تحقیقات منابع آب ایران
Iran-Water Resources Research

سال چهارم، شماره ۲، پائیز ۱۳۸۷
Volume 4, No. 2, Fall 2008 (IR-WRR)
۴۶-۵۶

بررسی احتمال تواتر و تداوم روزهای بارانی در شهر تبریز با استفاده از مدل زنجیره مارکوف

حسین عساکره[۱]

چکیده
در این پژوهش تواتر وتداوم روزهای بارانی شهرتبریز براساس قوانین احتمالی، به صورت فرایندهایی تصادفی و با استفاده از تکنیک زنجیره‌های مارکوف در معرض تحلیل قرار گرفت. برای دستیابی به این مقصود از آمار بارش روزانه مربوط به ۵۵ سال (۲۰۰۵-۱۹۵۱) ایستگاه تبریز بهره گرفته شد. آمار مزبور براساس ماتریس شمارش تغییر حالت روزهای بارانی و فاقد بارش مرتب شده، سپس ماتریس احتمال تغییر وضعیت براساس روش درستنمایی بیشینه محاسبه گردید. با توان‌های مکرر این ماتریس، احتمال پایا و دوره بازگشت روزانه هریک از دو حالت بارش - خشکی برآورد شد. دوره‌های بازگشت بارش حدود ۵ روز و دوره بازگشت خشکی حدود ۱ روز برآورد گردید. درواقع احتمال وقوع بارش در هر روز ۰/۲۲۰۶ و احتمال عدم وقوع آن ۰/۷۷۹۴ بدست آمد. سپس دوره بازگشت تداوم روزهای بارانی ۱ تا ۵ روزه برای دوازده ماه سال محاسبه گردید. بیشترین احتمال وقوع روزهای بارانی طی بهار (بویژه ماه مه) بوده است. برای مثال دوره بازگشت دو روز بارانی متوالی درماه مه حدود ۲/۵ روز است.

کلمات کلیدی: روز بارانی، زنجیره مارکوف، احتمال وقوع، درستنمایی بیشینه، شهر تبریز

تاریخ دریافت گزارش فنی: ۲۰ شهریور ۱۳۸۶
تاریخ پذیرش گزارش فنی: ۲۳ مرداد ۱۳۸۷

Analysis of the Frequency and the Spell of Rainy Days Using Markove Chain Model for City of Tabriz, Iran

H. Asakereh[1]

Abstract
In this paper the frequency and the spell of rainy days is analyzed for the city of Tabriz in northwestern Iran. This is done based on probability rule, stochastic process, and Markov Chain technique. The 55 year rain data (1951-2005) for Tabriz synoptic station is used. The frequency matrix is formed and the probability matrix of rainy – dry days is created accordingly based on maximum likelihood method. Recurrence interval is estimated based on persistence probability calculated based on succeed power on probability matrix. Rainy and dry days have 5- and 1-year return period (e.g. probability of 0.2206 and 0.7794), respectively. Finally the 1-5 day rain spell have calculated. The most probabable spell length occurred in spring (mainly in May). For example, a 2-day rain in May would occure with a return period of 2.5 days.

Keywords: Rainy Day, Markov Chain, Occurance Probability, Maximum likelihood, Tabriz City

۱- استادیار گروه جغرافیا دانشگاه زنجان

1- Assistant Professor, Department of Geography, Zandjan University, Zandjan, Iran (e-mail: asakereh@znu.ac.ir)

۱- مقدمه

برخی پدیده‌های طبیعی و اقلیمی در مشاهدات پیاپی و تحت شرایط مشخص، و طبعاً درطول زمان نتایج یکسانی را بروز نمی‌دهند و ممکن است هر بار چهره ای متفاوت از بقیه نمودها ارائه نمایند. این قبیل پدیده‌ها و پدیده‌های مشابه به فرایندهای تصادفی موسومند. طبق تعریف: "فرایندهای تصادفی به پدیده‌هایی گفته می‌شوند که نمی‌توان نتیجه آنها را پیش از رخ دادن به طور قطع معلوم کرد." یک فرایند تصادفی مجموعه ای از متغیرهای تصادفی است که طی زمان، مقادیر (مشاهدات) مختلفی را نشان می‌دهند. برای مثال خشکسالی، ترسالی، وقوع سیلاب، وقوع بارش با مقدارمعین، ریزش برف در یک زمان خاص، وقوع موج گرمایی، آستانه دمایی معین و.... فرایندهای تصادفی به شمار می‌آیند. واضح است که وقوع رویدادهای مزبور به عوامل متعددی بستگی دارد که تغییر اندکی در هر کدام ازاین عوامل ممکن است ماهیت آن را به میزان زیادی تغییر دهد یا حتی از رخ دادن آن جلوگیری کند. بنابراین درمشاهده‌های مختلف از این رخدادها و هر پدیده مشابه دیگر نتیجه‌های متفاوتی حاصل می‌شود که پیش از رخ دادن آن، نمی‌توان به طور قطع معلوم کرد که چه نتیجه‌ای حاصل خواهد شد. بدین دلیل پدیده‌های مزبور را می‌توان فرایندهایی تصادفی دانست.

رویدادهای اقلیمی به عنوان پدیده‌های تصادفی به طور دقیق قابل پیش بینی نیستند ولی از مشاهده پیاپی آنها آگاهی‌های مفیدی به دست می‌آید که از طریق قوانین احتمالی قابل تعریف هستند. فهم بسیاری از رویدادهای اقلیمی منوط به شناخت احتمال وقوع این فرایندهاست.

براساس قوانین احتمالی برخی پدیده‌های تصادفی، شانس بیشتری برای وقوع دارند در صورتی که شانس وقوع برخی دیگر کمتر است. همچنین گاهی از بین n حالت ممکن، تنها یکی از حالت‌ها می‌تواند رخ دهد؛ در ضمن امکان رخ دادن هیچ کدام از این حالت‌ها، بر حالت‌های دیگر برتری ندارد (Akan and Houghtalen , 2003). برای محاسبهٔ شانس وقوع پیشامدها لازم است مدل مناسبی انتخاب شود. بررسی این حالت‌های نامعین یا تصادفی و انتخاب مدل را دانش احتمال بر عهده دارد. دراین تحقیق تلاش براین است که با بهره‌گیری از این دانش و براساس رویه ای موسوم به " زنجیره‌های مارکوف" احتمال وقوع روزهای بارانی در ایستگاه تبریز بررسی شود. زنجیره مارکوف یک روش ریاضی برای مدل‌بندی فرایندهای تصادفی است.

توجه به پدیده‌های اقلیمی به عنوان فرایندهای تصادفی در مطالعات بی‌شماری قابل رویت است. برای مثال Buishand (1978) اصول مدل‌سازی احتمالی را برای داده‌های بارش ارائه نمود. تغییرات اقلیمی بوسیله Benzi (1983) و همکاران درقالب تئوری‌های فرایندهای احتمالی مورد بررسی قرار گرفت. Berger and Goossens (1983) تداوم دوره‌های خشک و تر ایستگاهی در بلغارستان را براساس زنجیره‌های مارکوف تحلیل نمودند. احتمال وقوع بارش‌های روزانه کره جنوبی نیز بوسیله Moon (1994) و همکاران در معرض توجه قرار گرفت. Burgers and Stephenson (1999) نیز به پدیده ال‌نینو از دیدگاه احتمالی پرداخته‌اند. Martin-Vide and Gomez (1999) نیز براساس احتمالات مارکوفی طول دوره‌های تر و خشک را در اسپانیا پهنه بندی نمودند.

در ایران مشکانی (۱۳۶۳) احتمال تواتر روزهای خشک بابلسر، جعفری بهی (۱۳۷۸) نمونه‌هایی از ایستگاه‌های با بارش روزانه حداقل ۳۰ سال، زارعی و شاهکار (۱۳۸۰) تواتر روزهای بارانی خرمدره، اردک و زشک و نیز حجازی زاده و شیرخانی (۱۳۸۴) خشکسالی و دوره‌های خشک کوتاه مدت استان خراسان را تحلیل نموده‌اند.

همان گونه که می‌دانیم، بروز بارش یا خشکسالی پدیده‌ای است طبیعی که ریشه در تغییرپذیری نهادی دستگاه اقلیم و مهم تر از همه گردش عمومی هوا دارد. همچنان که ویژگی‌های زمانی ـ مکانی تک بارش‌ها تابعی از سامانه‌های سینوپتیک پدید آورندهٔ آنهاست، بزرگی، گستره و فراوانی بارندگی نیز الگوهای مشخص را نشان می‌دهند. پسروی پرفشارهای جنب حاره، چرخه موسمی‌های تابستانی، افزایش دمای آب‌های سطحی اقیانوس و جابجایی مسیر سامانه‌های باران زای عرض‌های میانه سبب افزایش روزهای بارانی می‌شود (غیور و مسعودیان ۱۳۷۶).

کمبود روزهای توام با بارندگی از ویژگی‌های اصلی آب و هوای ایران محسوب می‌گردد. اساساً این خصوصیت در قلمرو آب وهوای مرطوب و اقلیم‌های خشک قابل مشاهده است. به طور کلی هیچ منطقه‌ای از کشور از تاثیراین پدیده در امان نبوده و به نسبت موقعیت طبیعی آن را تجربه می‌نماید. در این پژوهش تلاش می‌شود تعداد روزهای توام با بارندگی در یکی از ایستگاه‌های نسبتاً پرباران کشور در معرض تحلیل قرار گیرد. در این نوشتار علاوه بر معرفی برخی توانایی‌های روش موسوم به زنجیره‌های مارکوف، الگوی احتمالی روزهای بارانی در تبریز معرفی خواهد شد.

۲- داده‌ها

در این تحقیق داده‌های بارش روزانه ایستگاه تبریز برای دوره آماری ۲۰۰۵-۱۹۵۱ (۵۵ سال) مورد بررسی قرار گرفت. تبریز مرکزاستان آذربایجان شرقی و در فلات مرتفع آذربایجان واقع شده است. مختصات جغرافیایی ایستگاه سینوپتیک تبریز به شرح زیر است:

$$N: 38^\circ\ 5'$$

$$E: 46^\circ\ 17'$$

موقعیت و مقر استقرار این شهرستان یعنی سرزمین مرتفع و نیز قرار گرفتن در مسیر اصلی بادهای غربی شرایط ویژه‌ای به لحاظ بارندگی برای آن مهیا نموده است. سیستم‌های ویژه موثر بر بارندگی این بخش از کشور (سیستم‌های مدیترانه‌ای) بعد از یک دوره ضعف، با بهره‌گیری از رطوبت مدیترانه و بعضاً دریای سیاه فرایند اشباع را تجربه نموده، بارندگی‌ها دراین بخش از کشور تقویت می‌شوند (علیجانی، ۱۳۷۴). بدین دلیل برنامه ریزی کشاورزی مبتنی بر بارندگی دراین شهرستان ازاهمیت بالایی برخوردار است. شرایط ویژه اقتصادی، بخصوص پهنه‌های مهم کشت وکار گیاهان پایا و ناپایا دلیلی معقول و قابل قبول برای مطالعه تواتر روزهای بارانی دراین محدوده از کشور می‌باشد.

۳- روش‌ها

هر برآمد (نتیجه) فرایندهای تصادفی که تنها به برآمد بلافاصله قبل ازآن بستگی دارد را فرایند تصادفی با ویژگی مارکوف گویند. براین اساس فرایند تصادفی که در ویژگی مارکوف صدق کند، فرایند یا زنجیره‌های مارکوف می‌نامند (Higenz and Macnalti 1379). زنجیره گویای این واقعیت است که هر برآمد به رویداد بلافاصله قبل از خودش وابسته می‌باشد و به رویدادهای ماقبل دیگر مربوط نمی‌شود. در واقع دراین رویه احتمال وقوع یک حالت اقلیمی در زمان t به وضعیت آن در زمان قبل یعنی t-1 بستگی دارد(علیزاده ۱۳۸۵). مثلا احتمال خشکی امروز براساس وضعیت بارش روز قبل بررسی می‌شود. بنابراین برای هر زوج حالت‌های متوالی یک احتمال وجود دارد. دراین صورت احتمال تغییر هریک از مشاهدات از حالتی به حالت دیگر مشخص می شود. دربسیاری فرایندهای تصادفی، ممکن است برقراری ویژگی مارکوف معلوم نباشد. دراین صورت ویژگی مارکوف یک فرض درنظر گرفته می شود. با این وصف روش‌های معتبری برای آزمون برقراری ویژگی مارکوف وجود دارد که عمده ترین آنها آزمون استقلال و آزمون علیه روند است. دراین تحقیق با در نظر گرفتن برآمدهای احتمال حالت گسسته در زمان به ترتیب مراحل چهار گانه زیر به انجام رسید:

۱- داده‌های بارش روزانه به صورت زنجیره ای مارکوفی و برحسب آستانه صفر مرتب شدند. در این روش روزهای فاقد بارش (بارندگی صفر میلی‌متر) شرایط خشکی (*D*)، مقادیر بیشتر از صفر شرایط بارانی (*W*) به حساب آمد. درابتدا به نظر رسید که طبق پیشنهاد Gibbs and Maher (1967) از آستانه‌های چندکی استفاده شود. اما براساس آزمون و خطا معلوم شد که عدد صفر در تمامی روزهای سال به حدی تکرار شده است که تمامی آستانه‌های معرف روز خشک در روش گیبس – ماهر را می‌پوشاند. لذا از عدد صفر برای تعریف روز بدون بارش بهره گرفته شد.

۲- دراین مرحله فراوانی وقوع هریک از حالات دوگانه (بارش و فقدان بارش) و تغییر حالات به هم محاسبه شد. تا براساس آنها محاسبات مرحله بعدی (محاسبه ماتریس احتمال تغییر حالت) به دست آید. برای بدست آوردن ماتریس احتمال‌های تغییر وضعیت می‌بایست درابتدا ماتریس شمارش فراوانی محاسبه شود. برای مثال ماتریس شمارشی دو وضعیتی در زیر نشان داده شده است:

$$F = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} D & W \end{array} \\ \begin{array}{c} D \\ W \end{array} & \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} \end{array} \qquad (۱)$$

این ماتریس فراوانی تغییر وضعیت از خشکی به خشکی را با n_{11}، تغییر خشکی به شرایط مرطوب را با n_{12}، تغییر شرایط مرطوب به خشکی با n_{21} و تغییر از شرایط مرطوب به روز مرطوب n_{22} نشان می‌دهد.

شایان یادآوری مجدد است که برای ارزیابی نیکویی برازش این ماتریس فراوانی با فرایند دو حالته مارکوفی می بایست دو آزمون استقلال و آزمون علیه روند انجام شود. درآزمون استقلال فرض صفر (H_0) براین ایده استوار است که سری‌ها مستقل هستند (یعنی داده‌ها از زنجیره مارکف مرتبه مورد نظر که در اینجا ۲ است، پیروی نمی‌کنند.) (Hoaglin et al , 2006). این آزمون براساس جدول متقابل مقادیر انتقال مشاهده شده (n_{ij}) و تعداد انتقال مورد انتظار براساس فرض صفر (e_{ij}) بنا نهاده شده است. مقادیر مورد انتظار از روی مقادیر مشاهده شده انتقال بااین فرض که جمع حاشیه‌ای مقادیر قابل انتظار مثل انتقالات مشاهده شده می‌باشد، حاصل می‌آید (Box et al , 2005). یعنی :

$$e_{ij} = \frac{n_{i+} n_{+j}}{n} \qquad (۲)$$

در رابطه فوق:

$n_{i+} = n_{i1} + n_{i2}$ (مجموع هریک از سطرهای ماتریس فراوانی)،

$n_{+j} = n_{1j} + n_{2j}$ (مجموع هریک از ستون‌های ماتریس فراوانی) است.

بنابراین آماره آزمون از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\chi_o^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{(n_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}} \quad (۳)$$

χ^2 بحرانی (χ_c^2) با $(c\text{-}1),(r\text{-}1)$ درجه آزادی (دراین جا r و c به ترتیب تعداد سطر و ستون‌های ماتریس است.) و در سطح ۵ درصد خطا ($\chi_{0.05,df=(c-1),(r-1),}$) از جدول مربوطه به دست می‌آید. اگر $\chi_o^2 > \chi_c^2$ باشد فرض صفر درسطح معنی داری مورد نظر رد می‌شود. درحالت دیگر با استفاده از آماره p می توان درباره آماره قضاوت نمود. در روش p آماره کلاسیک با مختصری تغییر مورد استفاده قرار می‌گیرد. در واقع مقدار p برابر میزان احتمال به دست آوردن مقداری از ارزش نمونه است که حداقل به اندازه ارزش مورد نظری که از داده‌ها حاصل شده، دور و با این فرض که این ارزش درست باشد، تعریف می‌شود. بنابراین اگر مقدار p کمتر یا مساوی سطح معنی‌داری (a) باشد فرض صفر را رد نموده و درغیر این صورت می پذیریم. مقادیر p با ارزش‌های ۰/۰۱ ، ۰/۰۱ تا ۰/۰۵ و بزرگ تر از ۰/۰۵ ازنظر آماری به ترتیب خیلی معنی دار و گواه خیلی قوی، گواه مناسب و گواه غیر کافی علیه فرض صفر به شمار می‌آیند. در یک آزمون راست دامنه مقدار p بوسیله پیداکردن سطح قسمت راست آماره آزمون به دست می‌آید. بااین حال بایستی دقیقاً متوجه باشیم که درآزمون‌های دو دامنه، مقدار p دو برابر سطح ناحیه انتهایی است که به وسیله آماره آزمون محدود شده است.

از آن جا که زنجیره مارکوف نوعی داده‌های رتبه‌ای حاصل از داده‌های نسبی است برای آزمون علیه روند معقول‌تر است که روش رتبه‌ای به کار رود. یکی از روش‌های معمول، بکارگیری آزمون رتبه‌ای اسپیرمن است. کاربرد این روش در پژوهش‌های اقلیم شناختی بوسیله سازمان جهانی هواشناسی (۱۹۶۶ و ۲۰۰۰) پیشنهاد گردیده ودر سطح وسیعی بکار گرفته شده است. در این شیوه ابتدا اختلاف بین رتبه هر مقدار (K_i) و ترتیب آن در سری(i) محاسبه می‌شود تا () d_i به دست آید ($d_i = K_i - i$). سپس آماره اسپیرمن (r_s) از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$r_s = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n(n^2-1)} \quad (۴)$$

برای $n > 8$ مقدار r_s بوسیله فرمول (۵) از لحاظ معنی داری تعریف می‌شود. این آماره دارای توزیع تقریبی t استیودنت با $n\text{-}2$ درجه آزادی است و بوسیله t دو دامنه ارزیابی می‌شود. با توجه به حدود بحرانی، فرض صفر (تصادفی بودن مقادیر) در ازای فرض مقابل (وجود روند در مقادیر) آزمون می‌شود (WMO, 1966 and WMO, 2000) .

$$t_o = r_s\sqrt{\frac{n-2}{1-r_s^2}} \quad (۵)$$

۳- شیوه‌های برآورد ماتریس احتمال به طرز تفکر پژوهشگر بستگی دارد و شامل روش‌های بیزی[۱]، کمترین توان‌های دوم خطا (LSE)[۲]، برآورد بیزی تجربی[۳] و حداکثر (بیشینه) درستنمایی[۴] است. ساده‌ترین روش برآورد احتمال که دراین پژوهش به کار گرفته شده است، روش بیشینه درستنمایی است. برمبنای تئوری کلاسیک، احتمال براساس فراوانی (بسامد)های نسبی در یک دوره آماری طولانی و به صورت درستنمایی بیشینه اتفاق افتادن رویداد مورد نظر تعریف می‌شود. این درستنمایی غالباً با p نشان داده می‌شود. برای مثال هر گاه آمار n روز را داشته باشیم و رویدادی معین m بار رخ دهد، آن گاه به $\frac{m}{n}$ فراوانی نسبی گفته می‌شود. فراوانی نسبی را می‌توان به عنوان برآوردی از ارزش احتمال (p) در نظر گرفت (Johnson and Bhattacharyya, 2006). براین اساس نه تنها در اختصاص دادن احتمال به پیشامدها باید به فراوانی نسبی وقوع این مشاهده‌ها توجه داشت، بلکه وقتی احتمال پیشامدی در اختیار باشد این احتمال به عنوان حد فراوانی نسبی پیشامد تلقی خواهد شد. برای مثال منظور از اینکه احتمال بارش باران در روزی معین ۰/۳ (۳۰٪) می‌باشد، آن است که در شرایط جوی روز مفروض از هر۱۰۰ بار حدود ۳۰ بار بارندگی شده است (Akan and Houghtalen, 2003). ماتریس احتمال تغییر وضعیت (**P**) به روش درستنمایی بیشینه به صورت زیر به دست می‌آید (زارعی و شاهکار ۱۳۸۰):

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} D & W \end{array} \\ \begin{array}{c} D \\ W \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{n_{11}}{n_{1+}} & \frac{n_{12}}{n_{1+}} \\ \frac{n_{21}}{n_{2+}} & \frac{n_{22}}{n_{2+}} \end{bmatrix} \end{array} \quad (۶)$$

ماتریس فوق یک ماتریس تصادفی است. زیرا هر درایه آن نامنفی و مجموع درایه‌های آن در هر ردیف برابر ۱ است. درایه‌های این ماتریس با احتمال‌های تغییر وضعیت یک مرحله ای متناظرند. شایان توضیح است یکی از راه‌های معمول ارائه احتمال‌های تغییر وضعیت یک زنجیره مارکوف، به کمک ماتریس تغییر وضعیت یک مرحله‌ای است. احتمال تغییر وضعیت یک مرحله‌ای برابر احتمال رفتن از حالت i به j دریک دوره زمانی با آغاز از n بیان و به شکل P_{ij} نشان داده می‌شود. احتمال تغییر وضعیت یک مرحله‌ای، در نظریه و کاربرد زنجیره‌های مارکوف نقش کلیدی ایفا می‌کند. بنابراین **P** ماتریس

تغییر وضعیت یک مرحله ای فرایند مارکوف دو حالتی را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$P = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} D & W \end{array} \\ \begin{array}{c} D \\ W \end{array} & \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \end{array} \qquad (۷)$$

۳- شایان توضیح است که همه توان‌های ماتریس احتمال (P^k) نیز ماتریس تصادفی خواهند بود. همچنین ازیک مقدار به بعد با افزایش k هیچ تغییری در ماتریس احتمال ایجاد نمی‌شود و مقادیر ردیف‌های متناظر در ماتریس یکسان و برابر خواهند بود. دراین حالت گفته می‌شود که ماتریس به ایستایی (پایایی) رسیده است. این ماتریس احتمال وقوع را ماتریس ایستا (پایا) گویند. از آنجا که ردیف‌های این ماتریس برابرند می‌توان این ماتریس را به شکل یک بردار و با π_j نشان داد. درواقع اگر $\lim_{k\to\infty} P^k = \Pi$ ماتریسی مانند Π با سطرهای یکسان و درایه‌های مخالف صفر ایجاد می‌شود و اگر هر یک از سطرهای یکسان ماتریس حدی Π با بردار سطری π نشان داده شود، عناصر π یک توزیع احتمال را تشکیل می‌دهد. π بردار احتمال حالت پایا ودرایه‌های آن به احتمال‌های حالت پایا موسوم‌اند (Chinlar, 1380). بردار احتمال حالت پایا نشان می‌دهد که درمدت طولانی احتمال وقوع مثلا روز بارانی و روز فاقد بارش چقدر است.

بعد از محاسبه احتمال پایا (ایستا) که بیانگر تغییر وضعیت بارش در درازمدت است، دوره بازگشت هریک از تغییر وضعیت‌ها محاسبه شد. دوره بازگشت () T_j درواقع عکس احتمال است و آن متوسط تعداد روزهایی است که بین وقوع دو حادثه مشابه وجود دارد و به شکل $T_j = \frac{1}{p_{ij}}$ بیان می‌شود (Akan and Houghtalen, 2003). برای مثال اگر دوره بازگشت رخدادی با احتمال وقوع ۰/۲۵، ۴ سال باشد یعنی به طور متوسط هر۴ سال یک بار اتفاق می‌افتد. همچنین منظور از باران ۱۰۰ ساله باران‌هایی است که احتمال وقوع بارانی مشابه با آن یا بیشتر یک درصد است. با تعمیم این تعریف بر زنجیره‌های مارکوف، متوسط زمان لازم برای بازگشت زنجیره به حالت اولیه را نیز زمان بازگشت می گویند. درصورتی که وضعیت j برقرار باشد، رابطه ساده امید ریاضی دوره بازگشت و احتمال پایا را می‌توان به شکل زیر نشان داد (Higenz and Macnalti, 1379):

$$E(T_j) = \frac{1}{\pi_j} \qquad (۸)$$

دررابطه فوق $\pi = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_s)$ بردار احتمال حالت پایای زنجیره و T_j دوره بازگشت به حالت j را نشان می‌دهد.

۴- یافته‌ها

۴-۱- مشخصات توصیفی بارش

جدول (۱) آماره‌های توصیفی بارش ماهانه شهر تبریز را نشان می‌دهد. چند رابطه آشکار می‌توان در این جدول مشاهده نمود:

جدول ۱- مشخصات آماری بارش روزانه در شهر تبریز طی دوره آماری ۲۰۰۵-۱۹۵۱

ماه	تعداد روزهای بارانی طی ۵۵ سال	میانگین بارش روزانه(mm)	ضریب تغییرات	حداکثربارش روزانه(mm)
ژانویه	۴۳۶	۰/۷۲	۳۴/۳	۲۲
فوریه	۴۲۲	۰/۸۳	۳۳/۲	۳۷
مارس	۶۱۰	۱/۳۵	۳۵/۵	۶۳
آوریل	۶۳۵	۱/۷۶	۴۲/۹	۵۳
مه	۵۹۷	۱/۴	۳۷/۸	۴۲
ژوئن	۲۶۸	۰/۵۶	۲۳/۳	۳۲
ژوئیه	۱۰۴	۰/۱۹	۱۳/۶	۳۰
اوت	۵۷	۰/۱۱	۱۰	۲۸
سپتامبر	۹۷	۰/۲۵	۱۵/۶	۲۳
اکتبر	۳۳۲	۰/۷۲	۲۷/۷	۲۶
نوامبر	۳۹۰	۰/۹۳	۳۱/۵	۳۷
دسامبر	۴۱۴	۰/۷۵	۳۲/۶	۲۹

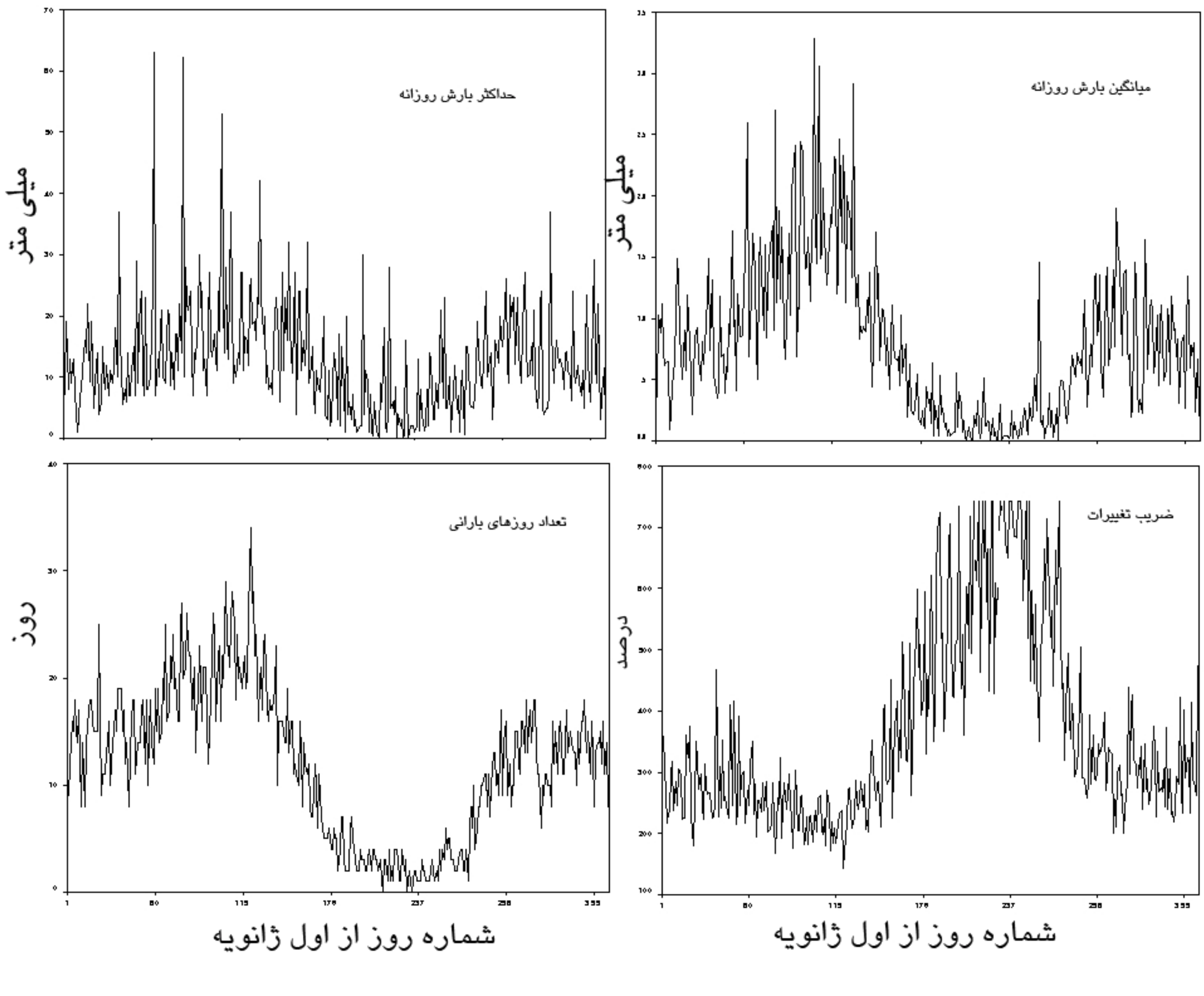
اول اینکه بیشترین مقادیر میانگین بارندگی شهر تبریز و نیز بیشترین تعداد روزهای بارانی این شهر درماه‌های بهار رخ داده است.
علیجانی (۱۳۷۴) معتقد است که بارش‌های بهاری شمال غرب ایران حاصل فعالیت‌های همرفتی است. همچنین با افزایش میانگین بارندگی ضریب تغییرات آن نیز فزونی می‌یابد و دیگر اینکه ماه‌هایی که میانگین بارش بیشتری دریافت داشته‌اند، حداکثر بارندگی روزانه بیشتری را نیز تجربه نموده‌اند.

مشخصات سری زمانی بارندگی روزانه شهر تبریز برای دوره آماری ۲۰۰۵ -۱۹۵۱ در شکل ۱ نشان داده شده است. در شکل ۱ الف می‌توان دید که میانگین بارش روزانه از اول ژانویه تا حدود صد و بیستمین روز از سال میلادی (سی‌ام آوریل برابر با نهم اردیبهشت) میانگین بارش رو به افزایش است. ازآن پس تا حدود دویست وچهل و سومین روز سال (پایان ماه اوت مصادف با هشتم شهریور) بارش

کاهش یافته است. از هشتم شهریور آغاز اوج گیری مجدد بارندگی تا پایان اکتبر (هشتم آبان ماه) است. بعدازاین تاریخ تا اول ژانویه میانگین بارندگی مجدداً کاهش یافته و چرخه تکرار می‌شود.

در شکل ۱ ب دیده می‌شود که دوره وقوع بارش‌های بیشینه روزانه در زمان اوج گیری بارندگی‌ها بویژه طی بارش‌های زمستانه – بهاره است. اگرچه ازاین قبیل مقادیر فرین در بارش‌های پاییزه نیز دیده می‌شود اما فراوانی و شدت آنها در بارش‌های زمستانه – بهاره بارزتر است.

به خوبی می‌توان دید که ضریب تغییرات بارش (شکل ۱ ج) با افزایش بارندگی کم شده و با کاهش آن فزونی می‌یابد. از این رو بیشترین ضریب تغییرات در دوره کم بارش تابستانه است. این وضعیت بیانگر عدم امکان اعتماد بر بارش‌های اتفاقی فصل تابستان تا اوایل پاییز است. از طرف دیگر چنان که در شکل ۱ د نیز نشان داده شده است فزونی روزهای بارانی در روزهای پربارش گویای توزیع افزون تر بارندگی در زمان نسبت به روزهای کم باران است. به عبارت دیگر بارش‌های روزهای تابستانه از ضریب تمرکز بالایی برخوردارند، درحالی که ضریب پراکنش زمانی در روزهای پرباران بیش‌تر است. این امر تفاوت شدت بارندگی‌های دو دوره کم و پرباران را بیان می‌دارد. رابطه آماری مشخصات توصیفی مورد بحث در جدول ۲ به وضوح نشان داده شده است. مقادیر ارائه شده در این جدول در هر سطح دلخواه معنی‌دار است.



شکل ۱- مشخصات توصیفی بارش روزانه شهرتبریز طی دوره ۱۹۵۱-۲۰۰۵

جدول ۲- ماتریس همبستگی بارش روزانه شهر تبریز

	روزهای بارانی	میانگین بارش (mm)	ضریب تغییرات	حداکثر بارندگی (mm)
روزهای بارانی		۰/۸۳۱	-۰/۸۵۱	۰/۵۰۳
میانگین بارش			-۰/۶۶	۰/۷۶۶
ضریب تغییرات				-/۲۸
حداکثر بارندگی				

۵- مشخصات احتمالی بارش

۵-۱- تعیین مرتبه تغییر وضعیت مارکوفی

وضعیت بارش روزانه شهر تبریز با فرض دو حالت بودن در ماتریس فراوانی زیر مرتب شده است.

$$F = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} D & W \end{array} \\ \begin{array}{c} D \\ W \end{array} & \begin{bmatrix} 13420 & 2293 \\ 2293 & 2068 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (۹)$$

در ردیف اول این ماتریس عدد ۱۳۴۲۰ گویای تعداد تغییر وضعیت از روز خشک به روز خشک $(D \to D)$ بعدی است. در واقع طی ۲۰۰۷۴ روز آمار موجود ۱۳۴۲۰ روز ، روزهای خشکی است که بعد از روز خشک (فاقد بارش) رخ داده است. عدد ۲۲۹۳ در ردیف اول دفعات روز بدون بارش،پس از یک روز بارندگی $(D \to W)$ را نشان می‌دهد. در ردیف دوم ماتریس تبدیل وضعیت از روز بارانی به روز خشک و بارانی است که به ترتیب ۲۲۹۳ و ۲۰۶۸ روز بوده است.

دو پرسش اساسی درباره ماتریس فوق این است که اولاً آیا فراوانی حالات مستقلند یا از زنجیره مارکوف دو حالتی پیروی می کنند. دوم اینکه آیا براساس فرض صفر داده‌ها فاقد روند هستند ($H_0 : \rho_s = 0$) یا براساس فرض مقابل از روند خاصی پیروی می‌کنند ($H_A : \rho_s \neq 0$). در دنباله بحث دو آزمون جهت ارزیابی این دو پرسش انجام خواهد شد.

چنان که اشاره شد از آزمون‌های بسیار معتبر جهت ارزیابی ماتریس تغییرحالت مارکوفی، آزمون χ^2 است. جدول زیر جدول متقاطع جهت انجام آزمون را نشان می دهد. اعداد بالایی مقادیر مشاهده شده (O) و اعداد داخل پرانتز مقادیر مورد انتظار (E) تحت فرض صفر است.

جدول ۳- جدول دو بعدی مقادیر مشاهده شده و مقادیر مورد انتظار ماتریس فراوانی دو حالته

	D	W	$\sum$
D	۱۳۴۲۰ (۱۲۲۹۹/۴۱)	۲۲۹۳ (۳۱۴۱۳/۵۹)	۱۵۷۱۳
W	۲۲۹۳ (۳۴۱۳/۵۹)	۲۰۶۸ (۹۴۷/۴۱)	۴۳۶۱
$\sum$	۱۵۷۱۳	۴۳۶۱	۲۰۰۷۴

آماره آزمون به شرح زیر به دست آمد:

χ_o^2 =۱۰۲/۰۹۶+۳۶۷/۸۵۹+۳۶۷/۸۵۹+۰/۰۰۱۳=۲۱۶۳/۲۳۸

براساس آزمون مربوطه ارزش آماره p ($p\text{-}Value$) در هر سطحی معنی دار است ($p=0$). همچنین براساس مقایسه مقادیر بحرانی (χ_c^2) و مقادیر مشاهده شده (χ_o^2)، معلوم شد که درهر سطح دلخواه شواهد کافی برای پذیرش فرض صفر (استقلال داده‌ها و عدم پیروی از زنجیره مارکوف دو حالته) وجود ندارد. این بدان معنی است که فراوانی حالات از زنجیره مارکوف دو حالتی پیروی می‌کند.

براساس ضریب همبستگی اسپیرمن که بر ارزش‌های زنجیره مارکوفی ـ زمان محاسبه گردید $r_s = 0.019$ به دست آمد. با توجه به سطح خطای ۰/۰۱، شواهد کافی برای رد فرض صفر ($H_0 : \rho_s = 0$) وجود ندارد و داده‌ها فاقد روند است. این آزمون همچنین ایستایی زنجیره را نشان می‌دهد. در واقع قضیه فوق گویای این امر است که فراوانی‌ها با زمان تغییر زیادی ندارند.

بنابراین با توجه به تعداد تغییر وضعیت‌ها به حالت‌های دیگر و نیز با عنایت به تعریف احتمال، ماتریس احتمال تغییر حالت از ماتریس فراوانی به شرح زیر حاصل شد:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} D & W \end{array} \\ \begin{array}{c} D \\ W \end{array} & \begin{bmatrix} 0.85 & 0.15 \\ 0.53 & 0.47 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (۱۰)$$

اندیس سطری با حالت کنونی و اندیس ستونی با حالت بعدی متناظر است. برای مثال، این که فرایند دریک مرحله از خشک به خشک ($D \to D$) انتقال یابد برابر با $p_{(D \to D)} = 0.85$ است. درصورتی که احتمال انتقال ازحالت خشک به حالت بارانی ($D \to W$) دریک مرحله برابر ۰/۱۵ است. شایان ذکر است که برای فرایندهای با حالت‌های بیشمار ماتریس تغییر وضعیت می‌تواند دارای ابعاد نامتناهی باشد.

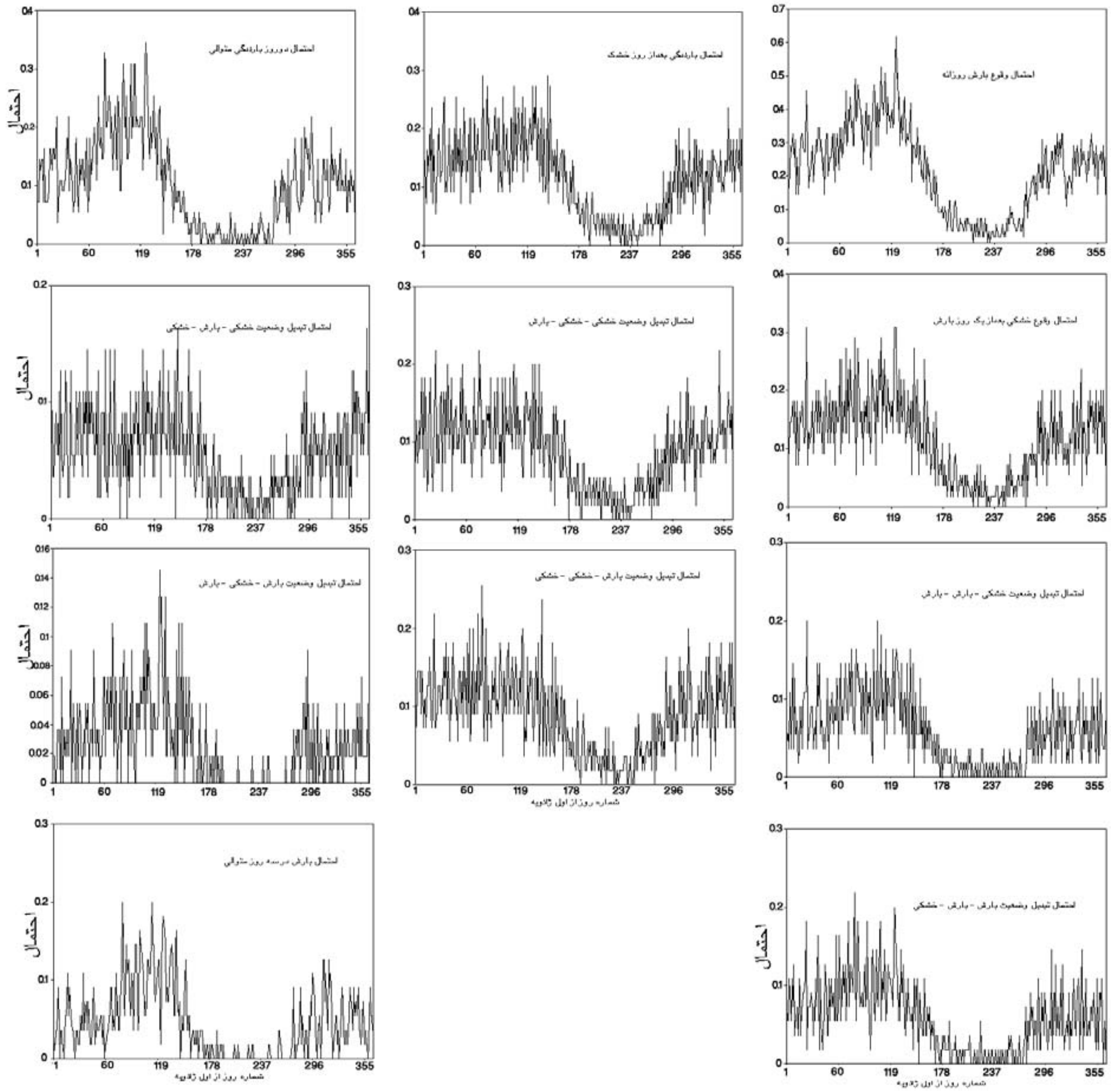
محاسبه احتمالی را که یک زنجیره مارکوف در زمان‌های ۱، ۲، ...، n وارد حالت‌های $s_{(1)}, s_{(2)}, ..., s_{(n)}$ شود با این فرض که زنجیره از حالت $s_{(0)}$ آغاز کرده است، درنظر می‌گیریم. دنباله‌ای ازحالت‌ها که بوسیله آنها فرایندی می‌تواند حرکت کند، مسیر فرایند نامیده می‌شود. احتمال یک مسیر، دقیقا برابر حاصلضرب احتمال‌های تغییر وضعیت یک مرحله‌ای است:

$$p[s_{(0)} \rightarrow s_{(1)}]p[s_{(1)} \rightarrow s_{(2)}]...p[s_{(n-1)} \rightarrow s_{(n)}] \qquad (۱۱)$$

برای مثال احتمال تغییر وضعیت از بارش به بارش و مجدداً بارش (یعنی سه روز متوالی بارندگی) به صورت زیر است:

$$p_{[W \rightarrow W]}p_{[W \rightarrow W]}p_{[W \rightarrow W]} = (0.47)(0.47)(0.47) = 0.104 \qquad (۱۲)$$

بدیهی است با تغییر نقطه آغاز مسیر، نتایج متفاوتی به دست خواهد آمد. محاسبه احتمال‌های تغییر وضعیت دومرحله ای به این مفهوم است که با آغاز یک وضعیت پس از دو تغییر به حالت اول برگردد. برای مثال خشک ← بارانی ← بارانی ← خشک یک تغییر وضعیت دو مرحله‌ای است. شکل ۲ برخی انواع تغییر وضعیت مارکوفی صفر و یک مرحله‌ای را نشان می‌دهد.



شکل ۲- احتمال تغییر وضعیت صفر ، یک و دومرحله ای بارش روزانه شهر تبریز

۵-۲- محاسبه احتمال پایا

چنان که از مبحث قبل می‌توان استنباط نمود، تغییر حالات پرشماری می‌توان برای زنجیره مارکوف تصور و برآورد نمود. اما جمع بندی این تغییر حالات دریک عبارت کلی می‌تواند تصویری ساده و روشن را ارائه نماید. برای بدست آوردن عبارت کلی احتمال‌های دو مرحله‌ای فهرستی از مسیرهای ممکن را که فرایند در رفتن از i به j در دو مرحله می‌تواند دنبال کند، متصور می شویم. این مسیرها برای مثال $i \leftarrow s \leftarrow j$ است. با محاسبه احتمال همه این مسیرها و جمع نتایج $P_{(s\to j)}$ حاصل می شود. بنابراین :

$$p^2_{(j\to i)} = \sum_s p_{(i\to s)} p_{(s\to j)}$$

دراین فرمول جمع‌یابی روی حالت‌های ممکن فرایند انجام شده است. این عبارت مربع ماتریس تغییر وضعیت یک مرحله‌ای است و به ماتریس تغییر وضعیت دو مرحله‌ای موسوم است. ماتریس P^4 را ماتریس تغییر وضعیت چهار مرحله‌ای می نامند.

احتمال‌های تغییر وضعیت k مرحله ای است که از به توان k ام رساندن ماتریس تغییر وضعیت یک مرحله‌ای بدست می‌آید. برای ماتریس تغییر وضعیت k مرحله‌ای وقتی k بزرگ می‌شود پدیده جالب توجهی رخ می‌دهد. در این حالت همه سطرهای ماتریس تغییر وضعیت باهم برابر می‌شوند به طوری که اگر به توان رساندن ماتریس تغییر وضعیت را به توان‌های بالاتر ادامه دهیم، درایه‌ها هیچگونه تغییری نخواهند نمود. برای روزهای بارانی شهر تبریز ماتریس تغییر وضعیت k مرحله‌ای در مرحله نهم وتا ۴ رقم اعشار به این شرایط رسید. یعنی:

$$P^9 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} D & W \end{array} \\ \begin{array}{c} D \\ W \end{array} & \begin{bmatrix} 0.7794 & 0.2206 \\ 0.7794 & 0.2206 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (۱۳)$$

شرایط بدون توجه به خانه آغازی، بعداز تقریباً ۹ وضعیت با احتمال‌های ۰/۷۷۹۴ و ۰/۲۲۰۶ به شرط حالت پایا می‌رسد. درواقع بردار سطری این ماتریس گویای احتمال وقوع وضعیت بلند مدت بارندگی است.

امید ریاضی دوره بازگشت بردار احتمال پایای زنجیره، (۴/۵ و۱/۳) $\approx \pi$ است. یعنی به طور متوسط هر ۱/۳ روز یک بار بدون بارش وهر۴/۵ روز یک بار بارش رخ می‌دهد. این وضعیت برای تمامی سطرهای ماتریس دوره بازگشت قابل تعمیم است. این مقادیر متوسطی است که برای طول سال صادق است. برای هریک از ماه‌های سال احتمالات روزهای توام با بارش و فاقد بارندگی محاسبه و در جدول ۳ ارائه شده است.

۵-۳- برآورد تداوم بارش

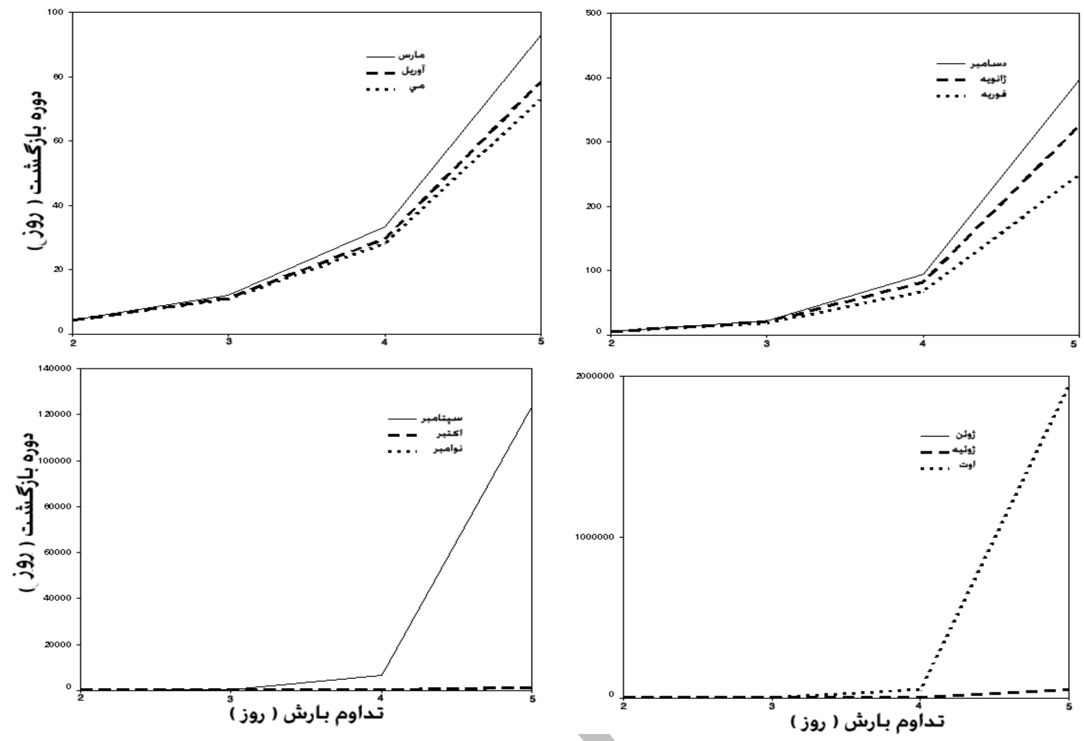
از کاربردهای تکنیک زنجیره مارکوف، برآورد دوره برگشت بارش‌های با تداوم m روزه است. منظوراز تداوم بارش، تعداد روزهایی متوالی است که بارش درآن رخ داده باشد. برای مثال تداوم دو روزه بارش، به معنی ریزش باران در دو روز متوالی است. ولی قبل از روز اول و بعد از روز دوم بارندگی وجود نداشته باشد. دوره برگشت مزبور براساس رابطه زیر به دست می‌آید (Berger and Goossens, 1983):

$$T_m = \frac{1}{p^{m-1}(1-p)} \qquad (۱۴)$$

دراینجا p احتمال بارش در ماه مورد نظر(جدول ۳) و m ، دوره بارانی مورد نظر طی m روز ، T_m دوره بازگشت بارش m روزه است. باقرار دادن مقادیر مختلف از ۲ تا ۵ به ازای m ، طول دوره بارش با تداوم‌های ۲ تا ۵ روز برای هرماه محاسبه شد (بارش یک روزه نیز در جدول ۳ نشان داده شده است). حاصل این محاسبات در شکل ۳ ارائه گردیده است. توجه کنید که مقیاس دوره‌های بازگشت در چهار فصل متفاوت است. چنان که دیده می شود، بارش‌های چند روزه عمدتاً در ماه‌های فصل بهار از دوره بازگشت کوتاه تری برخوردارند. برای مثال بارش‌های دو روزه در فصل بهار با دور بازگشت حدود ۴ روز، درحالی که برای ماه اوت با دوره بازگشت حدود ۳۸ روز مشخص می‌شوند. ماه‌های فصل زمستان نیز با تداوم بارش دوروزه حدود ۵ روز در مقام دوم احتمال بارش‌های دو روزه است. اختلاف مزبور در بارش‌های ۳، ۴ و ۵ روزه بارزتر است.

جدول ۳- احتمال پایای روزهای توام با بارش و فاقد بارندگی در ماه‌های مختلف برای ایستگاه تبریز

ماه	ژانویه	فوریه	مارس	آوریل	مه	ژوئن	ژوئیه	اوت	سپتامبر	اکتبر	نوامبر	دسامبر
احتمال بارش	۰/۲۵۳۳	۰/۲۷۲۷	۰/۳۶	۰/۳۷۸۴	۰/۳۸۶۷	۰/۳۵۰۶	۰/۰۶۶۷	۰/۰۲۷	۰/۰۵۴۱	۰/۱۷۹۱	۰/۱۸۲۹	۰/۲۴
احتمال عدم بارش	۰/۷۴۶۷	۰/۷۲۷۳	۰/۵۴	۰/۶۲۱۶	۰/۶۱۳۳	۰/۶۴۹۴	۰/۹۳۳۳	۰/۹۷۳	۰/۹۴۵۹	۰/۸۲۰۹	۰/۸۱۷۱	۰/۷۶



شکل ۳- دوره‌های بازگشت بارش‌های ۲ تا ۵ روزه برای ایستگاه تبریز

۶- نتیجه

با استفاده از روش زنجیره مارکوف و با به کارگیری آمار بارش روزانه بیش از نیم قرن شهر تبریز و نیز براساس آزمون‌های معتبر آماری، معلوم شد که زنجیره مارکوف دو حالته برازش مناسبی بر حالت‌های بارش روزانه این شهر دارد و نیز برآوردها نشان داد که روزهای بارانی با احتمال وقوع حدود ۰/۲۲۰۶ رخ می‌دهند. بنابراین دوره بازگشت بارندگی طی حدود ۴ روز است. ازآنجا که این مقدار، متوسطی برای طول سال است، احتمال وقوع روزهای توام با بارندگی برای تمامی ماه‌ها محاسبه شد. احتمال روزهای توام با بارندگی از ماه‌های فصل زمستان به سمت ماه‌های فصل بهار از افزایش قابل توجهی برخوردارند. درحالی که به سمت تابستان این روزها کاسته می‌شود. بیش‌ترین و کم‌ترین احتمال روزهای توام با بارش به ترتیب مربوط به ماه‌های اوت (۰/۰۲۷) و مه (۰/۳۸۶۷) است.

دوره بازگشت روزهای توام با بارندگی برای تداوم مختلف (۲ تا ۵ روز) شهر تبریز طی دوازده ماه سال محاسبه شد. براساس یافته‌های توصیفی این پژوهش بارش در ماه‌های بهار نسبت به ماه‌های دیگر نه تنها با احتمال بیشتری رخ می‌دهد بلکه تداوم آن نیز افزون‌تر است. دلیل اصلی این امر را می‌توان در فرایند همرفت دامنه‌ای جستجو کرد. شهر تبریز همچون دیگر نواحی شمال غربی ایران در فصل بهار صعود ناشی از همرفت دامنه‌ای را تجربه می کند. در این موقع از سال هوای مرطوب حاصل از گسترش زمستانه بادهای غربی به این منطقه، حتی پس از پسروی بادهای غربی در آنجا باقی می‌ماند. این هوای مرطوب، دربهار، براثر تابش زیاد خورشید بر دامنه‌های آفتاب گیر و ایجاد ناپایداری، صعود و ایجاد بارش می‌کند. این مساله سبب شده است که فصل بهار پر باران‌ترین فصل سال به شمار آید. دراین نوع صعود، بارندگی پراکنده و بی نظم است. بدین دلیل بارش ماهانه این فصل از ضریب تغییرات بالایی (حدود ۳۵ تا حدود ۴۳ درصد) برخوردار است. از این رو حداکثر بارش‌های روزانه نیز در این فصل رخ داده است. بااین وصف تعداد روزهای بارانی ماه‌های فصل بهار گویای این امر است که توزیع بارش از بقیه فصول بیشتر و تمرکز زمانی کمتری دارد. چراکه تعداد روزهای بارانی این فصل بیش از فصول دیگر رخ می‌دهد.

اگرچه در فصل زمستان به دلیل شدت، فراوانی و نفوذ بیشتر بادهای غربی به ایران، انتظار می رود که تبریز بارش بیشتری را نسبت به ماه‌های بهار تجربه نماید، اما به دلیل نفوذ توده‌های هوای سرد و پایدار با گنجایش کم رطوبتی از منطقه قفقاز، باران کم‌تری دراین فصل رخ می دهد. لذا هجوم گاه وبی گاه توده‌های هوایی سرد قفقاز مانع از برتری بارش زمستانه نسبت به بارش بهاره می‌شود.

تحلیل احتمالی تقارن سیستم‌های باران‌زا و تداوم آنها تصویری روشن تر از وضعیت بارشی منطقه ارائه نماید. از آنجا که این مقوله از حوصله این مقاله خارج است به عنوان پیشنهاد این پژوهش ارائه می‌گردد. بدیهی است که دانسته‌های حاصل از آن و نیز تلفیق آنها با نتایج این پژوهش در برنامه ریزی و مدیریت منابع آب شهر تبریز و نیز به لحاظ کاربری کشاورزی آن قابل تامل و از اهمیت شایان توجهی برخوردار خواهد بود.

پی‌نوشت‌ها

1- Bayes
2- Least Squares Error
3- Empirical Bayes
4- Maximum Likelihood

مراجع

حجازی‌زاده، ز. و شیرخانی، ع. (۱۳۸۴)، " تحلیل و پیش بینی آماری خشکسالی و دوره‌های خشک کوتاه مدت در استان خراسان" مجله پژوهش‌های‌جغرافیایی. شماره ۵۲ سال سی‌وهفتم.

جعفری بهی، خ. (۱۳۷۸)، "تحلیل آماری دوره‌های تر و خشک بارندگی درچند نمونه اقلیمی ایران با استفاده از زنجیره مارکف" پایان نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد هواشناسی کشاورزی. دانشگاه تهران. دانشکده کشاورزی.

چینلار، ا. (۱۳۸۰)، "آشنایی با فرایندهای تصادفی" ترجمه غلامحسین شاهکار و ابوالقاسم بزرگ نیا. تهران: موسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی امیرکبیر.

زارعی، ح. و شاهکار، غ. (۱۳۸۰)، "بررسی احتمال تواتر روزهای بارانی و خشک مناطق خرمدره- ارداک و زشک". سومین سمینار احتمال و فرایندهای تصادفی . دانشگاه اصفهان ۷ و۸ شهریور ماه ۱۳۸۰

سازمان هواشناسی کل کشور، آمار بارش روزانه شهر تبریز طی ۱۹۵۱-۲۰۰۵

علیجانی، ب. (۱۳۷۴)، "آب وهوای ایران" تهران: انتشارات پیام‌نور.

علیزاده، ا. (۱۳۸۵)، "اصول هیدرولوژی کاربردی". مشهد: انتشارات دانشگاه امام رضا.

غیور، ح. و مسعودیان، ا. (۱۳۷۶)، "بزرگی، گستره و فراوانی خشکسالی‌ها در ایران". فصلنامه تحقیقات جغرافیایی شماره ۴۵.

مشکانی، م. (۱۳۶۳)، "بررسی احتمال تواتر روزهای خشک بابلسر از دیدگاه بیز تجربی" مجله علوم آب شماره ۳.

هیگنز، ج. ج. و مک نالتی، سالی کلر (۱۳۷۹)، "مفاهیم احتمال و مدل‌بندی تصادفی". ترجمه علی مشکانی. مشهد: انتشارات دانشگاه فردوسی.

Akan, A.Osman and Houghtalen, Robert.J., (2003), *Urban Hydrology, Hydraulics, and Storm Water Quality,* John Wily & Sons.Inc.,U.S.A .

Benzi .G , A.Parisi. and A. Sutera and A. Vulpiani, (1983), “A theory of Stochastic reasonce in climatic change”, Siam J., Appl.Math.,43, pp. 565-578.

Berger, A. and Goossens, C.H.R., (1983), “Persistence of wet and dry spells at Uccle (Belgium)”, *J. Climatol*., 3, pp. 21–34.

Box . George E P, Hunter Stuart J. and Hunter William G., (2005), *Statistics for Experimenters*, *John Wily & Sons.Inc.,U.S.A* .

Buishand, T.A. (1978), “Some remarks on the use of daily rainfall models”, *J. Hydrol*., 36, pp. 295–308.

Burgers. G. and D. B. Stephenson, (1999), The Normality of Elnino, Geophys.Res. Lett.26, pp. 1027-1030.

Douguedroit, A. (1987), “The variations of dry spells in Marseilles from 1865 to 1984”, *J. Climatol*., 7, pp. 541–551.

Gibbs, W.J. and J.V. Maher, (1967), ‘‘Rainfall deciles as drought indicators’’ *Bureau of Meteorology Bulletin* No. 48, Commonwealth of Australia, Melbourne.

Hoaglin, David C. Mosteller, Frederick and Tukey , John W.(edit) (2006), Exploring Data Table, Trends, and Shapes, John Wily & Sons.Inc.,U.S.A .

Johnson. Richard. A and Bhattacharyya. Gouri.K. (2006), Statistics: Principles and Methods. John Wiley & Sons.INC., U.S.A.

Martin-Vide, Javier and Gomez, Linda (1999), ‘‘Rigionalization of Peninsular Spain Based on the Length of Dry Spells. ’’ Int.J. Climatol.19, pp. 537-555

Moon. Eull.S, Boom Ryoo. S., Gi Kwon. J. (1994), “A Markov Chain Model for Daily Precipitation Occurrence in South Korea”. Inter.Jour.Climato.

WMO. (1966), *Climate Change.* Technical Note No 79.

WMO, (2000)*, Detecting Trend and Other Change in Hydrological Data,* WMO/ TD- NO.1013.