

کنترل پیش‌بین مقاوم صریح مبتنی بر مدل در شبکه ترافیک شهری

مقاله علمی - پژوهشی

مریم محمودی*، دانشجوی دکتری، گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران
عقیله حیدری، استاد، گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران
علی کریم پور، استاد، گروه مهندسی برق، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران
پست الکترونیکی نویسنده مسئول: mrym.mahmoudi@gmail.com

دریافت: ۱۴۰۰/۰۷/۰۹ - پذیرش: ۱۴۰۰/۱۰/۱۹

صفحه ۲۹-۴۸

چکیده

بهینه‌سازی زمان چرخه‌های ترافیکی و همچنین کنترل مسیر در تقاطع‌های ترافیک شهری در شرایطی که شبکه با عدم قطعیت مواجه هست مساله مهم و پیچیده‌ای است. در این مقاله یک روش جدید برای تعیین بهینه سیگنال ترافیک با استفاده از کنترل پیش‌بین مقاوم مبتنی بر مدل ارائه شده که یکی از ویژگی‌های مهم آن در نظر گرفتن عدم قطعیت برای جریان ورودی به شبکه ترافیک است. بدین منظور ابتدا از بین مدل‌سازی‌هایی که تاکنون برای شبکه ترافیک شهری ارائه شده، مدلی همراه با عدم قطعیت انتخاب و کنترل پیش‌بین مقاوم مبتنی بر مدلی برای آن طراحی شده است. علاوه بر آن برای غلبه بر پیچیدگی محاسبات آنلاین، از برنامه‌ریزی چندپارامتریک برای حل آن به صورت آفلاین استفاده شده و با استفاده از داده‌های ترافیکی، کنترلر طراحی شده مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که روش پیشنهادی ضمن برآورده کردن بسیاری از نیازهای شبکه، میزان محاسبات آنلاین را کاهش می‌دهد که امکان استفاده عملی از آن در شبکه‌های واقعی ترافیک شهری را مقدور می‌سازد.

واژه‌های کلیدی: کنترل پیش‌بین صریح، کنترل پیش‌بین مقاوم، ترافیک شهری، کنترل سیگنال ترافیک، برنامه‌ریزی چندپارامتریک

۱- مقدمه

تحت تاثیر یکدیگر قرار می‌گیرند، بنابراین پیش‌بینی ترافیک برای استفاده هرچه بیشتر از ظرفیت شبکه مفید خواهد بود. به عنوان یکی از قدرتمندترین و پرکاربردترین فناوری‌های کنترلی، کنترل پیش‌بین مبتنی بر مدل (MPC) در TSC بسیار مورد استفاده قرار گرفته و نتایج قابل توجهی نیز به دست آمده است. رویکردهای MPC براساس مدل ذخیره و ارسال (SF^T) برای بهینه‌سازی جریان ترافیک در شرایط اشباع توسعه یافته‌اند [Aboudolas et al. 2010]، [Aboudolas et al. 2009]. از آنجایی که زمان سفر در جاده‌های بین تقاطع نادیده گرفته می‌شود، این روش‌ها برای شرایط اشباع کارایی کمتری دارند. MPC غیرخطی برای بهینه‌سازی توان شبکه بر اساس یک مدل جریان ترافیک نیز

افزایش جمعیت و توسعه فعالیت‌های اقتصادی در جوامع امروزی، منجر به افزایش تقاضا برای حمل‌ونقل و جابه‌جایی شده است و با افزایش تعداد وسایل نقلیه در شهرها، تراکم ترافیک تبدیل به یک مساله جدی شده است. بدلیل این که گسترش زیرساخت‌های موجود پرهزینه و گاهی غیرممکن است، هدف تحقیق در زمینه سیستم‌های مدیریت ترافیک، استفاده بهتر از زیرساخت‌های موجود به منظور بهبود تراکم ترافیک می‌باشد. بدین منظور استفاده از سیستم‌های کنترل سیگنال ترافیکی (TSC¹) پیشرفته جهت افزایش ظرفیت زیرساخت‌های ترافیکی موجود بسیار مورد توجه محققین واقع شده است. در شبکه ترافیک شهری، ترافیک از یک تقاطع به تقاطع دیگر انتقال می‌یابد، از این رو تقاطع‌ها با تاخیر زمانی

برای TSC سعی شده است که بین دقت مدل و زمان محاسبه برای اجرای آن توازن برقرار کنند.

با این حال، بزرگترین چالش برای پیاده‌سازی MPC بر پایه بهینه‌سازی، پیچیدگی محاسبات آنلاین آن می‌باشد که به منظور بهبود قابلیت این استراتژی برخی از روش‌ها برای حل یا کاهش محاسبات آنلاین بکار گرفته شده است که یکی از آن‌ها حل کردن مساله بصورت آفلاین توسط برنامه‌ریزی چندپارامتریک ($mp-P^v$) می‌باشد. اخیراً بهینه‌سازی برای تقسیم سیگنال کنترل برای شبکه ترافیکی در مقیاس بزرگ بر اساس مدل SF و با استفاده از کنترل پیش‌بین صریح مبتنی بر مدل ($EMPC^A$) معرفی شده است [Lu et al. 2019]. نتایج آن‌ها نشان می‌دهد که با تبدیل محاسبات آنلاین به آفلاین، توسط $mp-P$ بازده کنترل طراحی شده بطور قابل توجهی افزایش می‌یابد و کاربرد آن را در سیستم‌های ترافیکی واقعی امکان‌پذیر می‌سازد. اگرچه روش آن‌ها در مقایسه با MPC استاندارد پیچیدگی محاسبات را کاهش می‌دهد، اما در یک چارچوب قطعی طراحی شده است. علاوه بر این زمان‌های چرخش و زمان سفر در جاده‌های بین تقاطع‌ها نادیده گرفته شده است. از طرفی رویکرد MPC ارایه شده توسط لی و همکاران [Le et al. 2013] یک رویکرد موفق برای بهینه‌سازی هم‌زمان سیگنال‌های ترافیکی و زمان‌های چرخش برای شبکه‌های ترافیکی محسوب می‌شود که زمان سفر در تقاطع‌ها را هم در نظر می‌گیرد. این استراتژی کنترل ترافیکی شهری، بر پایه هماهنگی تقسیم زمان چراغ سبز و دور زدن در تقاطع با هدف به حداقل رساندن تعداد وسایل نقلیه در منطقه تحت کنترل طراحی شده و زمان سفر بین لینک‌ها هم با استفاده از مدل‌سازی حرکت وسایل نقلیه از یک صف به صف دیگر نیز در نظر گرفته شده است. علاوه بر این بدلیل استفاده از دینامیک خطی برای توصیف و شبیه‌سازی رفتار ترافیکی واقعی در چارچوب MPC نیز موثر می‌باشد، اما تاکنون RMPC با استفاده از $mp-P$ برای آن طراحی نشده است. همانطور که بیان شد، تحقیقات زیادی در زمینه کاربرد MPC در کنترل ترافیک شهری انجام شده است. اما بدلیل پیچیدگی مساله همچنان امکان بهبود روش تا زمانی که همه نیازهای یک شبکه‌های واقعی ترافیکی را برآورده کند وجود دارد. پیچیدگی شبکه ترافیک شهری ناشی از نیازهای متعددی که یک کنترل‌کننده ترافیک باید به هنگام اجرای عملی آن برآورده کند

ارائه شده است که پیچیدگی مدل پیش‌بین منجر به زمان بالای محاسبات مساله MPC می‌شود [Berg et al. 2007]. علاوه بر این MPC غیرخطی برای شبکه ترافیک نیز طراحی شده و تبدیل به یک مساله برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط ($MILP^1$) شده است [Lin et al. 2011]. در مدل ارائه شده به منظور کاستن از پیچیدگی مدل، تاخیر زمانی ثابت فرض شده است و این مساله باعث عدم دقت مدل در شرایط ترافیکی اشباع می‌شود. همچنین کنترل پیش‌بین غیرمتمرکز مبتنی بر مدل^۲ نیز به منظور افزایش سرعت محاسبات در TSC بکار گرفته شده است. اما جواب این دسته از کنترل‌کننده‌ها بر خلاف MPC جواب سراسری نیست و زیربینه می‌باشد [Frejo and camacho 2012]، [Bemporad and Heemels 2010]. روش‌های MPC ذکر شده فوق همه در یک چارچوب قطعی طراحی شده‌اند، درحالی که عدم قطعیت بطور گسترده در شبکه‌های ترافیکی واقعی وجود دارد. از این رو عدم قطعیت (به عنوان مثال تقاضای ترافیک، اغتشاشات تصادفی) باید در مدل‌سازی ترافیکی نیز مورد توجه قرار گیرد. کنترل پیش‌بین مقاوم مبتنی بر مدل ($RMPC^1$) توانایی مدیریت عدم قطعیت را دارد، اما در شبکه‌های ترافیکی به ندرت مورد استفاده واقع شده است. با هدف به حداقل رساندن تاخیر تحت تقاضای ترافیک متغیر سه مدل برای زمان‌بندی بهینه سیگنال ترافیک پیشنهاد شده است [Yin 2008]. همچنین برای بهینه‌سازی TSC از RMPC نیز تاکنون استفاده شده است [Tettamanti et al. 2014].

در این مرجع عدم قطعیت کران‌داری در تقاضای ترافیک در نظر گرفته شده است و تابع عملکرد مدل با هدف دست‌یابی به حداقل هزینه تحت بیشترین عدم قطعیت مدل فرموله شده است. توجه به این نکته ضروری است که از عوامل موثر بر جریان ترافیکی ورودی به تقاطع‌ها، انتخاب مسیر ترافیکی می‌باشد که در رویکردهای RMPC که بیان شد، نادیده گرفته شده است. زیرا کنترل انتخاب مسیر و کنترل تقاطع ترافیکی بطور هم‌زمان، اگرچه عملکرد TSC را بهبود می‌بخشد اما، ترکیب آن‌ها تاثیر مستقیمی بر پیچیدگی مدل دارد و ترکیب آن با حل آنلاین مساله بهینه‌سازی نتیجه شده از MPC، پیچیدگی محاسبات آن را افزایش داده و امکان استفاده عملی از آن را غیرممکن می‌سازد. با توجه به پیچیدگی سیستم ترافیک شهری، در رویکردهای MPC و RMPC ذکر شده

برای جریان ورودی به شبکه سعی شده است یک RMPC با استفاده از mp-P برای آن طراحی شود. با استفاده از mp-P سیگنال کنترل بهینه بطور آنلاین طراحی می‌شود و از حل آنلاین یک مساله بهینه‌سازی در هرگام زمانی جلوگیری می‌کند و در نتیجه کاربرد عملی آن در شبکه‌های واقعی ترافیکی را بدلیل این که حجم محاسبات آنلاین را بطور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌دهد، امکان‌پذیر می‌سازد. این مقاله بدین صورت تنظیم شده است: در بخش ۲ تعاریف و قضایای مرتبط با RMPC بیان شده است. در بخش ۳ مدل خطی از شبکه ترافیک شهری ارائه شده است. کنترل پیش‌بین صریح مقاومی برای این شبکه در بخش ۴ طراحی شده و کنترلر طراحی شده بر روی یک مدل فرضی ترافیک توسط برنامه‌ریزی چندپارامتریک اعمال شده و نتایج آن ارائه و با دیگر نتایج مقایسه شده است.

می‌باشد، از جمله توانایی بهبود توان شبکه در سناریوهای مختلف ترافیکی، توانایی کنترل زمان‌بندی سیگنال، توانایی بهبود توان شبکه در هنگام مواجهه شبکه با نویز، اغتشاش یا عدم قطعیت و غیره. طراحی یک کنترل‌کننده که تمام ویژگی‌های فوق را داشته باشد یک کار چالش برانگیز می‌باشد. از آن‌جایی که مدل ارائه شده توسط لی و همکاران [Le et al. 2013] بسیاری از ویژگی‌های مورد نیاز یک سیستم ترافیک شهری، از جمله زمان سفر بین لینک‌ها، کنترل هم‌زمان سیگنال ترافیک، زمان‌های چرخش در تقاطع‌ها و خطی بودن مدل را برآورده می‌کند، از آن در این کار برای طراحی یک کنترلر برای شبکه ترافیک شهری استفاده می‌شود. با توجه به این که بررسی عملکرد مدل هنگام مواجهه شبکه با نویز، اغتشاش یا عدم قطعیت، یکی از نیازهای شبکه است که این مدل برآورده نمی‌کند، در این کار با در نظر گرفتن عدم قطعیت

جدول ۱. جدول نمادهای بخش ۲

N	افق پیش‌بین
x_k	حالت سیستم در گام k ام
u_k	ورودی سیستم در گام k ام
\mathcal{X}	مجموعه همه حالت‌های شدنی سیستم که بصورت چندوجهی است و $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$
\mathcal{U}	مجموعه شدنی از ورودی‌های سیستم که بصورت چندوجهی است و $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$
\bar{R}	ماتریس متناظر با متغیر کنترل سیستم در تابع هزینه MPC که $\bar{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$
\bar{Q}	ماتریس متناظر با حالت سیستم در تابع هزینه MPC که $\bar{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$
\bar{P}	ماتریس متناظر با حالت نهایی سیستم در تابع هزینه MPC که $\bar{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$
\mathcal{X}_f	مجموعه حالت‌های نهایی سیستم که بصورت چندوجهی است $\mathcal{X}_f \subseteq \mathbb{R}^n$
U^*	دنباله کنترل بهینه حاصل شده از حل مساله کنترل بهینه متناظر با MPC
ϵ_k^x	متغیر کمکی مورد استفاده در خطی‌سازی $\ \bar{Q} x_k \ _\infty$ که $k = 0, 1, \dots, N$
ϵ_k^u	متغیر کمکی مورد استفاده در خطی‌سازی $\ \bar{R} u_k \ _\infty$ که $k = 0, 1, \dots, N - 1$
\bar{G}	ماتریس ضرایب متناظر با مساله mp-LP نتیجه شده از مساله کنترل بهینه متناظر با MPC
\bar{b}	بردار ضرایب سمت راست متناظر با مساله mp-LP نتیجه شده از مساله کنترل بهینه متناظر با MPC
\bar{S}	ماتریس ضرایب x_0 متناظر با مساله mp-LP نتیجه شده از مساله کنترل بهینه متناظر با MPC
z_0	بردار متغیرهای تصمیم متناظر با مساله mp-LP نتیجه شده از مساله کنترل بهینه متناظر با MPC
$U^*(x_0)$	قانون کنترل بهینه پیوسته و قطعه‌ای آفین بدست آمده برای حل MPC
CR_0	ناحیه بحرانی بدست آمده از حل mp-LP متناظر با MPC
w_k^p	عدم قطعیت ظاهر شده در حالت و ورودی سیستم، $w_k^p \in \mathcal{W}^p$ که $\mathcal{W}^p \subseteq \mathbb{R}^{np}$ یک چندوجهی می‌باشد.
w_k^a	بردار اغتشاش اضافه شده به سیستم $w_k^a \in \mathcal{W}^a$ که $\mathcal{W}^a \subseteq \mathbb{R}^{na}$ یک چندوجهی می‌باشد.

۲- کنترل پیش‌بین مقاوم مبتنی بر مدل

جدول ۱ معرفی شده‌اند. مساله کنترل بهینه زیر با تابع هزینه J ، با نرم بی‌نهایت، بر روی سیستم خطی و گسسته ثابت زمانی را در نظر بگیرید.

$$\min_{[u_0, u_1, \dots, u_{f-1}]} J = \| \bar{P} x_f \|_{\infty} + \sum_{k=0}^{f-1} \| \bar{Q} x_k \|_{\infty} + \sum_{k=0}^{f-1} \| \bar{R} u_k \|_{\infty} \quad (۱)$$

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, k = 0, 1, \dots, f-1, \quad (۲)$$

$$x_k \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n, u_k \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m \quad (۳)$$

$$x_f \in \mathcal{X}_f, x_0 = x(t_0), \quad (۴)$$

کنترل سیستم در گام k ام است. همانطور که می‌دانیم با اطلاع از حالت اولیه سیستم و تابع گذار آن می‌توان حالت را در گام k ام بصورت زیر محاسبه نمود [Chui and chen 1989].

$$x_k = \phi_{k0} x_0 + \sum_{j=1}^k \phi_{kj} B u_{j-1}, k = 0, 1, \dots, f. \quad (۵)$$

در این صورت MPC بر روی افق پیش‌بین N ، با نقطه آغاز $x_0 = x(t_0)$ بصورت مساله کنترل بهینه زیر بیان می‌شود.

$$\min_{[u_0, u_1, \dots, u_{N-1}]} \| \bar{P} x_N \|_{\infty} + \sum_{k=0}^{N-1} \| \bar{Q} x_k \|_{\infty} + \sum_{k=0}^{N-1} \| \bar{R} u_k \|_{\infty},$$

$$x_k \in \mathcal{X}, u_k \in \mathcal{U}, k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$x_N \in \mathcal{X}_f, x_0 = x(t_0) \quad (۶)$$

آنلاین حل شود که پیچیدگی محاسباتی این روش را نشان می‌دهد. با استفاده از mp-P می‌توان پیچیدگی محاسبات آنلاین MPC را کاهش داد که در ادامه نشان داده می‌شود که چطور یک مساله کنترل بهینه به فرم (۶) را می‌توان با استفاده از mp-P حل کرد. به منظور تبدیل MPC به یک mp-P ابتدا با در نظر گرفتن متغیرهای کمکی $\epsilon_1^x, \dots, \epsilon_N^x$ و $\epsilon_0^u, \dots, \epsilon_{N-1}^u$ متناظر با حالت و ورودی سیستم، با محدودیت‌های $\epsilon_k^x \geq \| \bar{Q} x_k \|_{\infty}$ ، $\epsilon_k^u \geq \| \bar{R} u_k \|_{\infty}$ و $\epsilon_N^x \geq \| \bar{P} x_N \|_{\infty}$ رابطه (۶) را می‌توان به صورت زیر خطی کرد.

در این بخش مقدمات لازم برای RMPC و چگونگی ارتباط آن با برنامه‌ریزی چند پارامتریک خطی (mp-LP^۹) بطور خلاصه، بیان می‌شود [Borrelli, Bemporad, and Morari 2017]. نمادهای مورد استفاده در این بخش در

که در آن \mathcal{X} و \mathcal{U} به ترتیب مجموعه‌های شدنی بصورت چندوجهی از حالت، حالت نهایی و ورودی سیستم و $\mathcal{T} = \{t_0, t_1, \dots, t_f\}$ مجموعه گام‌های زمانی سیستم باشند. همچنین بردار حالت سیستم در گام k ام و u_k بردار

در این صورت MPC بر روی افق پیش‌بین N ، با نقطه آغاز

که بردار حالت x_k طبق (۵)، با معلوم بودن A ، B و ϕ_{kj} ($\forall k, j = 1, 2, \dots, f$) محاسبه می‌گردد. با حل مساله (۶)، یک دنباله کنترل بهینه $U^* = [u_0^*, u_1^*, \dots, u_{N-1}^*]$ بدست می‌آید که پس از اعمال اولین عنصر دنباله U^* به معادله (۲)، حالت سیستم در گام زمانی بعدی، t_1 ، محاسبه می‌شود. حال می‌توان با در نظر گرفتن $x_0 = x(t_1)$ به عنوان حالت آغازین و تکرار فرآیند بهینه‌سازی (۶)، حالت در گام بعدی را محاسبه کرد. حل مساله کنترل بهینه (۶) سپس با در نظر گرفتن حالت جاری به عنوان حالت آغازین تکرار شده و این فرآیند بصورت بازگشتی در طول افق پیش‌بین تکرار می‌شود. بنابراین، برای اعمال MPC نیاز است که N مساله کنترل بهینه بصورت

$$\begin{aligned} & \min_{[\epsilon_0^x, \dots, \epsilon_N^x, \epsilon_0^u, \dots, \epsilon_{N-1}^u, u_0, \dots, u_{N-1}]} \epsilon_0^x + \dots + \epsilon_N^x + \epsilon_0^u + \dots + \epsilon_{N-1}^u \\ & -1_n \epsilon_k^x \leq \pm \bar{Q} x_k, k = 0, 1, \dots, N-1, \\ & -1_r \epsilon_N^x \leq \pm \bar{P} x_N, \\ & -1_m \epsilon_k^u \leq \pm \bar{R} u_k, k = 0, 1, \dots, N-1, \\ & x_k \in \mathcal{X}, u_k \in \mathcal{U}, k = 0, 1, \dots, N-1, \\ & x_N \in \mathcal{X}_f, x_0 = x(t_0). \end{aligned} \quad (7)$$

با در نظر گرفتن

$$z_0 = [\epsilon_0^x, \dots, \epsilon_N^x, \epsilon_0^u, \dots, \epsilon_{N-1}^u, u_0, \dots, u_{N-1}]$$

و با توجه به رابطه (۵)، رابطه (۷) به فرم ماتریسی زیر نوشته می‌شود،

$$\begin{aligned} & \min_{z_0} c'_0 z_0 \\ & \text{s.t. } \bar{G} z_0 \leq \bar{b} + \bar{S} x_0, \end{aligned} \quad (8)$$

جواب بهینه صریح $Z_0^*(x_0)$ آن تابعی از x_0 خواهد بود [Borrelli, Bemporad, and Morari 2017]. به عبارتی با حل (۸) جواب مساله بصورت تابعی از x_0 بدست می‌آید و با توجه به تعریف Z_0 قانون کنترل بهینه U_0^* آن نیز به صورت صریح بر حسب x_0 بصورت زیر محاسبه می‌شود.

$$U_0^*(x_0) = [0 \dots 0 I_m \dots I_m] z_0^*(x_0).$$

فضای حالت مساله همراه با اغتشاش یا عدم قطعیت باشد در طراحی MPC با یک مساله کنترل بهینه مقاوم رو به رو می‌شود. از آن جایی که در شبکه ترافیک شهری نیز عدم قطعیت بر مدل‌های ارائه شده برای TSC آن وجود دارد، در ادامه چگونگی ارتباط بین MPC مقاوم و mp-P مورد بررسی قرار گرفته است. تا بدین صورت از حجم محاسبات آنلاین ایجاد شده تا حدودی کاسته شود و امکان استفاده آن در شبکه واقعی ترافیکی امکان‌پذیرتر باشد. فرض کنید سیستم گسسته زمانی خطی (۲) همراه با عدم قطعیت و اغتشاش بصورت زیر باشد.

که در آن ماتریس‌های \bar{G} ، \bar{S} و \bar{b} به راحتی از ماتریس‌های A ، B ، \bar{R} ، \bar{Q} و \bar{P} بدست می‌آیند [Bemporad, and Morari 2017]. همانطور که بیان شد برای MPC در طول افق پیش‌بین نیاز به حل N مساله کنترل بهینه به فرم (۶) به ازای هر حالت اولیه x_0 می‌باشد، اما اگر x_0 را به عنوان یک پارامتر در رابطه (۸) در نظر بگیریم، این رابطه تبدیل به یک مساله mp-LP می‌شود که پس از حل آن

بنابراین، مساله (۶) تبدیل به مساله mp-LP (۸) شده و سپس با بهره‌گیری از تکنیک‌های حل مسائل پارامتریک قانون کنترل بهینه بطور صریح بعنوان تابع قطع‌های آفین از حالت سیستم به دست آمده است که با این روش دیگر نیازی به حل آنلاین مساله کنترل بهینه در طول افق پیش‌بین برای هر حالت اولیه نمی‌باشد. این تکنیک قابل تعمیم به حالتی که سیستم همراه با عدم قطعیت باشد نیز می‌باشد که در ادامه مورد بررسی قرار می‌گیرد. در مسائل MPC استاندارد، رابطه (۶)، فرض بر این بود که هیچ اغتشاش اندازه‌گیری نشده‌ای نیز به سیستم وارد نمی‌شود در حالی که در فضای واقعی بسیاری از مسائل همراه با اغتشاش و عدم قطعیت در مدل همراه هستند. اگر مدل

$$x_{k+1} = A(w_k^p)x_k + B(w_k^p)u_k + Ew_k^a \quad (9)$$

اغتشاش اضافه شده به سیستم باشند. در این صورت مساله کنترل بهینه مقید مقاوم متناظر با MPC که اغلب مورد استفاده

که در آن بردارهای $w_k^p \in \mathcal{W}^p \subseteq \mathbb{R}^{n_p}$ و $w_k^a \in \mathcal{W}^a \subseteq \mathbb{R}^{n_a}$ به ترتیب پارامترهای عدم قطعیت و

مساله min-max به عنوان یک مساله کنترل بهینه مقاوم حلقه باز (CROC- OL¹) شناخته می شود [Borrelli, Bemporad, and Morari 2017]

قرار می گیرد، شامل حل یک مسئله min-max است که در هنگام اعمال محدودیت های ورودی و حالت برای همه اغتشاشات ممکن، بدبینانه ترین عملکرد را حداقل می کند. این

$$\begin{aligned}
 J_0^*(x_0) = & \min_{[u_0, u_1, \dots, u_{N-1}]} \left\{ \max_{w_0, \dots, w_{N-1}} \left\{ \|\bar{P}x_N\|_\infty \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sum_{k=1}^{N-1} \|\bar{Q}x_k\|_\infty + \sum_{k=0}^{N-1} \|\bar{R}u_k\|_\infty \right\} \right\} \\
 \text{subj. to} & \\
 x_{k+1} = & A(w_k^p)x_k + B(w_k^p)u_k + Ew_k^a \\
 x_k \in \mathcal{X}, & u_k \in \mathcal{U}, k = 0, 1, \dots, N-1, \\
 x_N \in \mathcal{X}_f, & x_0 = x(t_0). \\
 \forall w_k^a \in \mathcal{W}^a, & \forall w_k^p \in \mathcal{W}^p \\
 \forall k = 0, 1, & \dots, N-1.
 \end{aligned} \tag{10}$$

($A(w^p) = A$) در این صورت جواب $u_0^* = f_0^{OL}(x_0)$ مساله (۱۰) می تواند به وسیله تکنیک های حل mp-P با استفاده از قضیه زیر و رابطه (۸) حل شود. قضیه ۱: [Borrelli, Bemporad, and Morari 2017] مساله CROC-OL (۱۰)، را در نظر بگیرید. فرض کنید که پارامتر عدم قطعیت فقط در ماتریس B ظاهر شده باشد

و $A(\cdot)$ و $B(\cdot)$ توابع آفینی از w_k^p باشند در این صورت مساله (۱۰) می تواند به وسیله تکنیک های حل mp-P با استفاده از قضیه زیر و رابطه (۸) حل شود. قضیه ۱: [Borrelli, Bemporad, and Morari 2017] مساله CROC-OL (۱۰)، را در نظر بگیرید. فرض کنید که پارامتر عدم قطعیت فقط در ماتریس B ظاهر شده باشد

$$f_0^{OL}(x) = G_0^i x + g_0^i, \quad i = 1, 2, \dots, N_0^r \tag{11}$$

برای هر $x \in CR_0^i$ داریم. $f_0^{OL}(x) = G_0^i x + g_0^i, \quad i = 1, 2, \dots, N_0^r$ به کمک (۸) توسط حل یک مساله mp-LP به دست می آید. در فرآیند حل مساله mp-LP، ناحیه شدنی متناظر با x_0 به N_0^r چندوجهی CR_0^i ، $i = 1, \dots, N_0^r$ افزایش می شود که برای هر $x \in CR_0^i$ داریم.

که در آن $G_0^i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $g_0^i \in \mathbb{R}^n$. بنابراین با استفاده از قضیه ۱ جواب مساله (۱۰) با حل یک مساله mp-LP بصورت آفلاین و تابعی از حالت اولیه سیستم محاسبه شده و سپس با جایگذاری هر حالت اولیه x_0 در تابع هدف بدست آمده، کنترل بهینه مد نظر بصورت آنلاین محاسبه می شود. با این روش حجم محاسبات آنلاین برای حل

۳- ارزیابی مدلی از شبکه ترافیک شهری

جدول ۲ نمایش داده شده است. با توجه به این که حرکت وسایل نقلیه در یکی از جهت های اصلی شمال- جنوب و شرق- غرب یا بالعکس می باشد، اندیس r را برای تعیین جهت حرکت به صورت زیر تعریف شده است.

تاکنون مدل سازی های مختلفی برای شبکه ترافیک شهری ارائه شده است که از بین آن ها مدل مطرح شده توسط لی و همکاران [Le et al. 2013]. در این بخش بررسی شده است. در این نمایش اجزای مختلف شبکه با کلاس های D, R, Q و S مدل شده و نمادهای مورد استفاده در این بخش در

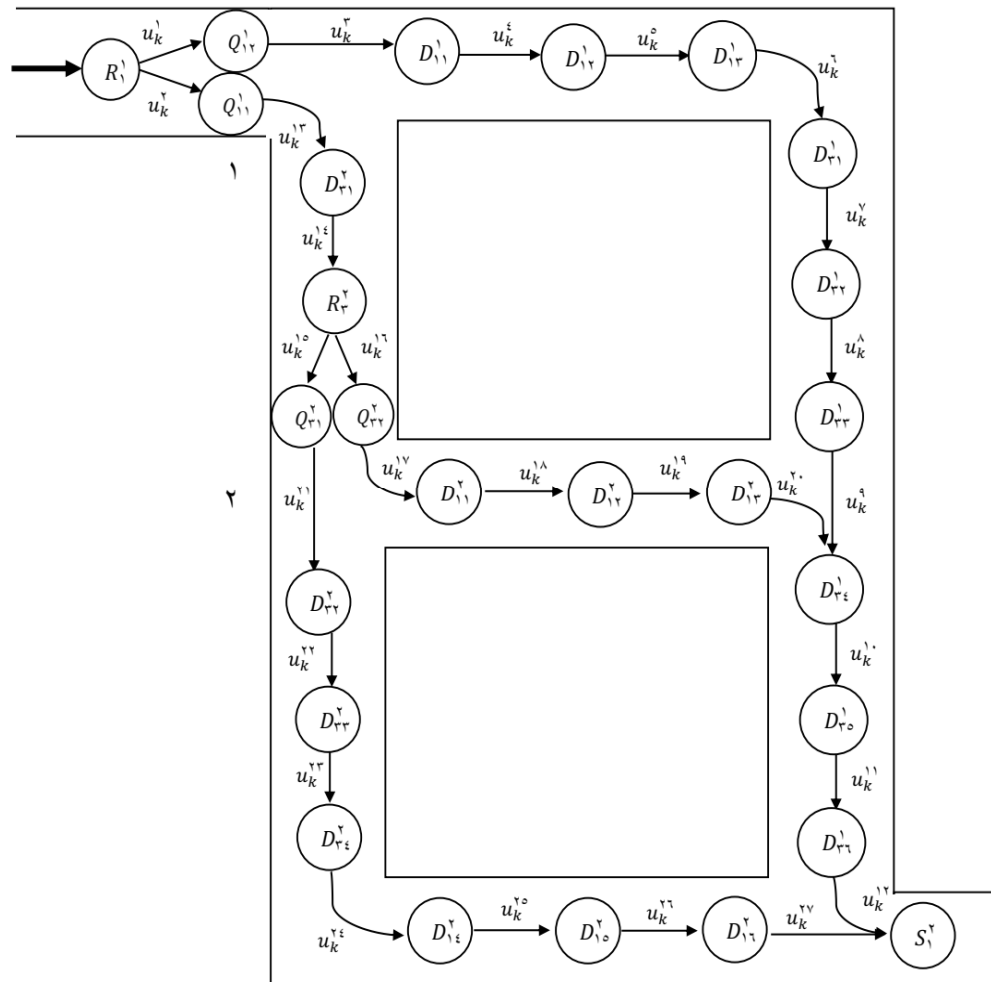
$$r = \begin{cases} 1 & \text{حرکت وسایل نقلیه در مسیر غرب به شرق} \\ 2 & \text{حرکت وسایل نقلیه در مسیر شرق به غرب} \\ 3 & \text{حرکت وسایل نقلیه در مسیر شمال به جنوب} \\ 4 & \text{حرکت وسایل نقلیه در مسیر جنوب به شمال} \end{cases} \quad (11)$$

همچنین هر وسیله نقلیه در تقاطع یا به مسیر مستقیم خود ادامه می‌دهد، یا گردش به سمت راست و یا گردش به سمت چپ خود دارد که اندیس i را برای تعیین مسیر حرکت آن بصورت فرمول ۱۲ تعریف می‌کنیم.

$$i = \begin{cases} 1 & \text{حرکت وسایل نقلیه در مسیر مستقیم قبلی} \\ & \text{و یا گردش به سمت راست} \\ 2 & \text{حرکت وسایل نقلیه بصورت گردش به چپ} \end{cases} \quad (12)$$

جدول ۲. جدول نمادهای بخش ۳	
r	اندیس جهت حرکت وسایل نقلیه که مقدار آن مطابق با رابطه (۱۲) تعریف شده است.
i	اندیس مسیر حرکت وسایل نقلیه که مقدار آن یک در رابطه (۱۳) تعریف شده است.
j	شمارنده تقاطع‌ها، $j = 1, 2, \dots, J$
Q_{ri}^j	کلاس صف تعریف شده برای تعداد وسایل نقلیه‌ای که در تقاطع j ام قصد حرکت در مسیر i ام و در جهت r را دارند.
R_r^j	کلاس صف تعریف شده برای تعداد وسایل نقلیه‌ای که در تقاطع j ام و در مسیر r ام قصد تعیین مسیر حرکت را دارند.
D_{rr}^j	کلاس صف تعریف شده i ام برای تعداد وسایل نقلیه‌ای که در مسیر r و تقاطع j ام در انتظار هستند.
S_r^j	کلاس صف تعریف شده برای تعداد وسایل نقلیه‌ای که در تقاطع j ام و در مسیر r ام از شبکه مورد مطالعه خارج می‌شوند.
M	مجموعه تمام کلاس‌های تعریف شده در شبکه، $M = \{D, R, Q, S\}$
\bar{M}	مجموعه کلاس‌های تعریف شده در شبکه به جز کلاس‌های S ، $\bar{M} = \{D, R, Q\}$
C_m	ظرفیت کلاس m ام، $m \in M$
a_k^m	جریان ورودی به کلاس m ام در گام زمانی k
u_k^l	مدت زمان فعال بودن لینک l ام در گام زمانی k ام
f_l	ماکزیمم تعداد وسایل نقلیه‌ای است که می‌توانند از طریق لینک l ام در یک گام زمانی از کلاس مبدا به مقصد بروند.
$u_k^{r,j}$	طول چراغ سبز برای مسیر r ام در تقاطع j ام، $j = 1, \dots, J$
\bar{X}_k	حالت شبکه ترافیک در گام زمانی k ام متناظر با کلاس‌های D, R, Q و $\bar{X}_k \in \mathbb{R}^{ \bar{M} }$
\bar{X}_k^s	حالت شبکه ترافیک در گام زمانی k ام متناظر با کلاس‌های S و $\bar{X}_k^s \in \mathbb{R}^{ \bar{M} + S }$
U_k	ورودی شبکه ترافیک در گام زمانی k ام، $U_k \in \mathbb{R}^{L+J+1}$
U_k^{link}	زیرماتریسی از U_k که متناظر با متغیرهای تعریف شده برای مدت زمان فعال بودن لینک‌ها می‌باشد.
U_k^{light}	زیرماتریسی از U_k که متناظر با متغیرهای تعریف شده برای چراغ‌های ترافیک می‌باشد.
B	ماتریس ضرایب U در معادله فضای حالت شبکه
w_k	بردار جریان ورودی به شبکه در گام زمانی k ام
\hat{F}	ماتریس قطری که عناصر روی قطر آن نرخ جریان ترافیک می‌باشد.
Φ	ماتریس ضرایب محدودیت‌های شبکه
b^c	ماتریس ثابت مقادیر سمت راست محدودیت‌های شبکه
E^w	ماتریس ضرایب بردار جریان ورودی در محدودیت‌های شبکه
$\Phi^{\bar{x}}$	زیرماتریس Φ متناظر با ضرایب متغیرهای حالت شبکه

Φ^{link}	زیرماتریس Φ متناظر با متغیرهای کنترل نظیر لینک‌های شبکه
Φ^{light}	زیرماتریس Φ متناظر با متغیرهای کنترل نظیر چراغ‌های ترافیکی شبکه
Φ^u	زیرماتریس Φ متناظر با زمان فعال بودن لینک‌ها و چراغ‌های ترافیک
C	بردار ظرفیت کلاس‌های شبکه $C = [c_1, \dots, c_{ M }]$.
$\pi_e^{i'}, \pi_n^{i'}$	ماتریس‌های متناظر با محدودیت‌های زمان فعال بودن لینک‌ها و زمان بودن چراغ‌های ترافیکی در هر مسیر که $i' = 1, 2, 3, 4$.
T_s	یک ماتریس $ M \times L$ بعدی است که مولفه (m, l) آن یک است اگر مبدأ لینک l ام کلاس m باشد و در غیر اینصورت صفر است.
T_d	یک ماتریس $ M \times L$ بعدی است که مولفه (m, l) آن یک است اگر مقصد لینک l ام کلاس m باشد و در غیر اینصورت صفر است.
T_{ds}	ماتریسی $(M - \bar{M}) \times L$ بعدی است که مولفه (m, l) آن یک است اگر مقصد لینک l ام کلاس m باشد و در غیر اینصورت صفر است.
\mathcal{H}	ماتریسی با عناصر صفر و یک و $J \times 2(J)$ بعدی است که متناظر با چراغ‌های ترافیکی در کل تقاطع‌ها تعریف شده است.



شکل ۱. شبکه ترافیکی مدل شده با کلاس‌های صف و با جریان ورودی به سیستم در کلاس R_1^1

مطالعه خارج می‌شوند. مجموعه شامل اجتماعی از کلاس‌های تعریف شده در شبکه با M و اجتماع همه کلاس‌ها به جز کلاس‌های S با \bar{M} نشان داده شده است.

در گام زمانی $0, 1, 2, \dots, k$ که متناظر با هر چرخه چراغ ترافیک در تقاطع‌ها فرض شده، وسایل نقلیه از طریق لینک اتصال بین کلاس‌ها از یک کلاس به کلاس بعدی در حرکت هستند. با فرض این که در شرایط غیراشباع یک گام زمانی برای انتقال وسیله نقلیه از یک کلاس به کلاس بعدی زمان لازم باشد، از نظر فیزیکی می‌توان صف را قسمتی از جاده در نظر گرفت که طول آن برابر با مسافت پیموده شده توسط یک وسیله نقلیه با سرعت آرام در طی یک چرخه چراغ ترافیک باشد. با توجه به تعاریف کلاس‌ها، در هر کلاس با توجه به طول وسیله نقلیه و حداقل فاصله بین آن‌ها می‌توان ماکزیمم تعداد وسایل نقلیه‌ای که می‌تواند در آن کلاس حضور داشته باشد را تعیین نمود که میانگین این عدد به عنوان ظرفیت هر کلاس تعریف می‌شود. به عبارتی هر کلاس $m \in M$ دارای ظرفیت c_m می‌باشد که معرف ماکزیمم تعداد وسایل نقلیه‌ای است که می‌تواند در کلاس m باشد.

در شبکه واقعی ترافیک در هر لحظه تعدادی وسیله نقلیه هم از خارج از شبکه مورد مطالعه به آن وارد می‌شود. به عنوان مثال در شکل ۱ جریان ورودی به شبکه از خارج از آن به کلاس R_1^1 وارد می‌شود. در حالت کلی، در گام زمانی k ام، a_k^m وسیله نقلیه به کلاس $m \in \bar{M}$ وارد می‌شود که یک پارامتر از قبل نامعین متغیر با زمان می‌باشد که در لی و همکاران [Le et al. 2013] یک مقدار قطعی و از قبل معین برای آن در نظر گرفته شده است. آن‌ها فرض کرده‌اند که a_k^m دارای یک مقدار ثابت باشد و در هر گام زمانی نوبت تصادفی گوسین با میانگین صفر و واریانس مشخص به آن اضافه شود. در ادامه با در نظر گرفتن a_k^m به عنوان یک پارامتر اضافه شده به سیستم سعی شده است کنترلی که در مقابل عدم قطعیت ورودی به سیستم مقاوم باشد به کمک RMPC طراحی می‌شود که با در نظر گرفتن این عدم قطعیت تاحدودی اجرای عملی آن در شبکه ترافیک شهری امکان‌پذیرتر خواهد بود. توجه به این نکته ضروری است که کلاس m با نرخ ورود $a_k^m > 0$ دارای ظرفیت بینهایت در نظر گرفته می‌شود تا از حالتی که در آن نرخ ورود به شبکه از ظرفیت آن بالاتر است اجتناب شود.

جریان ترافیک بر روی کلاس‌ها و لینک‌های اتصال آن‌ها برقرار است، بنابراین، وسایل نقلیه در حرکت درون شبکه بطور مداوم از یک کلاس به کلاس بعدی منتقل می‌شوند. به عبارتی یک اتصال جهت‌دار بین کلاس مبدا $m_1 \in \bar{M}$

با توجه به تعاریف فوق، کلاس‌های مورد نظر براساس ویژگی‌های تقاطع تعریف می‌شود. کلاس‌های D برای مدلسازی جریان آزاد وسایل نقلیه طراحی شده است که بسته به طول مسیر قبل از رسیدن به تقاطع، تعداد آن‌ها متفاوت می‌باشد. به عبارتی کلاس‌های D بیانگر انتظارهای قبل از تقاطع هستند که کلاس صف تعریف شده \bar{a} ام برای تعداد وسایل نقلیه‌ای که در مسیر \bar{a} و تقاطع \bar{a} م در انتظار هستند با نماد D_{pp}^j نمایش داده شده است. \bar{a} نشان دهنده تعداد این نوع از کلاس‌ها می‌باشد که براساس شرایط فیزیکی مسیر مشخص می‌شود. به عنوان مثال، در شکل ۱، کلاس D_{11}^1 بیانگر تعداد وسایل نقلیه‌ای است که در مسیر غرب به شرق و در تقاطع اول منتظر حرکت هستند و D_{32}^2 وسایل نقلیه‌ای که در تقاطع دوم و در مسیر شمال به جنوب در انتظار هستند را در خود جای داده است. این دسته از کلاس‌ها بطور مشابه برای بقیه مسیرها نیز مطابق شکل ۱ تعریف می‌شوند. کلاس R برای کنترل تعداد وسایل نقلیه‌ای که قصد تعیین مسیر حرکت را دارند، استفاده می‌شود. در واقع کلاس R طراحی شده است که بتواند وسایل نقلیه را به مسیری هدایت کند که از ازدحام ترافیک جلوگیری کند. تعداد وسایل نقلیه‌ای که در تقاطع \bar{a} م و در مسیر \bar{a} م قصد تعیین مسیر حرکت را دارند با R_{pp}^j نمایش داده شده است. در شکل ۱، بطور مثال در مسیر غرب-شرق تقاطع اول و شمال-جنوب تقاطع دوم، کلاس‌های R_1^1 و R_2^2 بدین منظور طراحی شده‌اند و نرخ چرخش وسایل نقلیه به کلاس‌های Q بعد از خود را کنترل می‌کنند. در نزدیکی تقاطع، برای تعیین جهت حرکت وسایل نقلیه از کلاس‌های Q استفاده شده است که Q_{pi}^j کلاس صف تعریف شده برای تعداد وسایل نقلیه‌ای که در تقاطع \bar{a} م قصد حرکت در مسیر \bar{a} م و در جهت \bar{a} را دارند، می‌باشد. بطور مثال در شکل ۱، Q_{11}^1 وسایل نقلیه‌ای که قصد حرکت در مسیر مستقیم و یا چرخش به سمت راست، در مسیر غرب به شرق و در تقاطع اول را دارند، در خود جای داده است و از کلاس Q_{33}^2 برای مدلسازی وسایل نقلیه در مسیر شمال-جنوب که قصد تغییر مسیر به سمت چپ خود در تقاطع دوم را دارند، استفاده شده است. بطور مشابه در بقیه مسیرهای شبکه این دسته از کلاس‌ها قابل تعریف است.

در نهایت برای بررسی وضعیت توان شبکه و بدست آوردن تعداد وسایل نقلیه‌ای که از شبکه مورد مطالعه خارج می‌شوند، کلاس S در نظر گرفته شده است. S_{pp}^j معرف تعداد وسیله نقلیه‌ای می‌باشد که در تقاطع \bar{a} م و در مسیر \bar{a} م از شبکه مورد

کلاس مقصد $m_p \in M$ برقرار است که اگر تعداد کل این اتصالات را L فرض کنید، مدت زمان فعال بودن آن در یک گام زمانی با متغیر $u_k^l, l = 1, 2, \dots, L$ نمایش داده شده است. در شکل ۱، u_k^l ها برای مسیرهای مختلف حرکت مشخص شده‌اند. علاوه بر این با هر لینک یک نرخ جریان f_l متناظر است که ماکزیمم تعداد وسایل نقلیه‌ای است که می‌توانند در یک گام زمانی از کلاس مبدا به مقصد بروند. این نرخ جریان بر اساس اندازه‌های ترافیکی تنظیم می‌شود و در حالت کلی تابعی از تراکم ترافیک می‌باشد. با این وجود برای حفظ خطی بودن مدل مقدار آن بر روی هر لینک یک عدد ثابت فرض شده است که بر اساس داده‌های مدل واقعی ترافیک تخمین زده شده است. زمانی که یک لینک فعال است، وسایل نقلیه با نرخ f_l در حرکت هستند و زمانی که غیرفعال است، بدین معنی است که هیچ وسیله نقلیه‌ای از طریق آن حرکت نمی‌کند. بنابراین تعداد وسایل نقلیه‌ای که کلاس مبدا را از طریق لینک l ترک کرده و به کلاس مقصد می‌روند،

زیر تعریف می‌شود. علاوه بر متغیرهای u_k^l متناظر با لینک l ام، برای نشان دادن مدت زمان فعال بودن لینکها مورد استفاده قرار گرفت، نیاز به متغیرهایی برای تعیین مدت زمان سبز بودن هر چراغ ترافیکی نیز می‌باشد. فرض کنید که هر تقاطع دارای دو چراغ ترافیکی در مسیرهای شمال- جنوب و شرق- غرب باشد. متغیر $u_k^{r,j}$ برای نشان دادن مدت زمان چراغ سبز برای مسیر r ام، در گام زمانی k ام و در تقاطع j ام، تعریف شده است. با توجه به تعاریف فوق و اعمال محدودیت‌هایی که بر روی زمان فعال بودن هر لینک با توجه به مدت زمان چراغ سبز هر تقاطع، حداکثر تعداد وسایل نقلیه ورودی و خروجی هر لینک وجود دارد، نهایتاً مدل فضای حالت شبکه و محدودیت‌های آن بصورت زیر به دست می‌آید [Le et al. 2013].

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_k^1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_k^{|\bar{M}|} \\ \tilde{x}_k^{|\bar{M}|+1} \\ \vdots \\ \tilde{x}_k^{|\bar{M}|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{k+1}^1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_k^{|\bar{M}|} \\ \tilde{x}_k^s \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} U_k^{link} \\ U_k^{light} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_k^1 \\ \vdots \\ u_k^L \\ u_k^{1,1} \\ u_k^{3,1} \\ \vdots \\ u_k^{1,(J)} \\ u_k^{3,(J)} \end{bmatrix}, w_k = \begin{bmatrix} a_k^1 \\ \vdots \\ a_k^{|\bar{M}|} \end{bmatrix}$$

پس مدل خطی شبکه بصورت زیر بدست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_{k+1} \\ \tilde{X}_k^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{X}_k \\ \tilde{X}_k^s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (T_d - T_s)\hat{F} & 0 \\ T_{ds}\hat{F} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_k^{link} \\ U_k^{light} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_k \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -I_L & 0 \\ 0 & 0 & -I_{2(J)} \\ 0 & I_L & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{H} \\ 0 & \pi_e^1 & \pi_e^2 \\ 0 & \pi_e^3 & \pi_e^4 \\ 0 & \pi_n^1 & \pi_n^2 \\ 0 & \pi_n^3 & \pi_n^4 \\ -I & T_s\hat{F} & 0 \\ I & (T_d - T_s)\hat{F} & 0 \end{bmatrix}}_{\Phi} \begin{bmatrix} \tilde{X}_k \\ U_k^{link} \\ U_k^{light} \end{bmatrix} \leq \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix}}_b + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_{|\bar{M}|} \end{bmatrix}}_{E^w} w_k \quad (15)$$

که در آن \bar{F} ماتریس قطری با عناصر روی قطر f_1, \dots, f_L ماتریس Φ ، با توجه به مرجع [Le et al. 2013] تعریف شده و نمادهای مربوطه بطور اختصار در جدول ۲ معرفی شده‌اند. در رابطه (۱۵) اگر Φ نیز به زیر ماتریس‌های

که در آن \bar{F} ماتریس قطری با عناصر روی قطر f_1, \dots, f_L ماتریس Φ ، با توجه به مرجع [Le et al. 2013] تعریف شده و نمادهای مربوطه بطور اختصار در جدول ۲ معرفی شده‌اند. در رابطه (۱۵) اگر Φ نیز به زیر ماتریس‌های

$$\bar{X}_{k+1} = \bar{X}_k + BU_k + w_k, \quad (16)$$

$$[\Phi^x \quad \Phi^{link} \quad \Phi^{light}] \begin{bmatrix} \bar{X}_k \\ U_k^{link} \\ U_k^{light} \end{bmatrix} \leq b + E^w w_k. \quad (17)$$

متناظر با آن طراحی شده و پس از تبدیل آن به یک مساله چندپارامتریک قانون کنترل بهینه صریحی برای آن بدست آمده است.

در رابطه (۱۶) و (۱۷) جریان ورودی به شبکه، w_k ، یک پارامتر متغیری است که به سیستم در هر گام زمانی اضافه می‌شود و در مقایسه با رابطه (۹)، مدل ارایه شده یک مدل همراه با عدم قطعیت می‌باشد که در بخش بعدی RMPC

۴- کنترل پیش بین مقاوم صریح برای شبکه ترافیک شهری

شبکه ترافیک شهری از آن استفاده می‌شود. رابطه (۱۶-۱۷) با w_k متغیر و داخل یک چندوجهی کراندار \mathcal{W} در نظر بگیرد.

کنترلر RMPC توانایی بررسی سیستم‌های با عدم قطعیت را دارد، به همین دلیل در این بخش برای مدلسازی عدم قطعیت

$$\mathcal{W} = \{w_k : \|w_k\|_\infty \leq \max\{f_l\}_{l=1}^L\} \quad (18)$$

تابعی از ورودی‌های آینده u_0, u_1, \dots نوشته شده و سپس همه حالت‌های میانی با جایگذاری حذف شده است و در نتیجه:

بدون کاستن از کلیت مساله طول افق پیش‌بین و افق کنترل را N و تابع معیار با نرم بی‌نهایت را در نظر بگیرید. با استفاده از (16) حالت‌های آینده سیستم به صورت صریح به صورت

$$\bar{X}_k = \bar{X}_0 + \sum_{q=0}^{k-1} BU_{k-1-q} + \sum_{q=0}^{k-1} w_{k-1-q}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (19)$$

با جایگذاری آن در رابطه (۱۷) نتیجه می‌شود

$$\Phi^u U_k + \sum_{q=0}^{k-1} \Phi^{\bar{x}} BU_{k-1-q} + \sum_{q=0}^{k-1} \Phi^{\bar{x}} w_{k-1-q} \leq b_k - Ew_k - \Phi^{\bar{x}} \bar{X}_0 \quad (20)$$

بصورت مساله کنترل بهینه به ازای هر $w_k \in \mathcal{W}$ زیر فرموله می‌شود.

که در آن $\Phi^u = [\Phi^{link} \quad \Phi^{light}]$ و $k = 1, 2, \dots, N$ با توجه به رابطه (۱۰) کنترل پیش‌بین مقاوم نظیر این شبکه

$$\mathcal{J}_0^*(\bar{X}_0) = \min_{[u_0, u_1, \dots, u_{N-1}]} \{ \max_{[w_0, \dots, w_{N-1}]} \left(\sum_{k=1}^{N-1} \|\bar{Q}\bar{X}_k\|_\infty + \sum_{k=1}^{N-1} \bar{R}U_k \right) \}$$

subj. to

$$\bar{X}_k = \bar{X}_0 + \sum_{q=0}^{k-1} BU_{k-1-q} + \sum_{q=0}^{k-1} w_{k-1-q},$$

$$\Phi^u U_k + \sum_{q=0}^{k-1} \Phi^{\bar{x}} BU_{k-1-q} + \sum_{q=0}^{k-1} \Phi^{\bar{x}} w_{k-1-q} \leq b_k - Ew_k - \Phi^{\bar{x}} \bar{X}_0$$

$$\begin{aligned} \bar{X}_0 &= \bar{X}(t_0) \\ \forall k &= 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (21)$$

از دحام ترافیک را کنترل می‌کند.

در رابطه (۲۱) از متغیرهای کمکی $\epsilon_1^{\bar{x}}, \dots, \epsilon_{N-1}^{\bar{x}}$ برای خطی‌سازی نرم بی‌نهایت استفاده کرده و با توجه به رابطه (۷) به صورت زیر به ازای هر $w_k \in \mathcal{W}$ نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned} J_0^*(\bar{X}(0)) &= \min_{[u_0, u_1, \dots, u_{N-1}, \epsilon_1^{\bar{x}}, \dots, \epsilon_N^{\bar{x}}]} \left\{ \max_{w_0, \dots, w_{N-1}} \left(\sum_{k=1}^{N-1} \epsilon_k^{\bar{x}} + \sum_{k=1}^{N-1} \bar{R}U_k \right) \right\}, \\ \text{subj. to} \\ \bar{X}_k &= \bar{X}_0 + \sum_{q=0}^{k-1} BU_{k-1-q} + \sum_{q=0}^{k-1} w_{k-1-q}, \\ \Phi^u U_k + \sum_{q=0}^{k-1} \Phi^{\bar{x}} BU_{k-1-q} + \sum_{q=0}^{k-1} \Phi^{\bar{x}} w_{k-1-q} &\leq b_k - Ew_k - \Phi^{\bar{x}} \bar{X}_0 \\ k &= 1, 2, \dots, N \\ \bar{X}_0 &= \bar{X}(t_0) \\ \forall k &= 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (22)$$

بدست می‌آید. نکته حائز اهمیت آن‌که با این روش بطور قابل ملاحظه‌ای از حجم محاسبات آنلاین کاسته می‌شود که در بخش بعدی این مهم مورد بررسی قرار گرفته است. برای نشان دادن کارایی روش جدید، دو مثال ارائه و حل شده است و جواب‌های بدست آمده از روش RMPC با روش MPC استاندارد مقایسه شده است. لازم به ذکر است که برای حل این مثال‌ها از نرم افزار Matlab و Cplex 12.1 و جعبه ابزار YALMIP بر روی سیستم عامل ویندوز ۷ (Intel(R) Core(TM) i5, 2.5 GHZ, 2G RAM) استفاده شده است.

چون در مساله کنترل بهینه (۲۱) هدف حداقل کردن تعداد وسیله نقلیه موجود در شبکه می‌باشد، ماتریس \bar{Q} یک ماتریس با داریه‌های یک در نظر گرفته شده است. علاوه بر این ماتریس \bar{R} ماتریسی با وزن‌های منفی از جریان ترافیک بر روی هر لینک فرض شده است، $\bar{R} = -\eta[f_1, \dots, f_L, 0, \dots, 0]$ که در آن $\eta \ll 1$ نتایج بدست آمده در [۱۱] نشان می‌دهد که کنترل کننده MPC طراحی شده با این تابع هدف به خوبی

جواب مساله min-max پارامتریک (۲۲) با توجه به قضیه ۱ با استفاده از حل یک مساله $mp-LP$ بدست می‌آید. در واقع با این روش یکی از اشکالات اصلی MPC، یعنی نیاز به حل آنلاین مساله بهینه‌سازی برای محاسبه هر تلاش کنترلی برطرف می‌گردد و این امکان را میسر می‌سازد که مساله بهینه‌سازی بصورت آفلاین برای ناحیه شدنی مورد انتظار حل شود. در این قضیه با بهره‌گیری از تکنیک mp-P کنترل بهینه بصورت یک تابع صریح از حالت‌های سیستم بصورت آفلاین از قبل محاسبه می‌شود و جواب نهایی بصورت آنلاین در یک جدول جست و جو، پس از یافتن ناحیه بحرانی و جایگذاری حالت‌های سیستم در تابع بهینه قطعه‌ای آفین متناظر با آن،

۴-۱- نتایج عددی

مساله بهینه‌سازی را بصورت آنلاین حل می‌کند [Le et al. 2013]، اما در RMPC با استفاده از برنامه‌ریزی چندپارامتریک، جواب صریح بصورت آفلاین از قبل محاسبه شده و تلاش کنترلی بهینه در هرگام پس از جست و جو در ناحیه‌های بحرانی، بصورت آنلاین محاسبه می‌شود.

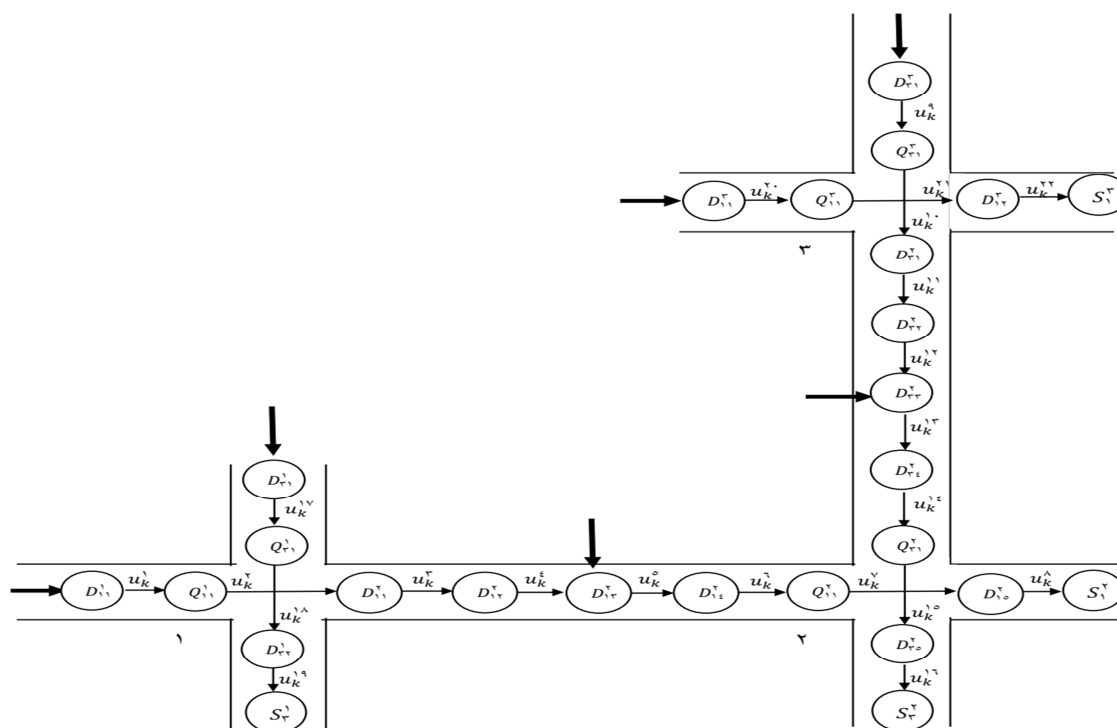
در بخش قبلی یک RMPC برای شبکه ترافیک شهری در حالت کلی طراحی شد که در این بخش با استفاده از رابطه (۲۲) و قضیه ۱ دو مثال از شبکه ترافیک شهری مورد مطالعه قرار گرفته و پس از اعمال MPC و RMPC بر روی آن‌ها نتایج مقایسه شده است. لازم به ذکر است که MPC در هرگام

۱-۴-۲-مثال

وسیله نقلیه بطور متوسط ۵ متر و مینیمم فاصله بین آن‌ها در شرایط ازدحام ۲۰۵ متر فرض شده است، بنابراین ظرفیت کلاس‌ها بطور متوسط ۱۳۵ در نظر گرفته شده است. نرخ جریان بر روی هر لینک در [Le et al. 2013] توسط شبیه‌سازی طولانی مدت در SUMO^{۱۱} و تحت بار ترافیکی سنگین اندازه‌گیری شده است و مقادیر زیر گزارش شده است

$$\begin{aligned} f_1 &= f_2 \dots = \\ f_{16} &= 45, \\ f_{17} &= f_{18} = \dots = f_{22} = 20. \end{aligned}$$

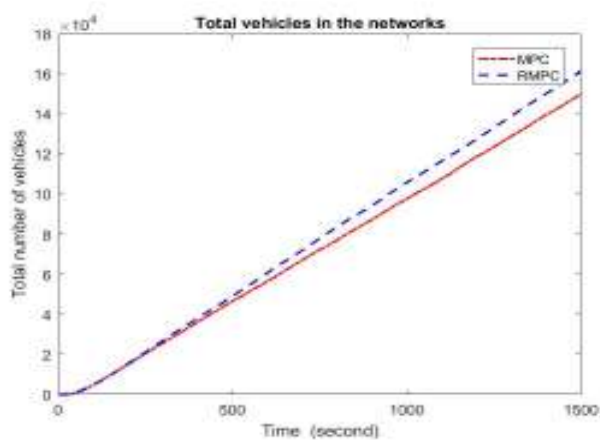
شبکه ارایه شده در شکل ۲ را در نظر بگیرید. در این مثال بدلیل اینکه نتایج بدست آمده قابل مقایسه باشد، پارامترهای مرجع [Le et al. 2013] در آن اعمال شده است. شبکه دارای سه تقاطع می‌باشد و با ۲۲ کلاس مختلف مدل‌سازی شده است. سرعت آزاد وسایل نقلیه ۶۰ کیلومتر در ساعت و هر صف متناظر با یک کیلومتر از جاده فرض شده است. طول



شکل ۲. شبکه ترافیکی مدل شده با کلاس‌های صف و با جریان ورودی به سیستم در کلاس‌های $D_{11}^3, D_{31}^1, D_{33}^2, D_{31}^3, D_{13}^2, D_{11}^1$

این که مساله (۲۲) نتیجه شده به صورت آفلاین حل شده و تابع بهینه مساله دارای فرم قطعه‌ای آفین می‌باشد، در هر گام زمانی دیگری نیازی به حل آنلاین یک مساله بهینه‌سازی نیست بنابراین میزان محاسبات آنلاین مساله بطور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد (جدول ۳) و امکان‌پذیری روش را در شبکه‌های ترافیک واقعی ممکن می‌سازد.

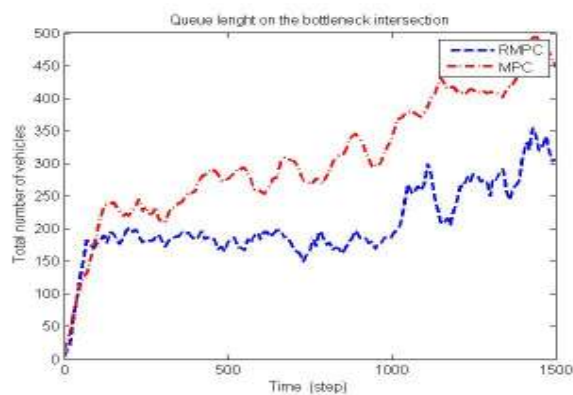
کلاس‌های $D_{11}^1, D_{13}^2, D_{31}^3, D_{33}^2, D_{31}^1$ و D_{11}^3 نیز دارای جریان ورودی به سیستم هستند که در روش جدید ارائه شده برای مدل‌سازی عدم قطعیت ورودی به سیستم فرض شده است که نرخ جریان ورودی به سیستم درون به چندوجهی کراندار واقع باشد. به عبارتی کنترل جدیدی برای شبکه طراحی می‌شود که در مقابل هر جریان ورودی به سیستم که در رابطه (۱۸) صدق کند مقاوم است. علاوه بر این با توجه به



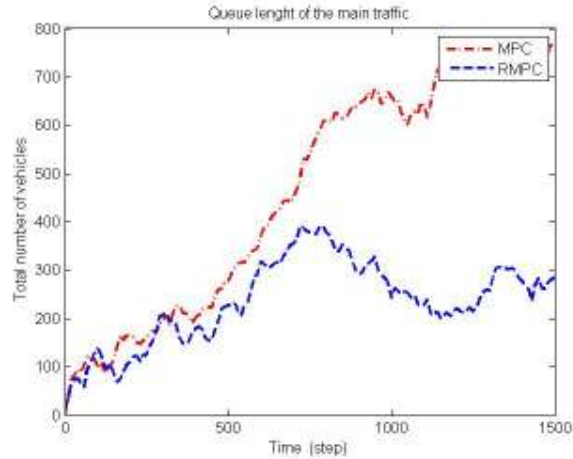
شکل ۳. تعداد کل وسایل نقلیه ای که از شبکه خارج شده‌اند در مثال ۱.

جدول ۴. مقایسه میزان محاسبات آنلاین روش MPC و RMPC در مثال ۱ (برحسب دقیقه (min)، ثانیه (s)، میلی ثانیه (ms))

گام زمانی	RMPC	MPC
	min:s:ms	min:s:ms
100	0:3:537	1:1:795
200	0:7:018	2:17:119
500	0:17:195	7:34:312



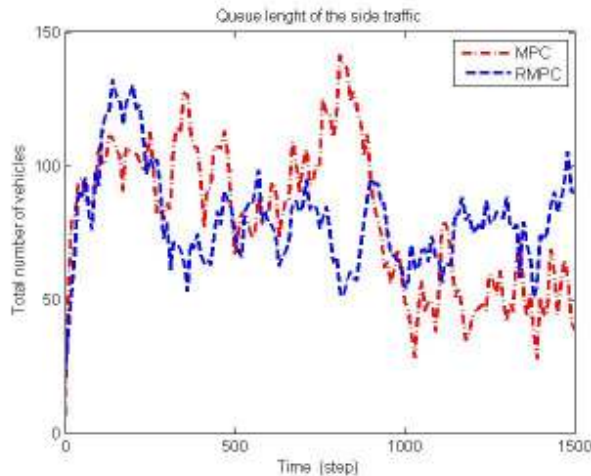
شکل ۴. مجموع کل وسایل نقلیه در مسیر منتهی به تقاطع دوم در مثال ۱



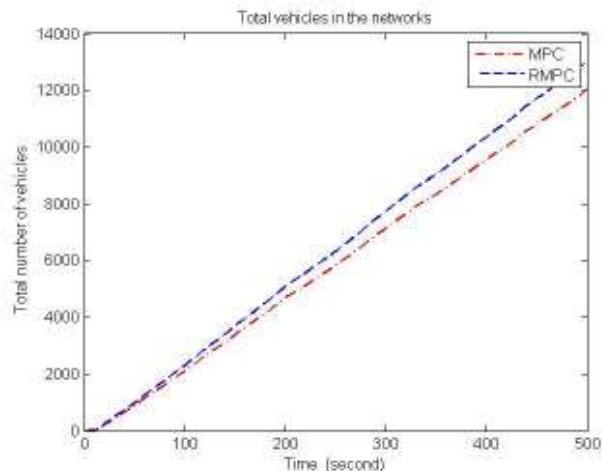
شکل ۵. مجموع کل وسایل نقلیه در مسیر ترافیک اصلی منتهی به تقاطع دوم در مثال ۱

MPC تلاش می‌کند تا طول صف‌ها در مسیر اصلی و فرعی (شکل‌های ۵ و ۶) که می‌تواند منجر به ازدحام ترافیک در تقاطع دوم شود کاهش دهد و مجموع آن‌ها را در یک بازه مشخصی حفظ کند و در عین حال توان شبکه را کمی بهبود می‌دهد (شکل ۳). در این مثال، حالتی که شبکه دارای کلاس Q هم باشد، تعیین جهت چرخش وسایل نقلیه، در نظر گرفته نشده است. در مثال بعدی شکل جامع‌تری از شبکه (شکل ۱) که در بخش ۳ توضیحات مدل بر روی آن انجام شد در نظر گرفته شده است. تا موثر بودن روش برای تعیین نرخ چرخش به کلاس‌های پایین‌تر نیز مورد بررسی قرار گیرد.

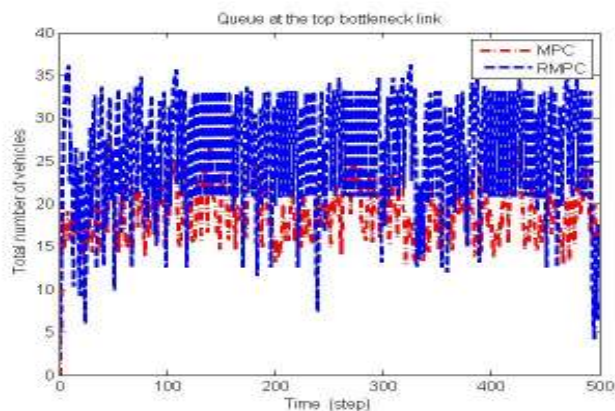
جاده‌های اصلی که باعث تراکم در تقاطع دوم می‌شوند با کلاس‌های انتظار D_{11}^1 و D_{11}^2 ، D_{12}^2 ، D_{15}^2 ، ... در مسیر غرب به شرق و کلاس‌های D_{31}^3 و D_{31}^2 ، D_{32}^2 ، D_{35}^2 ... در مسیر شمال به جنوب در نظر گرفته شده است. دو مسیر ترافیکی در میزان ازدحام در تقاطع دوم موثر هستند یکی مسیر اصلی $Q_{11}^1 - D_{11}^1$ و $Q_{31}^3 - D_{31}^3$ و مسیرهای فرعی $Q_{11}^3 - D_{11}^3$ و $Q_{31}^1 - D_{31}^1$ که نتایج بدست آمده با روش RMPC گزارش می‌شود و با نتایج روش MPC مرجع [Le et al. 2013]، در طول افق پیش بین $N = 10$ مقایسه شده است. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که RMPC در مقایسه با



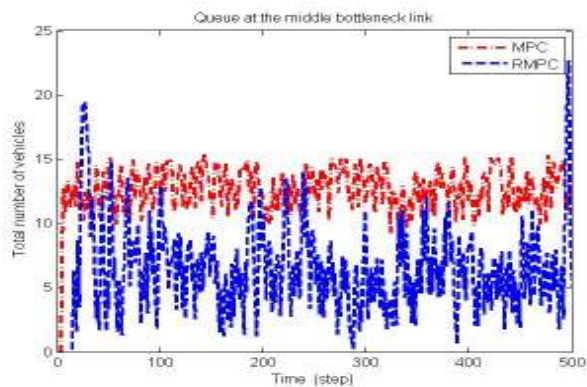
شکل ۶. مجموع کل وسایل نقلیه در مسیر ترافیک فرعی منتهی به تقاطع دوم در مثال ۱



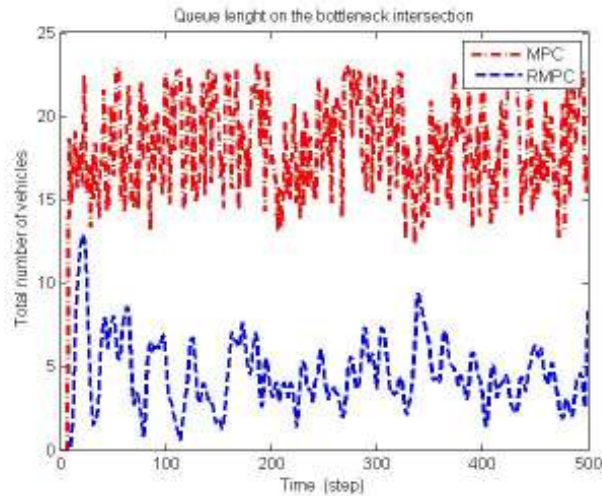
شکل ۷. تعداد کل وسایل نقلیه ای که از شبکه خارج شده‌اند در مثال ۲



شکل ۸. مجموع Q_{12}^1 و D_{11}^1 در مثال ۲



شکل ۹. مجموع Q_{32}^2 و D_{11}^2 در مثال ۲

شکل ۱۰. مجموع D_{14}^2 و D_{34}^2 در مثال ۲

کنترلر پیش‌بین با در نظر گرفتن نرخ جریان ورودی به عنوان یک پارامتر کراندار که در رابطه (۱۸) صدق می‌کند طراحی شده است. سپس در کنترلر بدست آمده پس از مقدار دهی آن با مقادیر گزارش شده توسط لی و همکاران [Le et al. 2013] با در نظر گرفتن $N = 10$ ، نتایج گزارش و مقایسه شده است. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که RMPC در مقایسه با MPC توان شبکه را افزایش می‌دهد (شکل ۷) و علاوه بر آن، طول صف‌ها در مسیرهایی که می‌توانند باعث ازدحام در شبکه شوند را به خوبی کنترل کند (شکل‌های (۸-۱۰)). همچنین میزان محاسبات آنلاین مساله در جدول ۴ مقایسه شده است که نشان می‌دهد که با روش جدید ارائه شده میزان محاسبات بطور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد

۴-۳- مثال ۲

شبکه نشان داده شده در شکل ۱ را در نظر بگیرید. شبکه با کلاس‌های D, R, Q و S مدل‌سازی شده است. در این شبکه هدف کنترلر RMPC تقسیم زمان سبز بین مسیرها به گونه‌ای است که ازدحام داخل شبکه کاهش یابد. مشابه مثال قبلی سرعت آزاد وسایل نقلیه ۶۰ کیلومتر در ساعت و هر صف متناظر با یک کیلومتر از جاده فرض شده و ظرفیت کلاس‌ها ۱۳۵ در نظر گرفته شده است. نرخ جریان بر روی لینک‌های ۴، ۱۸ و ۲۵ مقدار ۷ و بر روی بقیه لینک‌ها ۳۰ در نظر گرفته شده است. همچنین فقط کلاس R_1^1 دارای جریان ورودی به سیستم می‌باشد که مقدار آن ۱۷ ماشین در هر چرخه فرض شده است [Le et al. 2013]. در روش جدید ارائه شده

جدول ۵. مقایسه میزان محاسبات آنلاین روش MPC و RMPC در مثال ۲ (برحسب دقیقه (min)، ثانیه (s)، میلی ثانیه (ms))

گام زمانی	RMPC	MPC
	min:s:ms	min:s:ms
100	0:07:162	1:9:723
200	0:14:615	2:30:347
500	0:35:483	7:33:557

۵- نتیجه گیری

این مقاله از mp-P کمک گرفته شده است. نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که با تبدیل محاسبات مربوط به بهینه‌سازی مساله از آنالین به آفلاین می‌توان شبکه را در مقابل اغتشاش ورودی به آن مقاوم کرد و میزان محاسبات آنالین را نیز بطور قابل ملاحظه‌ای کاهش داد. حائز اهمیت است که روش پیشنهادی با توجه به عدم قطعیت در جریان ترافیک ورودی به شبکه و همچنین محدودیت‌های حاکم بر آن، قادر است کنترل بهینه سیگنال ترافیک و کنترل زمان چرخش را به طور بهینه تقسیم کند بگونه‌ای که ضمن کاهش تعداد وسایل نقلیه موجود در شبکه، از ازدحام ترافیک درون آن نیز جلوگیری کند. همچنین نتایج بدست آمده حاکی از آن است که با استفاده از روش پیشنهادی امکان کاربرد عملی RMPC در شبکه‌های واقعی ترافیکی، بدلیل کاهش زمان محاسبات آنالین، وجود دارد.

در این مقاله کاربرد RMPC برای کنترل سیگنال‌های ترافیکی با هدف به حداقل رساندن ازدحام در شبکه ترافیک شهری مورد بررسی قرار گرفت. مدل انتخاب شده در کنترل پیش‌بین نقش بسیار مهمی در عملکرد آن دارد و همچنین عدم قطعیت بطور گسترده در شبکه واقعی ترافیک وجود دارد. بنابراین از بین مدل‌های ارائه شده برای شبکه ترافیک شهری مدلی انتخاب شده است که ضمن در نظر گرفتن عدم قطعیت در جریان ورودی به شبکه بسیاری از ویژگی‌های مورد نیاز آن را، از جمله زمان سفر بین لینک‌ها، کنترل هم‌زمان سیگنال ترافیک و زمان‌های چرخش در تقاطع‌ها و خطی بودن مدل را برآورده می‌کند. توجه به این نکته ضروری است که در نظر گرفتن چنین شرایطی برای شبکه اگرچه نیاز واقعی ما را تا حدی برآورده می‌کند ولی امکان پیاده‌سازی آن بدلیل حجم محاسبات آنالین در MPC در عمل وجود ندارد که برای غلبه بر این مشکل در

۶- پی‌نوشت‌ها

- 1-Traffic Signal Control (TSC)
- 2- Model Predictive Control (MPC)
- 3- Store-And-Forward (SF)
- 4- Mixed Integre Linear Programming (MILP)
- 5- Decentralized Model Predictive Control
- 6- Robust Model Predective Control (RMPC)
- 7- Multiparametric Programming (mp-P)
- 8- Explicit Model Predective Control (EMPC)
- 9- Multi-Parametric Linear Programming (mp-LP)
- 10- Open-Loop Constrained Robust Optimal Control Problem (CROC- OL)
- 11- Simulation Of Urban Mobility (SUMO)

۷- مراجع

Part C: Emerging Technologies, 17(2), pp.163-174.

-Bemporad, A., Heemels M. and Vajdemo-Johansson, M., (2010), "Networked Control Systems", London, SpringerVerlag.

-Berg, M., Hegyi A., Schutter B., and Hellendoorn, H., (2007), "Integrated traffic control for mixed urban and freeway networks: A model predictive control approach", European Journal of Transport and Infrastructure Research, 7(3).

Aboudolas, K., Papageorgiou, M., Kouvelas, A., and Kosmatopoulos, E., (2010), "A rolling-horizon quadratic-programming approach to the signal control problem in large-scale congested urban road networks", Transportation Research Part C: Emerging Technologies, 18(5), pp. 680-694.

-Aboudolas, K., Papageorgiou, M., and Kosmatopoulos, E., (2009), "Store-and-forward based methods for the signal control problem in large-scale congested urban road networks", Transportation Research

-Le, T, Vu, H. L., Nazarathy Y., Vo Q. B., and Hoogendoorn, S., (2013), "Linear-quadratic model predictive control for urban traffic networks", *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 36, pp. 498 – 512.

-Lu, K., Du, P. J., Cao Q., Zou T. He, and Huang, W., (2019), "A novel traffic signal split approach based on explicit model predictive control", *Mathematics and Computers in Simulation*, 155, pp. 105 – 114.

-Tettamanti, T., Luspay T. Kulcsár B. Péni T. and Varga, I., (2014), "Robust control for urban road traffic networks", in *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 15(1), pp. 385–398.

-Yin, Y., (2008), "Robust optimal traffic signal timing", *Transportation Research Part B: Methodological*, 42(10), pp. 911 – 924.

-Borrelli, F., Bemporad. A. and Morari, M., (2017), "Predictive Control for Linear and Hybrid Systems," London, Cambridge University Press.

-Chui, C. K. and Chen, G., (1989), "Linear Systems and Optimal Control," Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag.

-Frejo, J. R. D., and Camacho, E. F., (2012), "Global versus local mpc algorithms in freeway traffic control with ramp metering and variable speed limits", *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 13(4), pp. 1556-1565.

-Lin, S., Schutter, B. D., Xi Y., and Hellendoorn, H., (2011), "Fast model predictive control for urban road networks via MILP", *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 12(3), pp. 846– 856.

Explicit Robust Model Predictive Control for Urban Traffic Network

Maryam Mahmoudi, Ph.D., Student, Department of Mathematics, Payame Noor University (PNU), Tehran, Iran.

Aghileh Heydari, Professor, Department of Mathematics, Payame Noor University (PNU), Tehran, Iran.

Ali Karimpour, Professor, Department of Electrical Engineering, Faculty of Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran.

E-mail: mrym.mahmoudi@gmail.com

Received: September 2021- Accepted: February 2022

ABSTRACT

Traffic cycle time's optimization and route control at urban traffic intersections is an important and complex issue in situations where the network is facing uncertainty. In this paper, a new method for obtaining the optimal traffic signal for the urban traffic network is presented which one of the important features of the proposed method is that uncertain traffic demands are taken into account. For this purpose, among all proposed models for the urban traffic network, a model with the uncertainty is selected, and designs a robust model predictive control for this. Besides, to overcome the complexity of online computing, multi-parametric programming has been used to solve the model offline, and the designed controller has been analyzed using traffic data. The results show that while meeting many of the network needs, the proposed control scheme may reduce the amount of online computing, which makes it possible to use it in real urban traffic networks.

Keywords: Explicit Model Predictive Control, Robust Model Predictive Control, Urban Traffic Network, Traffic Signal Control, Multi-Parametric Programming