

# شبیه‌سازی جریان مافوق صوت آشفته حول اجسام مدور به انضمام ناحیه پشت با استفاده از شبکه چندبلوکی و مرز بلوکی انطباقی

محمد رضا هیدری<sup>۱</sup>، محمد طیبی رهنی<sup>۱</sup> و عزیز عظیمی<sup>۲</sup>

دانشکده مهندسی هوافضا      دانشکده مهندسی مکانیک  
دانشگاه صنعتی شریف

## چکیده

با توسعه اولیه یک برنامه تولید شبکه با سازمان چندبلوکی و حل معادلات لایه نازک ناویر-استوکس، جریان پایای مافوق صوت آشفته حول اجسام مدور به انضمام ناحیه پشت شبیه‌سازی شده است. میدان جریان در یک جهت تا پشت جسم بلوک‌بندی می‌شود. توزیع نقاط در مرزهای مشترک بین بلوک‌ها از نوع وصله‌ای - انطباقی است. حل عددی معادلات به روش ضمنی تفاضل محدود و مرکزی بیم-وارمینگ انجام گرفته و آشفته‌گی جریان با استفاده از مدل جبری دولایه‌ای بالدوین - لومکس مدل‌سازی شده است. الگوریتم حل جامع میدان جریان به صورتی ساده و روان بوده و در هر سیکل، جریان از بلوک اول روی دماغه تا بلوک آخر در پشت جسم یکبار جاروب می‌شود. نتایج این تحقیق با سایر نتایج عددی و نیز با آزمایش‌های تجربی مقایسه شده و تطابق خوبی را نشان می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: شبکه چندبلوکی، جریان پشت، جریان لزج، جریان مافوق صوت آشفته، معادلات لایه نازک ناویر-استوکس

## Numerical Simulation of Supersonic Turbulent Flow Over Bodies of Revolution Including the Base, Using Multiblock Grid

M.R. Heidari, M. Taeibi-Rahni, and A. Azimi

Aerospace Eng. Department,      Mech. Eng. Department  
Sharif Univ. of Technology

### ABSTRACT

*A turbulent supersonic flow over bodies of revolution, including the base flow, is investigated using multiblock grid to solve the thin layer Navier-Stokes (TLNS) equations. Patched method has been used near the interfaces. Our numerical scheme was implicit Beam-Warming central differencing, while Baldwin-Lomax turbulence modeling was used to close the Reynolds averaged Navier-Stokes equations. The results of this work have been compared with existing computational and experimental benchmark data and shows close agreements.*

**Key Words:** Multi-block Grid, Base Flow, Viscous Flow, Turbulent Supersonic Flow, TLNS Equations

۱- دانشجوی دکترا

۲- دانشیار، taeibi @ sharif.edu

۳- دانشجوی دکترا

کرد. میکی<sup>۱</sup> و همکارش [۱] و نیز ویدریل و همکارش [۲] در اواسط دهه هشتاد، دو نوع شبکه‌بندی بلوکی سه‌بعدی روی اجسام پیچیده انجام دادند. تامسون [۳] نشان داد که میزان اختیار و سرعت در چیدمان بلوک‌ها، مستقیماً روی مدت زمان لازم برای تولید شبکه چندبلوکی تأثیر می‌گذارد. بویرستول<sup>۵</sup> و همکارانش [۴] نشان دادند که تولید شبکه مناسب اولین و مهمترین وظیفه در شبیه‌سازی میدان چندبلوکی است و در چهار مرحله: بلوک‌بندی میدان جریان، تعیین مشخصات هندسی هر بلوک، تولید شبکه درون بلوک‌ها و بهینه‌سازی کل شبکه‌ها انجام می‌پذیرد. شانفلد<sup>۶</sup> و همکارانش [۵]، به این نتیجه رسیدند که بلوک‌بندی بهینه میدان جریان چندین ماه به طول می‌انجامد و تقریباً ۷۰ درصد از زمان لازم برای تحلیل عددی جریان حول اجسام پیچیده، صرف ایجاد شبکه می‌شود.

از نکات مورد توجه در تولید شبکه چندبلوکی، روش مناسب برای تولید شبکه، بررسی اجمالی و دسته‌بندی اطلاعات اجزای هندسی جسم و تعیین ساختمان داده‌های شبکه است. در یکی از روش‌های خودکار، ابتدا میدان جریان را با به‌کارگیری شبکه بی‌سازمان روی کل میدان، به طور مناسب بلوک‌بندی کرده و بعد در هر بلوک شبکه باسازمان ایجاد می‌کنند. تولید شبکه باید با روش حل میدان جریان سازگار باشد. مثلاً در برخی روش‌ها عدم دقت در انطباق کامل مرزهای شبکه محاسباتی، بر مرزهای واقعی میدان جریان (و جسم) و نیز عدم تعامد شبکه محاسباتی (بویژه در مرزها)، موجب افزایش خطای گسسته‌سازی در حل میدان جریان خواهد شد. جاکوت<sup>۷</sup> اظهار داشت، پیچیده‌تر شدن هندسه میدان جریان موجب افزایش قابل توجه تعداد گره‌ها و بلوک‌های مورد نیاز می‌شود [۶]. هرچند که بهترین روش برای حل میدان جریان تک‌بلوکی روی هندسه‌های پیچیده، استفاده از شبکه بی‌سازمان (بدون بلوک‌بندی) است، ولی ترکیب

## فهرست علائم لاتین

$D_E, D_I$	حملات انلاف مصنوعی صریح و غیرصریح
$e$	انرژی داخلی بر واحد جرم
$E$	انرژی کل بر واحد حجم
$J$	ژاکوبین تبدیل از سیستم کارترین به منحنی‌الخط
$M$	عدد ماخ
$Re$	عدد رینولدز جریان
$t$	زمان
$u, v$	مولفه‌های سرعت در مختصات کارترین
$x, y$	مختصات کارترین
$A, B$	ماتریس‌های ژاکوبین بردارهای شار غیرلزوج
$F, G, H$	بردارهای شار غیرلزوج در مختصات منحنی‌الخط
$G_v, H_v$	بردارهای شار لزوج در مختصات منحنی‌الخط
$Q$	بردار متغیرهای وابسته بقای

## فهرست علائم یونانی

$\xi, \eta$	مختصات منحنی‌الخط
$\mu$	ضریب لزجت
$\delta$	عملگر اختلاف محدود مرکزی
$\rho$	جرم مخصوص

## بالا نویسی و پائین نویسی‌ها

$n$	مربوط به گام زمانی
$v$	مربوط به جریان لزوج

## مقدمه

تحلیل جریان حول اجسام پیچیده هندسی با استفاده از روش‌های متنوع حل عددی تفاضل محدود نیازمند تولید شبکه باسازمان و بلوک‌بندی میدان اطراف جسم است. با آنکه برنامه‌نویسی و تولید شبکه چندبلوکی حول جسمی پیچیده بسیار پرزحمت است، اما حل میدان جریان را به مراتب سریع و کارآمد می‌کند. شبکه‌های باسازمان چندبلوکی در دهه هشتاد، به دنیای دینامیک سیالات عددی<sup>۱</sup> قدم گذاشت و اغلب کاربردهای واقعی هنوز براساس این نوع شبکه است. مقاله ویدریل<sup>۲</sup> و فورسی<sup>۳</sup> در کنفرانس دینامیک سیالات AIAA سال ۱۹۸۴، برای اولین بار توجه همه را به نظریه بلوک‌های باسازمان جلب

1- Miki  
5- Boerstol  
6- Schonfeld  
7- Jacquotte

1- Computational Fluid Dynamics (CFD)  
2- Weatherill  
3- Forsey

قابلیت تحلیل جریان آشفته به انضمام ناحیه پشت را حول هندسه‌های مختلف تقارن محوری با استفاده از رایانه شخصی<sup>۲</sup> (بدون نیاز به حافظه‌های پرنظرفیت) دارد.

در این تحقیق، یک جریان دائم، لزج، آرام / آشفته، مافوق صوت دوبعدی / تقارن محوری در غیاب نیروهای حجمی و چشمه‌های حرارتی مورد بررسی قرار گرفته است. دیواره جسم آدیباتیک و تغییرات شارهای لزج در جهت جریان ناچیز فرض شده است. میدان جریان در جهت جریان بلوک‌بندی شده و توزیع نقاط و کیفیت شبکه در فصل مشترک بین بلوک‌ها، از نوع وصله‌ای انطباقی با خطوط هموار است. در هر بلوک، معادلات لایه نازک ناوبر-استوکس<sup>۳</sup> به روش ضمنی و عددی تفاضل محدود به فرم دلتا و تفاضل مرکزی بیم-وارمینگ<sup>۴</sup> [۱۵] حل شده است. همچنین، مدل جبری دو لایه‌ای بالدوین و لومکس<sup>۵</sup>، برای مدل‌سازی آشفته‌گی جریان به کار رفته است و امواج ضربه‌ای به روش تسخیر شوک<sup>۶</sup> یا برازش شوک<sup>۷</sup> تحلیل شده است. در هر سیکل از حل جامع جریان، میدان جریان از بلوک اول پیرامون دماغه جسم، تا بلوک آخر واقع در پشت جسم، جاروب می‌شود. نتایج عددی این تحقیق روی یک مدل اجایو-استوانه<sup>۸</sup> با نتایج تجربی کارلسون<sup>۹</sup> و همکارش [۱۶] مقایسه می‌شود. در پایان، نتایج شبیه‌سازی جریان مافوق صوت حول چندین هندسه مختلف ارائه و پیرو آن برنامه حل چندبلوکی MBLNS<sup>۱۰</sup>، با استفاده از نتایج گوناگون عددی و تجربی مورد ارزیابی و تایید قرار گرفته است.

بلوک‌بندی جریان با استفاده از شبکه‌های باسازمان جانشین مناسب‌تری برای شبکه‌های بی‌سازمان می‌باشد. چیلدز<sup>۱</sup> به استفاده مرکب از هر دو نوع تولید شبکه باسازمان و بی‌سازمان برای افزایش کاربرد نحوه بلوک‌بندی میدان پرداخته است [۷].

تاکنون تحقیقات گسترده‌ای در زمینه تولید و استفاده از شبکه‌های چندبلوکی، روش‌های تولید شبکه، روش‌های دسته‌بندی اطلاعات مربوط به بلوک‌ها و همچنین، تهیه نرم‌افزارهای تولید شبکه که برای کاهش نقش کاربر و زمان تولید شبکه به ویژه برای شکل‌های پیچیده هندسی بهینه شده باشند، انجام گرفته است [۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴]. علیرغم توسعه نرم‌افزارهای متنوع تولید شبکه چندبلوکی باسازمان در دهه اخیر، این امر در کشور ما کمتر مورد توجه قرار گرفته است. تحقیق حاضر، ضمن معرفی اولین نرم‌افزار اساسی چندبلوکی و شبیه‌سازی جریان پایای مافوق صوت در کشور، به توسعه برنامه برای تحلیل جریان آشفته و احتساب ناحیه پشت می‌پردازد. مراحل مختلف تحلیل میدان جریان چندبلوکی را می‌توان به صورت زیر مرتب کرد:

۱. شناسایی هندسه جسم و تعیین چیدمان چندبلوکی مناسب؛  
۲. تولید شبکه درون بلوک‌ها و تعیین نقاط مشترک بین بلوک‌ها؛

۳. حل جریان آشفته در هر بلوک و سپس کل میدان. وضعیت و محل استقرار مرزهای بین بلوک‌ها و به ویژه توزیع نقاط و ابعاد دو بلوک انتهایی میدان بسیار با اهمیت بوده و یک چیدمان نامناسب می‌تواند موجب واگرایی در حل جامع میدان گردد. مرز بین دو بلوک نباید روی نقاط تیز جسم و پایه شوک واقع شود. اما، در پایین دست جریان، اختصاص دو بلوک، یکی دقیقاً در پشت جسم و دیگری روی آن، مناسب‌تر است. تنوع فیزیک جریان، مانند وجود شوک و گردابه‌های قوی و نواحی جدایی جریان نیز تعیین‌کننده تعداد و پراکندگی بلوک‌هاست. نرم‌افزار حاضر،

- 2- Personal Computer (PC)
- 3- Thin-Layer Navier-Stokes (TLNS)
- 4- Beam and Warming
- 5- Baldwin and Lomax (BL)
- 6- Shock Capturing
- 7- Shock Fitting
- 8- Ogive Cylinder
- 9- Carlson
- 10- Multi-Blok Thin-Layer Navier-Stokes

- 1- Childs

## معادلات حاکم و روش حل

وجود دارد که تعداد عملیات ریاضی آن کمتر از حل معادلات بالاست و آن روش قطری کردن ماتریس‌های ژاکوبین سمت چپ (قسمت غیرصریح) معادله است که توسط پولیام<sup>۳</sup> ارائه شده است [۱۷].

$$\text{ماتریس‌های ژاکوبین } \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}} \text{ و } \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{Q}} \text{ دارای}$$

مقادیر ویژه حقیقی بوده و می‌توانند به صورت قطری نوشته شوند:

$$\Lambda_{\xi} = \mathbf{Z}_{\xi}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Z}_{\xi} \quad , \quad \Lambda_{\eta} = \mathbf{Z}_{\eta}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{Z}_{\eta} \quad , \quad (3)$$

که در آن، ماتریس‌های  $\mathbf{Z}_{\xi}$  و  $\mathbf{Z}_{\eta}$  قابل محاسبه‌اند. بنابراین، یک حالت اصلاح شده معادله (۲) را می‌توان با فاکتورگیری ماتریس‌های بردار ویژه به صورت زیر بدست آورد:

$$\mathbf{Z}_{\xi} \left[ \mathbf{I} + \Delta t \delta_{\xi} \Lambda_{\xi} + \mathbf{D}_{I_{\xi}} \right] \mathbf{Z}_{\xi}^{-1} \mathbf{Z}_{\eta} \left[ \mathbf{I} + \Delta t \delta_{\eta} \Lambda_{\eta} + \mathbf{D}_{I_{\eta}} \right] \mathbf{Z}_{\eta}^{-1} \Delta \mathbf{Q}^n = \text{RHS} \quad (4)$$

در روابط (۲) و (۴) متغیرهای  $\mathbf{D}_{I_{\xi}}$ ،  $\mathbf{D}_{I_{\eta}}$  و  $\mathbf{D}_E$  جملات اتلاف مصنوعی صریح و غیرصریح برای میرا کردن ناپایداری عددی ناشی از فرکانس‌های حاصله هستند که شکل خطی آنها به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{I_{\xi}} &= -2\Delta t J^{-1} \Delta_{\xi} \nabla_{\xi} J, \\ \mathbf{D}_{I_{\eta}} &= -2\Delta t J^{-1} \Delta_{\eta} \nabla_{\eta} J, \\ \mathbf{D}_E &= -\Delta t J^{-1} \left[ (\Delta_{\xi} \nabla_{\xi})^2 + (\Delta_{\eta} \nabla_{\eta})^2 \right] J \mathbf{Q}^n. \end{aligned} \quad (5)$$

## مدل‌سازی آشفتگی و تخمین شوک

در این تحقیق، معادلات حاکم به طریق متوسط‌گیری زمانی رینولدز<sup>۴</sup> متوسط‌گیری شده، سپس جملات آشفتگی، موسوم به تنش‌های رینولدز، با استفاده از مدل بال‌دوین و لومکس مدل‌سازی می‌شود. مدل صفر معادله‌ای

معادلات لایه نازک ناویر-استوکس، از معادلات کامل ناویر-استوکس<sup>۱</sup>، با حذف جملات لزج در جهت جریان بدست می‌آید. شکل بقایی و بی‌بعد این معادلات در سیستم مختصات منحنی‌الخط  $\xi = \xi(x, y)$  و  $\eta = \eta(x, y)$  به صورت زیر است:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \eta} + j \mathbf{H} = \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial \mathbf{G}_v}{\partial \eta} + j \mathbf{H}_v \right], \quad (1)$$

که در آن، برای جریان دوبعدی  $j=0$  و برای جریان تقارن محوری  $j=1$  انتخاب می‌شود.  $\mathbf{F}$ ،  $\mathbf{G}$ ،  $\mathbf{H}$ ،  $\mathbf{G}_v$  و  $\mathbf{H}_v$  بردارهای شار لزج و غیرلزج، مشروطه در کتب مرجع، هستند. بردار متغیرهای وابسته  $\mathbf{Q}$ ، عبارت است از:

$$\mathbf{Q}^T = J^{-1} [\rho, \rho u, \rho v, E].$$

متغیرهای جریان با استفاده از پارامترهای جریان آزاد نظیر فشار، دما و چگالی بی‌بعد شده‌اند. معادلات لایه نازک ناویر-استوکس به روش عددی اختلاف محدود و مرکزی بیم-وارمینگ، که یک الگوریتم فاکتورگیری شده تقریبی غیرصریح غیرتکراری و دلتا فرم است، حل می‌شوند. با اعمال روش بیم-وارمینگ و مرتب‌کردن و ساده‌سازی معادلات حاکم در دو جهت  $\xi$  و  $\eta$ ، نهایتاً خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \left\{ \mathbf{I} + \Delta t \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}} \right)^n + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{Q}} \right)^n + j \left( \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{Q}} \right)^n \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \mathbf{G}_v}{\partial \mathbf{Q}} \right)^n + j \left( \frac{\partial \mathbf{H}_v}{\partial \mathbf{Q}} \right)^n \right] \right] \right\} \Delta \mathbf{Q}^n = \text{RHS} \quad (2) \\ \text{RHS} &= -\Delta t \left[ \frac{\partial \mathbf{F}^n}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{G}^n}{\partial \eta} + j \mathbf{H}^n \right. \\ & \left. - \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial \mathbf{G}_v}{\partial \eta} + j \mathbf{H}_v \right)^n \right] + \mathbf{D}_E \quad , \end{aligned}$$

که در آن،  $\mathbf{A}$  ماتریس واحد  $(4 \times 4)$  است. حل معادله (۲) مستلزم حل ماتریس‌های قطری بلوکی در هر کدام از جهات  $\xi$  و  $\eta$  است، ولی یک راه ساده‌تر و سریع‌تر

3- Pulliam  
4- Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS)

1- Full Navier - Stokes  
2- Dependent Variables

تولید شبکه بیضوی<sup>۲</sup> با سازمان با حل معادلات دیفرانسیل جزئی پواسون<sup>۴</sup> [۱۸ و ۱۹] است.

انتخابی مناسب برای محل استقرار مرزهای بین بلوکی بسیار با اهمیت است. در این تحقیق، میدان جریان در امتداد جریان بلوک‌بندی شده است. در صورت عدم دسترسی به اطلاعات اولیه از فیزیک جریان، لازم است ابتدا میدان جریان با استفاده از یک شبکه تک بلوکی حل شود. برای هندسه‌های پیچیده بهتر است، این کار با استفاده از یک شبکه بی‌سازمان انجام گیرد. بنابراین، برای تقسیم‌بندی میدان جریان ابتدا هندسه جسم و پدیده‌های فیزیکی درون جریان مورد ارزیابی قرار گرفته، سپس نسبت به تعیین مرزهای بین بلوکی و محل استقرار آنها با رعایت اصول زیر اقدام می‌شود:

- مرز بلوکی نباید در محل نقاط اتصال منحنی‌های بدنه یا دو سطح ناپیوسته مستقر شود؛
- حتی‌الامکان هر پدیده فیزیکی، مانند موج ضربه‌ای، جدایی جریان، وجود گردابه‌های قوی و نیز جریان زیرصوت کاملاً درون یک بلوک واقع شود؛
- مرز بلوکی نزدیک به پایه موج ضربه‌ای یا امواج انبساطی نباشد؛
- ناپیوستگی‌ها و ناهمواری‌های سطح جسم، مانند پیچ، شیار و بالک، کاملاً داخل یک بلوک واقع شده یا خودش یک بلوک مستقل باشد؛
- برای ناحیه پایین‌دست جریان، یک بلوک دقیقاً در پشت جسم و یک بلوک روی آن در نظر گرفته شود.

شبکه‌های مرزی مشترک بین بلوک‌ها دو دسته‌اند:

- الف- شبکه‌های وصله‌ای، که در آنها خطوط دو طرف مرز می‌تواند پیوسته / ناپیوسته و هموار / ناهموار باشد<sup>۵</sup>،
- ب- شبکه‌های همپوشان یا رویهم فرورفته<sup>۶</sup>.

BL زیرمجموعه مدل‌های طول اختلاط پراکتل و توسعه یافته مدل سبسی و اسمیت<sup>۱</sup> است که در آن لزجت آشفتگی برای لایه داخلی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$v_i = l^2 \left| \nabla \times \bar{V} \right|, \quad (6)$$

و برای لایه خارجی:

$$v_o = 0.0168 \beta F y_{\max} \Gamma_{\max}, \quad (7)$$

که در آن،  $F$  و  $\Gamma$  توابعی از ارتفاع  $y$  و گرادیان سرعت (چرخش) است و سایر ضرایب ثابت با استفاده از نتایج تجربی تعیین می‌شود. در این مدل‌سازی داریم:

$$v_{\text{turb}} = \min[v_i, v_o]. \quad (8)$$

مدل لزجت آشفتگی ( $v_{\text{turb}}$ ) به جملات طبیعی لزجت دینامیکی ( $\nu = \mu/\rho$ ) در معادلات حاکم افزوده می‌شود. مدل BL یک مدل آشفتگی ساده معتبر و پر استفاده‌ای است که در حل بعضی نواحی جریان نسبت به سایر مدل‌های معروف حداکثر تا ۱۰ درصد عدم دقت دارد، اما حجم محاسبات را تا ۵۰ درصد کاهش می‌دهد.

در روش تسخیر شوک، در این تحقیق مرز بی‌نهایت (خط  $\eta = \eta_{\max}$ ) به شکل منحنی یک موج ضربه‌ای خمیده<sup>۲</sup>، انتخاب و ترسیم شده است. با انتخاب مقادیر دلخواه برای دو ضریب تجربی در معادله منحنی موج می‌توان محدوده و وسعت میدان جریان را تنظیم کرد. در روش پرازش شوک، مرز بی‌نهایت همان منحنی واقعی شوک است.

### بلوک‌بندی و مرز بین بلوکی

اولین قدم در شبکه‌بندی، توزیع مناسب نقاط روی بدنه جسم است. سپس، به بلوک‌بندی میدان و نهایتاً تولید شبکه درون هر بلوک پرداخته می‌شود. در اغلب بلوک‌ها، برای هندسه‌های نسبتاً ساده، از یک شبکه‌بندی جبری استفاده شده است. برای هندسه‌های پیچیده لازم است، خطوط شبکه حتی‌الامکان بر سطح جسم عمود شود تا شرایط مرزی دقیق‌تر اعمال شود. این موضوع، مستلزم

3- Elliptic Grid Generation  
4- Poisson  
5- Patched Grids  
6- Chimera/Overlapped Grids

1- Cebeci and Smith (CS)  
2- Bow Shock

توزیع خطوط شبکه در دو طرف مرز بلوکی دلخواه و بدون محدودیت است.

پس از چیدمان بلوک‌ها، شناسنامه هر بلوک مشخص می‌شود. این شناسنامه معرف شماره بلوک، شماره و نوع مرزها، موقعیت هندسی گوشه‌های بلوک و شماره و نوع مرزهای مشترک از بلوک‌های همسایه است. همچنین، سایر اطلاعات داخلی نظیر تعداد و تراکم نقاط شبکه، ضرایب CFL و ضرایب اتلاف مصنوعی، باید قبل از شروع حل میدان برای تمام بلوک‌ها معین شود.

### الگوریتم ترکیب بلوک‌ها

با وجود پایداری و همگرایی حل جریان در تک‌تک بلوک‌ها، ممکن است حل جامع میدان جریان واگرا شود. این موضوع اهمیت مدیریت اجرای حل چند بلوکی و نحوه دورزدن بین زنجیره بلوک‌ها را مشخص می‌سازد. روند حل جامع میدان روی بلوک‌ها و فرآیند شروع و دورزدن و تکرار تا ختم حل جریان باید نسبتاً ساده و روان باشد. مهمترین ویژگی در این فرآیند رعایت هم‌وزنی و هماهنگی متغیرهای وابسته است.

در این تحقیق، با استفاده از روشی ساده و مناسب، در هر دور از حل میدان، از بلوک اول روی دماغه، که حاوی اطلاعات ورودی از بالادست جریان است، شروع نموده و با عبور از زنجیره بلوک‌ها، به بلوک آخر واقع در پشت جسم و اطلاعات خروجی از پایین دست جریان، می‌رسیم. در هر بلوک نیز، میدان جریان تنها در یک قدم زمانی (یک تکرار در زمان جدید) حل می‌شود. چنانچه در هر سیکل، مایل به تکرار حل جریان در هر بلوک تا تعداد دلخواه یا رسیدن به دقتی معین باشیم، لازم است سطح پیشرفت حل در هر بلوک همگام با بلوک‌های همسایه و سایر بلوک‌های میدان جریان تنظیم شود. این مسئله کار دشواری است و عدم رعایت آن موجب عدم توازن و هماهنگی بین متغیرهای وابسته بلوک‌ها و تأخیر یا کاهش سرعت همگرایی یا وقوع واگرایی احتمالی در حل جامع میدان خواهد شد.

در این تحقیق، شبکه خطوط در حوالی فصل مشترک بلوک‌ها از نوع وصله‌ای انطباقی هموار است. هرگاه حل جریان در هر بلوک دربرگیرنده مرز بلوکی انطباقی باشد، برای محاسبه مشتقات و جایگزینی در دستگاه معادلات، می‌توان مستقیماً از متغیرهای بلوک همسایه روی خطوط همجوار با مرز بلوکی (بدون نیاز به درون‌یابی) استفاده کرد. علیرغم محدودیت‌های ایجاد شده، این حالت موجب حذف هرگونه خطای ناشی از تبادل غیربفایده داده‌ها از مرزهای بین بلوکی خواهد شد.

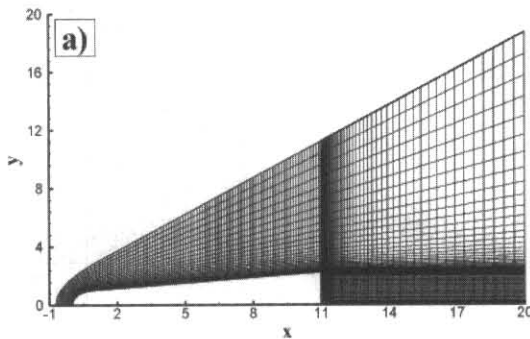
حتی در حالت پیوستگی شبکه‌ها، هر تغییر ناگهانی در فواصل نقاط یا زاویه خطوط شبکه در امتداد مرز بلوکی موجب ناپیوستگی شدید در متریک‌های تبدیل شبکه (شبکه‌های هموار / یا متریک ناپیوسته) می‌شود. از طرف دیگر، برای کنترل دقت در اعمال شرایط مرزی روی بدنه جسم و حل جریان در یک بلوک خاص ممکن است، نیاز به افزایش نقاط و تراکم خطوط شبکه در جهت عمود بر بدنه نسبت به بلوک همسایه باشد، که در این صورت نیاز به شبکه‌ای با مرز بلوکی غیرانطباقی خواهد بود. تحقیقات نشان می‌دهد که در اغلب مراجع، در صورت نیاز به مرز بلوکی غیرانطباقی، به نصف یا دو برابر کردن خطوط شبکه در بلوک‌های مجاور مرز بلوکی بسنده می‌کنند [۲۰]. این امر هرگونه خطای تبادل اطلاعات از مرز بلوکی را کاهش می‌دهد. روش‌های عددی بسته به نوع و کیفیت خود از عدم دقت خاصی برخوردار است. حل جریان در هر بلوک متأثر از شرایط مرزی اطراف و به ویژه اطلاعات رسیده از بلوک‌های مجاور (از طریق مرز مشترک) است. بنابراین، هرگونه خطا در تبادل اطلاعات از مرزهای درونی، که خاص شبکه‌های چند بلوکی است، مستقیماً روی دقت تحلیل جریان در هر بلوک و همگرایی حل جامع جریان تأثیر می‌گذارد. این مسئله نیاز به روش‌های کم‌خطا و در صورت امکان، بقای را برای انتقال داده‌ها از مرزهای مشترک بلوکی مشخص می‌سازد. در این تحقیق، از یک درون‌یابی خطی نسبتاً مناسب برای محاسبه متغیرها در نقاط فرورفته از یک بلوک درون بلوک همسایه استفاده می‌شود. بنابراین،

### نتایج حل عددی جریان

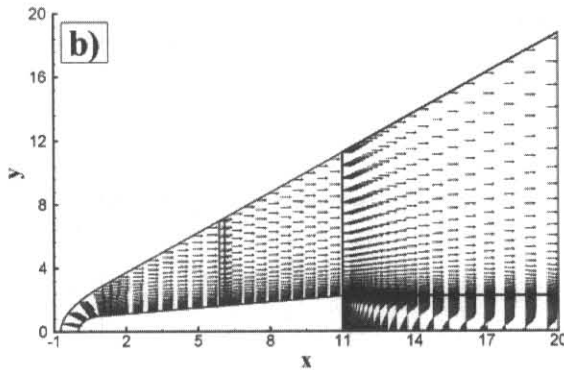
مدل‌هایی متفاوت و مناسب برای شبیه‌سازی میدان جریان چندبلوکی انتخاب شده، که در اعداد ماخ ۲ تا ۳ و اعداد رینولدز مختلف تحلیل می‌شوند. نرم‌افزار MBLNS برای حل جریان تقارن محوری آرام حول یک دماغه سرپخ با طول بلند در شرایط جریان آزاد ماخ ۲/۹۴ و رینولدز ۲۲۰,۰۰۰ (براساس شعاع دماغه) و دمای ۱۰۷ درجه کلوین اجراء شده است. شکل (۱) شبکه نقاط، میدان سرعت و خطوط هم‌تراز فشار بی‌بعد و عدد ماخ را برای این نمونه نشان می‌دهد. در شکل (a-۱) فشردگی نقاط نزدیک سطح جسم مشهود است. در سایر شکل‌ها، توزیع مقادیر فشار و درجه حرارت بی‌بعد روی سطح جسم و در جدول (۱) ضریب پسا با نتایج یک نرم‌افزار چندناحیه‌ای<sup>۱</sup> [۲۱] مقایسه شده، که از تطابق خوبی برخوردارند. در حل چند ناحیه‌ای تبادل داده‌ها از هر بلوک به بلوک همسایه تنها یکبار و آن هم در جهت جریان صورت می‌پذیرد، اما در حل چندبلوکی ضمن دورزدن مکرر بین زنجیره بلوک‌ها، انتقال اطلاعات از بلوک پایین‌دست به بلوک همسایه در بالادست نیز انجام می‌گیرد. این موضوع، موجب اختلاف نتایج این دو روش حل در مرزهای بلوکی مستقر در جریان زیر صوت خواهد شد. شایان ذکر است که منحنی‌های ارائه شده، در روش چندبلوکی با اثرات جریان پشت است، به همین دلیل، در انتهای بدنه جسم مقداری اختلاف بین نتایج حل چندبلوکی و حل چندناحیه‌ای وجود دارد که در شکل (f-۱) به وضوح مشهود است.

جدول ۱- ضریب پسای دماغه سرپخ بلند (شکل ۱).

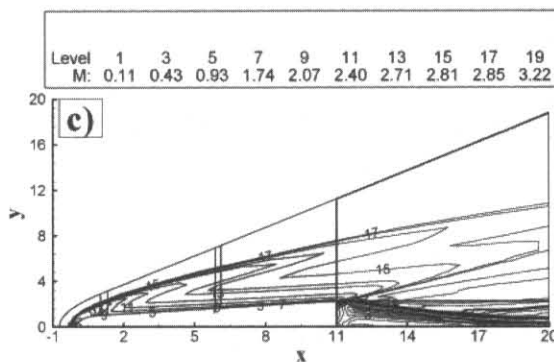
نوع نتایج	نتایج عددی نرم‌افزار چندناحیه‌ای مرجع [۲۱]	نتایج عددی حاضر (نرم‌افزار چندبلوکی)
ضریب پسا $C_D$	۱/۰۱۱۸	۱/۰۱۱۶



شکل ۱- نتایج عددی جریان تقارن محوری حول دماغه سرپخ بلند، عدد ماخ ۲/۹۴ و عدد رینولدز ۲۲۰,۰۰۰. (a-۱) شبکه نقاط در پنج بلوک.



(b-۱) بردارهای سرعت.

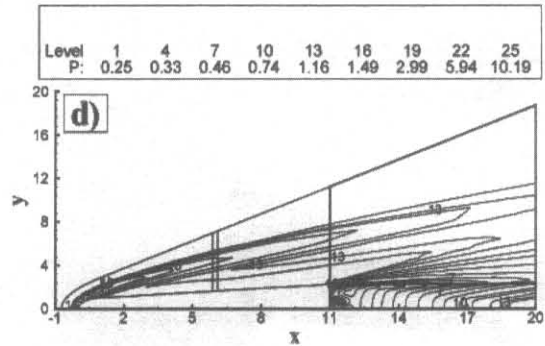


(c-۱) خطوط هم‌تراز ماخ.

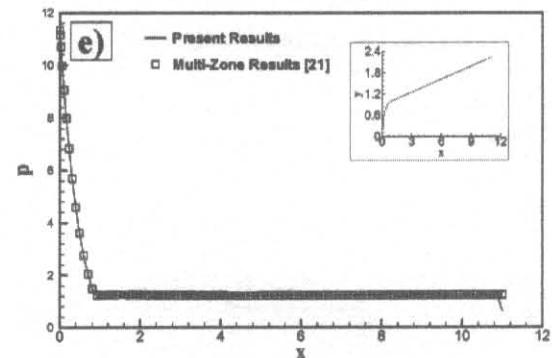
در سایر نتایج این تحقیق، جریان مافوق صوت آشفته شبیه سازی می شود. دومین هندسه مورد تحلیل، ترکیبی از سکانت اجایو و مخروط دم قایقی<sup>۱</sup> است. شکل (۲) گذر جریان آزاد با ماخ ۳ و رینولدز ۱۲۷,۸۰۰ (براساس طول جسم) را روی این هندسه نشان می دهد. میدان حل به پنج بلوک تقسیم بندی شده و خطوط هم تراز فشار و ماخ روی مرزهای بلوکی، کاملاً پیوسته است. چند خط جریان به همراه توزیع سرعت روی جسم و پشت آن ترسیم شده است. در ناحیه پشت جسم، یک گردابه بزرگ همراه با برگشت جریان در عرض شبکه دیده می شود.

در همه نتایج این تحقیق، مطالعه شبکه انجام پذیرفته است. شکل ۲- b نمونه ای از این مطالعات را نشان می دهد. تعداد بهینه گره ها برای شبکه بلوک ها معین شده و بلوک سوم با ۶۰ گره در جهت طولی و ۴۰ گره در جهت عرضی کمترین گره را برای محاسبه فشار روی بدنه، با دقتی مناسب داراست (خط پر). اگر تعداد گره ها در جهت عرضی در همه بلوک ها، به جز بلوک ششم در پشت جسم، به ۲۰ گره کاهش یابد، خطای نتایج تا ۶ درصد افزایش می یابد (منحنی خط چین)، ولی اگر این تعداد را به ۶۰ گره افزایش دهیم، افزایش دقت کمتر از یک درصد خواهد بود (مربع توپر). همچنین، اگر تعداد گره ها در جهت طولی در کلیه بلوک ها نصف شده و در بلوک سوم به ۲۰ گره کاهش یابد، خطای نتایج تا ۱۰ درصد افزایش می یابد (منحنی خط نقطه)، اما اگر این تعداد دو برابر شده و در بلوک سوم به ۱۲۰ گره افزایش یابد، افزایش دقت مجدداً کمتر از یک درصد خواهد بود (دایره توپر).

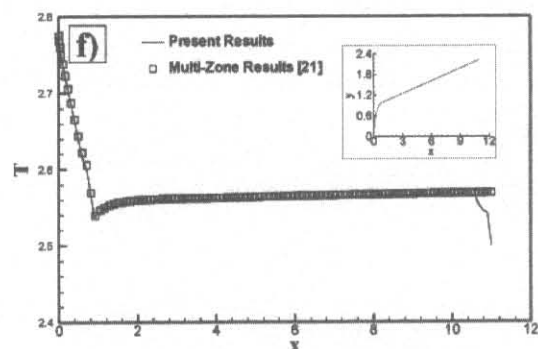
در شکل ۲- d، نتایج اجرای نرم افزار حاضر، برای یک هندسه SOCBT با زاویه دم قایقی ۷ درجه در جریان آزاد ماخ ۳ و رینولدز ۶,۳۹۰,۰۰۰ بر واحد طول، آورده شده و با نتایج مرجع [۲۵]، که از مدل های آشفته دو - معادله ای استفاده کرده، مقایسه شده است. شکل خط جریان فاصل بین گردابه و دنباله پشت جسم مطابقت خوبی با مرجع



(d-۱) خطوط هم تراز فشار.



(e-۱) منحنی تغییرات فشار روی بدنه.

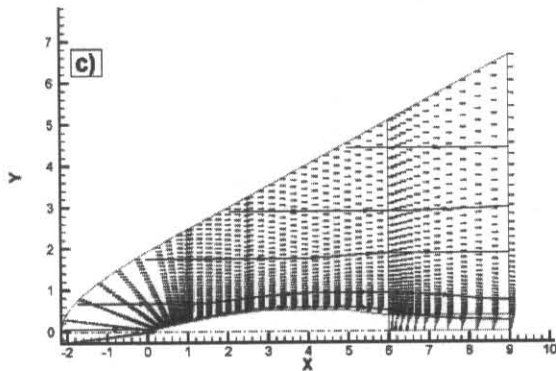


(f-۱) منحنی تغییرات درجه حرارت روی بدنه.

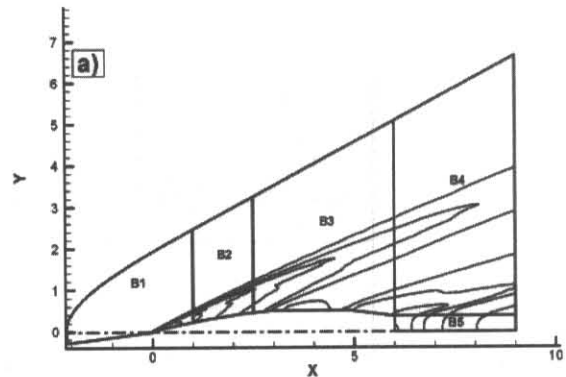
1- Secant Ogive-Cone Bottail (SOCBT)



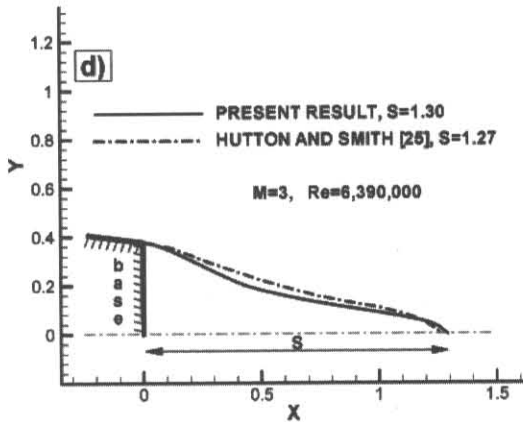
فوق دارد. فاصله بین نقطه سکون روی محور تقارن تا سطح پشت جسم در مرجع یادشده ۱/۲۷ و در تحقیق حاضر، ۱/۳۰ برابر قطر بدنه است.



(c) بردارهای سرعت و چند نمونه از خطوط جریان درون بلوک‌ها.



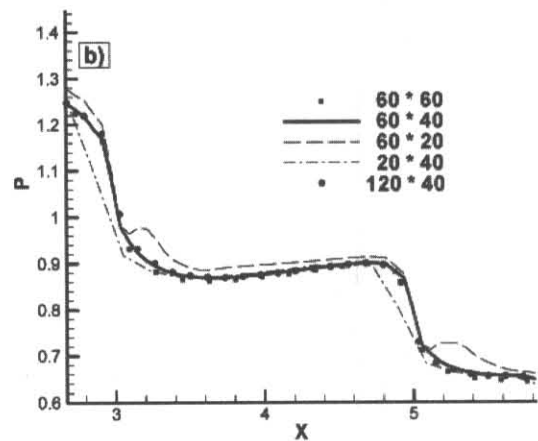
شکل ۲- جریان روی هندسه SOCBT با عدد ماخ ۳ و عدد رینولدز ۱۲۷,۸۰۰ (براساس طول جسم).  
(a) مرزهای بلوکی و خطوط هم‌تراز فشار.



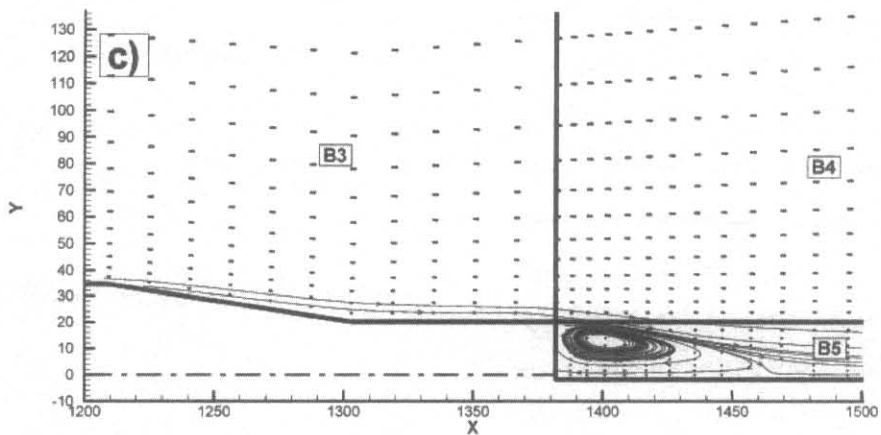
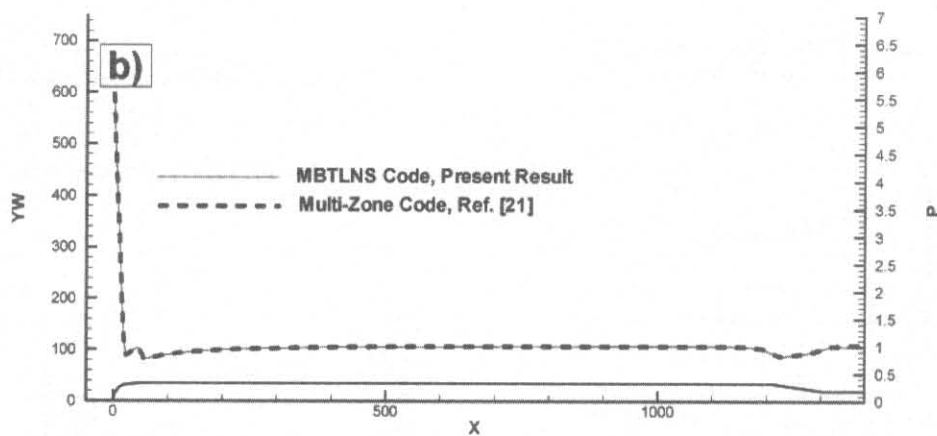
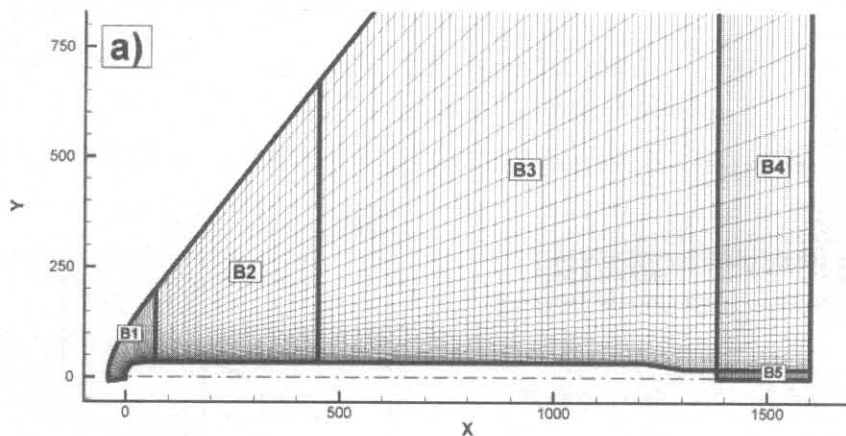
(d) خط جریان بین گردابه و دنباله پشت جسم.

شکل (۳) توزیع فشار روی بدنه یک راکت طولیل سرپخ را در جریانی با ماخ ۲ و رینولدز ۳۰۰,۰۰۰، با نتایج حاصله از نرم‌افزار چند ناحیه‌ای [۲۱] مقایسه می‌کند. یادآوری می‌شود، که نرم‌افزار مذکور جریان مافوق صوت را بدون احتساب ناحیه پشت ناحیه‌بندی کرده و سپس هر ناحیه را یک‌بار بدون برگشت حل می‌کند.

در شبکه‌بندی همه هندسه‌های این تحقیق، شبکه مرزی بین بلوک‌ها از نوع وصله‌ای انطباقی است. بنابراین، تعداد و تراکم نقاط و شیب خطوط شبکه در دو طرف مرز بلوکی یکسان است. اختلاف نتایج فشار در بخش انتهای بدنه، به علت عدم احتساب ناحیه پشت در حل چندناحیه‌ای و لذا، تأثیرناپذیری میدان حل از جریان پایین دست است.



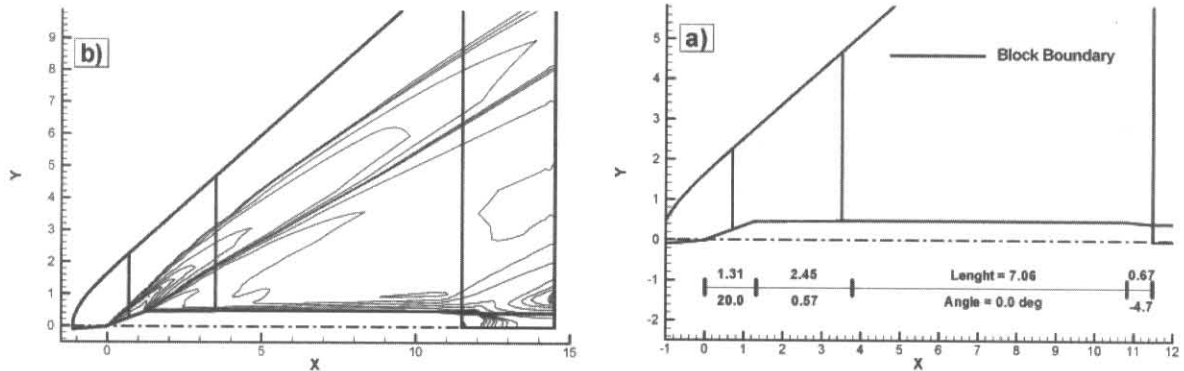
(b) توزیع فشار روی بدنه در بلوک سوم با انواع تعداد نقاط شبکه.



شکل ۳- جریان روی راکت طولی سرپخ با عدد ماخ ۲ و عدد رینولدز ۳۰۰,۰۰۰ (براساس طول واحد).  
 (a) بلوک‌بندی میدان جریان (b) توزیع فشار روی بدنه (c) جریان گردابه‌ای در پشت جسم.

جدول (۲) مقایسه شده است. در این حالت، عدد رینولدز جریان  $700,000$  و عدد ماخ ۲ است. توجه شود که در نتایج تجربی، ضریب پسای پشت جسم اندازه‌گیری نشده است.

شکل (۴)، شامل یک راکت طولی نوک‌تیز مرکب از چهار مخروط با طول و زوایای مختلف است که ضرایب پسای آن با نتایج نرم‌افزار MD<sup>۱</sup> و نتایج تجربی تونل باد [۲۲] در



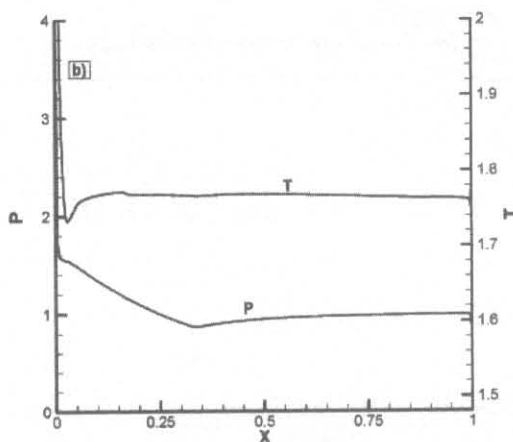
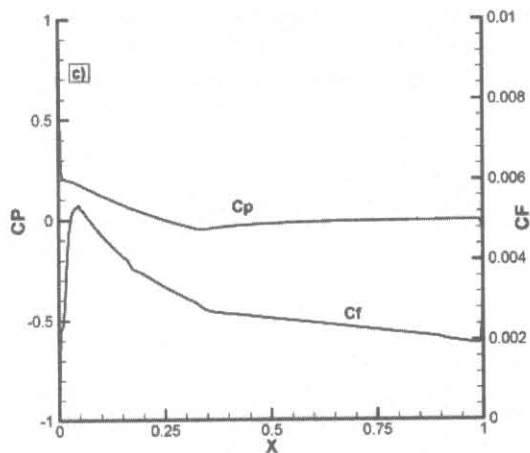
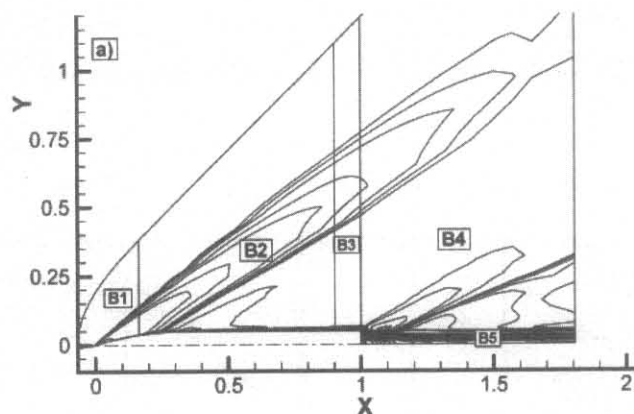
شکل ۴- جریان روی یک راکت طولی نوک‌تیز با عدد ماخ ۲ و عدد رینولدز  $700,000$ .  
(a) مشخصات هندسی راکت (b) خطوط هم‌تراز چگالی.

جدول ۲- ضرایب پسای راکت طولی نوک‌تیز (شکل ۴).

نتایج عددی حاضر (MBTLNS Code)	نتایج تجربی مرجع [۲۲] (Wind-Tunnel Test)	نتایج روش مهندسی (MD Code)	ضریب پسا
۰/۳۷	۰/۳۵۵	۰/۴۱	$C_D$
۰/۱۰	-	۰/۱۰	$C_{D_{base}}$
۰/۴۷	-	۰/۵۱	$C_{D_{total}}$

پسای این مدل در جریان با زاویه حمله صفر، با جواب نرم‌افزار MD و نتیجه تجربی بدست‌آمده از یک تونل باد در جدول (۳) مقایسه شده است [۱۵].

شکل (۵)، نتیجه حل عددی یک مدل مورد آزمایش را به همراه توزیعات دما، فشار، ضریب پسای پوسته و ضریب فشار محلی روی بدنه نشان می‌دهد. نتایج عددی ضرایب



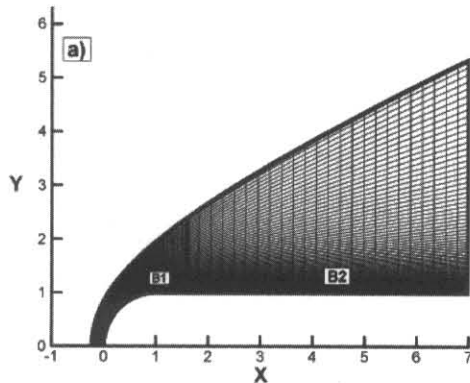
شکل ۵- جریان روی مدل اجایو- استوانه نوک تیز با عدد ماخ ۲ و عدد رینولدز  $6,830,000$  (براساس طول جسم).

(a) بلوک بندی و خطوط هم تراز ماخ در پنج بلوک (b) توزیع دما و توزیع فشار روی بدنه

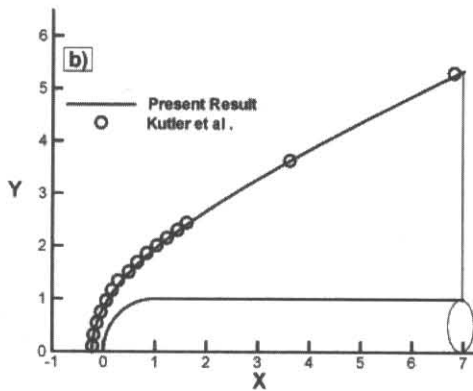
(c) توزیع ضریب پسای اصطکاک پوسته و توزیع ضریب فشار محلی روی بدنه.

جدول ۳- ضرایب پسای مدل اجایو- استوانه (شکل ۵).

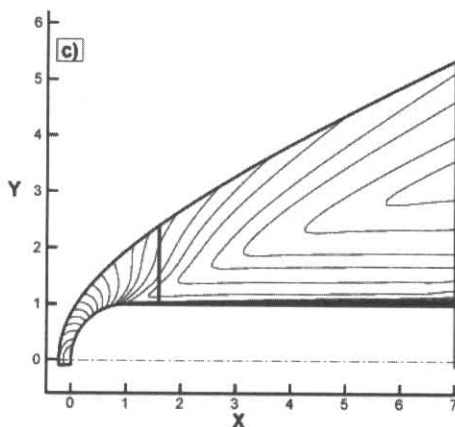
نتایج عددی حاضر (MBTLNS Code)	نتایج تجربی مرجع [۱۵] (Wind-Tunnel Test)	نتایج روش مهندسی (MD Code)	ضریب پسا
۰/۱۸۰	۰/۱۷۳	۰/۱۶۲	$C_D$
۰/۱۴۰	-	-	$C_{D_{base}}$
۰/۳۲۰	-	-	$C_{D_{total}}$



شکل ۶ - جریان روی هندسه کره- استوانه در ماخ ۲/۹۴ و رینولدز ۲۲۰,۰۰۰ (براساس شعاع دماغه).  
(a) بلوک‌بندی و نقاط شبکه.



(b) مقایسه دو حل عددی برای شکل شوک.



(c) خطوط هم‌تراز دما.

تمام تحلیل‌های بالا، به روش حل تسخیر شوک انجام گرفته‌اند. در آخرین تحلیل، یک نرم‌افزار عددی ضمنی ناپایا با حل معادلات لایه نازک ناویر - استوکس، که توسط کوتلر و همکارانش در مرکز تحقیقات ناسا<sup>۱</sup> [۲۳] نوشته شده است، برای ارزیابی و صحت‌گذاری روش حل برازش شوک در نرم‌افزار MBTLNS، مورد استفاده قرار گرفته‌است. شکل (۶) نتایج توزیع فشار و دما روی دماغه پخ یک جسم کره - استوانه‌ای را به همراه شکل شوک و خطوط هم‌تراز دما و توزیع دما در سه ایستگاه بالای دماغه در جریانی با ماخ ۲/۹۴ و رینولدز ۲۲۰,۰۰۰ نشان می‌دهد. نتایج این تحقیق با نتایج کوتلر، که در هر دو ضریب کشش و تراکم خطوط شبکه روی بدنه برابر با ۱/۰۰۵ است، نسبتاً مطابقت کاملی دارد. همچنین، با نتایج حل معادلات کامل ناویر - استوکس توسط ویواند [۲۴] نیز مطابقت می‌کند و تنها در نتایج توزیع دما روی سطح دماغه، حداکثر ۲ درصد عدم دقت وجود دارد که این اختلاف با تغییر و انتخاب ضریب مناسب کشش، قابل کاهش است. با حفظ تمام گره‌های شبکه و کاهش بلوک‌های شکل (۶) از دو بلوک به یک بلوک، حافظه موردنیاز برای اجرای برنامه از ۱۶ مگابایت به ۲۶ مگابایت (کمتر از دو برابر) افزایش یافت. به‌طور کلی، در حالت تک‌بلوکی مقدار حافظه جاری مورد نیاز، متناسب با تعداد کل نقاط شبکه است و در حالت چندبلوکی (با همان گره‌های تک‌بلوکی) مقدار حافظه جاری موردنیاز متناسب با مجموع نقاط پرگره‌ترین بلوک شبکه است که قطعاً بسیار کمتر از حالت تک‌بلوکی بوده و در صورتی که مجموع نقاط تمام  $n$  بلوک ایجاد شده، مساوی باشد، حافظه جاری موردنیاز برای حل جریان تقریباً تا حد  $\frac{1}{n}$  حالت تک‌بلوکی کاهش می‌یابد.

### بحث و نتیجه گیری

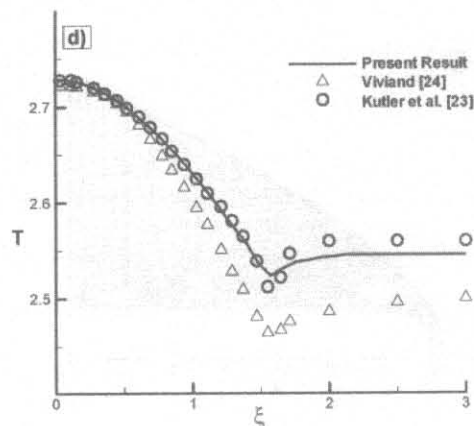
در این تحقیق، جریان مافوق صوت آشفته روی اجسام تقارن محوری با استفاده از شبکه‌های با سازمان چندبلوکی و معادلات لایه نازک ناویر - استوکس، با احتساب جریان پشت جسم، با دقت و کیفیت مناسب شبیه‌سازی شد. فیزیک جریان نشان‌دهنده تشکیل شوکی نسبتاً خمیده در جلوی جسم و دسته امواج انبساطی روی دماغه و تشکیل گردابه‌ای بزرگ در پشت جسم است. روش ضمنی تفاضل محدود و مرکزی بیم - وارمینگ در حل معادلات حاکم و مرزهای بلوکی وصله‌ای انطباقی در شبکه‌های مرزی چندبلوکی مورد استفاده قرار گرفته و جواب مناسب داده است. نتایج بدست‌آمده نشان دهنده دقت حل و عدم بروز هرگونه ناپیوستگی در صفحات میانی بین بلوک‌هاست. همچنین، گردابه بزرگ پشت جسم به خوبی آشکار شده و توزیعات سرعت پیوسته است. نتایج حاصله روی بدنه جسم با سایر نتایج عددی و مهندسی و تجربی، با دقت مناسب تطبیق می‌کند. حل تک‌بلوکی جریان نسبت به حل چندبلوکی، متناسب با تعداد بلوک‌ها، به زمان و حافظه بیشتری نیاز دارد.

### قدردانی

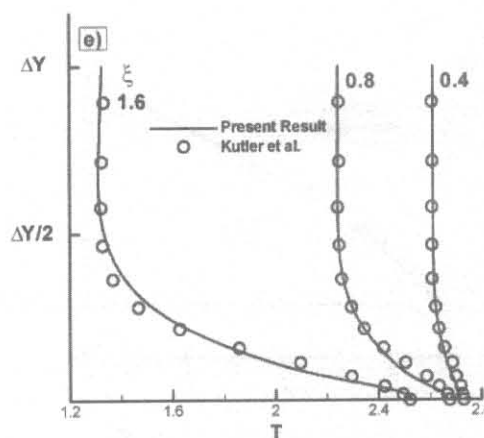
این تحقیق با مساعدت معاونت تحقیقات و سیستم صنایع شهید حسن باقری سازمان صنایع هوافضا و راهنمایی‌های دکتر وحید اصفهانیان و سایر کارشناسان مدیریت مکانیک پرواز آن معاونت انجام پذیرفته است. لذا، بدین‌وسیله از همکاری ایشان تشکر و قدردانی می‌شود.

### مراجع

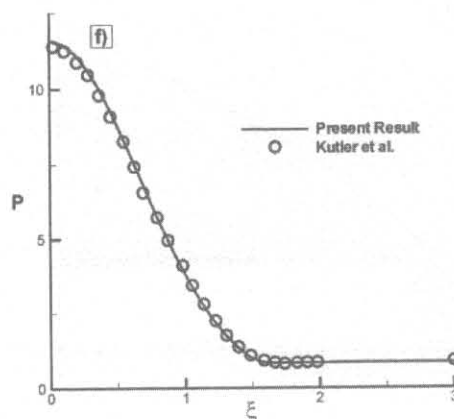
- [1] Miki, K. and Takagi, T. "A Domain Decomposition and Overlapping Method for the Generation of Three-dimensional Boundary-Fitted Coordinate Systems", J. Comp. Phys. Vol. 53, No. 2, pp. 319-330, 1984.
- [2] Weatherill, N.P. and Forsey, C.R. "Grid Generation and Flow Calculations for Complex Aircraft Geometries Using a Multi-blockScheme", AIAA-85-1665, 1985.



(d) مقایسه توزیع دما روی سطح دماغه.



(e) مقایسه توزیع دما در سه ایستگاه بالای دماغه.



(f) مقایسه توزیع فشار روی سطح دماغه.

- [3] Thompson, J.F. "A Composite Grid Generation Code for General 3-D Regions", AIAA-87-0275, 1987.
- [4] Boerstoel, J.W., Jacobs, J.M., and Kassies, A., "Design and Testing", Norway, 1989.
- [5] Schonfeld, T. and Weinerfelt, P. "The Automatic Generation of Quadrialteral Multi-block Grids by the Advancing Front Technique", pp. 743-754, (\*).
- [6] Jacquotte, O.P. "Recent Progress on Mesh Optimization", pp. 581-596. (\*).
- [7] Childs, P.N. and Weatherill, N.P. "Generation of Unstructured Grids Within a Hybrid Multi-block Environment", pp. 899-911, (\*).
- [8] Amdahl, D.J. "Interactive Multi-block Grid Generation", Num. Grid Generation in Comp. Fluid Mech., Editors: S. Sengupta, J. Hauser, P.R. Eiseman and J. F. Thompson, Pineridge Press, pp. 579-588, 1988.
- [9] Boerstoel, J.W. "Numerical Grid Generation in 3-D Euler-Flow Simulation", National Aerospace Laboratory (NLR), The Netherlands.
- [10] Hauser, J., Paap, H.G., Wong, H., "Grid: A General Multi-block Surface and Volume Grid Generation Toolbox", pp. 817-837, (\*).
- [11] Lin, C.W., Smith, G.D., and Fisher, S.C. "Application of a Multi-block Grid Generation Approach to Ship Configuration", pp. 985-996, (\*).
- [12] Smith, K.L. and Su, T.Y. "A Geometry-Integrated Approach to Multi-block Grid Generation", pp. 795-803, (\*).
- [13] Sorenson, R.L. and McCann, K.M. "A Method for Interactive Specification of Multiple-block Topologies", AIAA-91-0147, 1990.
- [14] Spekreyse, S.P. and Boerstoel, J.W. "New Concepts for Multi-block Grid Generation for Flow Domains Around Complex Aerodynamic Configuration", pp. 719-730, (\*).
- [15] Beam, R.M. and Warming, R.F. "An Implicit Factored Scheme for the Compressible Navier-Stokes Equation", AIAA J., Vol. 16, No. 4, pp. 393-402, 1978.
- [16] Carlson, H.W. and Gapcynski J.P. "An Experimental Investigation at a Mach Number of 2.01 on The Effects of Body Cross-Section Shape on the Aerodynamic Characteristics of Bodies and Wing-Body Combinations", NACA-RM-L55E25, 1955.
- [17] Pulliam, T.H. "Implicit Solution Method in Comp. Fluid Dynamics", Applied Num. Math., Vol. 2, No. 6, pp. 441-474, 1986.
- [18] Steger, J.L. and Sorenson, R.L. "Automatic Mesh-Point Clustering Near a Boundary in Grid Generation with Elliptic Partial Differential Equations", J. Comp. Phys., Vol. 33, pp. 405-410, 1979.
- [19] Hsu, K. and Lee, S.L. "A Numerical Technique for Two-Dimensional Grid Generation with Grid Control at All of the Boundaries", J. Comp. Phys., Vol. 96, pp. 451-469, 1991.
- [20] Bohbot, J., Bertin, D., and Darracq, D., "A Conservative Patched Grid Algorithm for Turbulent Flow Computations of 3-D Complex Configurations", ECCOMAS, 2000.
- [21] Esfahanian, V., Azimi, A., and Hejranfar, K. "Practical Prediction of Supersonic Viscous Flows over Complex Configurations Using Personal Computers", J. Spacecraft and Rockets, Vol. 38, No. 38, 2001.
- [22] Spahr, J.R. and Robinson, R.A. "Wind-Tunnel Investigation at Mach Numbers of 1.5 and 2.0 of a Canard Missile Configuration", NAC- RM-A51C08, 1951.
- [23] Kutler, P., Chakravarthy, S.R., and Lombard, C.K. "Supersonic Flow Over Ablated Noretips Using an Unsteady, Implicit Numerical Procedure", AIAA 16<sup>TH</sup> Aerospace Sciences Meeting, 1978.
- [24] Viviani, H. and Ghazzi, W., "Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations at High Reynolds Numbers with Application to the Blunt Body Problems", Lecture Notes in Phys., No. 59, The Fifth Int. Conf. on Num. Methods in Fluid Dyn., 1976.

- [25] Hutton, A.G. and Smith, R.M. "A Study of Two-equation Turbulence Models for Axisymmetric Recirculating Flow", The Third Int. Conf. on Num. Methods in Laminar and Turbulent Flows, pp. 233-247, 1983.

توضیح: مقالاتی که با علامت (\*) مشخص شده‌اند، از مرجع زیر می‌باشند:

Arcilla, A.S., Hausen, J., Eiseman, P.R. and Thompson, J.F., The 3<sup>rd</sup> Int. Comp. Fluid Dyn. and Related Fields, Barcelona, Spain, 3-7 June, 1991.