

## استفاده از روش‌های ترکیبی صریح-ضمنی برای حل معادلات

### هیدرودینامیک تشعشعی

حسین مولوی<sup>۱</sup> و کیومرث مظاهری<sup>۲</sup>

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس

#### چکیده

در این مقاله دقت دو روش عددی برای شبیه‌سازی غیرنسبیتی پدیده‌های هیدرودینامیک تشعشعی در محدوده دیفیوژن تعادلی و رژیم "چگالی انرژی پایین" مورد بررسی قرار گرفته است. منظور از روش عددی ترکیبی صریح-ضمنی، حل معادلات هیدرودینامیک تشعشعی در دو مرحله می‌باشد. در مرحله اول برای حل معادلات هیدرودینامیکی از یک روش حجم محدود استفاده شده که یک روش گودنوفی صریح می‌باشد. برای حل عددی در مرحله دوم که مربوط به معادلات تشعشع می‌شود چند روش مورد استفاده قرار گرفته و با یکدیگر مقایسه شده‌اند. در روش اول که یک روش "نیمه ضمنی" است، از تکنیک ضمنی خطی سازی استفاده شده که یک روش بدون تکرار برای حل معادلات مربوط به تشعشع است. در روش دیگر از پروسه مستقل از محاسبه زاگوبین "نیوتن-کریلف" برای حل معادلات مربوط به تشعشع استفاده شده است. در نهایت برای نشان دادن دقت و خواص همگرایی این روش‌ها از چند مثال با تقارن کروی استفاده شده است. نتایج عددی نشان می‌دهد دقت روش دوم از روش اول بیشتر می‌باشد، اما این روش نسبت به روش اول زمان بیشتری برای محاسبه نیاز دارد.

واژه‌های کلیدی: هیدرودینامیک تشعشعی، محدوده دیفیوژن تعادلی، رژیم چگالی انرژی پایین، روش نیوتن-کریلف.

## Utilizing a Mixed Implicit-Explicit Method for Solving Radiation Hydrodynamics Equations

H. Movlavi and K. Mazaheri

Mech. Eng. Department, Tarbiat Modares Univ.

#### ABSTRACT

*In this article, the accuracy of two mixed explicit-implicit schemes for simulating non-relativistic, radiative hydrodynamic phenomenon in the equilibrium diffusion limit is compared. In mixed explicit-implicit schemes, the radiation hydrodynamics equations are solved in two stages. In the first stage (the hydrodynamics stage) a finite-volume Godunov type method is utilized. In the second stage (the radiation stage), two different methods are used. In the first method, a linearized non-iterative implicit technique is used. In the second method, a Jacobian-free Newton-Krylov procedure is used to solve the diffusion (radiation) equation. Several examples are considered to demonstrate the accuracy and convergence properties of the two schemes used. Numerical results indicate that, the second method is more accurate. However this method is much more time consuming.*

**Key Words:** Radiation Hydrodynamics, Equilibrium Diffusion Limit, Low-Energy-Density Regime, Newton-Krylov Procedure.

## ۱- مقدمه

انتقال تشعشع و اثر متقابل آن با ماده نقش بسیار مهمی را در سیستم‌های هیدرودینامیکی با دمای بالا ایفا می‌کند. پروسه‌های جذب، صدور و پراکنده‌سازی تشعشع باعث تبادل مومنتم و انرژی میان میدان تشعشع و ماده می‌شود که تاثیر زیادی بر حرکت سیال می‌گذارد [۱]. لذا بررسی پدیده تشعشع در سیستم‌های هیدرودینامیکی با دمای بالا که با نام پدیده "هیدرودینامیک تشعشعی" معروف است، ضرورت دارد. از نمونه این پدیده‌ها می‌توان به راکتور گداخت هسته‌ای (ICF)<sup>۱</sup> و فروپاشی هسته سوپرنوا اشاره کرد.

برای بررسی خواص سیالات با دمای بسیار بالا، از معادلات هیدرودینامیک تشعشعی استفاده می‌شود. این معادلات قوانین بقایی می‌باشند که پدیده تشعشع را برای دینامیک جریان در نظر می‌گیرند. عملیات توسعه روش‌های عددی حل این معادلات در حقیقت روش‌هایی برای کوپل شدن هیدرودینامیک و تشعشع می‌باشد، در دهه اخیر آغاز شده است. برای نخستین بار Dai و Woodward در سال ۱۹۹۸ به حل عددی این معادلات در حالت دو بعدی و در محدوده دیفیوژن پرداختند. روش مورد استفاده آنها برای حل معادلات روشی گودنفی، درجه سوم با نام  $PPM^2$  بود و روش مورد استفاده برای حل معادلات غیرخطی روش کرانک-نیکلسون بود، مهم‌ترین مزیت تکنیک کرانک-نیکلسون دقت درجه دوم آن است که به واسطه آن می‌توان گام‌های زمانی را بزرگ‌تر انتخاب نمود [۲]. همین افراد در سال ۲۰۰۰ به حل عددی این معادلات در حالت دوبعدی و محدوده انتقال با روش  $PPM$  پرداختند [۳]. Shestakov و همکارانش در سال ۱۹۹۹ به حل معادلات سه بعدی برای شبیه‌سازی ICF مبادرت ورزیدند [۴]، همین افراد در سال ۲۰۰۱ معادلات در حالت سه‌بعدی را برای شبکه بدون ساختار حل نمودند [۵]. Baldwin و همکارانش در سال ۱۹۹۹ به حل معادلات دوبعدی مبادرت ورزیدند، آنها از روش  $ALE^3$  و تکنیک‌های تکراری برای حل معادلات استفاده نمودند [۶]. Tang و همکارانش در سال ۲۰۰۰ معادلات

هیدرودینامیک تشعشعی در حالت دوبعدی را با استفاده از روش  $KFVS^4$  حل نمودند [۷].

در این معادلات، دو مقیاس زمانی وجود دارد. مقیاس زمانی هیدرودینامیکی که بیانگر نسبت یک طول مشخصه به سرعت صوت می‌باشد و مقیاس زمانی تشعشعی که بیانگر نسبت یک طول مشخصه به سرعت نور می‌باشد. همان‌طور که مشخص است پدیده‌های تشعشع در گام‌هایی زمانی به مراتب کوچک‌تر از گام‌های زمانی پدیده‌های هیدرودینامیکی روی می‌دهند [۸]. استفاده از روش‌های صریح برای حل دستگاه معادلات فوق به واسطه گام زمانی بسیار کوچک مورد نیاز (از مرتبه زمان مشخصه تشعشع) امکان‌پذیر نمی‌باشد. استفاده از روش‌های ضمنی نیز به دلیل طبیعت شدیداً غیرخطی معادلات حاکم نتایج مطلوبی چه از لحاظ تلاش محاسباتی مورد نیاز و چه از لحاظ دقت عددی در اختیار قرار نمی‌دهد (روش‌های ضمنی در مورد دستگاه‌های غیرخطی، نظیر سیستم فوق منجر به حل دستگاه معادلات در گام‌های زمانی کوچکی خواهد شد که از نظر عملی تفاوت چندانی با روش صریح نخواهد داشت). لذا سعی می‌شود با استفاده از تکنیک‌های عددی همزمان از گام‌های زمانی بزرگ‌تری استفاده نمود و همچنین دقت عددی مناسبی به دست آورد. یکی از این تکنیک‌ها که در کار حاضر نیز از آن استفاده شده حل سیگنال‌های تشعشع به صورت ضمنی و سیگنال‌های هیدرودینامیکی به صورت صریح می‌باشد [۸].

در تحقیق حاضر، برای حل معادلات هیدرودینامیک تشعشعی از روش عددی ترکیبی صریح-ضمنی استفاده شده است. منظور از روش عددی ترکیبی صریح-ضمنی، حل معادلات هیدرودینامیک تشعشعی در دو مرحله می‌باشد. در مرحله اول معادلات حاکم بدون در نظر گرفتن ترم‌های تشعشع (معادلات هیدرودینامیک) با استفاده از یک روش گودنفی حل می‌گردند. در مرحله دوم معادله بقا انرژی با در نظر گرفتن اثرات تشعشع، که به آن معادله دیفیوژن تشعشع نیز گفته می‌شود حل می‌گردد. در این مرحله دما (یا انرژی داخلی) به دست آمده از مرحله اول به‌عنوان شرط اولیه برای حل معادله دیفیوژن تشعشع مورد استفاده قرار می‌گیرد. تجزیه دستگاه معادلات حاکم

1. Inertial Confinement Fusion
2. Piecewise Parabolic Method
3. Arbitrary Lagrangian Eulerian

دستیابی به هم‌گرایی معادلات غیرخطی بسیار کاهش می‌یابند [۹].

در این مقاله ابتدا معادلات حاکم در محدوده دیفیوژن و رژیم چگالی انرژی پایین بیان می‌شوند. سپس روش‌های عددی مورد استفاده توضیح داده می‌شوند. در آخر نیز نتایج عددی برای چند مسأله کلاسیک بررسی می‌شوند.

## ۲- معادلات حاکم

گرادیان چگالی تشعشع برای مواد با ضخامت اپتیکی بالا در فاصله مسیر- متوسط- آزاد تشعشع<sup>۱</sup> تغییر قابل ملاحظه‌ای ندارد، چنین حالتی با نام "تقریب دیفیوژن" شناخته شده است. در این محدوده و مواردی که تعادل ترمودینامیکی موضعی مابین میدان تشعشع و سیال وجود دارد. در نتیجه معادلات غیرنسبیتی هیدرودینامیک تشعشعی را می‌توان به صورت زیر بیان نمود [۱]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) + \nabla (p + p_v) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \varepsilon + \rho v^2 / 2 + E_v) + \nabla \cdot [(\rho \varepsilon + \rho v^2 / 2 + p + p_v + E_v) \mathbf{v}] = \nabla \cdot (\kappa \nabla T) \quad (3)$$

در این معادلات  $\rho$  چگالی،  $p$  فشار،  $v$  سرعت جریان و  $\varepsilon$  انرژی داخلی بر واحد جرم می‌باشند که همگی متغیرهای مربوط به سیال هستند.  $E_v$  انرژی تشعشع،  $p_v$  تنسور فشار تشعشع و  $F_v$  شار تشعشع می‌باشند.  $\kappa$  ضریب هدایت گرمایی تشعشع است که معمولاً تابعی غیر خطی از  $\rho$  و  $T$  می‌باشد. علاوه بر این معادلات دو رابطه اساسی برای ماده وجود دارد که عبارتند از: معادله حالت و معادله حالت کالریک (رابطه دما و انرژی). در این تحقیق معادلات فوق برای مواد خاکستری<sup>۲</sup> اعمال شده است، در مواد خاکستری خواص تشعشع مستقل از فرکانس می‌باشند، مثلاً ضریب جذب به صورت  $\omega \propto (\rho \kappa)^{-1}$  بیان می‌شود که مستقل از فرکانس فتون‌ها در میدان تشعشع می‌باشد.

بر این سیستم به دو بخش هیدرودینامیک و تشعشعی این امکان را فراهم می‌آورد تا با گام‌های زمانی بزرگ‌تر نسبت به روش صریح و با حفظ دقت عددی فرآیند حل عددی پیشروی نماید. با این روش تاثیر ترم غیرخطی انتقال گرمای تشعشعی، در مرحله دوم دیده خواهد شد.

در کار حاضر دو روش حل عددی برای مرحله دوم که عبارتند از روش "نیمه ضمنی" و روش "نیوتن-کریلف" که یکی از انواع روش‌های خانواده نیوتن برای حل دستگاه معادلات غیر خطی می‌باشد مورد بررسی قرار می‌گیرند.

در روش "نیمه ضمنی" از حدس زدن متغیرها برای خطی‌سازی ترم غیرخطی موجود در معادلات استفاده می‌شود. این روش یک روش تکراری نمی‌باشد، یعنی متغیرها تنها یک بار محاسبه می‌شوند. نتیجه کار صرف زمان کمتر نسبت به پروسه‌های تکراری برای حل معادلات می‌باشد. اما به همان میزان نیز دقت این روش کم است.

در روش‌های خانواده نیوتن ابتدا متغیرها حدس زده می‌شوند، سپس با ایجاد ماتریس ژاکوبین و معکوس نمودن آن دستگاه معادلات غیرخطی حل شده و تصحیح متغیرهای حدس زده شده صورت می‌گیرد. متغیرهای به دست آمده در این مرحله به عنوان حدس اولیه‌ای برای مرحله بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند. حاصل این کار ایجاد دستگاه معادلات جدیدی می‌باشد که می‌توان دوباره متغیرهای آن را تصحیح نمود. این عمل تا زمانی ادامه می‌یابد که تفاوت متغیرها در دو مرحله متوالی بسیار کوچک شوند. در این حالت دستگاه معادلات غیر خطی حل شده است. از معایب این روش می‌توان به تشکیل ماتریس ژاکوبین و معکوس نمودن آن اشاره نمود. در روش "نیوتن-کریلف" که از خانواده روش نیوتن می‌باشد، نیز از یک پروسه تکرار برای حل دستگاه معادلات غیر خطی استفاده می‌شود. در این روش نیز ابتدا متغیرها حدس زده می‌شوند، اما ژاکوبین و معکوس آن برخلاف روش نیوتن محاسبه نمی‌شوند. در این روش حاصل ضرب ماتریس ژاکوبین در بردار متغیرها تقریب زده می‌شود که این حاصل ضرب مورد نیاز فضای کریلف می‌باشد. با استفاده از این تکنیک تعداد تکرارهای مورد نیاز برای

به اضافه معادله دیفیوژن زیر که مربوط به تشعشع می‌باشد:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial V} \left( A \kappa \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad (8)$$

که

$$F(U) \equiv \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho v^2 \\ v(E+p) \end{bmatrix}, \quad G \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$U \equiv \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v \\ E \end{bmatrix},$$

که  $V = 4\pi r^3/3$  بیانگر حجم در هندسه کروی یک بعدی می‌باشد و  $A = dV/dr = 4\pi r^2$  بیانگر سطح مقطع در این هندسه می‌باشد. الگوریتم حل به وسیله حل جداگانه معادلات (۷) و (۸) در هر گام زمانی صورت می‌پذیرد. ابتدا مقادیر جدید جرم، مومنتم و انرژی مجموع با حل معادلات اولر (۷) محاسبه می‌شوند، انرژی مجموع محاسبه شده در این مرحله (که تنها مقدار واسطه‌ای را به خود اختصاص داده است) با استفاده از معادله (۸) مجدداً محاسبه می‌شود، توجه به این نکته مهم است که انرژی محاسبه شده در مرحله اول به عنوان مقدار اولیه‌ای برای مرحله دوم به شمار می‌رود.

روش حل معادلات اولر، روش گودنفر با نسخه اصلاح شده Roe برای حل مسأله ریمن می‌باشد. با انتگرال‌گیری از معادله (۷) داریم:

$$U_j^{n+1} \approx U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta V_j} (A_{j+1/2} F_{j+1/2}^{n+1/2} - A_{j-1/2} F_{j-1/2}^{n+1/2}) - \frac{\Delta t}{\Delta r} (G_{j+1/2}^{n+1/2} - G_{j-1/2}^{n+1/2}), \quad (10)$$

که  $A_{j\pm 1/2} \equiv A(r_{j\pm 1/2})$  بیانگر مساحت در مختصات کروی می‌باشد. نمادهای  $F_{j\pm 1/2}^{n+1/2}$  و  $G_{j\pm 1/2}^{n+1/2}$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$F_{j\pm 1/2}^{n+1/2} \equiv \frac{1}{\Delta t} \int_n^{n+1} F[U(r_{j\pm 1/2}, t)] dt, \quad (11)$$

$$G_{j\pm 1/2}^{n+1/2} \equiv \frac{1}{\Delta t} \int_n^{n+1} G[U(r_{j\pm 1/2}, t)] dt. \quad (12)$$

در نتیجه مسأله به تخمین این کمیت‌ها به وسیله حل مسأله ریمن تبدیل می‌شود. با حل مسأله ریمن، مرحله

در رژیم "چگالی انرژی پایین" از  $p_v$  و  $E_v$  در مقایسه با  $p$  و  $\rho \varepsilon + \rho v^2/2$  صرف‌نظر می‌شود. در این مقاله فرض معادله حالت گاز ایده‌آل،  $p = R\rho T = (\gamma - 1)\rho \varepsilon$  است که  $R$  ثابت گاز بر واحد جرم و  $\gamma$  نسبت گرماهای ویژه می‌باشد.

در حالت یک بعدی در هندسه کروی معادلات (۶) تا (۸) در رژیم چگالی انرژی پایین به صورت زیر تبدیل می‌شوند [۹]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho v) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho v^2) + \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [(p+E)r^2 v] = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \kappa \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad (6)$$

که  $E = \rho \varepsilon + \rho v^2/2$  انرژی کل سیال می‌باشد. برای اهداف این تحقیق فرض می‌شود که می‌توان ضریب هدایت گرمایی تشعشع ( $\kappa$ ) را به صورت  $\kappa_0 \rho^a T^b$  بیان کرد که  $\kappa_0$ ،  $a$  و  $b$  اعداد ثابتی می‌باشند. این انتخاب بر مبنای تطبیق با رابطه ضریب جذب  $\omega \propto \rho^{-(a+1)} T^b$  صورت گرفته است که معادل تابعی است که Marshak فرض کرده است [۱۰].

### ۳- روش‌های حل عددی معادلات

ایده اصلی برای حل عددی معادلات هیدرودینامیک تشعشعی، جداسازی پروسه‌های هیدرودینامیک و تشعشع به دو مرحله محاسباتی در یک گام زمانی می‌باشد. در مرحله نخست معادلات اولر حل می‌شوند و در مرحله دوم انرژی کل با در نظر گرفتن اثر انتقال تشعشع دوباره محاسبه می‌شود. با نوشتن معادلات (۴) تا (۶) به صورت سیستم قوانین بقاء هیپربولیک، می‌توان به بررسی شیوه جداسازی معادلات به صورت زیر پرداخت:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial (AF)}{\partial V} + \frac{\partial G}{\partial r} = 0.$$

که  $c_v$  گرمای ویژه در حجم ثابت می‌باشد. در این حالت انرژی کل به وسیله رابطه  $E = c_v \rho T + \rho v^2 / 2$  در معادله فوق جایگزین شده است. ضریب هدایت گرمایی تشعشع  $\kappa$  در معادله (۱۳) در مرز سلول به وسیله میانمایی خطی چگالی و دما موجود در مرکز سلول به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\kappa_{j+1/2}^n = \quad (14)$$

$$\kappa_0 \left( \frac{\rho_j^{n+1} + \rho_{j+1}^{n+1}}{2} \right)^a \left( \frac{T_j^n + T_{j+1}^n}{2} \right)^b$$

از آنجایی که  $\kappa$  در گام زمانی قبلی تخمین زده شده است، معادله (۱۳) یک ماتریس سه قطری با مقادیر مجهول  $\{T_j^{n+1}\}$  تشکیل می‌دهد که با روش‌های زیادی می‌توان به حل آن پرداخت. با تعیین پروفیل دمای محاسبه شده، گام زمانی تکمیل می‌شود و بردار حل مجدداً به صورت زیر به دست می‌آید:

$$U^{n+1} \rightarrow U^* = \begin{Bmatrix} \rho_j^{n+1} \\ (\rho v)_j^{n+1} \\ E_j^{n+1} \end{Bmatrix}$$

در نتیجه با تکرار این پروسه می‌توان اطلاعات اولیه برای گام زمانی بعدی را به دست آورد. ماتریس سه قطری حاصل از معادله (۱۳) را می‌توان با روش‌های معمول مانند الگوریتم توماس حل کرد.

از مزایای این روش زمان مطلوب برای حل معادلات و از معایب آن عدم همگرایی الگوریتم در یک گام زمانی می‌باشد. به این دلیل این روش از دقت مناسب برخوردار نمی‌باشد. برای دستیابی به دقت مناسب و همگرایی در یک گام زمانی از روش "نیوتن-کریلف" استفاده می‌شود که در بخش بعد توضیح داده می‌شود.

#### ۵- روش "نیوتن-کریلف"

اگر با انتگرال‌گیری عددی از معادله (۸) از تکنیک خطی‌سازی استفاده نشود، دستگاه معادلات غیر خطی تشکیل می‌شود. یکی از روش‌های حل این معادلات، روش "نیوتن-کریلف" می‌باشد. این روش ترکیبی از روش‌های نیوتن و کریلف می‌باشد و از روش‌های خانواده نیوتن به شمار می‌رود. در این روش برای همگرایی معادلات

هیدرودینامیکی محاسبات تکمیل می‌شود. اکنون لازم است تأثیر ترم غیرخطی در مرحله دوم معادلات مورد بررسی قرار گیرد.

#### ۴- روش "نیمه ضمنی" برای حل معادله دیفیوژن تشعشع

با انتگرال‌گیری عددی از معادله (۸) به صورت ضمنی، یک دستگاه معادلات غیر خطی تشکیل می‌شود که با استفاده از تکنیک خطی‌سازی ماتریس سه قطری تشکیل خواهد. چنین روشی با نام "نیمه ضمنی" شناخته می‌شود. با حل این دستگاه می‌توان مقدار جدید انرژی مجموع را به دست آورد. اساس این تکنیک در نظر گرفتن ضریب غیرخطی هدایت گرمایی  $\kappa$  در گام زمانی قبلی می‌باشد، در نتیجه یک مسأله ضمنی خطی بوجود می‌آید که باید آن را در هر گام زمانی حل نمود.

روش انتگرال‌گیری از معادلات هیدرودینامیک تشعشعی در این حالت به صورت زیر می‌باشد. در شروع گام زمانی  $n+1$ ، با حل معادلات اولر (۷) مقادیر جرم، مومنتم و انرژی مجموع محاسبه می‌شوند. این پروسه را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$U^n \rightarrow U^* = \begin{Bmatrix} \rho_j^{n+1} \\ (\rho v)_j^{n+1} \\ E_j^* \end{Bmatrix}$$

در این مرحله انرژی کل  $\{E_j^*\}$  به دست می‌آید. اکنون اثرات هدایت گرمایی تشعشع باید در نظر گرفته شود. این کار با ثابت نگه داشتن متغیرهای  $\rho_j^{n+1}$  و  $(\rho v)_j^{n+1}$  و حل معادله دیفیوژن تشعشع (۸) برای به دست آوردن دمای  $T_j^{n+1}$  امکان پذیر می‌باشد. با گسسته‌سازی معادله (۸) داریم:

$$\frac{c_v \rho_j^{n+1} T_j^{n+1} + (\rho v^2)_j^{n+1} / 2 - E_j^*}{\Delta t} \quad (13)$$

$$= \frac{A_{j+1/2} \kappa_{j+1/2}^n (T_{j+1}^{n+1} - T_j^{n+1}) / \Delta r}{\Delta V_j}$$

$$\frac{A_{j-1/2} \kappa_{j-1/2}^n (T_j^{n+1} - T_{j-1}^{n+1}) / \Delta r}{\Delta V_j}$$

$\|f(x_k)\|_2$  کوچک‌تر از تلورانس همگرایی غیرخطی شود. در این تحقیق تلورانس برابر  $10^{-5}$  در نظر گرفته شده است.

از معایب این روش محاسبه ژاکوبین و معکوس آن می‌باشد و علاوه بر آن صرف زمان بسیار زیاد برای حل می‌باشد. برای غلبه بر این مشکلات روش نیوتن با روش کرلیف ترکیب می‌شود. در نتیجه محاسبه ژاکوبین یا معکوس آن هرگز مورد نیاز نخواهد بود. [۱۱ و ۹]

مبنای روش کرلیف الگوریتم<sup>۱</sup> GMRES می‌باشد که توسط Saad و Shultz ارائه شد. [۱۲] در این روش، حل مسأله توسط ترکیب خطی بردارهای کرلیف  $(r_0, Jr_0, J^2r_0, \dots, J^l r_0)$  محاسبه می‌شود. اندیس  $l$  در این بردارها بیانگر تکرار کرلیف می‌باشد و  $r_0$  باقیمانده خطی اولیه می‌باشد که توسط رابطه  $r_0 = -f(x_k) - J_k \delta x_{k0}$  در این رابطه  $\delta x_{k0}$  بیانگر حدس اولیه‌ای برای محاسبه بردار حالت در یک مرحله تکرار غیرخطی می‌باشد. معمولاً این مقدار برابر صفر در نظر گرفته می‌شود. لازم به توضیح است که تکرار کرلیف در یک اندیس تکرار مشخص  $k$  صورت می‌پذیرد، بنابراین محاسبات بر مبنای دو اندیس  $l, k$  صورت می‌گیرند. در این حالت می‌توان  $\delta x_{kl}$  را در فضای بردارهای کرلیف به صورت زیر گسترش داد:

$$\delta x_{kl} = \delta x_{k0} + \sum_{m=0}^{l-1} \beta_m J^m r_0. \quad (18)$$

در این رابطه  $\beta_m$  ضرایب اسکالری می‌باشند که در  $l$ مین تکرار کرلیف با مینیمم کردن مقدار  $\|J_k \delta x_{kl} + f(x_k)\|_2$  توسط روش حداقل مربعات<sup>۲</sup> محاسبه می‌شوند. در نهایت شرط اتمام تکرار کرلیف توسط رابطه زیر داده شده است:

$$\|J_k \delta x_{kl} + f(x_k)\|_2 < \tau \|f(x_k)\|_2. \quad (19)$$

در این رابطه  $\|f(x_k)\|_2$  بیانگر باقیمانده تکرار غیرخطی است و  $\tau$  یک تلورانس همگرایی خطی می‌باشد که معمولاً برابر  $\tau = 10^{-2}$  در نظر گرفته می‌شود. در این تحقیق ماکزیمم تعداد تکرارات نیوتن و کرلیف به ترتیب برابر ۲۰ و ۱۵ تکرار در نظر گرفته شده‌اند.

غیرخطی پروسه تکرار صورت می‌گیرد. در مقایسه با روش نیوتن که برای حل دستگاه معادلات غیرخطی به کار می‌رود، در این روش مشکلات مربوط به محاسبه ژاکوبین و معکوس آن وجود ندارد. در زیر خلاصه‌ای از این روش آورده شده است [۹ و ۱۱].

نخستین گام برای اعمال هر الگوریتم بر مبنای روش نیوتن تعیین تابع(های) غیرخطی در هر سلول محاسباتی شبکه می‌باشد. با انتگرال‌گیری عددی از معادله (۸) این تابع به صورت زیر بیان می‌شود:

$$f_j = \frac{c_v \rho_j^{n+1} T_j^{n+1} + (\rho v^2)_j^{n+1} / 2 - E_j^*}{\Delta t} \quad (15)$$

$$\frac{A_{j+1/2} \kappa_{j+1/2}^{n+1} (T_{j+1}^{n+1} - T_j^{n+1}) / \Delta r}{\Delta V_j} - \frac{A_{j-1/2} \kappa_{j-1/2}^{n+1} (T_j^{n+1} - T_{j-1}^{n+1}) / \Delta r}{\Delta V_j},$$

که

$$\kappa_{j+1/2}^{n+1} = \kappa_0 \left( \frac{\rho_j^{n+1} + \rho_{j+1}^{n+1}}{2} \right)^a \left( \frac{T_j^{n+1} + T_{j+1}^{n+1}}{2} \right)^b. \quad (16)$$

هدف روش نیوتن-کرلیف<sup>۳</sup> میل دادن تابع  $f_j$  به سمت صفر برای هر سلول شبکه محاسباتی می‌باشد. چگونگی این عمل در زیر توضیح داده شده است.

در یک روش استاندارد نیوتن، حل دستگاه معادلات غیرخطی به فرم  $f(x) = 0$  مورد نظر است که  $x$  بردار حالت می‌باشد. در مسایل هیدرودینامیک تشعشعی مورد بررسی  $\{T_j\}$  و  $\{f_j\}$  می‌باشند که تابع  $f_j$  توسط معادله (۱۵) تعریف شده است. در روش نیوتن برای تعیین  $x$  با استفاده از پروسه تکرار، دستگاه معادلات خطی زیر حل می‌شود [۹ و ۱۱]:

$$J_k \delta x_k = -f(x_k). \quad (17)$$

در این معادله  $J$  بیانگر ژاکوبین،  $k$  اندیس تکرار غیرخطی و  $\delta x$  تفاضل بردار حالت در دو پروسه تکرار متوالی می‌باشند. برای تعیین  $\delta x$  هر دو طرف معادله (۱۷) در معکوس  $J$  ضرب می‌شود. اکنون با تعیین  $\delta x$  مقدار جدید  $x$  با استفاده از رابطه  $x_{k+1} = x_k + \delta x_k$  به دست می‌آید. این پروسه تکرار تا زمانی ادامه می‌یابد که

<sup>۱</sup> - Generalized Minimal Residual

<sup>۲</sup> - Least-Squares

معادله (۲۲) توسط بسط مرتبه اول تیلور به صورت زیر تخمین زده می‌شود:

$$\mathbf{Jp}^{-1}\mathbf{q} \approx [\mathbf{f}(\mathbf{x} + \varepsilon\mathbf{p}^{-1}\mathbf{q}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})]/\varepsilon. \quad (23)$$

در این رابطه معکوس ماتریس  $\mathbf{p}$  را می‌توان با استفاده از تکنیک گوس-سایدل متقارن<sup>۲</sup> محاسبه نمود. [۹] توجه به این نکته مهم است که کوپل کردن روش نیوتن-کریلف<sup>۳</sup> به روش گودنفی (برای حل هیدرودینامیک) همانند کوپل کردن روش "تیمه ضمنی" به روش گودنفی می‌باشد که در بخش قبل توضیح داده شد. به عبارت دیگر در یک گام زمانی، در مرحله اول ابتدا خواص سیال با استفاده از روش گودنفی محاسبه می‌شوند  $U^* = [\rho^{n+1}, (\rho v)^{n+1}, E^*]$  در مرحله دوم با استفاده از روش نیوتن-کریلف انرژی کل  $E^{n+1}$  محاسبه می‌شوند. سپس در گام‌های زمانی بعد نیز این دو مرحله تکرار می‌شوند.

#### ۶- کنترل گام زمانی

کنترل گام زمانی در محاسبات هیدرودینامیک تشعشی پیچیده است، زیرا ضریب هدایت گرمایی  $\kappa$  معمولاً تابعی (غیرخطی) از چگالی و دما می‌باشد. یک روش برای انتخاب اندازه گام زمانی در مسایل دیفیوژن غیرخطی توسط Rider و Knoll [۱۳] پیشنهاد شد که روشی ابتکاری برای تخمین سرعت موج غیرخطی می‌باشد. ایده اساسی در این روش جایگزینی دستگاه پیچیده معادلات به وسیله مدل هیپربولیک ساده زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + v_f \frac{\partial E}{\partial r} = 0, \quad (24)$$

که در آن،  $v_f$  سرعت جبهه<sup>۴</sup> است که تابعی مجهول می‌باشد. در نتیجه در پروسه انتخاب، مقدار مطلوبی برای front-CFL در نظر گرفته می‌شود. منظور از Front-CFL عدد CFL است که توسط معادله مربوط به تشعشع (۲۴) به دست آمده است. با استفاده از این Front-CFL می‌توان گام زمانی را توسط رابطه زیر محاسبه نمود:

$$\Delta t^{n+1} = \text{front-CFL} \times \frac{\Delta r}{v_f^n}. \quad (25)$$

می‌توان گفت اعمال این الگوریتم بازدهی روش نیوتن را افزایش می‌دهد. زیرا زمانی که باقیمانده بزرگ است و حل نسبت به همگرایی فاصله زیادی دارد، زمان زیادی برای انجام محاسبات و حل مسأله مورد نیاز نمی‌باشد. به عبارت دیگر در روش نیوتن-کریلف حدس اولیه مهم نمی‌باشد. [۱۱]

از دیگر مزایای روش نیوتن-کریلف این است که در الگوریتم GMRES تنها حاصلضرب ماتریس ژاکوبین در یک بردار محاسبه می‌شود (معادله ۱۸) و ماتریس ژاکوبین و معکوس آن هرگز محاسبه نمی‌شوند. این مزیت زمانی آشکار می‌شود که حاصلضرب ماتریس ژاکوبین در بردار را به خوبی با استفاده از بسط مرتبه اول تیلور تخمین زد:

$$\mathbf{Jr}_0 \approx [\mathbf{f}(\mathbf{x} + \varepsilon\mathbf{r}_0) - \mathbf{f}(\mathbf{x})]/\varepsilon. \quad (20)$$

همان‌طور که از معادله می‌توان دریافت هرگز نیازی به محاسبه ژاکوبین نیست. در این رابطه  $\varepsilon$  دارای مقدار بسیار کوچکی است که توسط رابطه زیر داده شده است:

$$\varepsilon = \frac{\eta \sum_{j=1}^N \mathbf{x}_j}{N \|\mathbf{r}_0\|_2}. \quad (21)$$

در این رابطه پارامتر  $\eta$  دارای مقدار ثابت  $10^{-5}$  می‌باشد. در این مقاله، برای افزایش عملکرد روش نیوتن-کریلف از یک پیش تعیین کننده<sup>۱</sup> استفاده شده است. در پروسه از پیش تعیین کردن تعداد تکرارهای کریلف مورد نیاز برای دستیابی به همگرایی کاهش می‌یابد. در این پروسه معکوس ماتریس ژاکوبین به روش مؤثری تخمین زده می‌شود، به طوری که یافتن این معکوس تقریبی بسیار ساده‌تر از یافتن معکوس ژاکوبین حقیقی می‌باشد. اگر ماتریس از پیش تعیین کننده باشد، دستگاه معادلات (۱۷) به صورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$\mathbf{Jp}^{-1}\mathbf{p}\delta\mathbf{x} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (22)$$

همان‌طور که اشاره شد، انتخاب  $\mathbf{p}$  باید به نحوی صورت گیرد که یافتن معکوس آن ساده باشد. در این مقاله ماتریس  $\mathbf{p}$  به صورت ماتریس سه قطری حاصل در روش "تیمه ضمنی" انتخاب می‌شود. اکنون اگر بردار  $\mathbf{q}$  را به صورت حاصل ضرب  $\mathbf{p}\delta\mathbf{x}$  در نظر بگیرد، سمت چپ

هدایت گرمای غیرخطی ناشی از چشمه نقطه‌ای (مسأله

### (Barenblatt

برای بررسی دقت روش‌های عددی، مدل کروی طوری در نظر گرفته می‌شود که هیدرودینامیک را دربرنگیرد ( $v=0$ )، به عبارت دیگر معادله دیفیوژن زیر مورد بررسی قرار می‌گیرد:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \chi \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad (28)$$

در این رابطه  $\chi$  دیفیوژن گرمایی<sup>۱</sup> می‌باشد که توسط رابطه  $\chi = K_R / (\rho c_v)$  تعریف می‌شود. در این رابطه  $\rho$  چگالی می‌باشد و گرمای ویژه ماده  $c_v$  ثابت فرض شده است. ضرایب هدایت گرمایی وابسته به دما می‌باشد، یعنی رابطه  $K_R = \kappa_0 T^b$  ( $b > 0$ ) برقرار است. از مشخصه‌های بارز این مسأله وجود جواب تحلیلی برای آن می‌باشد. فرض می‌شود که در زمان  $t = 0$  و در نقطه  $r = 0$  از ماده‌ای ساکن، انرژی  $\varepsilon_0$  آزاد شده است، در زمان  $t > 0$  جبهه گرمایی با شرط مرزی شار صفر  $\partial T / \partial r |_{r=0} = 0$  انتشار می‌یابد. پروفیل دما در هر لحظه به وسیله رابطه زیر (بقا انرژی) با  $\varepsilon_0$  در ارتباط است:

$$Q \equiv \frac{\varepsilon_0}{\rho c_v} = \int_0^\infty T 4\pi r^2 dr = \text{const}, \quad (29)$$

که در آن،  $Q$  مقداری ثابت می‌باشد. هدف محک کد عددی برای مقایسه با جواب تحلیلی مسأله Barenblatt در هندسه کروی می‌باشد. جواب تحلیلی را می‌توان به صورت زیر بیان نمود. اگر  $r_f$  موقعیت جبهه گرمایی در نظر گرفته شود، پروفیل دما برای  $t > 0$  و  $r < r_f$  توسط رابطه زیر داده شده است [۱۴]:

$$T = T_c \left( 1 - \frac{r^2}{r_f^2} \right)^{1/b}, \quad (30)$$

که در آن

$$r_f \equiv \xi_0 (\chi_0 Q^b t)^{1/(3b+2)}, \quad (31)$$

که  $\chi_0 = \kappa_0 / (\rho c_v)$  و ثابت  $\xi_0$  تنها تابعی از  $b$  به صورت زیر می‌باشد:

در این روش سرعت جبهه  $v_f$  با استفاده از معادله (۲۴) توسط رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$v_f^n = \frac{\left\| \frac{\Delta E^n}{\Delta t^n} \right\|_1}{\left\| \frac{\Delta E^n}{\Delta r} \right\|_1}. \quad (26)$$

نماد  $\| \cdot \|_1$  در این معادله به نرم اول ماتریس اشاره دارد. در ادامه قابلیت روش توضیح داده شده در قالب چند مثال بیان می‌گردد.

### ۷- نتایج

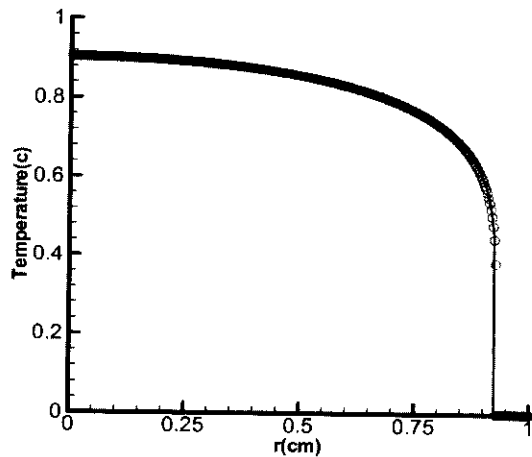
در این بخش عملکرد روش‌های عددی مورد استفاده برای چند مسأله یک بعدی در هندسه کروی مورد بررسی قرار می‌گیرد. هدف از بررسی این مسائل مقایسه دقت، خواص همگرایی و زمان صرف شده CPU برای دو روش عددی می‌باشد. همانطور که خواهیم دید، روش "نیوتن-کریلف" دارای دقت بیشتری نسبت به روش "نیمه ضمنی" می‌باشد، اما زمان صرف شده CPU برای حل مسائل نیز برای این روش بیشتر می‌باشد. تمامی نتایج این تحقیق با کامپیوتر پنتیوم ۴ با سرعت CPU ۱.۴ گیگاهرتز به دست آمده‌اند. همان‌طور که در بخش قبل ذکر شد، تکنیک کنترل گام زمانی Front-CFL در این تحقیق مورد استفاده قرار گرفته است. در تمامی موارد دقت زمانی و خواص همگرایی به وسیله رسم خطای مطلق  $L_2$  در پروفیل نهایی دما در برابر مقدار Front-CFL مورد بررسی قرار گرفته‌اند. خطای مطلق  $L_2$  توسط رابطه زیر تعریف شده است:

$$L_2 = \left[ \sum_{j=1}^N (T_j - T_j^e)^2 \right]^{1/2}, \quad (27)$$

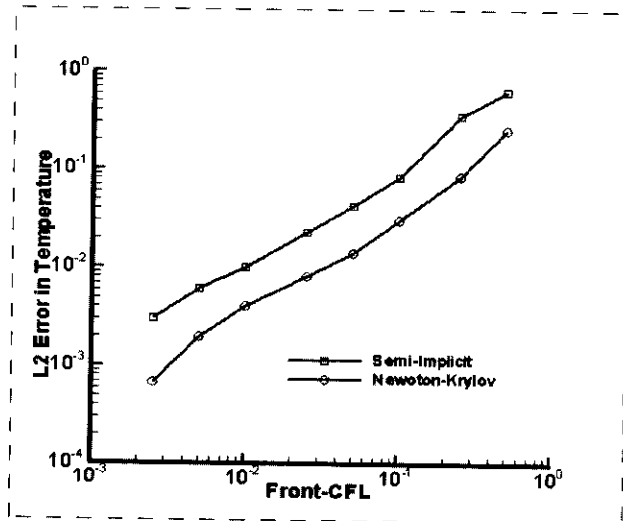
که داده‌های  $T_j^e$  به جواب دقیق برای  $\Delta t \rightarrow 0$  اشاره دارد، این جواب دقیق با مقدار بسیار کوچک Front-CFL (در این مقاله ۰.۰۰۰۱) با استفاده از روش "نیوتن-کریلف" به دست آمده است.

به منظور بررسی صحت جواب‌ها، برای تمامی مسائل، ثابت گازها  $R=1$  و  $\gamma=1.25$  (در سیستم مختصات cgs) در نظر گرفته شده‌اند، تا بتوان جواب‌ها را با جواب‌های مرجع [۹] مقایسه نمود.





شکل ۱- هدایت حرارت غیرخطی ناشی از چشمه نقطه‌ای (مسئله Barenblatt) در  $t = 1s$  برای  $\epsilon_0 = 10 \text{ erg}$  و  $K_R = T^{13/2}$  و  $\Delta t = 10^{-5} s$ . خطوط توپر بیانگر جواب دقیق و علامات دایره بیانگر جواب عددی برای روش نیوتن-کریلف می باشند. توجه داشته باشید که در این حالت جبهه گرمایی در  $0.927 \text{ cm}$  قرار دارد.



شکل ۲- مقایسه خواص همگرایی دو روش "نیمه ضمنی" و "نیوتن-کریلف" در مسئله Barenblatt برای ۲۰۰ سلول محاسباتی شبکه.

(۳۲)

$$\xi_0 \equiv \left[ \frac{3b+2}{2^{b-1} b \pi^b} \right]^{1/(3b+2)} \left[ \frac{\Gamma(5/2+1/b)}{\Gamma(1+1/b)\Gamma(3/2)} \right]^{b/(3b+2)}$$

نماد  $\Gamma$  در معادله (۳۲) بر تابع گاما دلالت می‌کند. در  $r = 0$  برابر است با:

$$T_c \equiv \frac{Q \xi_0^3}{r_f^3} \left[ \frac{b \xi_0^2}{2(3b+2)} \right]^{1/b} \quad (۳۳)$$

هنگامی که  $r > r_f$  باشد، دما به وسیله مقدار آن در محیط مشخص می‌شود که معمولاً عددی مثبت و بزرگ‌تر از صفر در نظر گرفته می‌شود، در این شبیه سازی دمای اولیه برای هر سلول به جز سلول اول برابر صفر می‌باشد. دمای اولیه سلول اول برابر  $\epsilon_0 / (\rho c_v \Delta V_1)$  می‌باشد. در شکل (۱) حل عددی مسئله Barenblatt با استفاده از روش "نیوتن-کریلف" برای  $b = 6.5$  مشاهده می‌شود. این شکل متعلق به زمان  $t = 1s$  و شرایط اولیه زیر می‌باشد: انرژی اولیه  $\epsilon_0 = 10 \text{ erg}$ ،  $\kappa_0 = 1$ ، نسبت گرمای ویژه

$$c_v = (\gamma - 1)^{-1} \text{ و چگالی } \rho = 1 \text{ gr/cm}^3$$

وجود جبهه شارپ در این شکل بیانگر جبهه گرمایی ناشی از تشعشع می‌باشد. لازم به توضیح است تعداد سلول‌های شبکه برابر ۲۰۰ و حدس اولیه برای گام زمانی بسیار کوچک  $\Delta t = 10^{-5} s$  می‌باشد (این حدس بر مبنای تقریبی برای زمان مشخصه دیفیوژن مابین دو سلول اول  $\Delta r^2 / \chi \sim 10^{-46}$  انتخاب شده است).

در شکل (۲) نمودار هم‌گرایی این مسئله برای دو روش "نیمه ضمنی" و "نیوتن-کریلف" رسم شده است و مقایسه مدت زمان صرف شده این دو روش در جدول (۱) آورده شده است. همان‌طور که از شکل مشخص است، دقت روش "نیوتن-کریلف" به مراتب بهتر از روش "نیمه ضمنی" می‌باشد که دلیل آن عدم همگرایی معادلات غیرخطی در روش "نیمه ضمنی" می‌باشد. اما در مقابل مدت زمان صرف شده برای حل مسئله در روش "نیمه ضمنی" بسیار

$$\begin{aligned} u(n+1) &= 2u(n) - u(n-1), \\ p(n+1) &= 2p(n) - p(n-1), \\ \rho(n+1) &= 2\rho(n) - \rho(n-1). \end{aligned}$$

در این شکل عدد 1 به اولین نقطه محاسباتی و عدد n به آخرین نقطه محاسباتی اشاره دارند. همچنین شرط مرزی دیوار عایق  $(\partial T / \partial r)|_{r=0}$  برای دما در نظر گرفته شده است. با توجه به شکل بالا این شرط مرزی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$T(-1) = T(1).$$

شرط اولیه انرژی برای این مسأله اتخاذ یک پروفیل گاوسی به صورت زیر می‌باشد:

$$E(r)|_{t=0} = \frac{\varepsilon_0 \exp(-r^2/c_0^2)}{(c_0 \sqrt{\pi})^3}, \quad (23)$$

که  $c_0$  در این مسأله برابر ۰.۲۵ و  $\varepsilon_0$  انرژی اولیه برابر ۱۰۰ می‌باشند.

در ادامه حل مسأله را تا جایی ادامه می‌دهند که ناپیوستگی در آن به وجود آید. با انتخاب انرژی اولیه  $\varepsilon_0 = 100 \text{ ergs}$  و چگالی اولیه  $\rho = 1/r$  و انتصاب ضریب هدایت گرمایی تشعشع  $\kappa = T^{5/2}$  حل مسأله آغاز می‌شود. گام زمانی اولیه  $\Delta t = 10^{-1}$  و تعداد نقاط ۲۰۰ فرض می‌شوند. نتیجه حل مسأله به دست آوردن پروفیل‌های چگالی، فشار، سرعت و دما می‌باشد که در شکل (۳) برای روش نیوتن-کریلف در زمان  $t = 0.01 \text{ s}$  مشاهده می‌شوند. به منظور بررسی صحت نتایج شبیه‌سازی، نتایج مرجع [۹] با اطلاعات ورودی یکسان در شکل (۳) با دایره نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود دایره‌ها تقریباً با جواب به دست آمده در این مقاله مطابقت دارند.

در شکل (۴) نمودار همگرایی این مسأله برای دو روش نیمه‌ضمنی و نیوتن-کریلف رسم شده است و مقایسه مدت زمان صرف شده این دو روش در جدول (۲) آورده شده است. لازم به توضیح است که جواب دقیق این مسأله مربوط به روش نیوتن-کریلف برای  $\text{Front-CFL} = 0.0001$  در نظر گرفته شده است. همان‌طور که انتظار می‌رفت، به علت تکراری بودن روش نیوتن-کریلف، دقت این روش به مراتب بهتر از روش نیمه‌ضمنی می‌باشد. با وجود این مدت زمان صرف شده برای حل مسأله در روش نیمه‌ضمنی بسیار کمتر است.

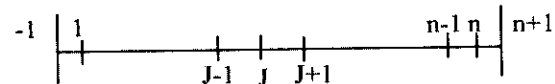
جدول ۱- مدت زمان صرف شده (ثانیه) دو روش نیمه‌ضمنی و نیوتن-کریلف برای مسأله Barenblatt

| مقدار Front-CFL | روش       |             |
|-----------------|-----------|-------------|
|                 | نیمه‌ضمنی | نیوتن-کریلف |
| ۰.۵             | ۰.۱       | ۹.۳۷        |
| ۰.۲۵            | ۰.۱۵      | ۱۵          |
| ۰.۱             | ۰.۲۵      | ۲۹.۵        |
| ۰.۰۵            | ۰.۵       | ۴۸          |
| ۰.۰۲۵           | ۱         | ۸۱          |
| ۰.۰۱            | ۲.۵       | ۱۷۱         |
| ۰.۰۰۵           | ۵         | ۲۷۸         |
| ۰.۰۰۲۵          | ۹.۵       | ۴۷۷         |

#### مسأله جریان هموار [۹]

در این مسأله توجه معطوف به جریانات هموار می‌باشد که ویژگی‌های ناپیوستگی از قبیل شیب جبهه گرمایی و امواج ضربه‌ای تقریباً در حل عددی وجود ندارند. شبیه‌سازی جریانات هموار به وسیله تکامل امواج غیرخطی انجام می‌شود. این تکامل از یک توزیع اولیه هموار در پروفیل انرژی شروع شده و تا نقطه‌ای که شیب قابل ملاحظه باشد یا نزدیک به شاک باشد، ادامه می‌یابد.

شرایط مرزی برای متغیرهای هیدرودینامیکی شرایط انعکاسی<sup>۲</sup> در سمت چپ و خروجی<sup>۳</sup> در سمت راست می‌باشند. برای بیان این شرایط با توجه به شکل زیر می‌توان نوشت:

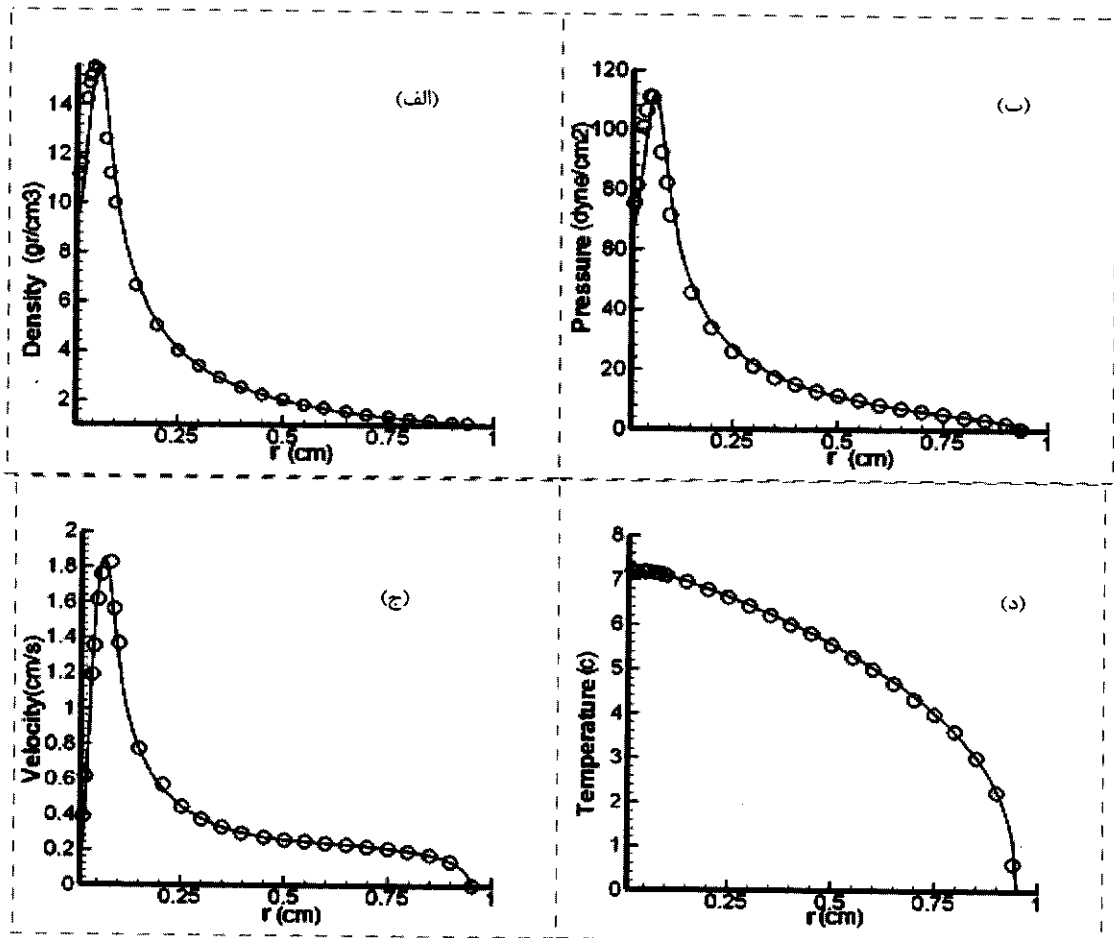


شرط مرزی انعکاسی:

$$\begin{aligned} u(-1) &= -u(1), \\ p(-1) &= p(1), \\ \rho(-1) &= \rho(1), \end{aligned}$$

شرط مرزی خروجی با استفاده از برونیایی:

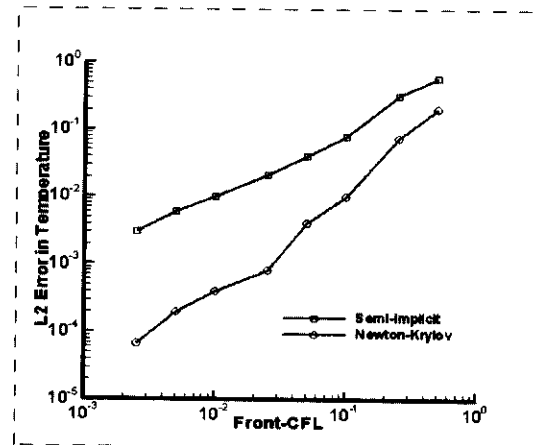
1. Smooth problem
2. Reflective
3. Outflow



شکل ۳- پروفیل‌های (الف) چگالی، (ب) فشار، (ج) سرعت و (د) دما در زمان  $t = 0.018$  برای توزیع اولیه انرژی به صورت پروفیل گوسین با  $\epsilon_0 = 100 \text{ erg}$ ،  $K_R = T^{5/2}$  و  $\rho = 1/r$  در روش نیوتن-کریلف. در حل مسأله هنوز شاک و جبهه گرمایی به طور کامل به وجود نیامده اند. علامت دایره جواب موجود در مرجع [۹] می باشد.

جدول ۲- مدت زمان صرف شده (ثانیه) دو روش نیمه ضمنی و نیوتن-کریلف برای مسأله جریان هموار.

| مقدار Front-CFL | روش       |             |
|-----------------|-----------|-------------|
|                 | نیمه ضمنی | نیوتن-کریلف |
| ۰.۵             | ۰.۰۱      | ۱           |
| ۰.۲۵            | ۰.۰۲      | ۱.۸۴        |
| ۰.۱             | ۰.۰۴      | ۳.۶۱        |
| ۰.۰۵            | ۰.۰۸      | ۵.۶۸        |
| ۰.۰۲۵           | ۰.۱۶      | ۹.۴         |
| ۰.۰۱            | ۰.۳۷      | ۲۰.۵        |
| ۰.۰۰۵           | ۰.۷۲      | ۳۳          |
| ۰.۰۰۲۵          | ۱.۵       | ۵۸          |



شکل ۴- مقایسه خواص همگرایی دو روش نیمه ضمنی و نیوتن-کریلف در مسأله جریان هموار برای ۱۰۰ سلول

که جواب دقیق این مسأله مربوط به روش "نیوتن-کریلف" برای  $\text{Front-CFL}=0,0001$  در نظر گرفته شده است. در این مسأله نیز همان طور که انتظار می‌رفت، به علت تکراری بودن روش "نیوتن-کریلف"، دقت این روش به مراتب بهتر از روش "نیمه ضمنی" می‌باشد. با وجود این مدت زمان صرف شده برای حل مسأله در روش "نیمه ضمنی" بسیار کمتر است.

### مسأله انفجار نقطه‌ای

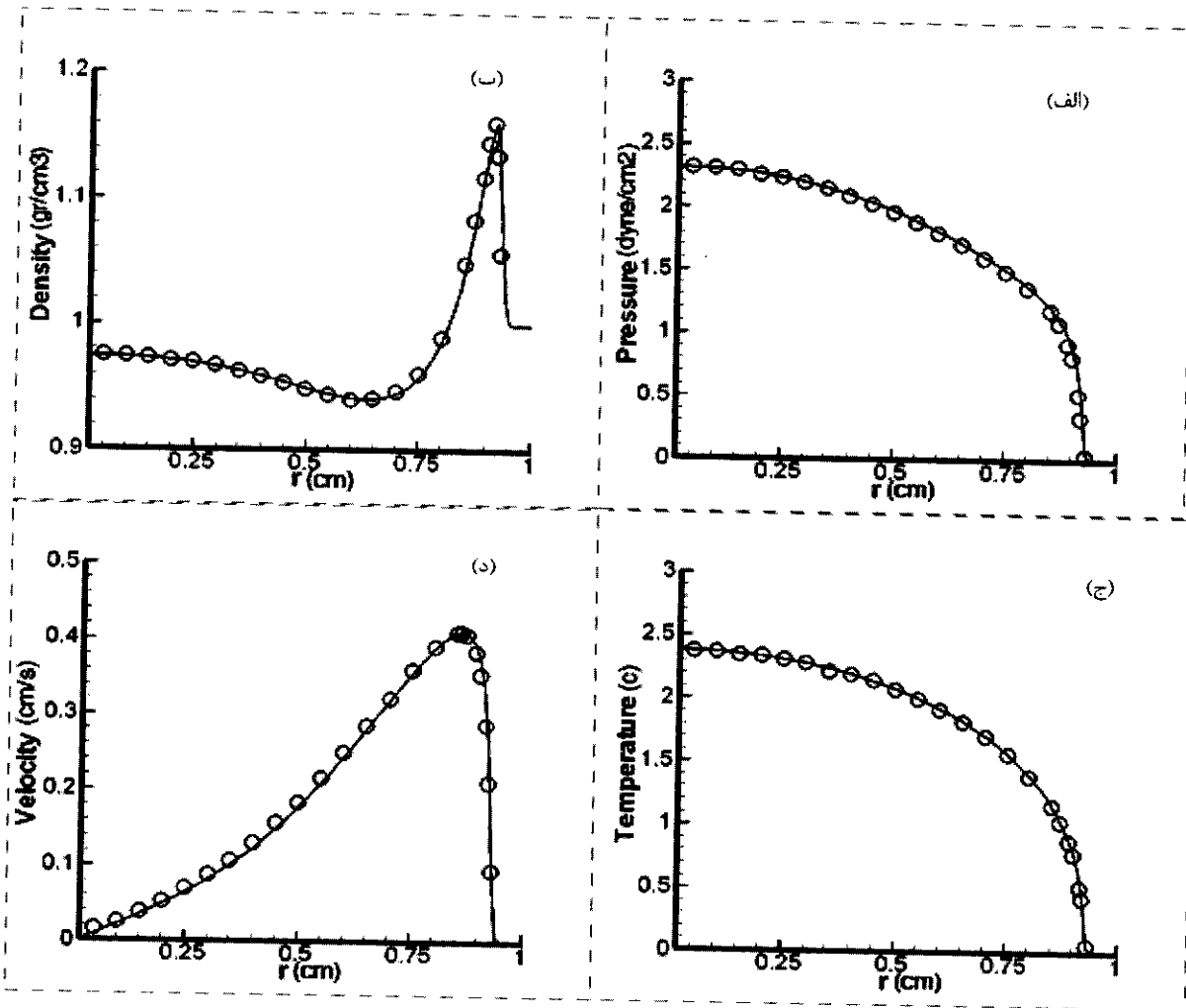
در این بخش مدل‌سازی یک بعدی انفجارات نقطه‌ای<sup>۱</sup> با هدایت حرارت غیرخطی مورد بررسی قرار می‌گیرد. انفجار به واسطه آزاد شدن مقدار بسیار زیادی انرژی در ناحیه کوچکی از فضا مشخص می‌شود که این امر با کد عددی مورد استفاده در این مقاله شبیه‌سازی می‌شود. در زمان  $t=0$  مقدار انرژی برای تمامی سلول‌ها به جز سلول اول بسیار کوچک ( $0,001$ ) در نظر گرفته می‌شود و برای سلول اول این مقدار انرژی بسیار زیاد ( $10$  تا  $1000$ ) می‌باشد. پروفیل‌های حل را می‌توان با استفاده از معادلات (۴) تا (۶) به دست آورد. شرایط مرزی موجود در این مسأله همانند شرایط مرزی مسأله قبل می‌باشند.

مسأله مورد بررسی انفجار ضعیف نقطه‌ای درون محیطی سرد با سیال ساکن با چگالی  $\rho = 1 \text{ gr/cm}^3$  می‌باشد. در زمان  $t=0$  انرژی اولیه آزاد شده در سلول اول  $\varepsilon_0 = 20 \text{ erg}$  می‌باشد. فرض شده است که ضریب هدایت گرمایی تشعشع فقط تابعی از دما به صورت  $K_R = T^{5/2}$  باشد. پروفیل‌های چگالی، فشار، سرعت و دما در این حالت در زمان  $t = 0,05 \text{ s}$  در شکل (۶) نشان داده شده‌اند. به علت ضعیف بودن انفجار جبهه گرمایی ناشی از تشعشع در این شبیه‌سازی دیده نمی‌شود و تنها یک موج ضربه‌ای در  $0,93 \text{ cm} \sim r$  دیده می‌شود. در این حالت تعداد نقاط محاسباتی برابر  $100$  سلول می‌باشد و حدس اولیه گام زمانی<sup>۱۲</sup>  $\Delta t = 10$  می‌باشد.

به منظور بررسی صحت نتایج شبیه‌سازی، نتایج مرجع [۹] در شکل (۵) با دایره آورده شده است. همان طور که مشاهده می‌شود دایره‌ها تقریباً با جواب به دست آمده در این مقاله مطابقت دارند.

در شکل (۶) نمودار همگرایی این مسأله برای دو روش "نیمه ضمنی" و "نیوتن-کریلف" رسم شده است و مقایسه مدت زمان صرف شده این دو روش در جدول (۳) آورده شده است. لازم به توضیح است

<sup>۱</sup> - point explosion



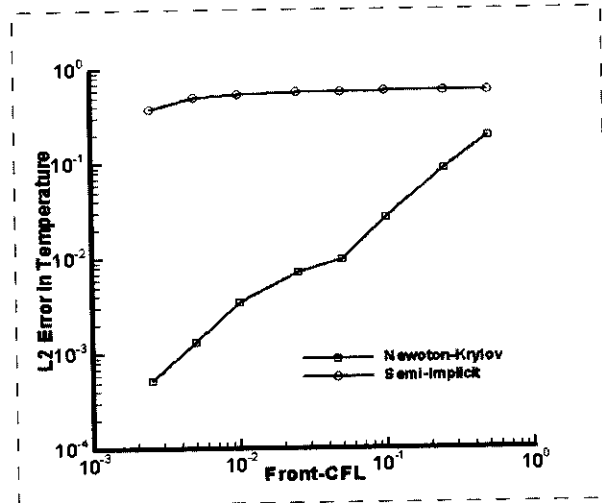
شکل ۵- شبیه‌سازی یک انفجار ضعیف نقطه‌ای با انرژی اولیه  $\epsilon_0 = 20 \text{ erg}$ . پروفیل‌های (الف) فشار، (ب) چگالی، (ج) دما و (د) سرعت توسط روش نیوتن-کریلف در زمان  $t = 0.05 \text{ s}$  نشان داده شده‌اند. در این حالت ضریب هدایت گرمایی  $K_R = T^{5/2}$  و چگالی اولیه  $\rho = 1 \text{ gr/cm}^3$  می‌باشند و به علت ضعیف بودن انفجار، جبهه گرمایی مشاهده نمی‌شود و تنها موج ضربه‌ای در  $r \sim 0.93 \text{ cm}$  دیده می‌شود. علامت دایره جواب موجود در مرجع [۹] می‌باشد.

هیدرودینامیک خالص از یک روش گودنفی استفاده شد. در مرحله دوم و برای حل معادلات تشعشع بعد از انتگرال گیری از دو روش "نیمه ضمنی" و "نیوتن-کریلف" استفاده شد. در روش "نیمه ضمنی" با استفاده از تکنیک خطی سازی ماتریس سه قطری ایجاد می شود که با استفاده از الگوریتم هایی نظیر الگوریتم "توماس" قابل حل است. چون این روش از روش های غیر تکراری است لذا از خصوصیات آن صرف زمان کم برای حل آن خواهد بود. عملکرد این روش با روش "نیوتن-کریلف" مقایسه شد. روش "نیوتن-کریلف" برای حل دستگاه معادلات غیرخطی مستقل از محاسبه ژاکوبین یا معکوس آن می باشد. چون این روش یک روش تکراری است لذا زمانبری بیشتری نسبت به روش قبل دارد. ولیکن دقت عددی این روش همواره از روش "نیمه ضمنی" بیشتر است.

برای مقایسه دو روش فوق سه مسأله که عبارتند از هدایت گرمای غیرخطی (مسأله Barenblatt)، مسأله جریان هموار و انفجار نقطه ای مورد بررسی قرار گرفتند. نتایج عددی به دست آمده به وضوح نشان دهنده سرعت بیشتر روش "نیمه ضمنی" نسبت به روش "نیوتن-کریلف" در حل عددی معادلات حاکم است. همچنین بررسی نتایج دقت حل عددی بخصوص در مسأله انفجار نقطه ای نشان دهنده دقت بسیار بیشتر روش "نیوتن-کریلف" در حل معادلات حاکم می باشد.

مراجع

1. Milhalas, D. and Milhalas, B.W. "Foundations of Radiation Hydrodynamics", Oxford Univ. Press, New York, 1984.
2. Dai, W. and Woodward, P.R. "Numerical Simulations for Radiation Hydrodynamics. I. Diffusion Limit", J. Comp. Phys., pp. 142-182, 1998.
3. Dai, W. and Woodward, P.R. "Numerical Simulations for Radiation Hydrodynamics. II. Transport Limit", J. Comp. Phys., pp. 157-199, 2000.
4. Shestakov, A.I., Prasad, M.K., Milovich, J.L., Gentile, N.A., Painter, J.F., and Furnish, G. "The



شکل ۶- مقایسه خواص همگرایی دو روش "نیمه ضمنی" و "نیوتن-کریلف" در مسأله انفجار نقطه ای برای ۴۰۰ سلول محاسباتی شبکه.

جدول ۳- مدت زمان صرف شده (ثانیه) دو روش "نیمه ضمنی" و "نیوتن-کریلف" برای مسأله انفجار نقطه ای.

| روش             |           |             |
|-----------------|-----------|-------------|
| مقدار Front-CFL | نیمه ضمنی | نیوتن-کریلف |
| ۰.۵             | ۰.۰۵      | ۱.۶۲        |
| ۰.۲۵            | ۰.۱       | ۲.۶۶        |
| ۰.۱             | ۰.۱۵      | ۵           |
| ۰.۰۵            | ۰.۳       | ۷.۸         |
| ۰.۰۲۵           | ۰.۶       | ۱۴          |
| ۰.۰۱            | ۱.۵       | ۳۰          |
| ۰.۰۰۵           | ۳         | ۵۷          |
| ۰.۰۰۲۵          | ۶         | ۹۳          |

#### ۸- جمع بندی ها

در این مقاله دو روش عددی برای انتگرال گیری از معادلات هیدرودینامیک تشعشعی در محدوده دیفیوژن تعادلی و رژیم چگالی انرژی پایین مورد بررسی قرار گرفت. در این روش مسأله به دو بخش تقسیم شده بود: یک بخش هیدرودینامیک خالص و یک بخش معادله دیفیوژن تشعشع. برای انتگرال گیری از معادلات اولر در مرحله

13. Rider, W.J. and Knoll, D.A. "Time Step Size Selection for Radiation Diffusion Calculations", *J. Comp. Phys.*, pp. 152-790, 1999.
14. Zel'dovich, Y.B. and Raizer, Y.P. "Physics of ShockWaves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena", Vol. I and II, Academic Press, New York, 1966.
5. Shestakov, A.I., Milovich, J. L., and Prasad, M.K. "Combining Cell- and Point-Centered Methods in 3D, Unstructured-Grid Radiation-Hydrodynamics Codes", *J. Comp. Phys.*, pp. 81-170, 2001.
6. Baldwin, C., Brown, P.N., Algout, R.F., Graziani, F., and Jones, J. "Iterative Linear Solvers in a 2-D Radiation-Hydrodynamics Code: Methods and Performance", *J. Comp. Phys.*, pp. 1-154, 1999.
7. Tang, H.Z. and Wu, H.M. "Kinetic Flux Vector Splitting for Radiation Hydrodynamical Equations", *J. Comp. Fluids.*, pp. 29-917, 2000.
8. Baldwin, C., Brown, P.N., Falgout, R., Graziani, F., and Jones, J. "Iterative Linear Solvers in a 2-D Radiation-Hydrodynamics Code: Methods and Performance", *J. Comp. Phys.*, pp. 1-154, 1999.
9. Bates, J.W., Knoll, D.A., Rider, W.J., Lowrie, R.B. and Mousseau, V.A. "On Consistent Time-Integration Methods for Radiation Hydrodynamics in the Equilibrium Diffusion Limit: Low-Energy-Density Regime", *J. Comp. Phys.*, pp. 99-167, 2001.
10. Marshak, R.E. "Effect of Radiation on Shock Wave Behavior", *Phys. Fluids*, pp. 1-24, 1958.
11. Knoll, D.A., Rider, W.J., and Olson, G.L. "An Efficient Non-linear Solution Method for Non-equilibrium Radiation Diffusion", *JQSRT.*, pp. 15-63, 1999.
12. Saad, Y. and Schultz, M.H. "GMRES: A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Non-Radiation-Hydrodynamic ICF3D Code", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* pp. 181-187, 2000.