

# (یادداشت فنی)

## معادلات دینامیکی و تحلیل پاسخ ژيروسکوپ‌های با ارتعاش جابه‌جایی هم‌راستا

احمد قربانی<sup>۲</sup>

دانشکده مهندسی مکانیک، واحد علامه مجلسی، دانشگاه آزاد اسلامی

امین پژوهش جهرمی<sup>۱</sup>

پژوهشکده سیستم‌های دفاعی، سازمان صنایع هوافضا

چکیده

ژيروسکوپ‌های ارتعاشی با ابعاد کوچک و هزینه کم جایگاه ویژه‌ای را در صنایع نظامی و غیرنظامی به خود اختصاص داده‌اند. در ژيروسکوپ‌های ارتعاشی مبتنی بر ارتعاش جابه‌جایی هم‌راستا، جرم رزوناتور تحت تأثیر نیروی هارمونیک، در امتداد تحریک مرتعش می‌شود. سرعت زاویه‌ای ورودی باعث اثر کوریولیس و ارتعاش همزمان رزوناتور، عمود بر راستای تحریک شده است که دامنه آن متناسب با مقدار سرعت زاویه‌ای ورودی است. در این مقاله، معادلات حاکم بر رفتار ژيروسکوپ‌های ارتعاشی با ارتعاش جابه‌جایی هم‌راستا ارائه و پاسخ سیستم در مقابل ورودی‌های مختلف تحلیل می‌شود.

واژه‌های کلیدی: ژيروسکوپ ارتعاشی، اثر کوریولیس، رزوناتور، ورودی ثابت، ورودی متغیر

### (Engineering Note)

## Dynamical Equations and Response Analysis of Translation-Based Vibratory Gyroscopes

A. Pazhouhesh Jahromi

Defence Systems Research Institute,  
Aerospace Industrial Org.

A. Ghorbani

Mech. Eng. Department, Allame-Majlesi Campus,  
Islamic Azad Univ.

### ABSTRACT

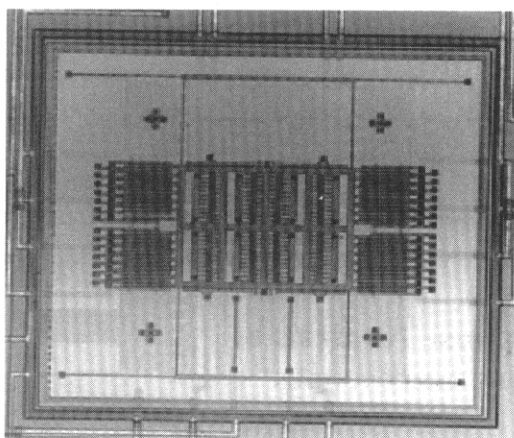
*Vibratory gyroscopes, having small sizes and low prices are commonly used in civil and defence industries. In these type and gyroscopes, which are translation based, the resonators mass is vibrated due to harmonic force. The input angular velocity causes Coriolis effect and at the same time the vibration of the resonator. The amplitude of these effects are the same to the input angular velocity. In this article, the governing dynamical equations of vibratory gyroscopes are presented. Then, the response of the system to different inputs is analyzed.*

**Key Words:** Vibratory Gyroscope, Resonator, Coriolis Effect, Variable Input, Constant Input.

۱- مربی و پژوهشگر: apazhouhesh@gmail.com

۲- مربی و پژوهشگر: ghorbani@mut-es.ac.ir

منظور پایداری تصویر) و صنعت رباتیک نیز کاربرد پیدا کرده است [۲]. شرکت ژاپنی (muRata) یکی از تولیدکننده‌های عمده این نوع حسگر است که محصولات آن در دوربین‌های دستی و صنایع خودروسازی مورد استفاده فراوان دارد. مسلماً با پیشرفت فناوری، ساخت ژيروسکوپ‌های ارتعاشی کوچک‌تر، ارزان‌تر و دقیق‌تر ممکن شده است و استفاده از آنها گسترش بیشتری می‌یابد. شکل (۱) نمونه‌ای از ژيروسکوپ مبتنی بر رزوناتور ارتعاش جابه‌جایی هم‌راستا را نشان داده‌است که محصول تحقیقات دانشگاه برکلی است.



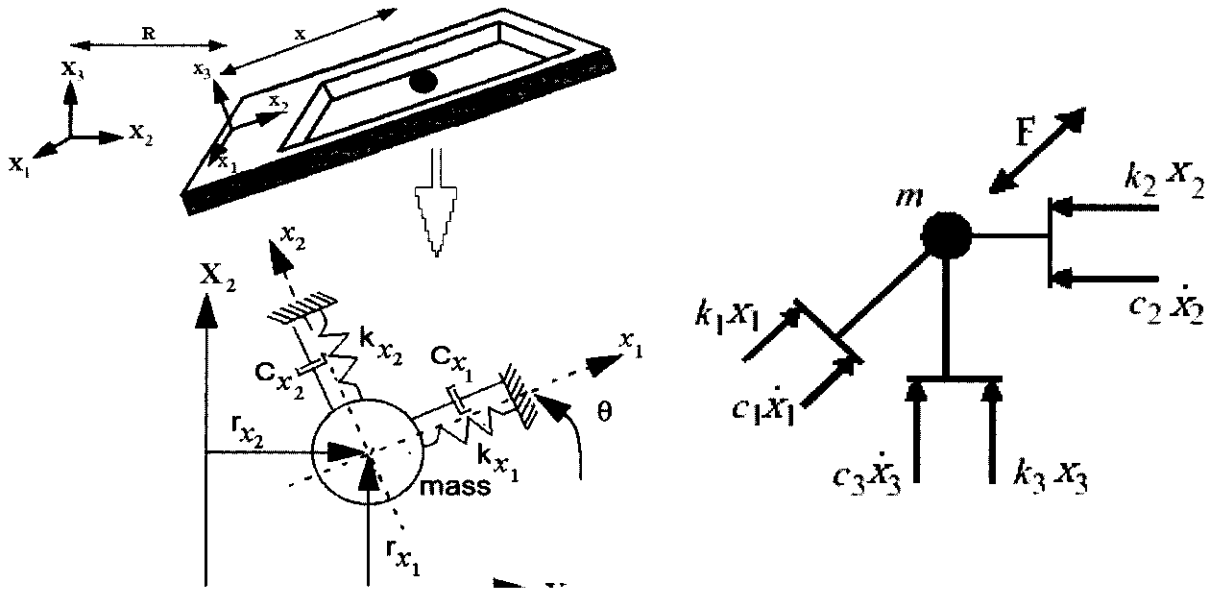
شکل ۱- نمونه‌ای از یک ژيروسکوپ ارتعاشی مبتنی بر ارتعاش جابه‌جایی هم‌راستا، محصول دانشگاه برکلی.

## ۲- مدل نقطه‌ای ژيروسکوپ ارتعاشی

با صرف‌نظر از توزیع جرم و اثرات دورانی جسم صلب، رزوناتور ژيروسکوپ‌های ارتعاشی را می‌توان با هر سیستم ساده جرم، فنر و دمپر مدل کرد که جرم؛ نمایش نقطه‌ای رزوناتور، فنر؛ خاصیت الاستیسیته و دمپر بیانگر دمپینگ مادی و محیطی است. در این مدل، تمام نیروها در محدوده الاستیک (جابه‌جایی‌های کوچک) بوده است و خاصیت الاستیک و دمپینگ مادی نیز به صورت خطی فرض می‌شوند. المان جرم سه درجه آزادی دارد و موقعیت هر لحظه آن، به صورت موقعیت آن نسبت به دستگاه  $\{x_i\}$  (بردار واحد  $e_i$ ) به علاوه

## ۱- مقدمه

محور مطالعه در بسیاری از گروه‌های تحقیقاتی (که روی مکانیزم‌های پرنده کار می‌کنند)، مکانیزم‌هایی با ابعاد یک تا پنج سانتی‌متر است. در عین حال مشکلی که طراحان با آن مواجهند، پایداری پرواز است. وسایل پرنده بزرگ (نظیر هواپیما) به طور آیرودینامیکی پایداری و به علت حجم زیاد، امکان بهره‌مندی از سیستم‌های تعیین موقعیت را دارند. اما زمانی که مکانیزم پرنده، کوچک شده و نیازمند توقف در فضاست (مشابه پرواز بالگرد ولی در ابعاد بسیار کوچک‌تر)، خاصیت مذکور، کارایی خود را از دست می‌دهد. راه‌حل این مسئله، بهره‌گیری از فناوری ژيروسکوپ‌های ارتعاشی با ابعاد بسیار کوچک است. این نوع از ژيروسکوپها، ابزار اندازه‌گیری سرعت زاویه‌ای هستند که مبنای عملکردشان، مشابه ژيروسکوپ‌های مکانیکی با جرم دوار است؛ با این تفاوت که به جای جرم دوار (اصل بقای ممنتوم زاویه‌ای)، از یک جسم الاستیک مرتعش (اصل بقای مومنتم خطی) بهره می‌گیرند. ماهیت عملکرد این دسته از ژيروسکوپ‌ها، ویژگی‌های منحصر به فردی را ممکن می‌سازد؛ به عنوان مثال، نداشتن قطعه متحرک، آنها را بی‌نیاز از موتور و یاتاقان می‌کند و نسبت به اکثر متغیرهای تأثیرگذار محیطی (مانند درجه حرارت و فشار) مقاومت می‌کند و به آنها کارکرد طولانی بدون نیاز به تعمیر و نگهداری می‌بخشد. از جمله امتیازات دیگر، می‌توان به پاسخ زمانی کوتاه (کمتر از یک ثانیه)، دریافت و نویز کم، دقت و حساسیت عالی، مصرف انرژی ناچیز و کاهش فوق‌العاده حجم (با استفاده از فناوری میکروماشین‌کاری) اشاره کرد. بنابراین، در مقایسه با ژيروسکوپ‌های مکانیکی و نوری (که گران و حجیم هستند)، بسیار ارزان‌تر هستند و حجم کمی اشغال می‌کنند. طراحی و کاربرد این نوع ژيروسکوپ برای نخستین بار از صنایع نظامی در مواردی نظیر پایداری و هدایت موشک‌ها و مهمات هوشمند آغاز شد [۱]. اما اخیراً در صنایع غیرنظامی؛ مانند اتومبیل‌سازی (سیستم‌ترمز پیشرفته برای جلوگیری از لغزیدن خودرو)، دوربین‌های دستی (به



شکل ۲- موقعیت المان جرم در سیستم مختصات موضعی و عمومی و دیاگرام آزاد سیستم.

$$T = \frac{1}{2} m.(\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2} m.(\dot{x}_2)^2 + \frac{1}{2} m.(\dot{x}_3)^2 \quad (5)$$

$$V = \frac{1}{2} k_1.x_1^2 + \frac{1}{2} k_2.x_2^2 + \frac{1}{2} k_3.x_3^2 \quad (6)$$

در رابطه فوق،  $m$  بیانگر جرم و  $k_{1,2,3}$  ضرایب سفتی مادی رزوناتور در سه جهت است. با جایگذاری توابع انرژی جنبشی و پتانسیل در معادله لاگرانژ و استفاده از روابط (۲) و (۳) و تبدیل بردارهای واحد  $\{E_i\}$  به  $\{e_i\}$  با استفاده از تنسورهای دورانی و در نهایت با مرتب کردن رابطه حاصل برحسب بردارهای واحد  $e_i$ ، شکل کلی معادله حاکم به صورت معادله (۷) حاصل می شود. این معادله کامل ترین شکل معادله حاکم ژيروسکوپ های ارتعاشی است که در برگیرنده شتاب های خطی  $\ddot{X}$ ، شتاب کوریولیس  $2\Omega \dot{x}$ ، شتاب جانب مرکز و مماسی  $x\Omega^2$  و  $\dot{x}\Omega$  است.

### ۳- تحلیل پاسخ

در تحلیل معادله ژيروسکوپ های ارتعاشی، دو تقسیم بندی مبتنی بر سرعت زاویه ای ورودی وجود دارد. در تقسیم بندی اول، که در آن تمرکز طراحان برای تشخیص سرعت های زاویه ای کوچک است، دامنه ورودی کوچک است و بنابراین از حاصل ضرب سرعت زاویه ای و مراتب دوم و بالاتر آن و اثرات شتاب موضعی صرف نظر می شود. در تقسیم بندی دوم، سرعت های زاویه ای ورودی دارای مقادیر بزرگ هستند

موقعیت دستگاه  $\{x_i\}$  نسبت به  $\{X_i\}$  (بردار واحد  $E_i$ ) به صورت زیر است (شکل ۲):

$$\bar{x} = X_i E_i + x_i e_i, \quad (1)$$

که مشتق اول و دوم آن به صورت زیر است:

$$\dot{\bar{x}} = \dot{X}_i E_i + \dot{x}_i e_i + x_i \Omega_i \times e_i, \quad (2)$$

$$\ddot{\bar{x}} = \ddot{X}_i E_i + \ddot{x}_i e_i + 2\dot{x}_i \Omega_i \times e_i + x_i \dot{\Omega}_i \times e_i + x_i \Omega_i \times (\Omega_i \times e_i), \quad (3)$$

که  $\Omega_i$ ، نمایش سرعت زاویه ای است و در ژيروسکوپ های ارتعاشی به عنوان سرعت زاویه ای ورودی شناخته می شود. روابط  $x_i \Omega_i \times e_i$ ،  $2\dot{x}_i \Omega_i \times e_i$  و  $x_i \dot{\Omega}_i \times e_i$  به ترتیب بیانگر شتاب کوریولیس، شتاب مماسی و شتاب جانب مرکز است. به منظور بدست آوردن معادله حرکت، از روش لاگرانژ استفاده می شود. مطابق روش لاگرانژ داریم:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^m} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^m} = Q_m, \quad (4)$$

که  $L$  تابع لاگرانژ  $(L = T - V)$ ، انرژی پتانسیل،  $V$  انرژی جنبشی،  $q^m$  مختصات تعمیم یافته و  $Q_m$  نیروهای خارجی تعمیم یافته ای غیر کنسرواتیو مثل نیروی تحریک و نیروی دمپینگ است (نیروی دمپینگ به صورت  $c\dot{x}$  که  $c$  بیانگر ضریب دمپینگ است). رابطه انرژی جنبشی در مختصات عمومی و انرژی پتانسیل در مختصات موضعی به صورت زیر نوشته می شود:

ارتعاشی به‌عنوان ژيروسکوپ‌های تشخیص یک جهت است، بنابراین تنها نیازمند تحریک در یک امتداد است. نیروی تحریک که عامل ایجاد سرعت در المان جرم است، نیرویی هارمونیک است که در اینجا سینوسی به‌صورت زیر فرض می‌شود:

$$f_1 = |f_{drive}| \sin(\omega_{drive} t), f_2 = f_3 = 0.$$

فرض ورودی با دامنه کوچک با دو حالت سرعت زاویه‌ای ثابت و متغیر مواجه است که به‌طور جداگانه بررسی می‌شود.

۴-۱- پاسخ به ورودی سرعت زاویه‌ای ثابت

در صورتی که سرعت زاویه‌ای ورودی ثابت باشد،  $(\dot{\Omega}_1 = \dot{\Omega}_2 = \dot{\Omega}_3 = 0)$  و همچنین از آنجا که مقدار نیروی تحریک  $f_{drive}$  از تمام نیروهای اینرسی موجود در معادله (۸-۲) بسیار بزرگ‌تر است، لذا با چشم‌پوشی از اثر نیروهای اینرسی معادله (۸) شکل ساده زیر را خواهد داشت:

$$m\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + k_1x_1 = |f_{drive}| \sin(\omega_{drive} t), \quad (9-a)$$

$$m\ddot{x}_2 + c_2\dot{x}_2 + k_2x_2 = -m(2\Omega_3\dot{x}_1 - 2\Omega_1\dot{x}_3), \quad (9-b)$$

$$m\ddot{x}_3 + c_3\dot{x}_3 + k_3x_3 = -m(2\Omega_1\dot{x}_2 - 2\Omega_2\dot{x}_1). \quad (9-c)$$

این مدل در اکثر مقالات همانند مرجع [۳] به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$m\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + k_1x_1 = |f_{drive}| \sin(\omega_{drive} t), \quad (10-a)$$

$$m\ddot{x}_2 + c_2\dot{x}_2 + k_2x_2 = -2m\Omega_3\dot{x}_1. \quad (10-b)$$

این ساده‌سازی که مبتنی بر فرض  $x_3 = \Omega_1 = \Omega_2 = 0$  است، عمدتاً بیان نشده است. بنابراین، معادله (۱۰) غالباً مانند معادله حاکم بر ژيروسکوپ‌های ارتعاشی با ورودی ثابت شناخته می‌شود. این دسته از ژيروسکوپ‌ها که با نام ژيروسکوپ محور Z (Z - Axis Gyroscope) نیز شناخته می‌شوند، برای اندازه‌گیری تنها یک سرعت زاویه‌ای، معمولاً  $\Omega_3$ ، استفاده می‌شوند. اما علاوه بر  $2m\Omega_3\dot{x}_1$  در معادله (۱۰-b)، به المان جرم نیروی

به‌نحوی که از حاصل ضرب آنها نمی‌توان چشم‌پوشی کرد (معادلات ۷).

(۷-a)

$$m\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + k_1x_1 = -m[2\Omega_2\dot{x}_3 - 2\Omega_3\dot{x}_2 + \dot{\Omega}_2x_3 - \dot{\Omega}_3x_2 - x_1(\Omega_2^2 + \Omega_3^2) + x_2\Omega_1\Omega_2 + x_3\Omega_1\Omega_3 + \ddot{X}_1 \cos \phi_2 \cos \phi_3 + \ddot{X}_2(\cos \phi_1 \sin \phi_3 + \sin \phi_1 \sin \phi_2 \cos \phi_3) + \ddot{X}_3(\sin \phi_1 \sin \phi_3 - \cos \phi_1 \sin \phi_2 \cos \phi_3)] + f_1 \quad (7-b)$$

$$m\ddot{x}_2 + c_2\dot{x}_2 + k_2x_2 = -m[2\Omega_3\dot{x}_1 - 2\Omega_1\dot{x}_3 + \dot{\Omega}_3x_1 - \dot{\Omega}_1x_3 - x_2(\Omega_1^2 + \Omega_3^2) + x_1\Omega_1\Omega_2 + x_3\Omega_1\Omega_3 - \ddot{X}_1 \cos \phi_2 \sin \phi_3 + \ddot{X}_2(\cos \phi_1 \cos \phi_3 - \sin \phi_1 \sin \phi_2 \sin \phi_3) + \ddot{X}_3(\sin \phi_1 \cos \phi_3 + \cos \phi_1 \sin \phi_2 \sin \phi_3)] + f_2 \quad (7-c)$$

$$m\ddot{x}_3 + c_3\dot{x}_3 + k_3x_3 = -m[2\Omega_1\dot{x}_2 - 2\Omega_2\dot{x}_1 + \dot{\Omega}_1x_2 - \dot{\Omega}_2x_1 - x_3(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + x_1\Omega_1\Omega_3 + x_3\Omega_2\Omega_3 + \ddot{X}_1 \sin \phi_1 - \ddot{X}_2 \sin \phi_1 \cos \phi_2 + \ddot{X}_2 \cos \phi_1 \cos \phi_2] + f_3$$

۴-۲ پاسخ به ورودی با دامنه کوچک

فرض ورودی با دامنه کوچک و صرف‌نظرکردن از شتاب سیستم، به حذف عبارتهای دارای ترم‌های  $\dot{\Omega}_i$  و  $(\Omega_i^2 + \Omega_j^2)$  منجر خواهد شد. بنابراین، معادله حاکم به شکل زیر در خواهد آمد:

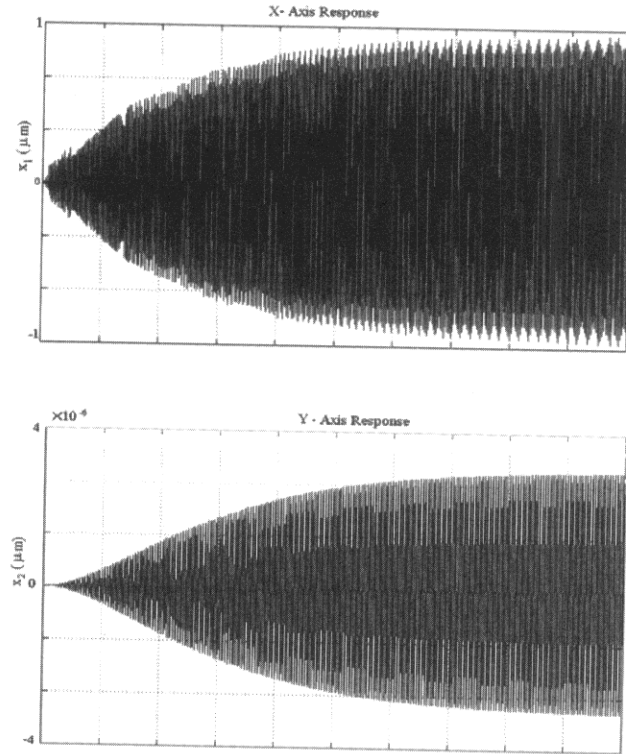
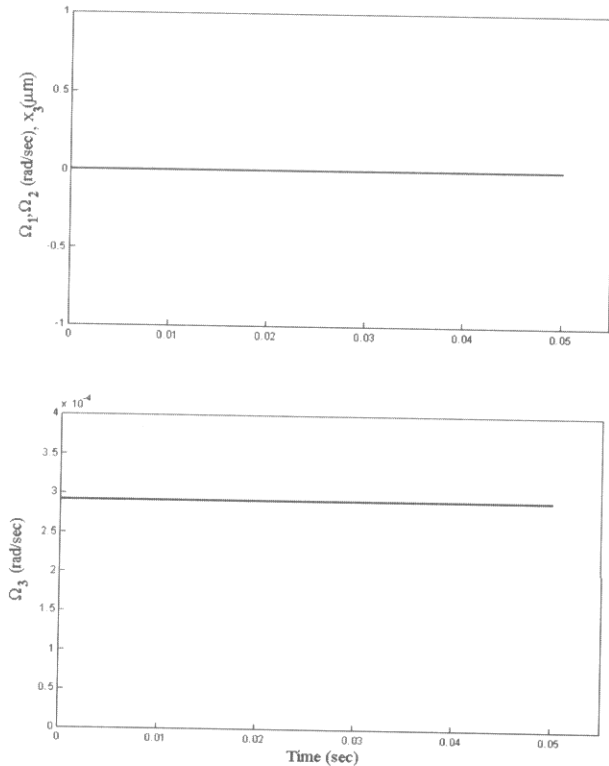
(۸-a)

$$m\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + k_1x_1 = -m(2\Omega_2\dot{x}_3 - 2\Omega_3\dot{x}_2 + \dot{\Omega}_2x_3 - \dot{\Omega}_3x_2) + f_1, \quad (8-b)$$

$$m\ddot{x}_2 + c_2\dot{x}_2 + k_2x_2 = -m(2\Omega_3\dot{x}_1 - 2\Omega_1\dot{x}_3 + \dot{\Omega}_3x_1 - \dot{\Omega}_1x_3) + f_2, \quad (8-c)$$

$$m\ddot{x}_3 + c_3\dot{x}_3 + k_3x_3 = -m(2\Omega_1\dot{x}_2 - 2\Omega_2\dot{x}_1 + \dot{\Omega}_1x_2 - \dot{\Omega}_2x_1) + f_3.$$

فرض می‌شود که  $x_1$  راستای تحریک،  $x_2$  راستای خروجی یا تشخیص و  $x_3$  راستای عمود بر صفحه ارتعاش  $x_1$  و  $x_2$  است (شکل ۳). از آنجا که کاربرد بیشتر ژيروسکوپ‌های



شکل ۳- نمودار ورودی و دامنه خروجی با فرض  $x_3 = \Omega_1 = \Omega_2 = 0$ .

دامنه حالت پایدار دارای مقدار بسیار کوچک‌تری در حدود  $2 \times 10^{-6}$  است (شکل ۴).

حال اگر دینامیک ژيروسکوپ برای ورودی  $x_3, \Omega_1, \Omega_2 \neq 0$  بررسی شود، نیروی کوریولیس با فرکانس  $\omega_{drive}$  از طریق عبارت  $2m\Omega_2\dot{x}_1$  در معادله (۹-۳) باعث تحریک المان جرم در راستای خارج از صفحه  $x_3$  می‌شود. در راستای تشخیص نیز دو نیروی کوریولیس با همان فرکانس  $\omega_{drive}$  به صورت  $m(2\Omega_1\dot{x}_2 - 2\Omega_2\dot{x}_1)$  عمل می‌کند (۹-۲). شکل (۵) نتایج حاصله را با مقادیر عددی جدول (۱) نشان می‌دهد. دامنه پاسخ محور تشخیص  $x_2$  به ورودی  $\Omega_3 = 0$  و  $\Omega_1 = \Omega_2 = 150^\circ/s$  ورودی  $\Omega_3 = 1^\circ/min$  است. اما عملاً نیروی کوریولیس  $2m\Omega_2\dot{x}_1$  در معادله (۹-۳) که به وسیله سرعت زاویه‌ای  $\Omega_2$  از نیروی خارج از صفحه بیشتر می‌شود، در واقع کوپلینگ کوریولیس ناشی از اثر سرعت جابه‌جایی  $\dot{x}_1$  که دارای دامنه بزرگی است در سرعت زاویه‌ای مربوطه،

کوریولیس  $2m\Omega_1\dot{x}_3$  در معادله (۹-۲) و نیروی کوریولیس  $m(2\Omega_1\dot{x}_2 - 2\Omega_2\dot{x}_1)$  در معادله (۹-۳) نیز وارد می‌شود. اثر این عبارتهای حذف شده با مشخصات ارائه شده در جدول (۱) و با ورودی در شکل (۳) نشان داده شده است. پاسخ محور  $X: x_1$  به خاطر نیروی هارمونیک با فرکانس رزونانس  $\omega_1 = \sqrt{k_1/m}$  است. بنابراین، پاسخ حالت پایدار به صورت زیر است:

$$x(t) = |x_1| \cos(\omega_1 t) \quad (12-1)$$

که مطابق شکل (۳)، دامنه  $|x_1|$  متأثر از وجود دمپینگ به حدود  $1 \mu m$  محدود می‌شود.

پاسخ محور  $Y, x_2$  در نتیجه کوپلینگ نیروی کوریولیس  $2m\Omega_3\dot{x}_1 = 2m\Omega_3\omega_1 \sin(\omega_1 t)$  رخ می‌دهد. از آنجاکه در مقادیر عددی جدول (۱) فرکانس راستای تحریک و تشخیص یکسان فرض شده است  $(\omega_{drive} = \omega_x = \omega_y)$ ، نیروی کوریولیس محرک راستای  $Y$  دارای یک اختلاف فاز  $180^\circ$  نسبت به جواب  $X$  و

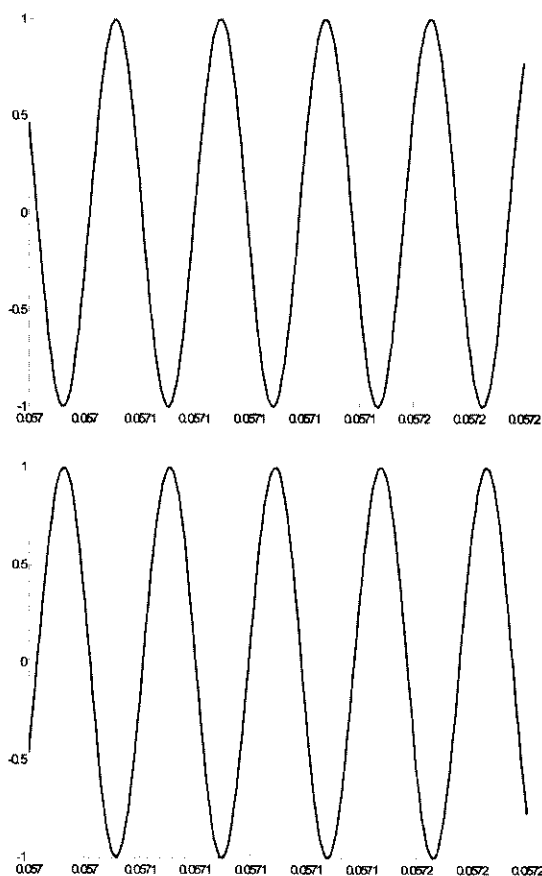
باعث تحریک ذره در راستای  $x_2$  و  $x_3$  می‌شود. حال اگر اثر این دامنه در سرعت زاویه‌ای مربوطه باعث تحریک مضاعف راستای  $x_1$  شود، دامنه این تأثیر که همان عبارت  $(2\Omega_2\dot{x}_3 - 2\Omega_3\dot{x}_2)$  است ژيروسکوپ محور Z را به ژيروسکوپی دو محوره تبدیل می‌کند که این اختلاف ناشی از ساده‌سازی ذکر شده است و در اکثر مقالات در این زمینه نادیده انگاشته می‌شود.

#### ۴-۲- پاسخ به سرعت زاویه‌ای متغیر

در شرایطی که سرعت زاویه‌ای تابعی از زمان و در واقع متغیر باشد، معادله حاکم همان معادله (۸) خواهد بود. در حالتی که جواب‌های  $x_1$ ،  $x_2$  و  $x_3$  توابعی هارمونیک به شکل  $A \sin \omega_{drive} t + B \cos \omega_{drive} t$  باشند به نحوی که مقدار  $\omega_{drive}$  در هر سه معادله برابر بوده و دامنه جواب‌ها یکسان فرض شود  $(|x_1| \sim |x_2| \sim |x_3|)$ ، در آن صورت می‌توان به رابطه‌ای برای ساده‌سازی معادله حاکم دست یافت، به‌گونه‌ای که اگر مقدار  $|\dot{\Omega}_i| \ll \omega_{drive} |\Omega_i|$  باشد، در آن صورت می‌توان از مشتقات سرعت زاویه‌ای ورودی در معادله حاکم صرف‌نظر کرد و معادله را همانند مرحله قبل تحلیل کرد. دو حالت خاص را می‌توان به این صورت بررسی کرد: ابتدا فرض می‌کنیم که سرعت زاویه‌ای ورودی تابعی هارمونیک به شکل  $\Omega_i = |\Omega_i| \sin(\omega_{input,i} t)$  باشد. در این حالت با توجه به رابطه بالا، زمانی می‌توان از مشتقات زمانی سرعت زاویه‌ای چشم‌پوشی کرد که  $\omega_{input,i} \ll \omega_{drive}$  باشد. از آنجاکه معمولاً  $\omega_{drive}$  در ژيروسکوپ‌های ارتعاشی در حد چندین کیلوهرتز است، بنابراین، تحت شرایط خیلی بحرانی و شدید امکان زیاد بودن  $\omega_{input,i}$  رخ می‌دهد، لذا تا حد زیادی فرض فوق همیشه پذیرفتنی است. در حالت دوم، فرض می‌کنیم تابع سرعت زاویه‌ای به شکل  $\Omega_i = \alpha_i t$  باشد که  $\alpha_i$  مقادیری ثابت است. در این صورت عبارت‌های در برگیرنده  $\dot{\Omega}_i$  را در صورتی می‌توان حذف کرد که  $t \gg \frac{1}{\omega_{drive}} \equiv \frac{1}{2\pi} T$  باشد که  $T$  دوره زمانی ارتعاشات تحریک است. از آنجاکه در عمل تنها در شرایط خیلی بحرانی و شدید حد ماکزیمم اغتشاشات محیطی حداکثر به ۲ کیلوهرتز می‌رسد، پس تأثیر این نوع ورودی را می‌توان همچون ورودی ثابت ارزیابی کرد.

جدول ۱- مقادیر مشخصه‌های نوعی ژيروسکوپ ارتعاشی [۴].

Parameter	Not.	Val.
Gyroscope mass	m	3.6E-10 kg
Nominal X-Axis natural frequency	$\omega_1$	26.2 kHz
Nominal Y-Axis natural frequency	$\omega_2$	26.2 kHz
Nominal Z-Axis natural frequency	$\omega_3$	29.2 kHz
X-Axis quality factor	$Q_x$	1000
Y-Axis quality factor	$Q_y$	1000
Z-Axis quality factor	$Q_z$	100
X-Axis drive force	$f_{drive}$	$10 \sin(\omega_1 t) nN$



شکل ۴- نمودار بزرگ‌نمایی دامنه خروجی

در محدوده زمانی  $0.057 - 0.0572s$ .

(۱۴-a)

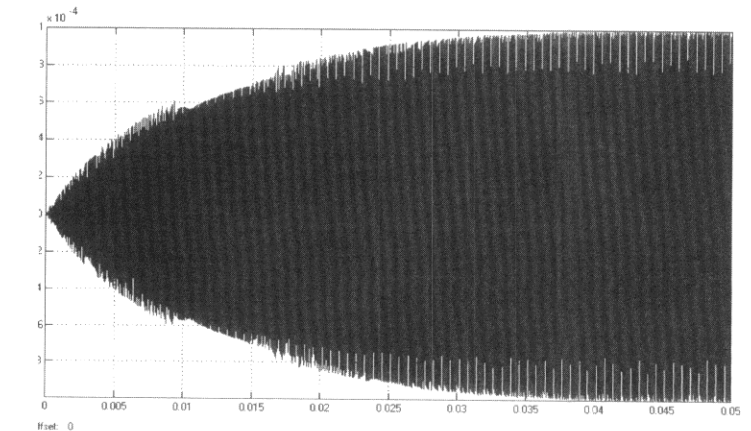
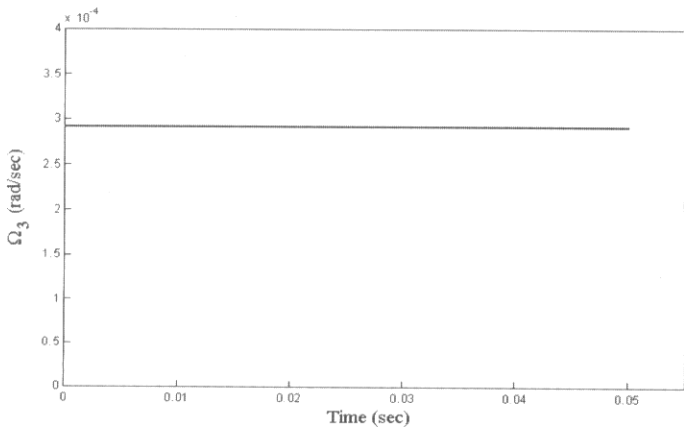
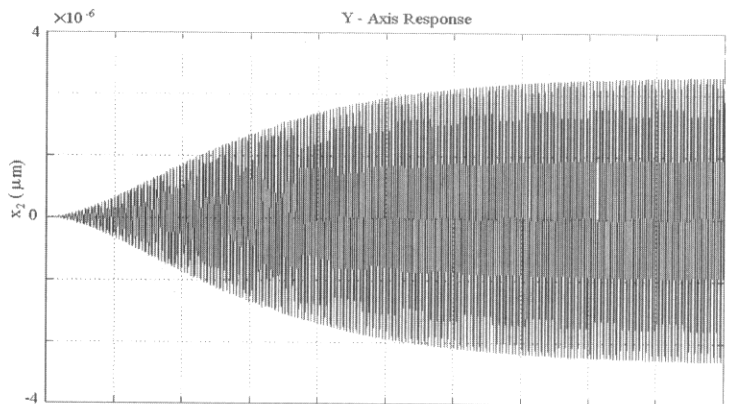
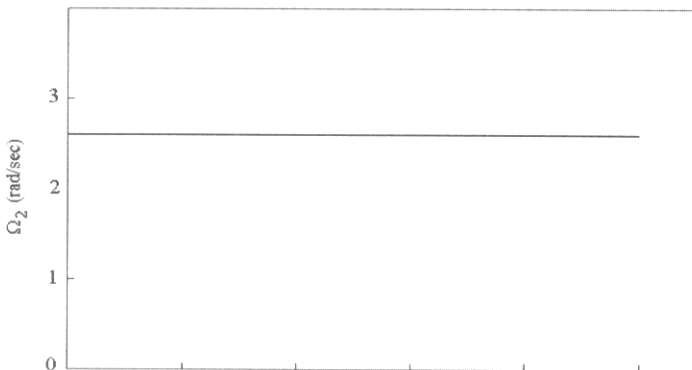
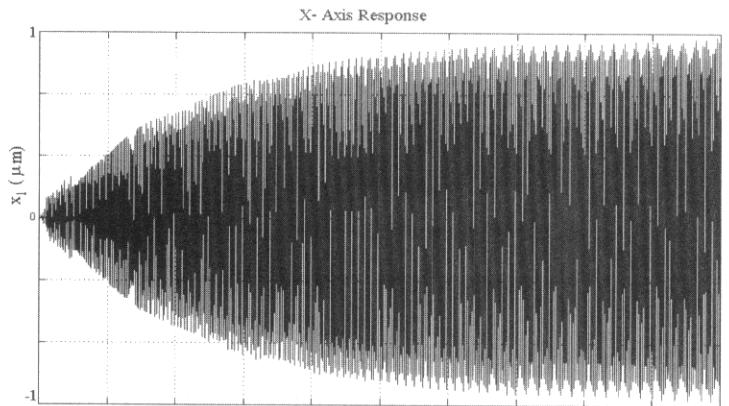
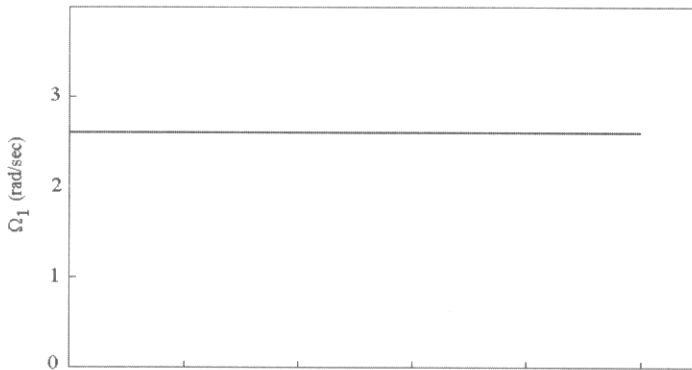
$$m\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + k_1x_1 = -m[2\Omega_2\dot{x}_3 - 2\Omega_3\dot{x}_2 + \dot{\Omega}_2x_3 - \dot{\Omega}_3x_2 - x_1(\Omega_2^2 + \Omega_3^2) + x_2\Omega_1\Omega_2 + x_3\Omega_1\Omega_3] + f_{drive} \sin(\omega_{drive}t)$$

(۱۴-b)

$$m\ddot{x}_2 + c_2\dot{x}_2 + k_2x_2 = -m[2\Omega_3\dot{x}_1 - 2\Omega_1\dot{x}_3 + \dot{\Omega}_3x_1 - \dot{\Omega}_1x_3 - x_2(\Omega_1^2 + \omega_3^2) + x_1\Omega_1\Omega_2 + x_3\Omega_1\Omega_3]$$

۵- پاسخ به ورودی سرعت زاویه‌ای با دامنه بزرگ

در حالتی که سرعت زاویه‌ای ورودی به قدر کافی بزرگ باشد، در آن صورت از حاصل ضرب آنها یا توان‌های مرتبه بالاتر آنها نمی‌توان چشم‌پوشی کرد. در این صورت معادله حاکم به شکل زیر در خواهد آمد:



شکل ۵- نمودار ورودی و دامنه خروجی با فرض  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 \neq 0$ .

(۱۴-۲)

ژیروسکوپ‌های ارتعاشی ده‌ها کیلوهرتز است، بنابراین اثر ورودی متغیر را می‌توان همانند ورودی‌های ثابت ارزیابی کرد. نتیجه گرفته شد که اثر ورودی با دامنه بزرگ، باعث کاهش فرکانس طبیعی سیستم می‌شود.

مراجع

- ۱- پژوهش‌جهرمی، ا. "مروری بر ژيروسکوپ‌های ارتعاشی"، نشریه پیام باور، سال هشتم، شماره ۱۷، صص. ۵۷-۶۶، ۱۳۸۲.
- ۲- پژوهش‌جهرمی، ا. و احمدیان، م.ت. "مطالعه پارامتریک و تحلیل دینامیکی ژيروسکوپ‌های ارتعاشی"، چهارمین کنفرانس انجمن هوافضای ایران، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، جمهوری اسلامی ایران، صص. ۵۲۵-۵۳۴، ۱۳۸۱.

3. Mochida, Y., Tamura, M. and Ohwada, K. "A Micromachined Vibrating Rate Gyroscope with Independent Beams for the Drive and Detection Modes", *Sensors and Actuators, J. Vol. 80*, pp. 170-178, 2000.
4. Maenaka, K., Fujita, T., Konishi, Y., and Maeda, M. "Analysis of a Highly Sensitive Silicon Gyroscope with Cantilever Beam as Vibrating Mass", *Sensors and Actuators A, Vol. 54*, pp. 568-573, 1996.

$$m\ddot{x}_3 + c_3\dot{x}_3 + k_3x_3 = -m[2\Omega_1\dot{x}_2 - 2\Omega_2\dot{x}_1 + \dot{\Omega}_1x_2 - \dot{\Omega}_2x_1 - x_3(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + x_1\Omega_1\Omega_3 + x_3\Omega_2\Omega_3]$$

اثر افزوده شدن روابط مذکور به عنوان مثال  $-x_1(\Omega_2^2 + \Omega_3^2)$ ،  $x_2\Omega_1\Omega_2$  و  $x_3\Omega_1\Omega_3$  در معادله اول را می‌توان به شکل زیر تحلیل کرد. با مرتب کردن معادله (۱۴-۲) به شکل زیر خواهیم داشت:

(۱۵)

$$\ddot{x}_1 + \frac{\omega_1}{Q_1}\dot{x}_1 + (\omega_1^2 - \Omega_2^2 - \Omega_3^2)x_1 = -[2\Omega_2\dot{x}_3 - 2\Omega_3\dot{x}_2 + \dot{\Omega}_2x_3 - \dot{\Omega}_3x_2 + x_2\Omega_1\Omega_2 + x_3\Omega_1\Omega_3] + \frac{f_{drive}}{m}\sin(\omega_{drive}t)$$

که  $Q_1$  ضریب کیفیت و  $\omega_1 = \sqrt{k_1/m}$  است. در این صورت فرکانس طبیعی سیستم به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\omega_n^2 = \omega_1^2 - (\Omega_2^2 + \Omega_3^2), \quad (۱۶)$$

که در مقایسه با سرعت زاویه‌ای کوچک، در می‌یابیم که فرکانس طبیعی به اندازه  $(\Omega_2^2 + \Omega_3^2)$  شیفت پیدا کرده است. از آنجاکه تحت اثر شرایط محیطی مثل تغییرات درجه حرارت، سیستم با شیفت فرکانس طبیعی مواجه است، بنابراین شیفت فرکانس ناشی از ورودی بزرگ نیز باید به آن افزوده شود. البته برای ژيروسکوپ‌های ارتعاشی که با فرکانس در حد چندین کیلوهرتز کار می‌کنند، دامنه سرعت زاویه‌ای مورد نیاز برای شیفت قابل توجه فرکانس.

#### ۶- نتیجه گیری‌ها

مدل ریاضی حاکم بر عملکرد ژيروسکوپ‌های ارتعاشی، امکان بررسی پاسخ این نوع ژيروسکوپ نسبت به ورودی‌های مختلف را فراهم می‌سازد. مدل کامل، جمع آثار تمام ورودی‌هاست. نتیجه گرفته شد که فرض ورودی ثابت مستلزم بررسی اثرات دیگر عبارت‌های کوریولیس است. درغیراین صورت ژيروسکوپ دو محوره به صورت یک ژيروسکوپ محور Z تحلیل می‌شود. از آنجاکه محدوده ورودی‌ها در شرایط معمول و حتی بحرانی کمتر از ۲ کیلوهرتز است، درحالی‌که حداقل محدوده عملکردی