

## تحلیل نیروهای موثر در روغنکاری یک یاتاقان لغزنده

غلامعلی عاطفی<sup>۱</sup>، محمد قلی زاده<sup>۲</sup> و مهدی مقیمی<sup>۳</sup>

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران

### چکیده

در اکثر تحقیقات و تحلیل‌های صورت گرفته در زمینه روغنکاری برای حل معادلات حاکم بر جریان (معادلات ناویر- استوکس) از فرض  $Re \ll 1$  استفاده می‌شود. در بسیاری از موارد، خصوصاً در یاتاقان‌هایی که با سرعت‌های بالا سروکار دارند، فرض مذکور فرض درستی نخواهد بود. در واقع، در رینولدزهای نزدیک به یک نمی‌توان از ترم اینرسی در مقایسه با ترم اصطکاک صرف‌نظر کرد و بایستی هر دو ترم را در محاسبات وارد کنیم. در این مقاله، معادلات ناویر- استوکس با استفاده از روش عددی حجم محدود برای یک یاتاقان لغزنده با در نظر گرفتن هر دو ترم اینرسی و لزجت حل شده و میدان‌های فشار و سرعت محاسبه شده است. بعد از محاسبه میدان‌های فشار و سرعت، نیروهای موثر در روغنکاری یاتاقان مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. در پایان، نتایج حاصله با نتایج بدست آمده از یک روش تقریباً تحلیلی مقایسه شده و ارزیابی‌های لازم صورت گرفته که بسیار رضایت بخش می باشد.

**واژه های کلیدی:** یاتاقان لغزنده، روغنکاری، معادله ناویر- استوکس، نیروهای اینرسی (لختی)، عدد رینولدز

## Effective Forces Analysis of Lubrication in a Slider Bearing

Gh. Atefi, M. Gholizadeh, and M. Moghimi

Mech. Eng. Dep't., Iran Univ. of Science and Tech.

### ABSTRACT

In most literature on lubrication theory, the assumption of  $Re \ll 1$  is considered to solve the Navier-Stokes equations in which inertial forces are neglected in comparison with the viscous ones. In problems of bearing with high speed motion, neglecting the inertial forces can not be utilized. In this study, the Navier-Stokes equations for a slider bearing are solved, considering both the inertial and the viscous forces. Then, the effective forces were computed and analyzed. Finally, the results were compared with the available approximate ones, which showed close agreements.

**Key Words:** Slider Bearing, Lubrication, Inertial Forces, Navier- Stokes Equations

۱-دانشیار

۲-کارشناس ارشد

۳-دانشجوی دکترا (نویسنده پاسخگو): moghimi@iust.ac.ir

## ۱- مقدمه

آیا صرفنظر کردن از نیروهای لختی همیشه درست است؟ در واقع، این حالت تا زمانی برقرار خواهد بود که اختلاف فشار بوجود آمده در اثر نیروهای لختی کوچکتر از اختلاف فشار ایجاد شده در اثر نیروهای اصطکاک باشد. بطور مثال، در یک سرعت محیطی با مقدار  $(8.0 \text{ m/s})$  فشار ایجاد شده در حدود  $(3.0 \text{ kg/cm}^2)$  خواهد بود که در این حالت صرفنظر کردن از نیروهای لختی درست نخواهد بود [۷].

در سال ۱۹۴۷ شخصی به نام کاهلرت<sup>۷</sup> یک روش تقریباً تحلیلی برای حل معادله ناویر-استوکس با در نظر گرفتن ترمهای لختی و اصطکاک برای یاتاقان لغزنده استفاده کرد [۸]. روشی که کاهلرت بر اساس آن به یک سری نتایج دست پیدا کرد، روش تقریب دوم<sup>۸</sup> بود. در این تحقیق، معادلات ناویر-استوکس به وسیله یک روش عددی برای یاتاقان لغزنده حل شده و نتایج آن با نتایج کاهلرت مقایسه شده است.

## ۲- تعریف مسئله

در شکل ۱ شماتیکی از یک یاتاقان لغزنده نشان داده شده است. در این یاتاقان یکی از صفحات یاتاقان دارای شیب بسیار کوچکی نسبت به محور افقی می باشد. همانند تمام مسائل تحلیلی برای مدل مورد نظر یک سری فرضیات و شرایط مرزی وجود دارد. در ورودی و خروجی یاتاقان فشار ثابت فرض می شود یعنی داریم:

$$\begin{cases} p(0, y) = p_0, \\ p(l, y) = p_0. \end{cases} \quad (1)$$

فرض دیگر اینست که صفحه شیب دار ثابت بوده و صفحه افقی پایینی با سرعت ثابت  $U$  در حال حرکت است یعنی داریم:

$$\begin{cases} u(x, 0) = U, \\ u(x, h) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

تئوری های اولیه رفتار یاتاقان سیالی فرض می کرد که بار از محور مستقیماً به قسمت ساکن اعمال می شود که در آن نقش سیال فقط کاهش اصطکاک بود. بعد از آن در اواخر قرن نوزدهم میلادی شخصی به نام تاور<sup>۱</sup> آزمایشات دقیقی انجام داد که به وسیله آن فشار روغن را در قسمت های مختلف یاتاقان اندازه گرفت. تاور همچنین دریافت که توزیع فشار داخل فیلم روغن آنقدر است که سیال نیروهای ناشی از بارگذاری را نیز تحمل می کند [۱]. در سال ۱۸۸۶ میلادی، تئوری دیگری توسط شخصی به نام رینولدز<sup>۲</sup> مطرح شده و آزمایشات تاور را بیشتر بیان نمود. اولین استفاده عملی از تئوری رینولدز حل تقریبی برای حالت خاصی از معادله رینولدز بود، که این حل توسط پروفسور هوشگر دیگری به نام آکوریک<sup>۳</sup> در سال ۱۹۵۲ به دست آورده شد. اکثر استانداردهای جهان بطور رایج بر اساس استفاده از یاتاقان های هیدرو دینامیکی قراردادی برای توربو ماشین ها پایه ریزی شده است ولی با این حال استثنائاتی نیز وجود دارند [۱].

اسورینگن<sup>۴</sup> طرح یک یاتاقان تحت فشار را در منبسط کننده های توربینی کار خود بکار گرفت [۲]. یک نمونه مستند اولیه از روغنکاری تحت فشار که از بیرون بر آن فشار اعمال می شد و اساساً بیشتر روی اصول هیدرواستاتیک استوار بود در نمایشگاه صنعتی پاریس در سال ۱۸۷۸ میلادی ارائه گشت [۳].

تئوری اصطکاک روانسازها از طرف رینولدز و سامرفلد<sup>۵</sup> پایه گذاری شده است [۴ و ۵]. این تئوری بر این فرض استوار است که نیروهای لختی در قشر مواد روغنی لزج قابل صرفنظر هستند و در این صورت می توان معادلات حرکت سیالات لزج را برای یاتاقان های بی نهایت حل نمود. در صنعت توسعه تئوری روغنکاری برای یاتاقان ها با پهنای محدود بسیار مهم بود، که توسط میشل<sup>۶</sup> انجام شد [۶].

- 1-Tower
- 2-Reynolds
- 3-Acorik
- 4-Esoringen
- 5-Somerfeld
- 6-Michel

7-Kahlert  
8-Second Approximation

و... باشند. شار کلی که شامل شارهای جابجایی و پخش است به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$I_i = \rho U_i \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad (4)$$

با استفاده از دو رابطه بالا خواهیم داشت:

$$\frac{\partial I_i}{\partial x_i} = S_\phi \Rightarrow \nabla \cdot \vec{I} = S_\phi \quad (5)$$

با انتگرال‌گیری از رابطه (۵) بر روی حجم کنترل در فضای فیزیکی و به کمک قانون Gauss خواهیم داشت:

$$\iiint_A \vec{I} \cdot d\vec{A} = \iiint_V S_\phi dV \quad (6)$$

با انتگرال‌گیری از رابطه بالا و انجام ساده‌سازی‌های لازم، فرم استاندارد زیر برای معادلات گسسته شده در هر مختصات دلخواهی حاصل می‌شود:

$$a_P \phi_P = \sum a_{NB} \phi_{NB} + S_U \quad (7)$$

که  $a_P$  از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$a_P = \sum a_{NB} - S_P \quad (8)$$

ضرایب  $a_{NB}$  بخشی از ترم‌های جابجایی و پخش را در بر می‌گیرند و ترم‌های چشمه  $S_U, S_P$  بقیه ترم‌ها را شامل می‌شوند.

### ۳-۲- محاسبه ترم جابجایی

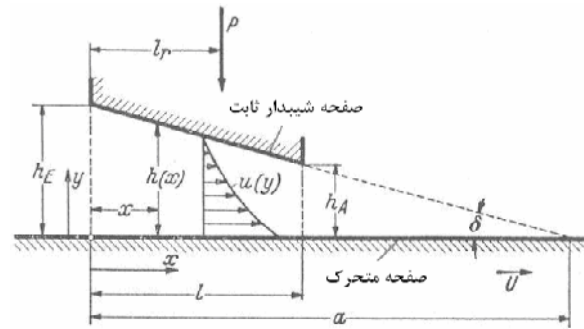
با توجه به مشابه بودن محاسبات در روی سطوح تنها به بررسی ترم جابجایی در روی سطح شرقی  $e$  می‌پردازیم. ترم اول در طرف راست رابطه شار کلی یعنی رابطه (۴)، ترم جابجایی می‌باشد. نرخ جریان جرمی برای سطح شرقی به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \dot{m}_e &= \rho_e \vec{U}_e \cdot \vec{A}_e \\ &= \rho_e (U_e A_{ex} + V_e A_{ey} + W_e A_{ez}). \end{aligned} \quad (9)$$

در این رابطه سطوح کارترین به صورت زیر محاسبه خواهند شد:

$$\begin{cases} A_{ex} = |\vec{A}|_e \vec{n} \cdot \vec{e}_x, \\ A_{ey} = |\vec{A}|_e \vec{n} \cdot \vec{e}_y, \\ A_{ez} = |\vec{A}|_e \vec{n} \cdot \vec{e}_z. \end{cases} \quad (10)$$

علاوه بر شرایط مرزی پارامترهای بی بعد  $k = \frac{a}{l}$ ،  $\xi = \frac{x}{l}$  و  $\eta = \frac{y}{h}$  نیز تعریف می‌شوند که در این روابط  $k$  نمایانگر عکس شیب یا تاقان می‌باشد.



شکل (۱): یاتاقان لغزنده.

### ۳-۲- روش حل

روش عددی اعمالی در این مقاله روش حجم محدود است. برای تحلیل هندسه یاتاقان از مختصات محلی منطبق بر مرز استفاده شده است. هدف اول در این روش تبدیل دامنه پیچیده جریان در فضای فیزیکی به یک دامنه ساده مربعی در فضای محاسباتی می‌باشد [۹]. این کار به کمک انتقال مختصات نامتعامل انجام می‌پذیرد. به عبارت دیگر، سیستم مختصات کارترین  $x_i$  در دامنه فیزیکی به وسیله سیستم مختصات نامتعامل  $\xi_i$  جایگزین می‌شود.

### ۳-۱- گسسته‌سازی معادله انتقال

معادله انتقال پایا برای متغیر وابسته  $\phi$  در مختصات کارترین به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho U_i \phi) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) + S_\phi \quad (3)$$

در این رابطه،  $\Gamma_\phi$  ضریب پخش است که مساوی لزجت در معادلات ممنوم و لزجت تقسیم بر پراختل در معادلات انرژی خواهد بود. متغیرهای وابسته  $\phi$  می‌تواند  $W, V, U$

در میدان فشار جلوگیری می‌کند.  $W_e, V_e$  نیز می‌تواند به همین روش محاسبه گردد.

### ۳-۳- محاسبه ترم نفوذ

ترم دوم در رابطه شار کلی (۵)، ترم نفوذ یا پخش می‌باشد. برای سطحی مثل  $A$  داریم:

$$(\vec{I} \cdot \vec{A})_{diff} = -\Gamma \vec{A} \cdot \nabla \phi. \quad (15)$$

برای یک سطح شرقی  $e$  در مختصات کارتزین، می‌توانیم رابطه زیر را داشته باشیم:

$$(-\vec{A} \cdot \nabla \phi)_e = -\left( A_{ex} \frac{\partial \phi}{\partial x} + A_{ey} \frac{\partial \phi}{\partial y} + A_{ez} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right). \quad (16)$$

برای یک مختصات نامتعامل داریم:

$$(-\vec{A} \cdot \nabla \phi)_e = -\left( \vec{A} \cdot \vec{g}_i g^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_j} \right)_e, \quad (17)$$

$$= -\left( |\vec{A}| \vec{n} \cdot \vec{g}_i g^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_j} \right)_e,$$

که  $\vec{g}_i$  بردار یک دستگاه مختصات نامتعامل می‌باشد. محاسبه  $g^{ij}$  در مرجع [۱۱] آمده است. با توجه به اینکه  $\vec{n}$  (بردار نرمال سطح شرقی  $e$ ) در رابطه (۱۷) برابر با ضرب خارجی بردارهای  $\vec{g}_2$  و  $\vec{g}_3$  می‌باشد. لذا خواهیم داشت:  $\vec{n} \cdot \vec{g}_2 \equiv \vec{n} \cdot \vec{g}_3 = 0$ . در نتیجه، رابطه (۱۷) می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$-\vec{A} \cdot \nabla \phi)_e = -\left( |\vec{A}| \vec{n} \cdot \vec{g}_1 g^{1j} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_j} \right)_e. \quad (18)$$

با گسسته‌سازی ترم‌های رابطه (۱۸) می‌توانیم ترم نفوذ در سطح شرقی را برای مختصات نامتعامل، به صورت زیر بدست آوریم:

$$(-\vec{A} \cdot \nabla \phi)_e = D_{e\xi}(\phi_E - \phi_P) + D_{e\eta}(\phi_{en} - \phi_{es}) + D_{e\zeta}(\phi_{eh} - \phi_{el}). \quad (19)$$

در روابط بالا  $|\vec{A}|_e$  مساحت کل سطح شرقی است.  $\vec{n}$  بردار نرمال (یکه) سطح و  $\vec{e}$  بردار پایه در مختصات کارتزین می‌باشد. برای تعیین مولفه‌های سرعت روی سطوح حجم کنترل، از روش میان‌یابی رهی-چو [۱۰] استفاده شده است. در این حالت، گرادیان فشار را از میدان سرعت ذخیره شده در مرکز حجم کنترل کم می‌کنیم و میدان سرعت جدیدی را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \hat{U}_P = U_P - \frac{-(P_e - P_w)\delta V}{|\vec{we}|(a_p)_P}, \\ \hat{U}_E = U_E - \frac{-(P_{ee} - P_e)\delta V}{|\vec{e}(ee)|(a_p)_E}, \end{cases} \quad (11)$$

که در روابط بالا،  $|\vec{we}|$  فاصله بین سطوح شرقی و غربی می‌باشد. اکنون مولفه سرعت در سطح شرقی به صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$U_e = f_x \hat{U}_E + (1 - f_x) \hat{U}_P + \text{Pressure Gradient}, \quad (12)$$

$$U_e = f_x \hat{U}_E + (1 - f_x) \hat{U}_P + \frac{-(P_E - P_P)\delta V}{|\vec{PE}|(a_p)_e}. \quad (13)$$

در این روابط  $f_x$  ضریب میان‌یابی است و به کمک رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$f_x = \frac{|\vec{Pe}|}{|\vec{Pe}| + |\vec{eE}|}. \quad (14)$$

در رابطه (۱۱) به کمک میان‌یابی خطی تعیین خواهد شد. اما، در رابطه (۱۳) همانطور که مشاهده می‌شود، گرادیان فشار با استفاده از فشار گره‌های مجاور محاسبه می‌شود. این روش از هر گونه نوسانات غیرفیزیکی

قرار می‌دهیم و سپس معادله را برای بدست آوردن  $p'$  حل می‌کنیم.

### ۳-۵- الگوریتم حل

برای حل مسأله ابتدا معادلات ممنتوم حل شده و سپس معادله تصحیح فشار حل می‌شود. سپس، فشارها و سرعت‌ها تصحیح شده و این روند تا زمان همگرایی کامل ادامه می‌یابد. حل هر مجموعه از این معادلات با روش TDMA انجام می‌گیرد. در هر تکرار، حل معادلات ابتدا در طول خطوط شمالی- جنوبی شبکه و سپس در طول خطوط شرقی- غربی ناحیه محاسباتی را جاروب کرده و در انتهای هر تکرار همگرایی بررسی می‌شود. معیار همگرایی قدر مطلق مجموع چشمه‌های باقیمانده روی کل حجم کنترل‌های میدان محاسباتی است که به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$R_\phi = \sum_{\text{all cell}} |a_p \phi_p - (a_N \phi_N + a_S \phi_S + a_E \phi_E + a_W \phi_W + S_U)| \quad (25)$$

یک پارامتر مهم در همگرایی برنامه ضریب زیر تخفیف<sup>۱</sup> است که برای بهبود پایداری حل معادلات بکار می‌رود و تغییرات غیر قابل پیش‌بینی متغیرها را نیز کاهش می‌دهد. در حالت صریح، مقدار زیر تخفیف برای متغیر کلی  $\phi$  در موقعیت  $P$  بدین صورت بیان می‌شود:

$$\phi_p = \alpha \phi_p^{new} + (1 - \alpha) \phi_p^{old} \quad (26)$$

در این رابطه،  $\alpha$  ضریب زیر تخفیف است که مقدار آن بین صفر و یک می‌باشد. ضریب زیر تخفیف در حالت ضمنی با قرار دادن رابطه (۲۶) در رابطه (۷) به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$\frac{a_p}{\alpha} \phi_p = \sum (a_{NB} \phi_{NB} + S_U + \frac{(1 - \alpha)}{\alpha} a_p \phi_p^{old}) \quad (27)$$

در این حالت دیگر نیازی به میدان  $\phi^{new}$  نخواهد بود [۱۳]. با توجه به آنچه گفته شد، روند کلی زیر در برنامه تهیه شده اجرا خواهد شد:

آرایه‌های هندسی  $D_{e\zeta}$ ,  $D_{e\eta}$ ,  $D_{e\xi}$  در کدنویسی یک بار محاسبه شده و ذخیره می‌گردند و در طول برنامه ثابت خواهند بود، چون به هندسه شکل بستگی دارد.

### ۳-۴- معادله تصحیح فشار

در این برنامه معادله تصحیح فشار با به بکار بردن الگوریتم SIMPLEC حاصل می‌شود. شار جرمی  $\dot{m}$  به یک مقدار قدیمی  $\dot{m}^*$  و یک مقدار تصحیحی دیگر مثل  $\dot{m}'$  تقسیم می‌شود. تصحیح شار جرمی در سطح شرقی بصورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \dot{m}'_e &= (\rho \vec{A} \cdot \vec{U}')_{e,e} \\ &= \rho_e (A_{ex} U'_e + A_{ey} V'_e + A_{ez} W'_e), \\ &= (\rho \vec{A} \cdot \vec{g}^j \vec{U}'_j)_{e,e}. \end{aligned} \quad (20)$$

در این رابطه  $U'_j$ ، تصحیح سرعت مماسی می‌باشد. مولفه‌های سرعت مماسی به گرادیان تصحیح فشار وابسته هستند [۱۲] و رابطه زیر بین آنها برقرار است:

$$U'_j = - \frac{\delta V}{a_p} \frac{\partial p'}{\partial x_j} \quad (21)$$

با جایگذاری رابطه (۲۱) در رابطه (۲۰) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{m}'_e &= \left[ \rho \vec{A} \cdot \left( - \frac{\delta V}{a_p} \frac{\partial p'}{\partial x_j} \vec{g}^j \right) \right]_e \\ &= \left[ \frac{\delta V \rho}{a_p} \vec{A} \cdot \nabla p' \right]_e \end{aligned} \quad (22)$$

برای سادگی کار معادله پیوستگی یک بعدی را در نظر می‌گیریم. در این صورت خواهیم داشت:

$$\dot{m}_e - \dot{m}_w = 0 \quad (23)$$

با استفاده از روابط (۲۲) و (۲۳) و همچنین رابطه  $\dot{m} = \dot{m}' + \dot{m}^*$  خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &\left[ \frac{\delta V \rho}{a_p} \vec{A} \cdot \nabla p' \right]_w - \\ &\left[ \frac{\delta V \rho}{a_p} \vec{A} \cdot \nabla p' \right]_e + \dot{m}_e^* - \dot{m}_w^* = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

رابطه (۲۴) همان معادله تصحیح فشار می‌باشد. برای محاسبه مقدار  $\vec{A} \cdot \nabla p'$  در رابطه (۱۸) به جای  $p'$ ،  $\phi$  را

1-Under-relaxation

دو ترم اینرسی و لزجت قابل ملاحظه اند به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\rho(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y}) = -\frac{\partial p_2}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}. \quad (28)$$

در این رابطه اندیس‌های ۱ برای حدس اولیه می باشد و اندیس‌های ۲ مقادیر میدانی سرعت و فشار را در رینولدزهای مختلف نشان می‌دهد. کاهلرت رینولدزهای مختلف نشان می‌دهد. کاهلرت به رابطه بالا و معادله ناویر در حالت  $Re \ll 1$ ، معادله ناویر-استوکس به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\rho(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y}) = -\frac{\partial p_K}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_K}{\partial y^2}. \quad (29)$$

کاهلرت با قرار دادن جواب‌های تحلیلی مربوط به حالت  $Re \ll 1$  در سمت راست معادله بالا و همچنین با استفاده از رابطه پیوستگی به مقادیر میدانی  $u_K$  و  $p_K$  دست پیدا کرد که این روابط عبارتند از:

$$u_K = -Re_s^* \left( \frac{1-\xi}{k} - \frac{\xi}{k^2} \right) \eta \left[ (1-\eta) \frac{(k-1)^2}{(2k-1)(1-\xi/k)^2} \left[ \frac{24}{35} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{7} \ln \frac{k}{k-1} \right] + (1-\eta) \left[ \frac{K_1}{4} + \frac{K_2}{20/3} + \frac{K_3}{10} + \frac{K_4}{14} \right] - \frac{K_1}{6} (1-\eta^2) - \frac{K_2}{12} (1-\eta^3) - \frac{K_3}{20} (1-\eta^4) - \frac{K_4}{30} (1-\eta^5) \right] \quad (30)$$

$$p_K = \rho U^2 \left\{ \frac{1}{7} \frac{(k-1)^2}{2k-1} \left[ \frac{3}{5} \frac{1}{2k-1} + \ln \frac{k}{k-1} \right] \left[ 1 - \left( \frac{1-\xi/k}{1-\xi/k} \right)^2 \right] - \frac{3}{252k-1} \frac{k-1}{1-\xi/k} + \frac{1}{7} \ln \frac{1}{1-\xi/k} \right\} \quad (31)$$

در روابط بالا  $Re_s^* = \frac{Ul}{\nu} \left[ \frac{h_E}{l} \right]^2$ ،  $k = \frac{a}{l}$ ،  $\xi = \frac{x}{l}$  و  $\eta = \frac{y}{h}$  نیز پارامترهایی بر حسب  $\left( \frac{h_0}{h} \right)$  می‌باشند.

بایستی توجه داشته باشید که در تمامی شکل‌ها، نمودارهای مربوط به نتایج حاصل از برنامه با خط چین و نمودارهای کاهلرت متناظر با آنها با خط پر نشان داده شده‌اند. همچنین، در اینجا تمامی نمودارها برحسب یک

۱- در نظر گرفتن مقادیر اولیه برای میدان‌های  $P^*, V^*, U^*$

۲- حل معادله ممنوم  $U$ ؛ در ابتدا ضرایب و چشمه‌ها محاسبه شده، سپس شرایط مرزی اعمال شده و در نهایت با روش TDMA معادلات حل می‌شوند،

۳- برای مولفه‌های دیگر سرعت مرحله ۲ اجرا می‌شود،

۴- حل معادله تصحیح فشار مشابه مرحله ۲،

۵- تصحیح میدان‌های سرعت  $V^*, U^*$  و شارهای جرمی  $\dot{m}_n^*, \dot{m}_e^*$  با استفاده از  $V', U'$ ،

۶- تصحیح میدان فشار  $p^*$  به کمک  $p'$  و

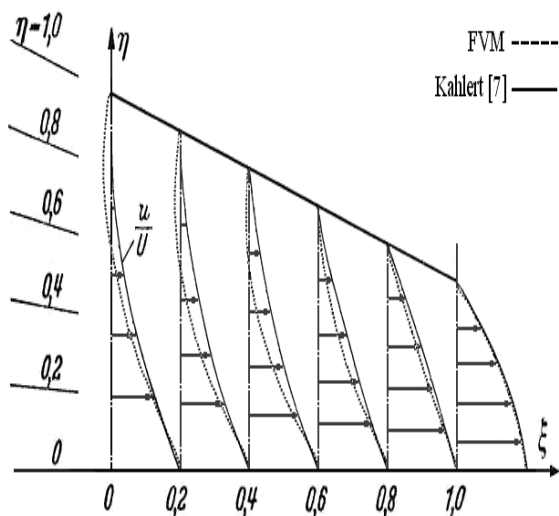
۷- برگشت به مرحله ۲ و تکرار مراحل تا زمان همگرایی برنامه [۱۳].

با توجه به آنچه آورده شد، می‌توان برنامه‌ای تهیه کرد که منجر به تولید میدان سرعت و فشار گردد. در این برنامه برای رسیدن به همگرایی مطلوب تعداد مش‌ها در دو جهت تغییر داده شده است. در واقع، آنقدر تعداد مش‌ها را در دو جهت  $x$  و  $y$  تغییر می‌دهیم تا به حالتی برسیم که بعد از آن تغییری در نتایج خود مشاهده نکنیم. در این مسأله با در نظر گرفتن تعداد مش‌ها در جهت طول یاتاقان برابر با ۶۰۰ و تعداد مش‌ها در عرض یاتاقان برابر ۲۰ به این مهم دست پیدا کرده ایم. در واقع، بعد از این حالت ریز کردن بیشتر مش‌ها تنها سبب افزایش زمان محاسبات خواهد شد و در دقت حل مسأله تأثیر به‌سزایی ندارد. همچنین مقدار ۰/۹ برای زیر تخفیف سرعت و ۰/۲ برای زیر تخفیف فشار در نظر گرفته شده است که برای همگرایی مسأله مطلوب هستند. بایستی اشاره شود که منظور از عدد رینولدز همان عدد رینولدز اصلاح شده می‌باشد که در مرجع [۸] بدان اشاره شده است. با در نظر گرفتن این فرضیات برای مسأله و اجرای برنامه نوشته شده می‌توان به میدان‌های سرعت و فشار مورد نظر دست پیدا کرد.

می‌دانیم که معادله ناویر-استوکس برای  $Re \ll 1$  به

$$\text{صورت } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \text{ در می‌آید و حل‌هایی برای آن ارائه$$

شده است. کاهلرت برای رسیدن به هدف خود جواب‌های این معادله را به عنوان حدس اولیه در نظر گرفته است. کاهلرت معادله ناویر-استوکس بالا را برای حالتی که هر



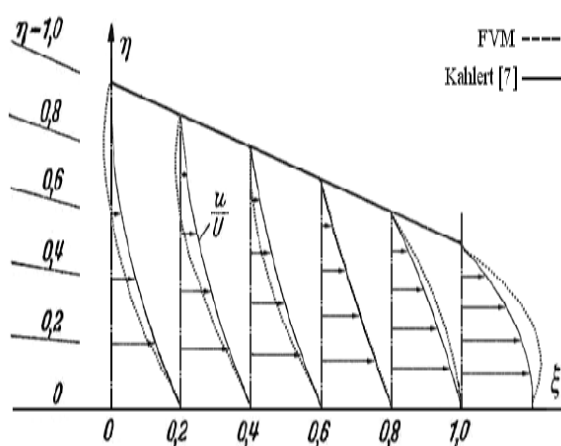
شکل (۳): نمودارهای سرعت در  $k=2$  و  $Re=5$ .

در نمودارهای حاصله برگشت جریان به طور محسوس دیده می‌شود؛ در صورتی که در نمودارهای کاهلرت این امر محسوس نمی‌باشد. می‌دانیم که اختلاف فشار در هر جایی باعث ایجاد جریان می‌شود. شکل‌های ۴ و ۵ که مربوط به فشار یاتاقان است، نشان می‌دهد که در اثر اختلاف فشار ایجاد شده در داخل یاتاقان بایستی یک جریان برگشتی از داخل یاتاقان به سمت دهانه ورودی یاتاقان ایجاد گردد. بوجود آمدن چنین جریانی باعث می‌شود که نمودارهای سرعت به صورت شکل‌های ۴ و ۵ باشند. مقادیر به دست آمده برای فشار یاتاقان در اعداد رینولدز مختلف و شیب‌های متفاوت در جدول ۱ لیست شده است. همچنین، مقادیر فشار مربوط به کاهلرت نیز در جدول ۲ آمده است.

سری پارامترهای بی‌بعد رسم شده است، که به طور خلاصه به آنها اشاره می‌کنیم. در این نمودارها، فشار با رابطه  $f = p / (\mu * U * l / h_E^2)$ ، نیروی عمودی با رابطه  $F = P / (\mu * U * l^2 / h_E^2)$  و نیروی محوری با رابطه  $W = T / (\mu * U * l / h_E)$  نشان داده است. در روابط مذکور  $p$  نشان دهنده فشار یاتاقان،  $P = \int p dA$  نمایانگر نیروی عمودی و  $T = \int \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} dA$  نیروی محوری را نشان می‌دهد. نتایج حاصله از برنامه با نتایج مربوط به اندیس ۲ کاهلرت معادل هستند و لذا با آنها مقایسه می‌گردند. بحث مربوط به این اندیس‌ها در مرجع [۸] بطور مفصل آمده است.

#### ۴- نتایج و بحث

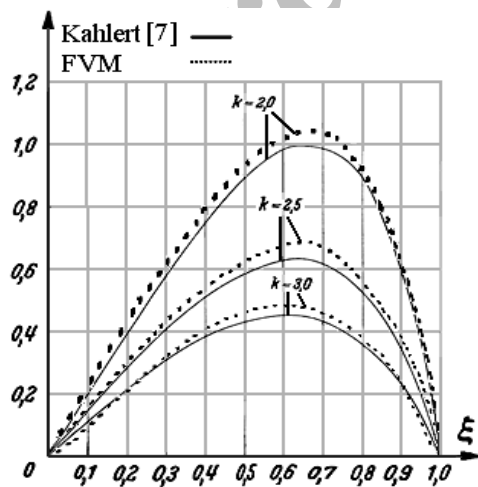
بعد از حل جریان، خروجی‌های اصلی برنامه که شامل مقادیر میدان فشار و سرعت هستند، بدست می‌آیند و می‌توان نمودارهای مربوط به آنها را رسم کرد. شکل‌های ۲ و ۳ نمودارهای سرعت حاصله از برنامه را به همراه نمودارهای کاهلرت نشان می‌دهند.



شکل (۲): نمودارهای سرعت در  $k=2$  و  $Re \approx 0$ .

جدول (۱): مقادیر فشار  $f$  بدست آمده از برنامه در رینولدزها و شیبهای مختلف یاتاقان.

$k \backslash \xi$		$f(\xi, k)$										
		۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹	۱
Re=0	۱/۵	۰	۰/۳۲۷	۰/۶۵۱	۰/۹۶۳	۱/۳۲۴	۱/۷۳۱	۲/۰۹۶	۲/۳۰۲	۲/۲۸۷	۱/۷۱۲	۰
	۲	۰	۰/۲۲۳	۰/۴۳۴	۰/۶۰۵	۰/۷۹۶	۰/۹۴۱	۱/۰۱۸	۱/۰۳۶	۰/۹۱۷	۰/۶۱۹	۰
	۲/۵	۰	۰/۱۶۴	۰/۲۹۳	۰/۴۴۲	۰/۵۴۸	۰/۶۳۳	۰/۶۷۴	۰/۶۶۷	۰/۵۵۶	۰/۳۹۳	۰
	۳	۰	۰/۱۱۲	۰/۲۱۲	۰/۳۲۴	۰/۴۱۴	۰/۴۷۵	۰/۴۸۶	۰/۴۶۳	۰/۳۷۲	۰/۲۴۷	۰
Re=1	۱/۵	۰	۰/۳۳۴	۰/۶۶۸	۰/۹۸۸	۱/۳۵۳	۱/۷۷۳	۲/۱۴۹	۲/۳۶۵	۲/۳۴۲	۱/۷۴۶	۰
	۲	۰	۰/۲۲۶	۰/۴۴۰	۰/۶۱۶	۰/۸۱۲	۰/۹۶۲	۰/۱۰۴۴	۰/۱۰۶۷	۰/۹۴۹	۰/۶۴۶	۰
	۲/۵	۰	۰/۱۶۶	۰/۲۹۶	۰/۴۴۷	۰/۵۵۷	۰/۶۴۶	۰/۶۹۱	۰/۶۸۱	۰/۵۷۵	۰/۴۰۶	۰
	۳	۰	۰/۱۱۳	۰/۲۱۴	۰/۳۲۷	۰/۴۲۰	۰/۴۸۴	۰/۴۹۸	۰/۴۷۸	۰/۳۸۵	۰/۲۵۱	۰
Re=3	۱/۵	۰	۰/۳۴۹	۰/۷۰۴	۱/۰۳۸	۱/۴۱۱	۱/۸۵۵	۲/۲۵۳	۲/۴۸۶	۲/۴۴۳	۱/۸۲۶	۰
	۲	۰	۰/۲۳۳	۰/۴۵۳	۰/۶۳۷	۰/۸۴۲	۱/۰۰۲	۱/۰۹۶	۱/۱۳۲	۱/۰۱۵	۰/۷۲۶	۰
	۲/۵	۰	۰/۱۷۱	۰/۳۰۴	۰/۴۵۸	۰/۵۷۵	۰/۶۶۸	۰/۷۲۶	۰/۷۱۹	۰/۶۱۸	۰/۴۲۸	۰
	۳	۰	۰/۱۱۶	۰/۲۱۷	۰/۳۳۳	۰/۵۲۶	۰/۵۰۳	۰/۵۲۳	۰/۵۱۹	۰/۴۱۳	۰/۲۶۱	۰
Re=5	۱/۵	۰	۰/۳۵۵	۱/۷۳۲	۱/۰۹۱	۱/۴۶۵	۱/۹۳۵	۲/۳۶۲	۲/۶۲۵	۲/۵۵۱	۱/۸۹۳	۰
	۲	۰	۰/۲۴۱	۰/۴۶۷	۰/۶۶۳	۰/۸۷۱	۱/۰۴۲	۱/۱۴۵	۱/۳۴۲	۱/۰۶۳	۰/۴۵۱	۰
	۲/۵	۰	۰/۱۷۵	۰/۳۱۴	۰/۴۷۱	۰/۶۰۱	۰/۶۶۹	۰/۷۶۸	۰/۷۵۸	۰/۶۶۲	۰/۴۹۷	۰
	۳	۰	۰/۱۱۹	۰/۲۲۴	۰/۳۴۲	۰/۴۴۶	۰/۵۲۳	۰/۵۴۸	۰/۵۴۹	۰/۴۴۵	۰/۲۷۹	۰
Re=10	۱/۵	۰	۰/۴۰۱	۰/۸۲۱	۱/۲۱۷	۱/۶۱۳	۲/۱۲۸	۲/۶۸۱	۲/۹۶۸	۲/۸۲۴	۲/۰۷۵	۰
	۲	۰	۰/۲۵۴	۰/۴۹۲	۰/۷۱۲	۰/۹۴۱	۱/۱۴۳	۱/۲۷۳	۱/۳۴۲	۱/۲۵۳	۰/۹۴۶	۰
	۲/۵	۰	۰/۱۸۷	۰/۳۲۵	۰/۴۹۸	۰/۶۳۸	۰/۷۴۶	۰/۸۳۷	۰/۸۵۳	۰/۷۶۲	۰/۴۹۷	۰
	۳	۰	۰/۱۲۴	۰/۲۳۴	۰/۳۵۶	۰/۴۸۲	۰/۵۶۵	۰/۶۱۱	۰/۶۱۵	۰/۵۱۳	۰/۲۹۱	۰

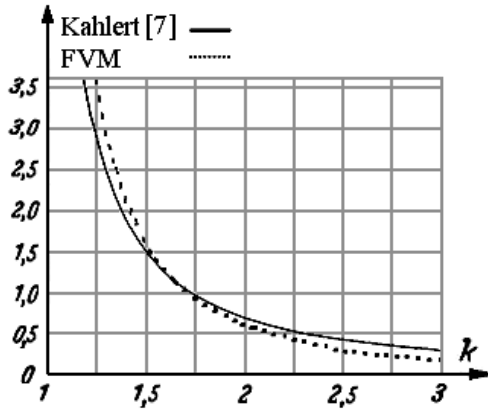


شکل (۴): فشار داخل یاتاقان لغزنده در  $Re \approx 0$ .

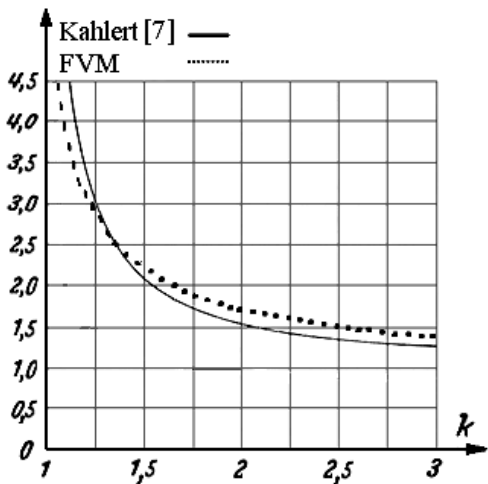
البته، مقادیر فشار در جدول ۲ شامل فشار تصحیح و فشار تقریب اول (حالت  $Re \approx 0$ ) می‌شود. در نمودارهای کاهلرت برای رسیدن به فشار نهایی (تقریب دوم) بایستی طبق مرجع [۸] از رابطه  $f_2 = f_1 + Re \times f_k$  استفاده نمود. با مقایسه نمودارهای فشار کاهلرت (شکل‌های ۴ و ۵) و FVM مشاهده می‌شود که رفتار این دو نمودار کاملاً مشابه یکدیگر بوده و تفاوت چندانی بین آنها دیده نمی‌شود.



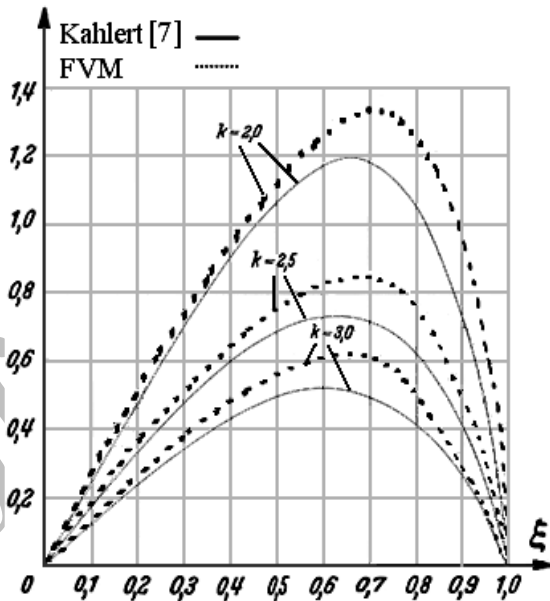
با داشتن مقادیر فشار و سرعت و همچنین با توجه به روابط ذکر شده بین آنها و نیروهای محوری و عمودی، مقادیر نیروهای عمودی و محوری بدست آمده که نمودار آنها به ترتیب در شکل‌های ۶ و ۷ رسم شده است. در این شکل‌ها نیز همانند نمودارهای فشار، اختلاف چندانی بین نمودارهای حاصله با نتایج کاهلرت دیده نمی‌شود.



شکل (۶): نیروی عمودی نسبت به شیب یاتاقان لغزنده در  $Re=5$ .



شکل (۷): نیروی محوری در  $Re=5$ .



شکل (۸): فشار داخل یاتاقان لغزنده در  $Re=10$ .

جدول (۲): مقادیر فشارهای  $f_1$  و  $f_k$  بدست آمده توسط کاهلرت در طول یاتاقان.

$k \backslash \xi$	$f_1(\xi, k)$				$f_k(\xi, k)$			
	۱/۵	۲	۲/۵	۳	۱/۵	۲	۲/۵	۳
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۰/۱	۰/۳۱۴	۰/۱۹۵	۰/۱۴۵	۰/۱۰۸	۰/۰۰۷۶۹	۰/۰۰۴۲۴	۰/۰۰۲۶۵	۰/۰۰۱۸۱
۰/۲	۰/۶۳۹	۰/۳۸۶	۰/۲۸۵	۰/۲۱۲	۰/۰۱۵۴۶	۰/۰۰۸۲۳	۰/۰۰۵۰۷	۰/۰۰۳۴۳
۰/۳	۰/۹۴۵	۰/۵۷۵	۰/۴۰۵	۰/۳۰۶	۰/۰۲۳۱۸	۰/۰۱۱۹۱	۰/۰۰۷۱۷	۰/۰۰۴۷۶
۰/۴	۱/۲۷۰	۰/۷۴۵	۰/۵۱۰	۰/۳۸۲	۰/۰۳۰۶۷	۰/۰۱۵۰۹	۰/۰۰۸۸۵	۰/۰۰۵۸۰
۰/۵	۱/۶۸۳	۰/۸۸۸	۰/۵۸۵	۰/۴۳۲	۰/۰۳۷۴۲	۰/۰۱۷۵۱	۰/۰۱۰۰۴	۰/۰۰۶۴۷
۰/۶	۲/۰۴۵	۰/۹۸۴	۰/۶۳۰	۰/۴۵۰	۰/۰۴۲۸۲	۰/۰۱۸۹۱	۰/۰۱۰۴۶	۰/۰۰۶۶۶
۰/۷	۲/۳۲۵	۰/۹۸۴	۰/۶۱۵	۰/۴۳۲	۰/۰۴۵۷۸	۰/۰۱۸۷۱	۰/۰۱۰۱۴	۰/۰۰۶۳۰
۰/۸	۲/۲۱۰	۰/۹۰۰	۰/۵۲۵	۰/۳۶۰	۰/۰۴۳۶۴	۰/۰۱۶۳۷	۰/۰۰۸۴۶	۰/۰۰۵۱۵
۰/۹	۱/۶۹۲	۰/۶۰۰	۰/۳۴۵	۰/۲۳۴	۰/۰۳۱۹۱	۰/۰۱۰۵۲	۰/۰۰۵۲۵	۰/۰۰۳۱۲
۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰

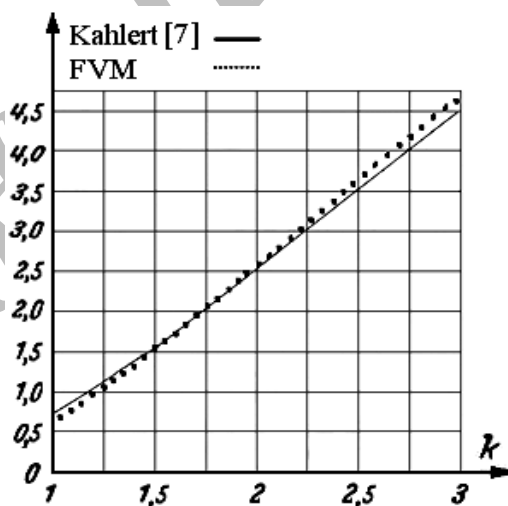
یاتاقان‌های لغزنده، روغنکاری از نوع هیدرودینامیکی است و فیلم روغن ایجاد شده در آن فشاری پیدا می‌کند که ظرفیت تحمل بار وارد بر محور یا یاتاقان را خواهد داشت. برای ایجاد چنین فیلم روغنی عوامل متعددی مانند شکل هندسی یاتاقان (ارتفاع، طول و ... ) و همچنین نوع سیال مورد استفاده بایستی بررسی گردند. مثلاً در انتخاب نوع سیال تغییرات لزجت آن در برابر حرارت و فشار بایستی به دقت مورد توجه واقع شود. در واقع برای داشتن یک یاتاقان لغزنده با کارایی بالا بایستی تمام عوامل از قبیل لزجت روغن، جنس یاتاقان، شکل یاتاقان و هر آنچه که در تشکیل فیلم روغن تاثیرگذار است، مورد بررسی واقع شود و حالت بهینه‌ای از آنها انتخاب گردد. با انتخاب درست و حساب شده مقادیر مختلف می‌توان به بازده مطلوب دست یافت. در واقع تغییر هر کدام از پارامترهای مربوط به خواص سیال و شکل یاتاقان در بازده یاتاقان تاثیرگذار است. ولی با این وجود نمی‌توان برای کارایی یاتاقان لغزنده رابطه خاصی را ارائه داد.

از آنجایی که برای هر کدام از پارامترها محدودیتهایی وجود دارند، لذا بایستی در طراحی یک یاتاقان تمام جوانب را در نظر گرفت و به یک طرح بهینه و مطلوب دست پیدا کرد.

## مراجع

1. Petchenev, A., Goldman, P., Muszynska, A., and Bently, D.E. "Analytical Study on the Fluid J. Bearing/Seal/Rotor System", The Joint ASME & JSME Fluids Eng. Annual Conf., Vol. 207, No. 4, pp. 33-38, 1995.
2. Swearingen, J.S., "ORBIT", Vol. 20, No. 4, pp. 68-69, 1999.
3. Bently, D.E. and Petchenev, A., "Dynamic Stiffness and the Advantages of Externally Pressurized Fluid-Film Bearings", ASME, J. of Tribology, Vol. 121, No. 5, pp. 133-138, 1999.
4. Khonsari, M.M. and Booser, E.R., "Applied Tribology Bearing Design and Lubrication", John Wiley and Sons, London, pp. 277-279, 2001.
5. Hamrock, B.J., "Fundamentals of Fluid Film Lubrication", McGraw-Hill, New York, pp. 123-136, 2004.

با توجه به داشتن مقادیر مربوط به نیروهای عمودی و محوری، متغیر دیگری به نام ضریب اصطکاک یاتاقان را تعریف کرده و به بررسی نمودار آن می‌پردازیم. برای محاسبه مقدار ضریب اصطکاک یاتاقان از فرمول اولیه ضریب اصطکاک یعنی نسبت نیروی محوری به نیروی عمودی ( $w = T/P$ ) استفاده شده است. پس از محاسبه مقادیر ضریب اصطکاک نمودار آن بر حسب عکس شیب یاتاقان ( $k$ ) در شکل ۸ ترسیم شده است. با توجه به شکل ۸، می‌توان گفت که در شیب‌های خیلی پایین ( $k$  های خیلی بالا) با یک ضریب اصطکاک بسیار بالا (بی‌نهایت فیزیکی) روبرو خواهیم بود.



شکل (۸): مقایسه ضریب اصطکاک  $w$  بدست آمده از برنامه با نمودار کاهلرت در  $Re=5$ .

آنچه که از مقایسه نمودارهای حاصله و نتایج کاهلرت بدست می‌آید، اینست که در همه آنها یک اختلاف نسبی ۶-۷ درصدی بین نتایج روش محدود با نتایج کاهلرت مشاهده می‌شود. همان طور که گفته شد، حل تحلیلی کاهلرت با تقریب‌ها و فرضیات زیادی صورت گرفته است. ولی با این حال مشاهده می‌شود که نتایج او اختلاف چندانی با روش حجم محدود ندارد و این امر بیانگر آن است که فرضیات و تقریب‌های کاهلرت طبق اصول خاصی در نظر گرفته شده است. برای دیدن روند کار کاهلرت و تقریبات و فرضیات او می‌توان به مرجع [۸] مراجعه کرد. بعد از بررسی و تحلیل نتایج حاصله، به راندمان یاتاقان لغزنده می‌پردازیم. همانطور که گفته شد در

10. Kim, D. and Choi, H., "A Second-Order Time-Accurate Finite Volume Method for Unsteady Incompressible Flow on Hybrid Unstructured Grids", *J. Comp. Phys.*, Vol. 162, No. 2, pp. 411-428, 2000.
11. Davidson, L. and Hedberg, P., "Mathematical Derivation of a Finite Volume Formulation for Laminar Flow in Complex Geometries", *Int. J. Numerical Method in Fluids*, Vol. 9, No. 5, pp. 531-540, 2005.
12. Frziger, J.H. and Peric, M., "Computational Methods for Fluid Dynamics", Springer, pp. 248-283, 2002.
13. Versteeg, H.K. and Malalasekera, W., "An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method", Addison-Wesley, pp. 116-198, 1996.
6. Stahl, J. and Jacobson, B.O., "Design Functions for Hydrodynamic Bearings", *J. Eng. Tribology*", Vol. 215, No. 5, pp. 405-416, 2001.
7. Ningyu, L. and Eddie, Y.K.N., "The Posture Effects of a Slider Air Bearing on Its Performance with a Direct Simulation Monte Carlo Method", *J. Micromechanics and Microengineering*, Vol. 11, No. 5, pp.463-473, 2001.
8. Kahlert, W., "Der Einfluß der Trägheitskräfte Bei Der Hydrodynamischen Schmiermittel Theorie", *Ingenieur Archiv*, Vol. 16, No. 5-6, pp. 321-342, 1948.
9. Lai, Y.G., "Computational Method of Second-Moment Turbulence Closures in Complex Geometries", *AIAA J.*, Vol. 33, No. 8, pp. 1426-1432, 1995.

Archive of SID