



## Numerical Simulation of Breaking Waves in Front of Seawalls Using Projection Method

M. Riahi<sup>1</sup>, H. Khaleghi<sup>2</sup>  
M. M. Namin<sup>3</sup>, A. H. Daloui<sup>4</sup>

### Abstract

The complicated structure of the surf zone with a strong unsteadiness has prevented us to fully understand its internal structure. Numerical models are one of the best tools to study hydrodynamic phenomena in this zone. In this paper, a two-dimensional vertical (2DV) model is proposed to study breaking waves in front of seawalls. The numerical model consists of an unsteady hydrodynamic module in which the fully Navier-Stokes equations in vertical plain are solved using the projection method. Finite volume method is employed to discrete convection and diffusion terms of governing equations with Froum and Crank Nicolson methods, respectively. The free surface water is tracked by using the Young technique. Using standard  $k - \epsilon$  model to simulate turbulence effects showed reasonable results. Finally, the numerical results are compared with wave flume measurements for the same conditions. The result of the proposed model shows close agreement with experimental measurements in terms of surface elevations, horizontal and vertical velocity and flow pattern in front of the seawall.

**Keywords:** Numerical Simulation, Projection Method, Finite Volume Method,  $k - \epsilon$  Turbulence Model, Breaking Waves, Seawalls

## شبیه سازی عددی شکست امواج در مقابل دیواره ساحلی با استفاده از روش پروجکشن

محمد ریاحی<sup>۱</sup>، حسن خالقی<sup>۲</sup>  
مسعود منتظری نمین<sup>۳</sup>، علی حسن زاده دلویی<sup>۴</sup>

### چکیده

محیط‌های ساحلی به جهت حضور توام امواج و جریانات دریایی دارای ساختاری نسبتاً پیچیده هستند که این امر مانع حصول شناخت کافی پدیده‌ها در این ناحیه گردیده است. توسعه مدل‌های عددی یکی از ابزارهای بسیار کارآمد جهت شبیه سازی پدیده‌های هیدرودینامیکی بوده و بطور گسترده‌ای در حل مسائل دریایی کاربرد دارند. در تحقیق حاضر نیز به منظور شبیه سازی شرایط امواج و جریانات در مجاورت سواحل، با مد نظر قرار دادن پدیده شکست موج و در حضور دیواره ساحلی، نسبت به توسعه مدل عددی دو بعدی در قائم اقدام گردیده است. در مدل مزبور با انتخاب روش‌های مناسب جهت منفصل‌سازی جملات انتقال و پخشیدگی و نیز با بکارگیری روش پروجکشن، معادلات دو بعدی در قائم ناویر استوکس به کمک روش عددی احجام محدود مورد حل قرار گرفته و ضمن بررسی دقت برخی از روش‌های شناخته شده سطح آزاد، روش Young به منظور محاسبه شکل سطح آزاد محیط آبی انتخاب شده است. جهت اعمال اثرات آشفتگی جریان، شبیه‌سازی دقیق این پدیده با استفاده از مدل استاندارد  $k - \epsilon$  در برنامه حاضر صورت گرفته که نتوانسته است نتایج قابل قبولی را در این زمینه به همراه داشته باشد. در پایان ضمن بررسی صحت نتایج حاصل از اجرای برنامه بر روی نمونه مسئله حل شده در تحقیقات قبلی، خروجی‌های مدل عددی مورد نظر، با اطلاعات برداشت شده از شبیه‌سازی آزمایشگاهی برای شرایط مشابه ایجاد شده در فلوم امواج مورد مقایسه قرار گرفته است که نتایج این مقایسه حکایت از همخوانی مناسب فیمابین خروجی‌های مدل عددی و اطلاعات برداشت شده از نمونه آزمایشگاهی دارد.

**کلمات کلیدی:** شبیه سازی عددی، روش پروجکشن، روش احجام محدود، مدل آشفتگی  $k - \epsilon$ ، شکست امواج، دیوار ساحلی

1- Ph. D. in Hydraulics, Tarbiyat Modarres University, Tehran, Iran  
2- Assistant Professor, Tarbiyat Modarres University, Tehran, Iran  
3- Assistant Professor, Tehran University, Tehran, Iran  
4- Sharif University of Technology, Tehran, Iran

۱- دکترای هیدرولیک، دانشگاه تربیت مدرس  
۲- استادیار، دانشگاه تربیت مدرس  
۳- استادیار، دانشکده فنی دانشگاه تهران  
۴- کارشناس ارشد، دانشگاه صنعتی شریف

گسترده‌ای بدنبال داشته است (Neshaei, 1997). هر یک از محققین درگیر در این مسئله با بکارگیری شیوه‌ای خاص از روش عددی مورد استفاده، نوع معادلات مورد حل، روش اعمال اثر شکست امواج و نیز ملحوظ نمودن اثرات آشفتگی جریانات ناشی از شکست موج، تلاشی را در جهت توسعه مدل عددی ساده، توام با افزایش دقت در شبیه‌سازی پدیده‌های حاکم نموده‌اند. در این تحقیق نیز با بررسی مطالعات انجام شده قبلی و نقاط ضعف و قوت روشهای حل نسبت به توسعه مدلی با دقت مناسب اقدام گردیده که در ادامه به تشریح جزئیات آن پرداخته شده است.

## ۲- معادلات حاکم و روش حل

حل کامل معادلات ناویر استوکس در سه بعد فضایی توام با اعمال اثرات سایر پدیده‌های دخیل در شبیه‌سازی محیط‌های هیدرولیکی می‌تواند جزئیات شرایط هیدرودینامیکی را در اختیار قرار دهد. لیکن مشکلات کاربرد چنین مدل‌هایی محققین را به تلاش در جهت توسعه مدل‌های ساده‌تر واداشته است (Rakha, et al., 1998). در بررسی اثر هجوم امواج دریایی به سمت ساحل، توسعه مدل دو بعدی در قائم توانایی لازم را برای شبیه سازی محیط حل دارا می‌باشد (Coastal Engineering Manual, 1998)، لذا در اینجا معادلات ناویر استوکس در دو راستای طول و ارتفاع شامل یک معادله پیوستگی به شکل رابطه (۱) و دو معادله حرکت (۲) و (۳) بترتیب در جهات x و z و مورد حل قرار گرفته‌اند.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial}{\partial z}(uw) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\nu_r \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu_r \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uw) + \frac{\partial}{\partial z}(w^2) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu_r \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( 2\nu_r \frac{\partial w}{\partial z} \right) - g \quad (3)$$

که در آن u و w به ترتیب مولفه‌های سرعت در راستای x، y و z هستند. P، ρ و V<sub>r</sub> نیز به ترتیب فشار کل، چگالی و لزجت گردابه‌ای می‌باشند.

یکی از روشهای معروف جهت حل این معادلات روش SIMPLE<sup>۳</sup> می‌باشد. در این شیوه میدان فشار مفروض در قالب روشی تکراری بطور مکرر اصلاح شده تا زمانی که معادله پیوستگی ارضاء شود، لذا نتایج میانی حاصل طی فرایند تکراری حل عددی بکمک این روش

احداث سازه‌های گوناگون در نواحی ساحلی در راستای توسعه بهره‌برداری از ظرفیت‌های موجود در این نقاط و نیز ساخت دیواره‌های قائم در امتداد خط سواحل به منظور جلوگیری از هجوم امواج دریا بسمت خشکی بعنوان روشی بسیار متداول در حفاظت از سواحل، در اغلب کشورهایی که دارای مرز آبی هستند به وفور قابل مشاهده می‌باشد. استفاده از این سازه‌ها به جهت اثر متقابل برخورد امواج با سازه دیوار ساحلی و تغییر شرایط هیدرودینامیکی در مجاورت ساحل و به تبع آن تغییر شکل پروفیل بستر دریا در این ناحیه، مسائل و مشکلاتی را نیز به همراه داشته و همواره ضرورت توجه به آن از جنبه‌های گوناگون مورد تاکید قرار گرفته است، اگر چه جریانات دریایی در دو شکل کلی عمود بر ساحل و موازی با خط ساحلی وجود دارد، لیکن در اکثر مواردی که سازه بصورت موازی و در محل خط ساحلی واقع شده باشد، به منظور ساده‌سازی مسئله مورد بررسی و کاربردی کردن آن، مولفه عمود بر ساحل مد نظر قرار داشته است (Coastal, 1998). در تحقیق حاضر نیز هجوم امواج و ایجاد جریانات در جهت عمود بر ساحل مورد بررسی قرار گرفته است. روش مورد استفاده در این تحقیق شبیه‌سازی عددی پدیده بوده که بدین منظور توسعه مدل عددی دو بعدی در قائم مد نظر قرار گرفته است. همچنین ساخت و آزمایش نمونه آزمایشگاهی در فلوامواج، امکان صحت سنجی نتایج حاصل از اجرای مدل عددی را با مقایسه اطلاعات برداشت شده از نمونه فیزیکی فراهم نموده است.

تاکنون روشهای گوناگونی به منظور شبیه‌سازی عددی حرکت امواج در ناحیه مجاور ساحل مورد استفاده قرار گرفته است. در اغلب این روش‌ها با انجام ساده‌سازی‌هایی بر روی معادلات کلی حرکت، سعی گردیده تا گامی در جهت ساده‌سازی حل مسائل برداشته شود. از جمله شناخته شده‌ترین این روشها می‌توان به حل معادلات شیب ملایم<sup>۱</sup> برخوف و یا حل معادلات بوزینسک اشاره نمود (Rakha et al., 1998). استفاده از این شیوه‌ها برای شبیه‌سازی حرکت امواج ضرورت حل معادلات مربوط به تنشهای تشعشی<sup>۲</sup> را جهت محاسبه مقادیر سرعت جریانات می‌طلبد. از طرفی فقدان شیوه مناسب برای اعمال اثر شکست موج، کاربرد این روشها در حل مسئله حاضر را محدود نموده است. تا کنون مدل‌های متعددی برای شبیه‌سازی پدیده مورد بررسی ارائه شده است که در آنها سعی گردیده تا حتی المقذور اثر عوامل دخیل در چگونگی شرایط هیدرودینامیکی در محیط ساحلی اعمال گردد. لیکن ساده‌سازی‌های انجام شده در توسعه بخش اعظم این مدل‌ها و نیز ضرورت بکارگیری روشهای گوناگون در بررسی چگونگی عملکرد آنها در تخمین دقیقتر شرایط حاکم، ادامه این تحقیقات را در سطح

در جاییکه  $x$  و  $t$  مختصات طولی و زمانی را نمایش داده و  $c$ ،  $\varepsilon$  و  $q$  نیز عبارتند از مقادیر مشخصه اسکالر شامل غلظت، ضریب پخشیدگی و عبارت چشمه و چاه.

بر اساس روش کرنک نیکلسون داریم:

$$c_i^{n+1} - c_i^n = \frac{\varepsilon}{\Delta t} \frac{1}{2} \left( \frac{c_{i+1}^{n+1/2} - c_i^{n+1/2}}{\Delta x} \right) - \varepsilon \frac{1}{2} \left( \frac{c_i^{n+1/2} - c_{i-1}^{n+1/2}}{\Delta x} \right) \quad (5)$$

برای بدست آوردن مقادیر در مرحله  $n + 1/2$  از متوسطگیری مقادیر در دو مرحله قبل و بعد به شرح ذیل استفاده می‌نمائیم:

$$c_i^{n+1/2} = \frac{c_i^n + c_i^{n+1}}{2} \quad (6)$$

$$c_{i+1}^{n+1/2} = \frac{c_{i+1}^n + c_{i+1}^{n+1}}{2} \quad (7)$$

با جایگذاری روابط (6) و (7) در رابطه و ساده سازی آن خواهیم داشت:

$$c_i^{n+1} - c_i^n - \frac{\Delta t \varepsilon}{2 \Delta x^2} \left( c_{i+1}^{n+1} + c_{i+1}^n - c_i^{n+1} - c_i^n \right) \quad (8)$$

$$+ \frac{\Delta t \varepsilon}{2 \Delta x^2} \left( c_i^{n+1} + c_i^n - c_{i-1}^{n+1} - c_{i-1}^n \right) = 0$$

و یا:

$$A.c_{i+1}^{n+1} + B.c_i^{n+1} + C.c_{i-1}^{n+1} = D \quad (9)$$

در جاییکه داریم:

$$A = -\frac{\Delta t \varepsilon}{2 \Delta x^2} \frac{1}{2}$$

$$B = 1 - \frac{\Delta t \varepsilon}{2 \Delta x^2} \frac{1}{2} + \frac{\Delta t \varepsilon}{2 \Delta x^2} \frac{1}{2}$$

$$C = -\frac{\Delta t \varepsilon}{2 \Delta x^2} \frac{1}{2}$$

$$D = \frac{\Delta t \varepsilon}{2 \Delta x^2} \frac{1}{2} c_{i+1}^n + \left( 1 - \frac{\Delta t \varepsilon}{2 \Delta x^2} \frac{1}{2} - \frac{\Delta t \varepsilon}{2 \Delta x^2} \frac{1}{2} \right) c_i^n + \frac{\Delta t \varepsilon}{2 \Delta x^2} \frac{1}{2} c_{i-1}^n$$

ضرورتاً منطبق بر فیزیک پدیده نمی‌باشد. روش دیگری که در آن این نقیصه بر طرف شده است روش پروجکشن<sup>۴</sup> Chorin (1968) نام دارد. در این شیوه، معادلات در مراحل زمانی مختلف مورد حل قرار می‌گیرند و بدین سبب این روش به نامهای دیگری نظیر الگوی دو نیم کردن<sup>۵</sup> یا روش گام کسری<sup>۶</sup> شناخته شده و در حل مسائل مربوط به جریانهای لزج و غیرقابل تراکم با اعداد رینولدز متوسط کاربرد دارد. با اعمال این روش بر روی معادلات ناویر استوکس، در گام نخست از طریق معادلات مومنتوم با نادیده گرفتن قیود تراکم-پذیری (حذف جمله فشار) یک میدان سرعت میانی محاسبه شده و سپس در گام دوم به کمک سرعت میانی و این بار از طریق معادله پیوستگی مقادیر فشار و سپس سرعت‌های مرحله بعدی محاسبه می‌شوند. روش گام کسری نخستین بار توسط Yanenko (1971) مورد استفاده قرار گرفت که چگونگی اجرای مراحل آن در ادامه تشریح گردیده است. لیکن در ابتدا لازم است تا نحوه گسسته‌سازی جملات انتقال و پخشیدگی تعیین شود.

استفاده از روشهای گسسته‌سازی مرتبه اول برای مسائلی که در آن پدیده حاکم عامل پخشیدگی باشد<sup>۷</sup>، به جهت ناچیز بودن عامل پخشیدگی عددی در مقابل پخشیدگی طبیعی نتایج قابل قبولی را بدنبال خواهد داشت، لیکن در مسئله حاضر که پدیده انتقال حاکم است<sup>۸</sup> بکارگیری چنین روشی بدلیل تعدیل بیش از حد در شیب تند تغییرات پارامترهای مورد حل، خطای قابل ملاحظه‌ای را در نتایج به همراه دارد. از طرفی استفاده از روشهای با مرتبه بالا بعضاً ایجاد نوسانات شدید در نتایج خروجی را در پی خواهد داشت. لذا در توسعه مدل حاضر سعی گردید تا با بررسی روشهای گوناگون نسبت به گزینش روش مناسب اقدام گردد. لازم به توضیح است با عنایت به اینکه در توسعه مدل عددی حاضر بکارگیری روش احجام محدود<sup>۹</sup> مد نظر قرار دارد، لذا در استخراج روابط مربوط به منفصل‌سازی جملات انتقال و پخشیدگی، اصول حاکم بر این روش اعمال گردیده است.

### منفصل سازی عبارت پخشیدگی

به منظور منفصل‌سازی عبارت پخشیدگی از روش مرتبه دوم کرنک نیکلسون<sup>۱۰</sup> استفاده شده است. جهت تشریح این روش در اینجا اعمال آن بر روی معادله ساده ذیل (۴) که به کمک آن مشخصه غلظت پخشیده شده، مد نظر قرار گرفته است:

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \varepsilon \frac{\partial c(x,t)}{\partial x} \right) = q \quad (4)$$

جملات انتقال و پخشیدگی گسسته سازی زمانی شده و گام به گام نسبت به حل مسئله اقدام شود. لذا در ابتدا بر اساس میدان سرعت در گام زمانی n، مقادیر سرعتها طبق رابطه (۱۲) تحت اثر پدیده انتقال جابجا شده و سرعت میانی مرحله اول ( $u^*$ ) محاسبه می‌گردد:

$$\frac{u_i^* - u_i^n}{\Delta t} = \left[ -\frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) \right]^n \quad (12)$$

سپس در مرحله بعدی به کمک سرعتهای بدست آمده اخیر، عبارت پخشیدگی معادلات طبق رابطه (۱۳) حل شده و دومین سرعتهای میانی جدید ( $u^{**}$ ) محاسبه می‌شود:

$$\frac{u_i^{**} - u_i^*}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ v_i \left( \frac{\partial u_i^{(*)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(*)}}{\partial x_i} \right) \right] \quad (13)$$

در این روش در واقع هر یک از متغیرها (سرعتهای جهات x و z) به تفکیک در هر دو جهت بر اساس پدیده انتقال و پخشیدگی جابجا و مقدار نهایی سرعتهای میانی برای هر گام زمانی به مرحله بعدی محاسبات منتقل می‌گردد. لازم به ذکر است که مقادیر سرعتهای میانی بدست آمده در این مرحله، ضرورتاً معادله پیوستگی را ارضاء نمی‌کند.

در گام دوم لازم است تا با بکارگیری توام معادله پیوستگی و معادله حرکت در غیاب جملات انتقال و پخشیدگی، نسبت به محاسبه مقادیر فشار اقدام گردد. چگونگی انجام این مرحله از محاسبات به این طریق است که در ابتدا رابطه بین مشتقات سرعت و فشار به شکل روابط (۱۴) بازنویسی شده (معادله حرکت بدون جملات انتقال و پخشیدگی)، و سپس با منفصل‌سازی زمانی و مکانی معادلات فوق، تساویهای مربوط به مقدار سرعت در گام زمانی بعد بر اساس مقادیر سرعتهای میانی و فشارهای مرحله جدید بصورت روابط (۱۵) بدست آید:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial z} = -g \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1} - u^{**}}{\Delta t} + \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x} = 0 \\ \frac{w^{n+1} - w^{**}}{\Delta t} + \frac{\partial P^{n+1}}{\partial z} = -g \end{cases} \quad (15)$$

در نتیجه داریم:

$$u_{i+\frac{1}{2},k}^{n+1} = u_{i+\frac{1}{2},k}^{**} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (P_{i+1,k}^{n+1} - P_{i,k}^{n+1})$$

### - منفصل سازی عبارت انتقال

انتخاب روش مناسب جهت منفصل نمودن عبارت مربوط به عامل انتقال در معادلات حاکم بر پدیده مورد بررسی در اینجا بر پایه نتایج حاصل از تحقیق و بررسی انجام شده توسط (Namin 2004) صورت پذیرفته است. بر اساس نتایج این تحقیق روش مرتبه دوم Froum مناسبترین نتایج را در بین چهار روش نام برده شده در ذیل داراست.

- Donor Cell مرتبه اول
- Lax-Wendroff مرتبه دوم
- Froum مرتبه دوم
- QUICKEST مرتبه سوم

در اینجا نیز به کمک روش Froum رابطه انتقال نسبتاً ساده ذیل به صورت صریح منفصل‌سازی شده است:

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} + u(x,t) \frac{\partial c(x,t)}{\partial x} = q \quad (10)$$

رابطه منفصل شده عبارت است از:

$$c_j^{n+1} = \left( 1 - \frac{3}{4}|\varepsilon| - \frac{1}{4}\varepsilon^2 \right) c_j^n + \left( \frac{5}{4}|\varepsilon| - \frac{1}{4}\varepsilon^2 \right) c_{j-kk}^n + \left( -\frac{1}{4}|\varepsilon| + \frac{1}{4}\varepsilon^2 \right) (c_{j+kk}^n + c_{j-2kk}^n) \quad (11)$$

در جاییکه:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= u\Delta t / \Delta x \\ kk &= \text{Sign}(\bar{u}_j) \end{aligned}$$

نتایج حاصل از ارزیابی دقت روشها حاکی از آن است که در حل مسائل با منفصل‌سازی به کمک روشهای مورد اشاره محدودیت قابل ملاحظه‌ای در انتخاب عدد کورانت<sup>۱۱</sup> نبوده و با در نظر گرفتن گامهای زمانی بزرگ نیز مسائل با دقت قابل قبولی حل خواهد شد. حال با مشخص شدن روشهای مورد استفاده جهت منفصل‌سازی جملات انتقال و پخشیدگی به تشریح روش پروجکشن می‌پردازیم.

### ۳- روش پروجکشن

همانگونه که ذکر گردید اعمال این روش در دو گام اصلی خلاصه می‌شود (Chorin, 1968). در گام اول از شیوه گسسته‌سازی زمانی با حذف عبارت فشار از معادلات حرکت، مقادیر سرعت میانی در جهات x و z (که طبق تعریف بترتیب عبارتند از  $u^*$  و  $w^*$ ) محاسبه می‌گردد. به منظور محاسبه سرعتهای میانی لازم است تا

**- شرایط مرزی**

شرایط مرزی در کناره‌های محدوده مورد حل بطور کلی به سه دسته تقسیم می‌گردد.

- مرز بسته

- مرز باز با سرعت معلوم (سرعت‌های جهات افقی و قائم)

- مرز دارای فشار معلوم

حالات اشاره شده می‌تواند در هر یک از چهار وجه شبکه حل بصورت جزئی (بخشی از طول مرز) و یا کلی در نظر گرفته شود. به منظور اعمال اثر هر یک از شرایط مرزی فوق بر دامنه حل معادلات، کفایت تا مقدار ضرایب موجود در معادله (۱۸) را متناسب با شرایط مورد نظر بدست آوریم. در اینصورت خواهیم داشت:

برای مرز بسته در طرف چپ محدوده حل:

$$u_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} = 0 \quad \Rightarrow a = 0$$

به همین ترتیب برای وجه سمت راست  $b = 0$  و برای کف  $c = 0$  و برای مرز بالای محدوده حل داریم  $d = 0$ .

برای مرز سرعت معلوم در طرف چپ محدوده حل داریم:

$$u_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} = u_b \quad \Rightarrow a = 0$$

به همین ترتیب برای وجه سمت راست:

$$u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = u_b \quad \Rightarrow b = 0$$

برای کف:

$$w_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} = w_b \quad \Rightarrow c = 0$$

و برای مرز بالای محدوده حل داریم:

$$w_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = w_b \quad \Rightarrow d = 0$$

برای مرز با فشار معلوم نیز در رابطه (۱۸) خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a = b = c = d = 0 \\ f = 1 \end{cases}$$

و با داشتن مقدار فشار معلوم در مرز ( $P_b$ ) می‌نویسیم:

$$P_{i,k}^{n+1} = P_b$$

**۴- مدل‌های سطح آزاد و آشفتگی**

به منظور پیش‌بینی تراز متغیر سطح آزاد سیال روش‌های عددی گوناگونی وجود دارد که در اینجا در قالب دو دسته کلی مورد اشاره

$$u_{i-\frac{1}{2},k}^{n+1} = u_{i-\frac{1}{2},k}^{**} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (P_{i,k}^{n+1} - P_{i-1,k}^{n+1}) \quad (16)$$

$$w_{i,k+\frac{1}{2}}^{n+1} = w_{i,k+\frac{1}{2}}^{**} - \frac{\Delta t}{\Delta z} (P_{i,k+1}^{n+1} - P_{i,k}^{n+1}) - g\Delta t$$

$$w_{i,k-\frac{1}{2}}^{n+1} = w_{i,k-\frac{1}{2}}^{**} - \frac{\Delta t}{\Delta z} (P_{i,k}^{n+1} - P_{i,k-1}^{n+1}) - g\Delta t$$

از طرفی با منفصل‌سازی مکانی معادله پیوستگی (۱) می‌توان نوشت:

$$\frac{u_{i+\frac{1}{2},k}^{n+1} - u_{i-\frac{1}{2},k}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{w_{i,k+\frac{1}{2}}^{n+1} - w_{i,k-\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta z} = 0 \quad (17)$$

حال با جایگذاری مقادیر سرعت‌های گام زمانی بعد از روابط (۱۶) در معادله (۱۷) و ساده‌سازی، نهایتاً رابطه ذیل بر اساس مقادیر فشار در گام زمانی بعد حاصل خواهد شد:

$$a.P_{i-1,k}^{n+1} + b.P_{i+1,k}^{n+1} + c.P_{i,k-1}^{n+1} + d.P_{i,k+1}^{n+1} + f.P_{i,k}^{n+1} = e \quad (18)$$

درجائیکه:

$$a = b = -\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

$$c = d = -\frac{\Delta t}{(\Delta z)^2}$$

$$f = -(a + b + c + d)$$

$$e = -\left( \frac{u_{i+\frac{1}{2},k}^* - u_{i-\frac{1}{2},k}^*}{\Delta x} + \frac{w_{i,k+\frac{1}{2}}^* - w_{i,k-\frac{1}{2}}^*}{\Delta z} \right)$$

با نوشتن رابطه فوق برای کل میدان حل به معادله شکل خواهیم رسید:

$$\bar{A}_i^1 \bar{P}_{i-1}^{n+1} + \bar{A}_i^2 \bar{P}_i^{n+1} + \bar{A}_i^3 \bar{P}_{i+1}^{n+1} = \bar{B}_i \quad (19)$$

در جائیکه:

$$\bar{P}_i^{n+1} = [P_{i,2}^{n+1}, P_{i,4}^{n+1}, \dots, P_{i,2k}^{n+1}, \dots]$$

که عبارتست از بردار مجهول فشار در زمان جدید واقع در ستون  $i$ ام و نیز  $\bar{A}_i^1, \bar{A}_i^2, \bar{A}_i^3$  ماتریس‌های دوبعدی ضریب بردارهای یک بعدی فشار بترتیب مربوط به ستونهای  $i+1, i, i-1$  می‌باشند. در نتیجه جاگذاری این مقادیر برای کل ستونهای محدوده حل معادلات، یک ماتریس سه قطری شامل بلوک‌هایی از بردارهای مزبور ایجاد خواهد شد که دستگاه معادلات ایجاد شده با بکارگیری شیوه‌ای مشابه با الگوریتم جاروب کردن<sup>۱۲</sup> رفت و برگشتی حل شده است.

در این روش نیز از مفهوم درصد حجمی سیال اشغالی در هر سلول که در اینجا با  $C_{i,j}$  نمایش داده می‌شود استفاده شده است. با معلوم بودن مقادیر  $C_{i,j}$  در هر یک از سلول‌های یک شبکه اولری طبق روابط (۲۰) و (۲۱) مقادیر  $n_{i,j}^x$  و  $n_{i,j}^y$  محاسبه می‌گردد (Rudman, 1997):

$$n_{i,j}^x = \frac{1}{\delta x} (c_{i+1,j+1} + 2c_{i+1,j} + c_{i+1,j-1} - c_{i-1,j+1} - 2c_{i-1,j} - c_{i-1,j-1}) \quad (20)$$

$$n_{i,j}^y = \frac{1}{\delta y} (c_{i+1,j+1} + 2c_{i+1,j} + c_{i-1,j+1} - c_{i+1,j-1} - 2c_{i-1,j-1} - c_{i-1,j-1}) \quad (21)$$

حال با داشتن روابط فوق مقادیر  $\beta, \alpha$  (زوایای سطح آزاد) بصورت ذیل قابل محاسبه خواهند بود:

$$\beta = \tan^{-1} \left( \frac{-n^x}{n^y} \right) \quad (-\pi < \beta \leq \pi)$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{\delta x}{\delta y} \tan \beta \right) \quad (0 \leq \alpha \leq \pi/2)$$

در نهایت بر اساس مقادیر بدست آمده فوق چهار حالت مختلف برای شکل سطح آزاد در یک سلول سطحی قابل تشخیص بوده و سپس می‌توان نسبت به محاسبه سطوح داخل سیال واقع در هر یک از سلول‌ها ( $S_i, S_r, S_b, S_l$ ) اقدام نمود. با معلوم شدن مقادیر  $k$  ها، دی‌های انتقالی سیال ( $F_i, F_r, F_b, F_l$ ) بصورت هندسی قابل محاسبه می‌باشد. در نهایت بر اساس این احجام انتقالی می‌توان نسبت به برآورد حجم سیال داخل سلول‌ها در گام زمانی بعد اقدام نموده و بدین ترتیب در هر مرحله تغییرات شکل سطح آزاد قابل محاسبه خواهد بود.

همچنین به جهت شبیه‌سازی شرایط هیدرودینامیکی در مجاورت ساحل با اعمال امواج شکننا، استفاده از مدلی مناسب جهت اعمال اثر پدیده آشفتگی ضروری است. در این خصوص نیز با بررسی مدل‌های مختلف موجود سعی شد تا با انتخاب مدلی که علاوه بر سادگی، با دقت قابل قبولی آشفتگی جریان را شبیه‌سازی نماید، بر توانایی‌ها و دقت مدل توسعه یافته افزوده گردد. بدین منظور نیز مدل دو معادله‌ای استاندارد  $k-\epsilon$  مورد استفاده قرار گرفته است.

### ۵- صحت‌سنجی اولیه

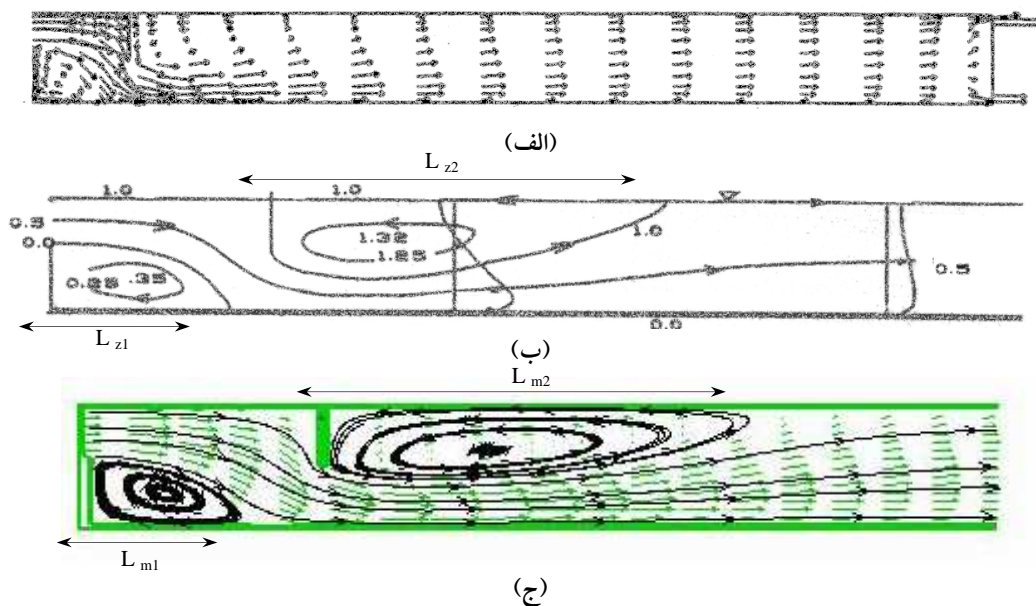
جهت کنترل اولیه عملکرد مدل عددی توسعه یافته و بررسی صحت نتایج حاصل از آن، یک نمونه از مسائل هیدرودینامیکی مربوط به

قرار گرفته است که عبارتند از روش تبدیل مختصات سیگما و روشهای مبتنی بر انتقال حجم سیال. در روش تبدیل مختصات سیگما، کلیه سلول‌های سطحی بر مرزهای جریان منطبق شده و سلول‌ها در تمام محیط حل توسط سیال بطور کامل اشغال می‌شوند. در این روش حل، هر تغییری در تراز سطح آب منجر به تغییر در اندازه سلول‌های شبکه در عمق جریان شده و سیستم شبکه‌بندی در راستای قائم خود را با دامنه فیزیکی سیال منطبق می‌کند (Namin, 2004). روش‌های مبتنی بر انتقال حجم سیال بر اساس این مفهوم بنا شده‌اند که کل و یا تنها بخشی از حجم سلول سطحی توسط سیال اشغال می‌شود. این روش عموماً برای شبیه‌سازی حرکت امواج کوتاه دارای شیب تند سطحی بکار می‌رود (Hirt and Nichols, 1981). در توسعه مدل عددی حاضر با عنایت به اینکه بررسی اثرات شکست امواج مد نظر قرار داشته و لازم است امواج کوتاه دارای شیب بسیار تند شبیه‌سازی شوند، لذا استفاده از شیوه‌ای مناسب از مجموعه روشهای مبتنی بر انتقال حجم سیال مد نظر قرار گرفته است. اساس کار در روشهای ردیابی حجمی، تعریف یک پارامتر با مقداری بین صفر و یک است که اندازه آن بیانگر درصد پر شدگی فضای یک سلول از شبکه حل توسط سیال می‌باشد. با داشتن مقدار این پارامتر و بکارگیری الگوریتم‌های مختلف در هر یک از روشها، شکل سطح آزاد جریان با دقت‌های گوناگون بدست می‌آید. به منظور انتخاب مناسب‌ترین شیوه مدل‌سازی در اینجا از تجربیات حاصل از تحقیق صورت گرفته توسط Rudman (1997) استفاده شده است. وی در تحقیق خود با بررسی دقت چهار روش سطح آزاد در قالب اجرای تستهای مختلف و بررسی نتایج حاصل نسبت به معرفی روش دقیق‌تر اقدام نموده است.

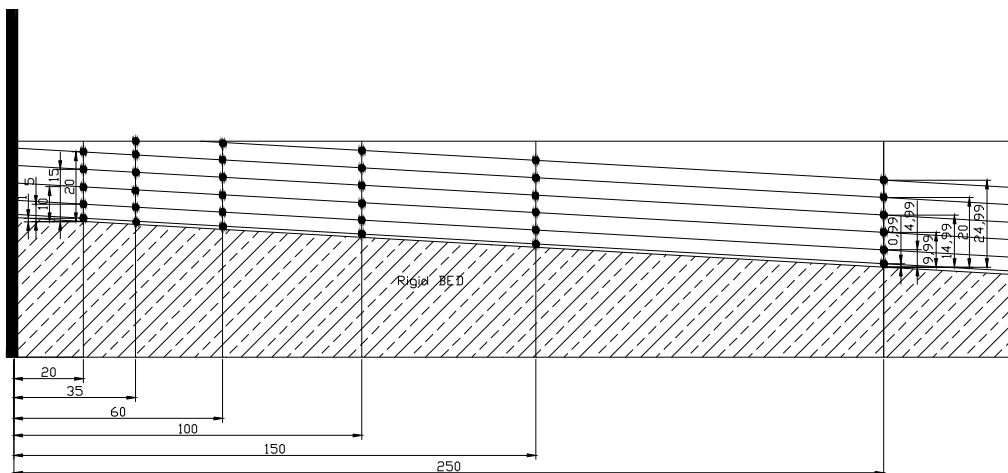
از جمله مهمترین نمونه تست‌های انجام شده می‌توان به حل مسئله معروف Zalesak که در آن با دوران دایره‌ای شکافدار در یک میدان سرعت (که در واقع معرف انتقال یک کمیت اسکالر می‌باشد)، چگونگی تغییر شکل اولیه دایره مورد ارزیابی قرار می‌گیرد اشاره نمود. بر اساس تفسیر خروجی‌های برنامه، Rudman (1997) چنین قضاوت نمود که روش Hirt-Nichols هر دو مقادیری اضافی وارد کار می‌کنند و شکل سطح مشترک پس از یک بار چرخش بسیار بهم ریخته است. همچنین روش Hirt-Nichol مقدار کمی پخشیدگی سطح تماس را نشان می‌دهد. در واقع، روش Young سطح تماس صاف و قابل قبولی ارائه می‌دهند هرچند که گوشه‌های تیز شکاف گرد می‌شوند. از بین این دو روش نیز روش Young نتایج مناسب‌تری را به نمایش گذاشته است. لذا براساس این نتایج در مدل توسعه یافته، جهت شبیه‌سازی سطح آزاد جریان از روش Young استفاده شد.

عبور جریان از داخل مخزن تصفيه آب سن جو<sup>۱۳</sup> که از نوع جريان دو بعدی در قائم بوده و قبلاً مسئله آن توسط Zhou and McCorquodale (1992) حل شده است، به کمک مدل حاضر اجرا شده که در ادامه بخشی از نتایج خروجی در قالب چند شکل ارائه می‌گردد (Zhou and McCorquodale, 1992). در این مسئله مخزنی داریم به طول ۳۰ متر دارای جریانی به عمق ۳ متر که در فاصله ۳ متری از ابتدای ورودی جريان به داخل آن، مانعی عمود بر جهت جريان به طول ۱/۵ متر قرار گرفته است. دهانه ورودی کانال با بازشدگی به ارتفاع ۱ متر در قسمت فوقانی بالادست مخزن قرار داشته و در انتهای کانال وجود دو شکاف یکی در بالا و یکی در پائین هر یک به اندازه ۰/۲۵ متر اجازه خروج جريان از مخزن را فراهم می‌آورند. شکل شماره (۱) ابعاد و هندسه محدوده حل را نمایش می‌دهد. اندازه شبکه محاسباتی  $\Delta x = \Delta y = 10(cm)$  و گامهای زمانی برابر  $\Delta t = 0.05(sec)$  و سرعت ورودی از دهانه کانال  $v_b = 2.5(cm/sec)$  در نظر گرفته شده است. شکل شماره (۲) نیز نتایج خروجی از مدل حاضر و کار

Zhou and McCorquodale (1992) را در بر داشته که جهت و اندازه بردارهای سرعت و خطوط جريان را برای مسئله مورد اشاره نمایش می‌دهد. همانطور که در این شکل مشاهده می‌گردد، الگوی جريان کاملاً مشابه بوده و این نتیجه حاکی از انطباق خروجی‌های مدل توسعه یافته با مقادیر تایید شده است. همچنین با مقایسه اندازه و شکل گردابه‌های ایجاد شده در پله ورودی و پشت مانع، می‌توان به چگونگی عملکرد مدل هیدرودینامیک و بخش حل پدیده آشفتگی آن پی برد. طول این گردابه‌ها در مدل حاضر و کار Zhou and McCorquodale (1992) برای پائین دست پله ورودی در شکل ۲- الف و ب بترتیب با  $L_{m1}$  و  $L_{z1}$  نمایش داده شده و مقادیر آنها برابر ۲/۳ متر و ۲/۵ متر بدست آمده است. همچنین طول گردابه‌های تشکیل شده در پشت مانع که با  $L_{m2}$  و  $L_{z2}$  نمایش داده شده برابر با ۵/۷ متر و ۵/۵ متر تخمین زده شده است. برابری نسبی طول گردابه‌ها، صحت عملکرد مدل آشفتگی و دقت کلی در شبیه‌سازی شرایط هیدرودینامیکی را ثابت می‌کند.



شکل ۱- ابعاد و شکل محدوده حل



شکل ۲- نمایش بردارهای سرعت و خطوط جریان در مخزن سن جو  
الف و ب) نتایج مدل صحت سنجی شده (Zhou (1992)  
ج) نتایج مدل عددی توسعه یافته در تحقیق حاضر

### ۶- شبیه‌سازی آزمایشگاهی

اگرچه انجام آزمایشها با اعمال امواج نامنظم می‌تواند در افزایش دقت پیش‌بینی‌ها مؤثر واقع گردد، لیکن در اینجا تنها به جهت صحت سنجی نتایج بدست آمده از مدل عددی، شرایط مشابه مشخصات ورودی به مرزهای محدوده حل عددی معادلات حاکم، در محیط آزمایشگاهی شبیه‌سازی و ایجاد گردیده است. نحوه عملکرد مولد موج بگونه‌ای است که با تغییر طول بازو و دور موتور دستگاه، بترتیب ارتفاع و پرید موج در فلوام تغییر می‌نماید. لذا به منظور انجام آزمایشها بر روی ساحل دارای سازه انعکاسی قائم، در ابتدا با وجود ساحل طبیعی مولد موج برای شرایط گوناگون طول بازو، دور موتور و عمق آب مورد آزمایش و واسنجی قرار گرفته و با اندازه‌گیری مشخصات موج در نواحی مختلف فلوام منحنی‌های مربوطه ترسیم گردیده است. لذا ضمن کالیبراسیون مولد موج، از منحنی‌های تهیه شده جهت ایجاد شرایط موج مورد نظر استفاده شده است.

به منظور کنترل نتایج حاصل از مدل‌سازی عددی شرایط هیدرودینامیکی در مجاورت ساحل و در حالت وجود دیواره قائم، انجام مطالعات آزمایشگاهی طراحی و اجرا گردید. این آزمایشات در یک فلوام امواج ساخته شده از مصالح بنایی با طول ۳۵ متر و ابعاد مقطع ۹۵\*۱۰۰ سانتی‌متر در محل مرکز تحقیقات آب وزارت نیرو انجام شده است. در انتهای بالادست فلوام یک دستگاه مولد موج منظم از نوع پیستونی با ابعاد مقطع فلوام نصب و در انتهای دیگر ساحل مورد آزمایش بصورت شیب ثابت دارای نسبت قائم به افق ۱:۱۲ و از جنس ملات سیمان اجرا گردید. این آزمایشات برای دو حالت ساحل طبیعی و در شرایط وجود دیواره قائم انجام شده است. همچنین متغیرهای هیدرولیکی مطابق با مقادیر مندرج در جدول (۱) در نظر گرفته شده‌اند.

همچنین از آنجایی‌که کنترل نتایج مدل عددی از طریق مقایسه مقادیر سرعت جریان و الگوی آن در مدل عددی و نمونه آزمایشگاهی صورت می‌پذیرد، لذا لازم آمد تا بردارهای سرعت به نحو مناسبی مورد اندازه‌گیری قرار گیرد. بدین منظور دو دستگاه سنسور اندازه‌گیری سرعت سه‌بعدی جریان از نوع سرعت‌سنج داپلر<sup>۱۴</sup> با دقت یک میلی‌متر بر ثانیه استفاده شده است. با توجه به شکل و عملکرد دستگاه به منظور برداشت مقادیر سرعت در نقاط مختلف لازم است نوک سنسور در محل‌های خاصی تنظیم گردد، لذا

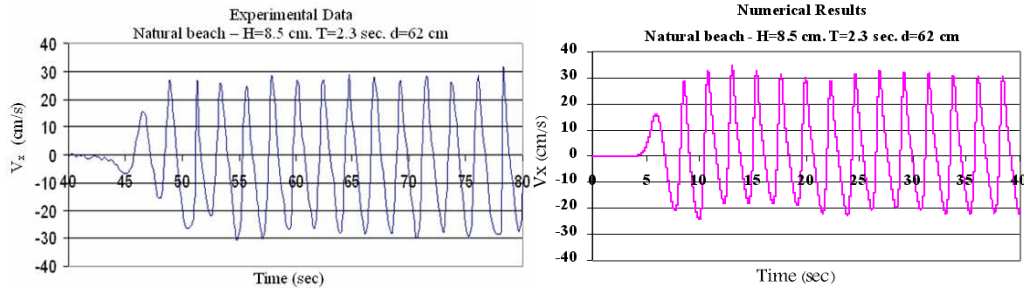
عمق آب (سانتی‌متر)	موج		متغیرها
	پرید (ثانیه)	ارتفاع (سانتی‌متر)	
۴۵		۸/۵	مقادیر
۵۲	۱/۴	۱۵/۵	
۶۲	۲/۳	۱۸/۵	
۷۲			
۴	۲	۳	تعداد حالتها

جدول ۱- مقادیر متغیرها



متصل شد (شکل ۳).

دستگاه‌های مذکور برای اندازه‌گیری در یک شبکه نقاط بر روی ریل‌های قابل تنظیم نصب گردیده و به سیستم ثبت و ضبط اطلاعات



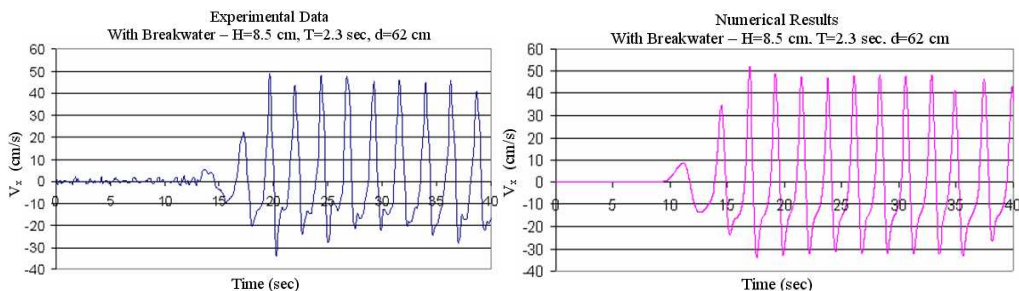
شکل ۳- موقعیت و محل برداشت سری زمانی سرعت در آزمایشگاه

(۵) بترتیب سری‌های زمانی سرعت اندازه‌گیری شده در دو حالت ساحل طبیعی و وجود دیواره قائم در نمونه آزمایشگاهی و در مقایسه با نتایج مدل عددی برای شرایط مشابه ترسیم گردیده است. مقایسه این منحنی‌ها همخوانی مناسبی بین دو سری اطلاعات به نمایش گذاشته که مبین عملکرد مطلوب مدل عددی در این شرایط می‌باشد. دومین ارزیابی نیز از طریق ترسیم منحنی‌های نیمرخ تغییرات حداکثر مقادیر سرعت لحظه‌ای در مدل عددی و نمونه آزمایشگاهی در عمق جریان برای مقاطع مختلف بر روی شیب ساحلی صورت گرفته است. شکل شماره (۶) نیز نمونه‌ای از منحنی‌های ترسیم شده مربوط به حالات ساحل طبیعی و وجود دیواره قائم را برای دو سری اطلاعات مدل عددی و آزمایشگاهی نمایش می‌دهد. مقایسه اخیر نیز تخمین نزدیک به واقعیت مدل عددی را در محاسبه شرایط هیدرودینامیکی در عمق جریان به اثبات می‌رساند. لذا در مجموع بر اساس اطلاعات و بررسی‌های صورت گرفته می‌توان چنین قضاوت نمود که مدل عددی توسعه یافته، توانایی شبیه‌سازی شرایط هیدرودینامیکی در مقابل دیواره قائم واقع بر روی شیب ساحلی را در شرایط وجود امواج شکننا داراست.

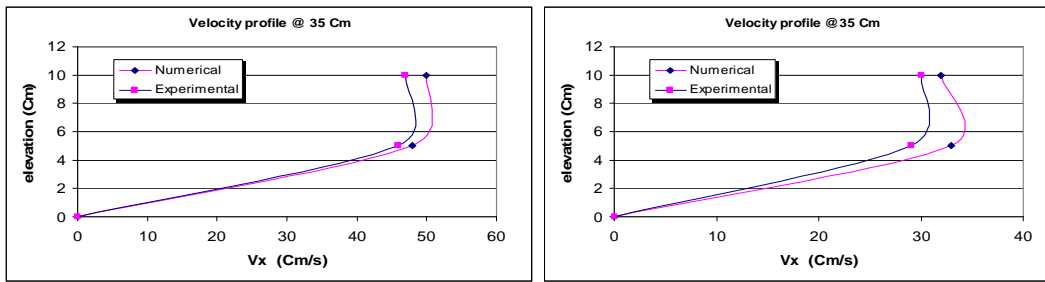
با انجام آزمایش‌های پیش‌بینی شده و اندازه‌گیری مقادیر سرعت در نقاط مختلف، الگوی جریان در نمونه آزمایشگاهی تعیین شد. لیکن از آنجایی که اندازه‌گیری سرعت در کلیه نقاط شبکه (شکل ۳) بصورت همزمان انجام نشده است، لذا در ابتدا این مقادیر بر اساس نتایج حاصل از اجرای مدل عددی هم‌فاز شدند.

#### ۷- مقایسه نتایج مدل عددی و آزمایشگاهی

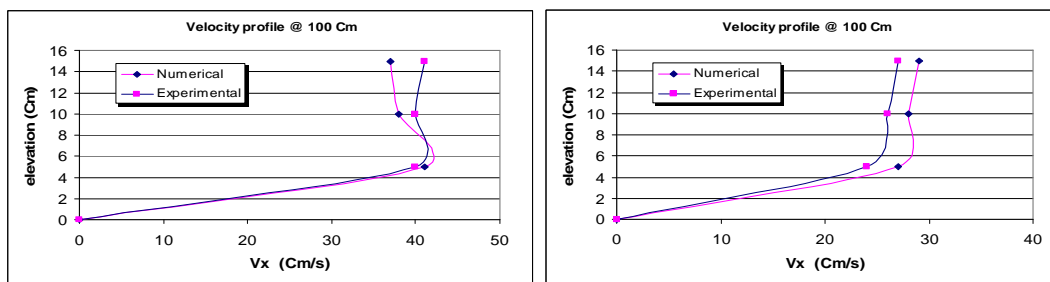
در این مرحله با مقایسه نتایج حاصل از اجرای مدل عددی و اندازه‌گیری‌های آزمایشگاهی نسبت به کنترل عملکرد مدل عددی در یک نمونه مسئله واقعی اقدام گردیده است. در اینجا مقایسه به دو صورت انجام شده است. در ابتدا بررسی منحنی‌های سری زمانی برداشت مقدار سرعت‌های لحظه‌ای در هر یک از نقاط شبکه برداشت سرعت، خصوصاً نقاط اندازه‌گیری قرار گرفته در مجاورت بستر (به واسطه نقش کلیدی این جریان در انتقال رسوبات بستر و نیز حساسیت بیشتر مدل عددی در پیش‌بینی این مقادیر). این بررسیها عمدتاً بر روی شکل تغییرات سرعت لحظه‌ای و نیز مقادیر حداقل و حداکثر آن صورت گرفته که به عنوان نمونه در شکل‌های شماره (۴) و



شکل ۴- سری‌های زمانی سرعت در فاصله ۳۵ سانتی‌متری از موقعیت دیواره و ۵ سانتی‌متری بستر برای ساحل طبیعی



شکل ۵- سری‌های زمانی سرعت در فاصله ۳۵ سانتی‌متری از محل دیواره و ۵ سانتی‌متری بستر برای ساحل دارای دیواره



(ب)

(الف)

شکل ۶- مقایسه نتایج مدل عددی و برداشتهای آزمایشگاهی مربوط به پروفیل سرعت افقی در عمق جریان  
الف) ساحل طبیعی (ب) با وجود دیواره قائم  
( $H = 8.5 \text{ (cm)}$  ,  $T = 2.3 \text{ (sec)}$  ,  $d = 62 \text{ (cm)}$ )

توسعه یافته در حل شرایط هیدرودینامیکی در ناحیه مجاور ساحل با وجود و بدون وجود دیواره می‌باشد. این امر در واقع بکارگیری توام روش‌ها و مدل‌های مختلف مورد استفاده در این تحقیق را تایید می‌کند. تخمین شیب تند سطح آزاد جریان و نیز تعریف و اعمال آسان شرایط مرزی گوناگون از خصوصیات بارز این مدل به شمار می‌رود. با محاسبه شرایط جریان در بستر، این مدل قادر است تا با افزودن مدل رسوب به نرم افزار تهیه شده جهت شبیه سازی تغییرات نیمرخ بستر ساحلی در مقابل دیوار ساحلی با وجود شرایط شکست موج مورد استفاده قرار گیرد.

### ۹- تشکر

از حمایت‌های شرکت سهامی مدیریت منابع آب ایران و نیز همکاری مؤثر مسئولین مرکز تحقیقات آب وزارت نیرو، بواسطه در اختیار قرار دادن فضا و سایر امکانات آزمایشگاهی مورد نیاز این پروژه تقدیر و تشکر بعمل می‌آید.

### ۸- نتیجه‌گیری

در این تحقیق مدل عددی دو بعدی در قائم با حل معادلات ناویر استوکس (بدون ساده‌سازی) توسعه یافته است. به منظور حل معادلات مزبور از روش پروجکشن استفاده شده و با بررسی تواناییها و محدودیت‌های روشهای گوناگون موجود، جملات انتقال و پخشیدگی بر اساس اصول حاکم بر روش احجام محدود به ترتیب با روشهای فروم بصورت صریح و کرنک نیکلسون بصورت ضمنی منفصل‌سازی شده‌اند. با توجه به بررسی پدیده شکست موج، جهت شبیه‌سازی و اعمال اثرات این پدیده، پس از ارزیابی دقت روشهای سطح آزاد مختلف از روش Young استفاده شده است. همچنین به دلیل اهمیت عامل آشفتگی در مسئله مورد بررسی، روش دو معادله‌ای استاندارد  $k-\epsilon$  به منظور شبیه‌سازی پدیده آشفتگی انتخاب و در مدل بکار گرفته شد. صحت‌سنجی نتایج این مدل با نمونه مسائل حل شده قبلی و یا نتایج حاصل از اندازه‌گیری‌های انجام شده در نمونه آزمایشگاهی همگی حاکی از دقت عملکرد مدل

Boundaries", *Journal of Computational Physics*, 39, pp. 201-225.

Namin, M. M. (2004), "A Fully Three -Dimensional non-Hydrostatic Free Surface Flow Model for Hydro-Environmental Predictions", Ph.D. Dissertation, Cardiff School of Engineering, Cardiff University.

Neshaei, M. A. L. (1997), "Beach Profile Evolution in Front of a Partially Reflective Structure". Ph.D. Dissertation, Imperial College, University of London.

Rakha, K. A., Deigaard, R. and Broker, I. (1998), "A Phase-Resolving Cross-Shore Sediment Transport Model for Beach Profile Evolution", *Coastal Engineering*, Vol. 31, pp. 231-261.

Rudman, M. (1997), "Volume-Tracking Methods for Interfacial Flow Calculations", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 24, pp.671-691.

Yanenko, N. N. (1971), *The Method of Fractional Step*, Springer-Verlag.

Zhou, S. and McCorquodale, J. A. (1992). "Modeling of Rectangular Settling Tanks", *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 118, No. 10, pp. 1391-1404.

بی نوشتها

- 1-Mild Slope Equation
- 2-Radiation Stress
- 3-Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations
- 4-Projection Method
- 5-Splitting Scheme
- 6-Fractional Step (Yanenko, 1971)
- 7-Diffusion Dominated
- 8-Advection Dominated
- 9-Finite Volume
- 10-Crank Nicolson
- 11-Courant Number
- 12-Marching
- 13-San Joe Creek Water Reclamation
- 14-Acoustic Doppler Velocity meter (ADV)

۱۰- مراجع

Chorin, A. J. (1968), "Numerical Solution of the Navier-Stokes Equation", *Mathematics of Computation*, 22, pp. 745-763.

*Coastal Engineering Manual* (1998), Part III, Chapter 3. "Cross-Shore Sediment Transport Processes", U.S. Army Corps of Engineers.

Hirt, C. W. and Nichols, B. D. (1981), "Volume of Fluid (VOF) Method for Dynamics of Free

تاریخ دریافت مقاله: ۶ اسفند ۱۳۸۳

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۱ بهمن ۱۳۸۴