omega^2 V_n] \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} M_d [\ddot{V}_m - 2\Omega \dot{W}_m - \Omega^2 V_m] \\
 & - \sum_{m=1}^{\infty} M_d [\ddot{V}_m - 2\Omega \dot{W}_m - \Omega^2 V_m] \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) \\
 & - \sum_{m=1}^{\infty} M_d [\ddot{V}_m - 2\Omega \dot{W}_m - \Omega^2 V_m] \cos \left(\frac{m\pi}{2} \right) \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} M_d [\ddot{V}_m - 2\Omega \dot{W}_m - \Omega^2 V_m] \cos \left(\frac{m\pi}{2} \right) \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} I_d \left[\left(\frac{m\pi}{2L} \right) \sin \left(\frac{m\pi}{2} \right) \ddot{V}_m \right] \left(\frac{n\pi}{2L} \right) \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{L}{2} \left[EI_r \left(\frac{n\pi}{2L} \right)^4 W_n - P \left(\frac{n\pi}{2L} \right)^2 W_n + \rho I_r \left(\frac{n\pi}{2L} \right)^2 \ddot{W}_n \right] + \sum_{m=1}^{\infty} \rho AL [\ddot{W}_m + 2\Omega \dot{V}_m - \Omega^2 W_m] \\
 & - \sum_{m=1}^{\infty} \rho A [\ddot{W}_m + 2\Omega \dot{V}_m - \Omega^2 W_m] \left(\frac{2L}{n\pi} \right) \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) \\
 & - \sum_{m=1}^{\infty} \rho A [\ddot{W}_m + 2\Omega \dot{V}_m - \Omega^2 W_m] \left(\frac{2L}{m\pi} \right) \sin \left(\frac{m\pi}{2} \right) \\
 & + \frac{\rho AL}{2} [\ddot{W}_n + 2\Omega \dot{V}_n - \Omega^2 W_n] + \sum_{m=1}^{\infty} M_d [\ddot{W}_m + 2\Omega \dot{V}_m - \Omega^2 W_m] \\
 & - \sum_{m=1}^{\infty} M_d [\ddot{W}_n + 2\Omega \dot{V}_n - \Omega^2 W_n] \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) \\
 & - \sum_{m=1}^{\infty} M_d [\ddot{W}_m + 2\Omega \dot{V}_m - \Omega^2 W_m] \cos \left(\frac{m\pi}{2} \right) \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} M_d [\ddot{W}_m + 2\Omega \dot{V}_m - \Omega^2 W_m] \cos \left(\frac{m\pi}{2} \right) \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} I_d \left[\left(\frac{m\pi}{2L} \right) \sin \left(\frac{m\pi}{2} \right) \ddot{W}_m \right] \left(\frac{n\pi}{2L} \right) \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{22}$$

که در آن \tilde{W}_n و \tilde{V}_n مقادیر ثابت هستند و ω فرکانس زاویه ای، و $i = \sqrt{-1}$ عدد مختلط است. با جایگذاری معادله ۲۳ در معادلات ۲۱ و ۲۲، روابط ۲۴ و ۲۵ حاصل می شوند:

که در آن $n = 1, 2, 3, \dots$ است. برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی سیستم، تابع‌های $V_n(t)$ و $W_n(t)$ را به صورت رابطه ۲۳ در نظر می‌گیریم:

$$\begin{Bmatrix} V_n(t) \\ W_n(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{V}_n \\ \tilde{W}_n \end{Bmatrix} e^{i\omega t} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & \frac{L}{2} \left[EI_r \left(\frac{n\pi}{2L} \right)^4 \tilde{V}_n - P \left(\frac{n\pi}{2L} \right)^2 \tilde{V}_n - \rho I_r \left(\frac{n\pi}{2L} \right)^2 \omega^2 \tilde{V}_n \right] \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \rho AL [-\omega^2 \tilde{V}_m - 2\Omega i \omega \tilde{W}_m - \Omega^2 \tilde{V}_m] \\ & - \sum_{m=1}^{\infty} \rho A [-\omega^2 \tilde{V}_m - 2\Omega i \omega \tilde{W}_m - \Omega^2 \tilde{V}_m] \left(\frac{2L}{n\pi} \right) \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) \\ & - \sum_{m=1}^{\infty} \rho A [-\omega^2 \tilde{V}_m - 2\Omega i \omega \tilde{W}_m - \Omega^2 \tilde{V}_m] \left(\frac{2L}{m\pi} \right) \sin \left(\frac{m\pi}{2} \right) \\ & + \frac{\rho AL}{2} [-\omega^2 \tilde{V}_n - 2\Omega i \omega \tilde{W}_n - \Omega^2 \tilde{V}_n] \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} M_d [-\omega^2 \tilde{V}_m - 2\Omega i \omega \tilde{W}_m - \Omega^2 \tilde{V}_m] \\ & - \sum_{m=1}^{\infty} M_d [-\omega^2 \tilde{V}_m - 2\Omega i \omega \tilde{W}_m - \Omega^2 \tilde{V}_m] \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) \\ & - \sum_{m=1}^{\infty} M_d [-\omega^2 \tilde{V}_m - 2\Omega i \omega \tilde{W}_m - \Omega^2 \tilde{V}_m] \cos \left(\frac{m\pi}{2} \right) \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} M_d [-\omega^2 \tilde{V}_m - 2\Omega i \omega \tilde{W}_m - \Omega^2 \tilde{V}_m] \cos \left(\frac{m\pi}{2} \right) \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) \\ & - \sum_{m=1}^{\infty} I_d \left[\left(\frac{m\pi}{2L} \right) \sin \left(\frac{m\pi}{2} \right) \omega^2 \tilde{V}_m \right] \left(\frac{n\pi}{2L} \right) \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{L}{2} \left[EI_r \left(\frac{n\pi}{2L} \right)^4 \tilde{W}_n - P \left(\frac{n\pi}{2L} \right)^2 \tilde{W}_n - \rho I_r \left(\frac{n\pi}{2L} \right)^2 \omega^2 \tilde{W}_n \right] \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} \rho AL [-\omega^2 \tilde{W}_m + 2\Omega i \omega \tilde{V}_m - \Omega^2 \tilde{W}_m] \\
 & - \sum_{m=1}^{\infty} \rho A [-\omega^2 \tilde{W}_m + 2\Omega i \omega \tilde{V}_m - \Omega^2 \tilde{W}_m] \left(\frac{2L}{n\pi} \right) \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) \\
 & - \sum_{m=1}^{\infty} \rho A [-\omega^2 \tilde{W}_m + 2\Omega i \omega \tilde{V}_m - \Omega^2 \tilde{W}_m] \left(\frac{2L}{m\pi} \right) \sin \left(\frac{m\pi}{2} \right) \\
 & + \frac{\rho AL}{2} [-\omega^2 \tilde{W}_n + 2\Omega i \omega \tilde{V}_n - \Omega^2 \tilde{W}_n] \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} M_d [-\omega^2 \tilde{W}_m + 2\Omega i \omega \tilde{V}_m - \Omega^2 \tilde{W}_m] \\
 & - \sum_{m=1}^{\infty} M_d [-\omega^2 \tilde{W}_m + 2\Omega i \omega \tilde{V}_m - \Omega^2 \tilde{W}_m] \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) \\
 & - \sum_{m=1}^{\infty} M_d [-\omega^2 \tilde{W}_m + 2\Omega i \omega \tilde{V}_m - \Omega^2 \tilde{W}_m] \cos \left(\frac{m\pi}{2} \right) \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} M_d [-\omega^2 \tilde{W}_m + 2\Omega i \omega \tilde{V}_m - \Omega^2 \tilde{W}_m] \cos \left(\frac{m\pi}{2} \right) \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) \\
 & - \sum_{m=1}^{\infty} I_d \left[\left(\frac{m\pi}{2L} \right) \sin \left(\frac{m\pi}{2} \right) \omega^2 \tilde{W}_m \right] \left(\frac{n\pi}{2L} \right) \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{V}_n \\ \tilde{W}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{26}$$

با توجه به روابط فوق برای دو فرکانس طبیعی اول سیستم
 ($n = 2$ و $n = 1$) به رابطه ۲۶ خواهیم رسید

که در آن:

$$\begin{aligned}
 A_{11} = A_{22} = & \left\{ \left[\frac{EI_r L}{2} \left(\frac{n\pi}{2L} \right)^4 - \frac{PL}{2} \left(\frac{n\pi}{2L} \right)^2 \right] + \rho AL \Omega^2 \left[-1.5 + 2 \left(\frac{2}{n\pi} \right) \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right] \right. \\
 & + M_d \Omega^2 \left[-1 + 2 \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) - \cos^2 \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right] \left. \right\} \\
 & + \left\{ -\frac{\rho I_r L}{2} \left(\frac{n\pi}{2L} \right)^2 + \rho AL \left[-1.5 + \left(\frac{4}{n\pi} \right) \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right] \right. \\
 & + M_d \left[-1 + 2 \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) - \cos^2 \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right] - I_d \left[\left(\frac{n\pi}{2L} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right] \left. \right\} \omega^2
 \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
 A_{12} = -A_{21} = & \left\{ \rho AL \left[-3 + 4 \left(\frac{2}{n\pi} \right) \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right] \right. \\
 & + M_d \left[-2 + 4 \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) - 2 \cos^2 \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right] \left. \right\} i \Omega \omega
 \end{aligned} \tag{28}$$

با جایگذاری روابط ۲۷ و ۲۸ در رابطه ۲۹ و مرتب‌سازی آن به رابطه ۳۰ می‌رسیم:

$$Y_1^2 \omega^4 - Y_2 \omega^2 + Y_3^2 = 0 \quad (30)$$

که در آن:

$$Y_1 = \left[-\frac{\rho I_r L}{2} \left(\frac{n\pi}{2L} \right)^2 \right] + \rho AL \left[-1.5 + \left(\frac{4}{n\pi} \right) \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right] + M_d \left[-1 + 2 \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) - \cos^2 \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right] - I_d \left[\left(\frac{n\pi}{2L} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right]$$

$$Y_2 = D_3^2 \Omega^2 - 2Y_1 Y_3$$

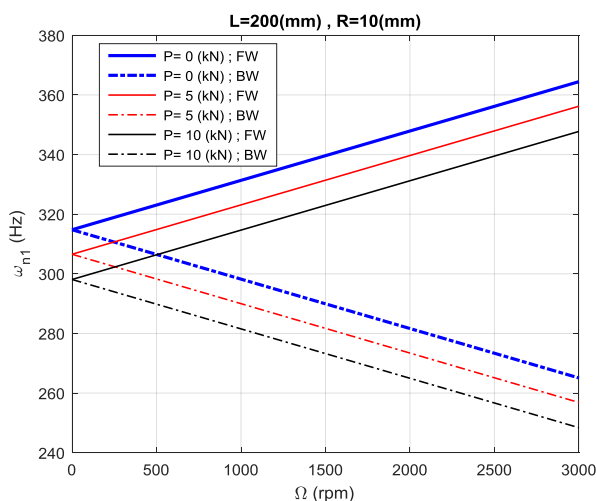
$$Y_3 = D_1 + D_2 \Omega^2$$

$$D_1 = \left[\frac{EI_r L}{2} \left(\frac{n\pi}{2L} \right)^4 - \frac{PL}{2} \left(\frac{n\pi}{2L} \right)^2 \right]$$

$$D_2 = \rho AL \left[-1.5 + 2 \left(\frac{2}{n\pi} \right) \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right] + M_d \left[-1 + 2 \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) - \cos^2 \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right]$$

$$D_3 = \rho AL \left[-3 + 4 \left(\frac{2}{n\pi} \right) \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right] + M_d \left[-2 + 4 \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) - 2 \cos^2 \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right]$$

۲۰۰ گیگاپاسکال، ضریب پواسون ۰/۳، جرم حجمی ۷۸۵۰ کیلوگرم بر مترمکعب، شعاع دیسک ۳۰ میلی‌متر، جرم دیسک ۴۰ گرم، استفاده می‌شود.



شکل ۳. تغییرات فرکانس طبیعی اول سیستم بر حسب سرعت دورانی روتور برای مقادیر مختلف نیروی محوری

برای داشتن جواب‌های غیر صفر برای \vec{W}_n و \vec{V}_n در معادله ۲۶ بایستی دترمینان ضرایب آن صفر باشد.

$$A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 0 \quad (29)$$

(۳۱)

پس در نهایت، مقدار فرکانس‌های طبیعی اول و دوم پیشرو^{۱۵} (FW) و پسرو^{۱۶} (BW) سیستم را می‌توان با استفاده از معادله ۳۰، و ساده‌سازی آن، از رابطه زیر محاسبه کرد:

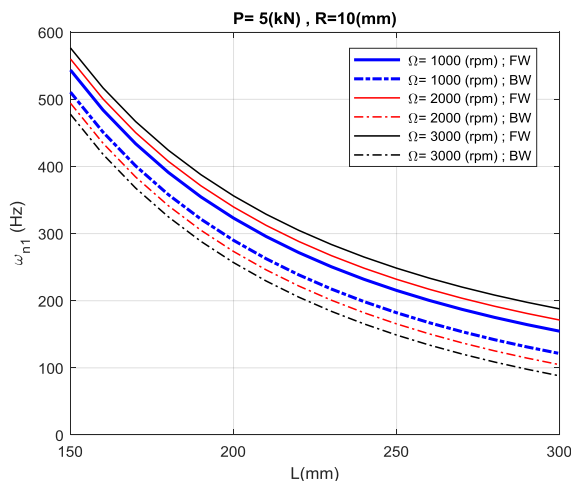
$$\omega_n^{FW}, \omega_n^{BW} = \pm \left[\frac{D_3^2}{(2Y_1)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \Omega + \left[\frac{(D_3^2 - 4Y_1 D_2) \Omega^2 - 4Y_1 D_1}{(2Y_1)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (32)$$

for $n = 1, 2$

۴. ارایه نتایج

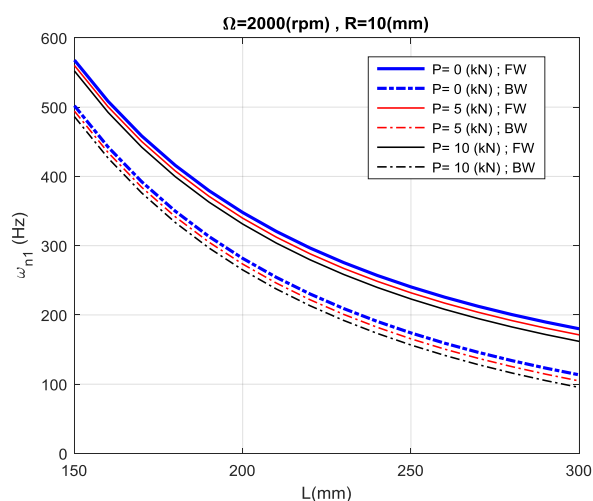
برای شبیه‌سازی عددی و استخراج فرکانس‌های طبیعی سیستم از رابطه ۳۲، از مقادیر نامی عددی، شعاع روتور ۱۰ میلی‌متر، طول روتور ۲۰۰ میلی‌متر، مدول یانگ روتور

می‌دهد که با افزایش مقدار نیروی فشاری محوری، مقدار فرکانس‌های طبیعی اول و دوم سیستم نیز کاهش می‌یابند. این تغییرات برای حالت فرکانس طبیعی اول مشهودتر است.



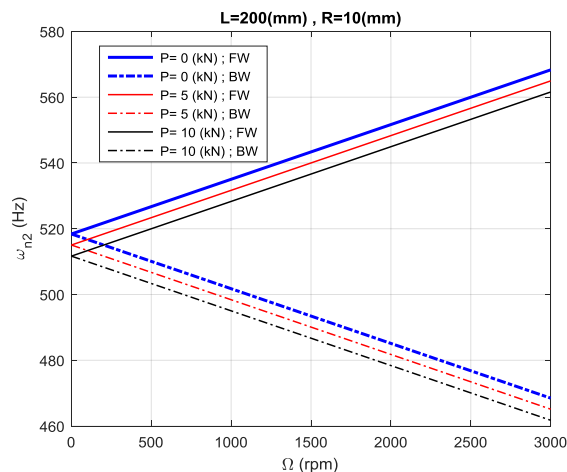
شکل ۵. تغییرات فرکانس طبیعی اول سیستم بر حسب طول روتور برای مقادیر مختلف سرعت دورانی روتور

روتور برابر ۵ کیلونیوتن (ثابت و به صورت نیروی فشاری) در نظر گرفته شده است. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش طول روتور مقدار فرکانس طبیعی سیستم نیز به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد.



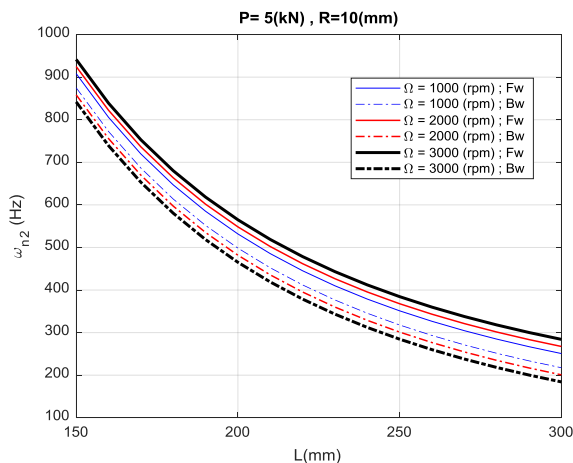
شکل ۷. تغییرات فرکانس طبیعی اول سیستم بر حسب طول روتور برای مقادیر مختلف نیروی محوری

تغییرات فرکانس طبیعی اول و دوم سیستم برای دو حالت پیشرو و پسرو، بر حسب سرعت دورانی روتور و همچنین برای مقادیر مختلف نیروی محوری، به ترتیب در شکل‌های ۳ و ۴ نمایش داده شده است. نتایج نشان

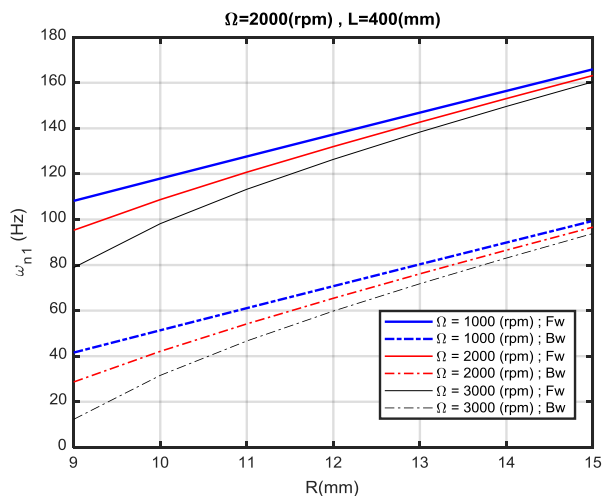


شکل ۴. تغییرات فرکانس طبیعی دوم سیستم بر حسب سرعت دورانی روتور برای مقادیر مختلف نیروی محوری

همچنین تغییرات فرکانس طبیعی اول و دوم سیستم بر حسب طول روتور برای دو حالت فرکانس طبیعی پیشرو و پسرو و برای مقادیر مختلف سرعت دورانی روتور در شکل‌های ۵ و ۶ آمده است. در این حالت نیروی محوری



شکل ۶. تغییرات فرکانس طبیعی دوم سیستم بر حسب طول روتور برای مقادیر مختلف سرعت دورانی روتور



شکل ۹. تغییرات فرکانس طبیعی اول سیستم بر حسب شعاع روتور برای مقادیر مختلف سرعت دورانی روتور

۵. اعتبارسنجی نتایج

در حالت خاص برای سرعت دورانی صفر با استفاده از معادله ۳۲ می‌توان مقدار بار بحرانی محوری را به دست آورد. بدین منظور باید اولین فرکانس طبیعی سیستم برای سرعت دورانی صفر، برابر صفر باشد تا کمانش رخ دهد. لذا در این حالت خاص از معادله ۳۲ به رابطه ۳۳ می‌رسیم:

$$D_1 = \left[\frac{EI_r L}{2} \left(\frac{\pi}{2L} \right)^4 - \frac{PL}{2} \left(\frac{\pi}{2L} \right)^2 \right] = 0 \quad (33)$$

بنابراین بار محوری بحرانی P_{Cr} از رابطه فوق به صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$P_{Cr} = \frac{EI_r \pi^2}{(2L)^2} \quad (34)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود مقدار بار محوری محاسبه شده فوق، برای کمانش یک تیر یکسر گیردار با آنچه که در مراجع معتبر ارائه شده‌اند، یکسان است.

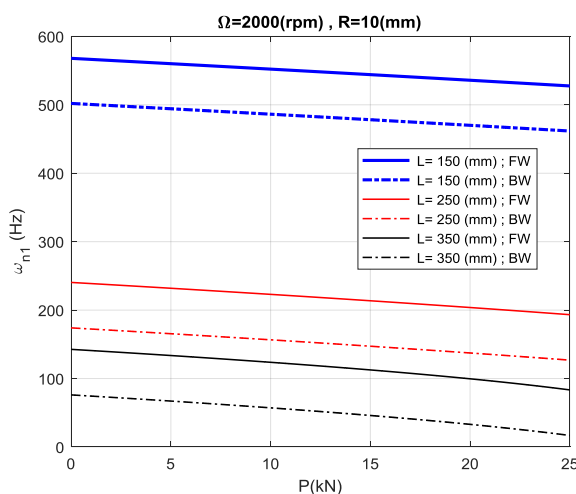
۶. جمع بندی

در این مقاله رفتار ارتعاش جانبی یک مته سوراخ‌کاری بتن مورد مطالعه قرار گرفت. برای این منظور مته سوراخ‌کاری بتن به صورت یک سیستم سرآویز روتور-دیسک تحت اثر

تغییرات فرکانس طبیعی اول سیستم بر حسب طول روتور برای دو حالت فرکانس پیشرو و پسرو و برای مقادیر مختلف نیروی محوری در شکل ۷ آمده است. در این حالت سرعت دورانی روتور برابر ۲۰۰۰ دور بر دقیقه در نظر گرفته شده است. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش طول روتور مقدار فرکانس طبیعی سیستم نیز به‌طور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد ولی حساسیت کمتری نسبت به تغییرات مقدار نیروی محوری دارد.

تغییرات فرکانس طبیعی اول سیستم بر حسب مقدار نیروی محوری برای دو حالت فرکانس طبیعی پیشرو و پسرو و برای مقدار طول‌های مختلف روتور در شکل ۸ ترسیم شده است. نتایج نشان می‌دهد که افزایش طول روتور، مقدار فرکانس طبیعی سیستم را به مقدار قابل توجهی کاهش می‌دهد.

همچنین تغییرات فرکانس طبیعی اول سیستم بر حسب شعاع روتور برای مقادیر مختلف سرعت دورانی روتور در شکل ۹ ارائه شده است. نتایج به‌دست آمده در شکل ۹ نشان نیز می‌دهد که افزایش مقدار شعاع روتور، فرکانس طبیعی اول سیستم را افزایش می‌دهد.



شکل ۸. تغییرات فرکانس طبیعی اول سیستم بر حسب نیروی محوری برای مقدار طول‌های مختلف روتور

مطالعه گردیده و نتایج به صورت نمودارهایی ارائه شد. نتایج نشان می‌دهند که مقدار طول و قطر روتور، سرعت دورانی و نیروی محوری تأثیر قابل ملاحظه‌ای بر فرکانس‌های طبیعی ارتعاش جانبی سیستم دارد. محققان و مهندسان طراح می‌توانند از نتایج تحلیلی حاصل برای بهینه‌سازی سیستم استفاده نمایند.

نیروی محوری مدل‌سازی شد. پس از مدل‌سازی، معادلات حاکم بر ارتعاش جانبی و همچنین شرایط مرزی سیستم با استفاده از اصل همیتون استخراج گردید. سپس با استفاده از روش مودهای فرضی، فرکانس‌های طبیعی اول و دوم سیستم برای دو حالت پیشرو و پسرو، به روش تحلیلی استخراج شد. در ادامه تأثیر تغییر پارامترهای اصلی سیستم بر روی مقدار فرکانس‌های طبیعی اول و دوم سیستم

۷. مأخذ

- [1] Azeez, Mohammed F. Abdul, and Alexander F. Vakakis, "Numerical and experimental analysis of a continuous overhung rotor undergoing vibro-impacts", *International journal of non-linear mechanics*, 1999, Vol.34, no.3, pp.415-435.
- [2] Adewusi, S. A., and B. O. Al-Bedoor, "Experimental study on the vibration of an overhung rotor with a propagating transverse crack", *Shock and Vibration*, 2002, Vol.9, no.3, pp.91-104.
- [3] Qin, Weiyang, Guanrong Chen, and Guang Meng, "Nonlinear responses of a rub-impact overhung rotor", *Chaos, Solitons & Fractals*, 2004, Vol.19, no.5, pp.1161-1172.
- [4] Yim, K. B., and Bong-Jo Ryu, "Effect of load torque on the stability of overhung rotors," *Journal of mechanical science and technology*, 2011, Vol.25, no.3, pp.589-595.
- [5] Yim, Kyung Bin, and John Yim, "Dynamic behavior of overhung rotors subjected to axial forces," *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, 2012, Vol.13, no.9, pp.1575-1580.
- [6] Zilli, Andrea, Robin J. Williams, and David J. Ewins, "Nonlinear dynamics of a simplified model of an overhung rotor subjected to intermittent annular rubs," *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2015, Vol.137, no.6.
- [7] Tiaki, M. Moradi, S. A. A. Hosseini, and M. Zamanian, "Nonlinear forced vibrations analysis of overhung rotors with unbalanced disk", *Archive of Applied Mechanics*, 2016, Vol.86, no.5, pp.797-817.
- [8] Fu, Chao, Xingmin Ren, Yongfeng Yang, and Weiyang Qin, "Dynamic response analysis of an overhung rotor with interval uncertainties", *Nonlinear Dynamics*, 2017, Vol.89, no.3, pp.2115-2124.
- [9] Chipato, Elijah, A. D. Shaw, and M. I. Friswell, "Frictional effects on the nonlinear dynamics of an overhung rotor", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2019, Vol.78, p.104875.
- [10] Chipato, Elijah, A. D. Shaw, and M. I. Friswell, "Effect of gravity-induced asymmetry on the nonlinear vibration of an overhung rotor", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2018, Vol.62, pp.78-89.
- [11] Numanoy, Nitisak, and Jiraphon Srisertpol, "Vibration Reduction of an Overhung Rotor Supported by an Active Magnetic Bearing Using a Decoupling Control System", *Machines*, 2019, Vol.7, no.4, p.73.
- [12] Moradi Tiaki, M., S. A. A. Hosseini, and H. Shaban Ali Nezhad, "Nonlinear free vibrations analysis of overhung rotors under the influence of gravity", *Proceedings of the Institution of*

Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2020, Vol.234, no.2, pp.575-588.

[13] <http://www.tabrizcorecut.com/اگرگیری-از-بتن> (seen: 7/25/2019)

[14] <http://www.tabrizcorecut.com/ايرش-ديوار-بتن-مسلح-تهران> (seen: 7/25/2019)

پی نوشت:

1. Concrete core drilling
2. Overhung
3. Azeez & Vakakis
4. Adewusi & Al-Bedoor
5. Qin, Guanrong & Guang
6. Yim & Ryu
7. Yim, Bin & Yim
8. Zilli & et. al.
9. Tiaki & others
10. Forward
11. Fu & others
12. Chipato and et. al.
13. Numanoy & Jiraphon
14. Young's Modulus
15. Forward
16. Backward