تحلیل جریان‌های تراکم ناپذیر لزج با استفاده از یک روش بالادست چند بعدی جدید بر پایه مشخصه‌ها

کامیار زمزمیان [۱]
گروه مهندسی مکانیک
دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تبریز

سید اسماعیل رضوی [۲]
گروه مهندسی مکانیک
دانشگاه تبریز

(تاریخ دریافت: ۱۳۸۶/۹/۷؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۸۷/۵/۱۰)

چکیده

در مقالهٔ حاضر، یک روش بالادست برمبنای مشخصه‌ها برای تحلیل جریان‌های تراکم ناپذیر لزج با تصحیح تراکم پذیری مصنوعی ارائه شده است. برخلاف روش‌های برپایه مشخصه‌های موجود (CB)، برای جریان‌های تراکم ناپذیر که با فرض یک بعدی بودن موضعی جریان روابط مشخصه‌های یک بعدی را مورد استفاده قرار می‌دهند، در روش پیشنهادی حاضر از ساختار مشخصه های چندبعدی معادلات و مسیرهای واقعی انتشار اطلاعات استفاده می‌شود. برای اولین بار در این تحقیق، ساختار مشخصه‌های چندبعدی معادلات تراکم ناپذیر مصنوعی استخراج شده و از آن برای بنا نهادن طرح محاسباتی کاملا چند بعدی برپایه مشخصه‌ها استفاده شده است. روش جدید MCB[۳] در شکل حجم محدود برای گسسته سازی جملات جابه‌جایی در معادلات ناویر-استوکس مورد استفاده قرار گرفته است. روش پیشنهادی جدید برای شبیه سازی جریان‌های داخلی و خارجی تراکم ناپذیر مورد استفاده قرار گرفته و نتایج به دست آمده با نتایج سایر روش‌های مرسوم و داده‌های موجود در ادبیات فن مقایسه شده است. نتایج به دست آمده حاکی از آن است که روش جدید ارائه شده در شکل‌های مرتبه اول و دوم نسبت به طرح‌های محاسباتی مرسوم CB نتایج دقیق‌تری را ارائه می‌دهد. با استفاده از این روش نیازی به اضافه کردن لزجت مصنوعی، حتی در اعداد رینولدز بالا، نمی‌باشد و روش حل کاملاً پایدار است. مزیت چشمگیر دیگر طرح محاسباتی MCB نرخ همگرایی سریع آن در مقایسه با روش CB (که نرخ همگرایی کند آن در ادبیات فن به دفعات ذکر شده) و روش مرکزی می‌باشد. نتایج به دست آمده با استفاده از طرح MCB مرتبه دوم با نتایج متعدد موجود در ادبیات مورد مقایسه قرار گرفته که در تمامی موارد توافق بسیار خوبی بین آنها مشاهده می شود.

واژه‌های کلیدی: جریان تراکم ناپذیر، تراکم پذیری مصنوعی، معادلات ناویر- استوکس، مشخصه‌های چند بعدی

Computation of Incompressible Viscous Flows, Using a Novel Multi-dimensional Characteristic Based Upwind Scheme

K. Zamzamian
Mech. Eng. Dep't.
Islamic Azad Univ., Tabriz Branch.

S. E. Razavi
Mech. Eng. Dep't.
Univ. of Tabriz

ABSTRACT

In this paper, a novel multi-dimensional characteristic based upwind scheme for incompressible viscous flows is presented. Unlike conventional characteristic based (CB) schemes, which use one-dimensional characteristic relations, the proposed scheme takes into account the physical multi-dimensional characteristic relations. For the first time, the multi-dimensional characteristic structure of incompressible flows, modified by artificial compressibility, is extracted. The present MCB (multi-dimensional characteristic based) scheme, in conjunction with the finite-volume discretization, is employed to model convective fluxes. This MCB scheme is applied to benchmark incompressible internal and external flows, namely lid driven cavity flow and two-dimensional flow past a circular cylinder. It was found that the proposed scheme presents more accurate results than the conventional CB scheme in both their first and second order counterparts. Using this inherent upwinding technique, no artificial viscosity is required, even at high Reynolds numbers. Another remarkable advantage of MCB scheme lies in its faster convergence rate with respect to CB scheme, which is found to exhibit substantial delays in convergence. Our results are in good agreements when compared to standard benchmark data.

Key Words: Incompressible Flow, Artificial Compressibility, Navier-Stokes Equations, Multi-dimensional Characteristics

۱- مربی (نویسنده پاسخگو): K_zamzamian@yahoo.com
۲- استادیار: Razavi@tabrizu.ac.ir

3- Multi-dimensional Characteristic Based

۱- مقدمه

مفهوم تراکم پذیری مصنوعی[۱] برای اولین بار توسط چورین[۲] و به منظور حل پایای معادلات ناویر- استوکس تراکم‌ناپذیر ابداع شد [۱]. با این تکنیک، معادلات پیوستگی و مومنتوم برای ایجاد امکان روش زمانروی، با اضافه‌کردن یک جمله مجازی به معادله پیوستگی به یکدیگر مرتبط می‌شوند و معادلات از ماهیت بیضوی به هذلولوی تبدیل می‌گردند. انتخاب عوامل تراکم‌پذیری مصنوعی تأثیری بر جواب‌های نهایی نداشته و تنها روند همگرایی به حالت پایا را تحت تأثیر قرار می‌دهد [۲]. طرح‌های محاسباتی مختلفی برای گسسته سازی معادلات تراکم‌پذیری مصنوعی مورد استفاده قرار گرفته است. فارمر[۳] و همکاران روش میانگین گیری مرکزی با اضافه کردن لزجت مصنوعی مرتبه چهار جیمسون[۴] برای جلوگیری از نوسانات و پایدار کردن حل را به کار بردند [۳]. محققان زیادی روش‌هایی از نوع جداسازی اختلاف شار را برای معادلات تراکم‌پذیری مصنوعی به کار برده‌اند. راجرز[۵] و همکاران [۴]، لی‌یو[۶] و همکاران [۵]، کالیندریز[۷] و همکاران [۶] و یوآن[۸] [۷]، طرح محاسباتی جداسازی اختلاف شار با حلگر ریمن رو[۹] را برای گسسته سازی معادلات تراکم پذیری مصنوعی مورد استفاده قرار دادند.

اضافه کردن جمله تراکم‌پذیری مصنوعی در روش ابداعی توسط چارین[۱۰]، سبب شد که تحلیل جریان‌های تراکم‌ناپذیر توسط روش مشخصه‌ها مورد توجه قرار گیرد. برای اولین بار، دریکاکیز[۱۱]و همکاران روابط یک‌بعدی مشخصه‌های معادلات تراکم پذیری مصنوعی را برای محاسبه بردارهای شار جابه‌جایی در روش حجم محدود در شبکه بندی باسازمان مورد استفاده قرار دادند [۸]. توسعه روش مذکور برای جریان‌های سه‌بعدی در مرجع [۹] و به همراه روش شبکه چندگانه در مرجع [۱۰] انجام شده است. روش ایشان توسط ژائو[۱۲] و همکاران برای شبیه سازی جریان‌های تراکم‌ناپذیر به همراه انتقال حرارت در شبکه‌های بی سازمان دو و سه‌بعدی توسعه داده شد [۱۵- ۱۱].

روش CB[۱۳] ذکر شده توسط محققان زیادی برای محاسبه طیف وسیعی از جریان‌های تراکم ناپذیر مورد استفاده قرار گرفته است. زیونگ[۱۴] و همکاران، یک روش ضمنی حجم محدود برپایه مشخصه‌ها را برای شبیه‌سازی جریان تراکم‌ناپذیر در محیط متخلخل با استفاده از شبکه بی سازمان ارائه دادند [۱۶]. نمونه‌های دیگر از تحلیل جریان‌های تراکم ناپذیر با روش تراکم پذیری مصنوعی به همراه طرح‌های محاسباتی برپایه مشخصه‌ها (CB) را می‌توان در مراجع [۱۹-۱۷] یافت.

همان طورکه در مثال‌های موجود در ادبیات فن می‌توان مشاهده نمود، تمامی طرح‌های محاسباتی برپایه مشخصه‌ها برای گسسسته‌سازی معادلات تراکم‌پذیری مصنوعی، از فرض‌های ساده کننده یک‌بعدی بودن جریان در جهت‌های خاص استفاده می‌کنند. به منظور در نظر گرفتن طبیعت فیزیکی چندبعدی جریان، طرح روش‌های محاسباتی که از جهت‌های واقعی انتشار اطلاعات در میدان جریان سیال استفاده کنند، ضروری است. برای جریان‌های تراکم‌ناپذیر و معادلات تراکم‌پذیری مصنوعی، به دلیل پیچیدگی ریاضی حاکم بر این معادلات، تعمیم روش‌های بالادست برپایه مشخصه‌ها به حالت‌های چندبعدی تاکنون انجام نگرفته است. همان طور که گفته شد، تمامی طرح‌های بالادست موجود در این زمینه از روابط حاکم بر سیال یک‌بعدی استفاده کرده و از این رو دچار مشکلات زیادی مانند نرخ بسیار کند همگرایی شده‌اند که در مراجع مشخصی مانند [۲۱-۱۹] به آن اشاره شده است. در این مقاله، برای اولین بار، ساختار مشخصه‌های دو بعدی معادلات تراکم‌پذیری مصنوعی با استفاده از روش ریاضی به دست آمده است. با استفاده از روابط مشخصه‌ای استخراج شده، یک طرح محاسباتی

1- Artificial Compressibility
2-Chorin
3- Farmer
4- Jameson
5- Rogers
6-Liu
7- Kallinderis
8- Yuan
9- Roe
10- Chorin
11- Drikakis
12- Zhao
13 - Characteristic Based
14- Siong

دوبعدی کاملاً بالادست بدون فرض ساده کننده یک بعدی بودن جریان، برای گسسته سازی معادلات تراکم ناپذیر تصحیح شده با روش تراکم پذیری مصنوعی ارائه شده است.

۲- ساختار مشخصه‌های دو بعدی برای جریان تراکم‌ناپذیر

در این قسمت برای اولین بار، ساختار مشخصه‌های دوبعدی معادلات جریان‌های تراکم ناپذیر تصحیح شده توسط تراکم پذیری مصنوعی از سوی نویسندگان ارائه شده است. به منظور استخراج روابط مشخصه‌های جریان تراکم ناپذیر لزج، ابتدا معادلات اویلر متناظر آنها در نظر گرفته می‌شود [۱۱]. معادلات اویلر تصحیح شده با روش تراکم پذیری مصنوعی در حالت دوبعدی و بی بعد عبارتند از:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial t} + \beta\dfrac{\partial u}{\partial x} + \beta\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (۱)$$

برای استخراج روابط مشخصه‌ای، رویه مشخصه فرضی با معادله $f(x,y,t)=0$ در نظر گرفته می‌شود. با استفاده از روابط سینماتیکی، به منظور ارتباط بین مشتقات جزئی و مشتق کامل پارامترها در روی رویه مورد نظر [۲۲]، معادلات (۱) به شکل زیر تبدیل می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} f_t/\beta & f_x & f_y \\ f_x & \psi & 0 \\ f_y & 0 & \psi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dp \\ du \\ dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (۲)$$

در روابط بالا، پانویس‌ها مربوط به مشتقات جزئی هستند و ψ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\psi = f_t + uf_x + vf_y . \quad (۳)$$

شرط سازگاری دستگاه (۱) با صفر قراردادن دترمینان ضرایب در رابطه (۲)، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\psi = 0, \quad \psi = \beta\left(f_x^2 + f_y^2\right)/f_t . \quad (۴)$$

مشابه با معادلات تراکم پذیر اویلر، از نمادگذاری $\hat{V}=(u,v,1)$ برای بردار سرعت مجازی[۱] استفاده می‌شود و بردار عمود بر سطح مشخصه به صورت $\hat{n}=(\cos\varphi,\sin\varphi,n_t)$ در نظر گرفته می‌شود [۲۳]. با نوشتن معادلات (۴) برحسب بردارهای $\hat{V}, \hat{n}$، دو دسته از رویه‌های مشخص عبارتند از:

$$\begin{cases} \hat{V}.\hat{n} = 0 \\ \hat{V}.\hat{n} = \beta/n_t \end{cases} . \quad (۵)$$

در روابط (۵)، n_t مؤلفه در جهت t بردار عمود بر سطح مشخصه است که برابر با $f_t/\sqrt{f_x^2+f_y^2}$ می باشد. با استفاده از عملیات ریاضی می‌توان نشان داد که n_t برابر با دو مقدار زیر است:

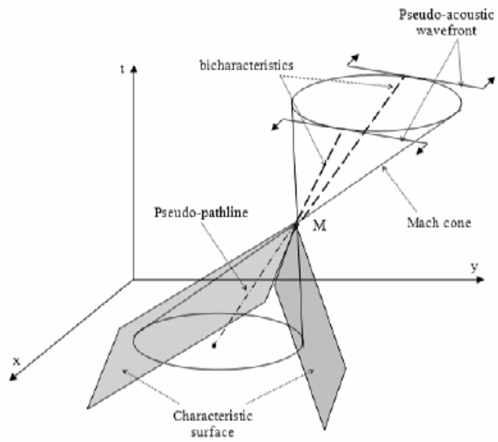
$$n_t = 0.5*\left\{-(u\cos\varphi + v\sin\varphi) \pm\sqrt{(u\cos\varphi + v\sin\varphi)^2 + 4\beta}\right\} = n_1, n_2 . \quad (۶)$$

در واقع مسیرهای مشخصه متناظر به رابطه اول (۵) نشان دهندهٔ خطوط جریان مجازی سیال[۲] می‌باشند و رابطه دوم (۵) متناظر با موج‌های اکوستیک مجازی[۳] منتشر شده در میدان جریان سیال تراکم ناپذیر هستند. با استفاده از روابط (۵) و کمی عمیات ریاضی می‌توان نشان داد که معادلات مسیرهای مشخصه متناظر به رویه‌های اکوستیک مجازی عبارتند از:

$$\begin{cases} dx/dt = u - \beta\cos\varphi/n_t , \\ dy/dt = v - \beta\sin\varphi/n_t . \end{cases} \quad (۷)$$

با توجه به روابط (۶) می‌توان دریافت که مشابه با معادلات اویلر تراکم پذیر، در این مورد نیز سطوح مشحخه دوگانه به صورت رویه‌های ماخ در فضا- زمان متناظر به جریان سیال انتشار می‌یابند. صفحات مماس بر سطوح مشخصه تشکیل دو کنج ماخ را می‌دهند که در طرفین نقطه مورد نظر گسترش یافته و محدوده اثر و محدوده تأثیر۴ آن نقطه را تشکیل می‌دهند (شکل **۱**).

1- pseudo-velocity vector
2 -Pseudo-pathline
3 -Pseudo-acoustic Waves
4- Domain of Influence and Dependence



شکل (۱): ساختار مشخصه‌های معادلات جریان تراکم ناپذیر تصحیح شده با تراکم پذیری مصنوعی.

در روابط (۷)، φ زاویه موج است، همان طورکه در شکل **۱** دیده می‌شود، متناظر به هر زاویه $0 \le \varphi \le 2\pi$ دو مسیر مشخصه در روی کنج ماخ وجود دارد که جفت مسیر مشخصه[1] نامیده می‌شوند. از روابط به دست آمده نتیجه می‌شود که برخلاف معادلات تراکم پذیر اویلر، در این حالت سطح مقطع کنج ماخ با صفحه xy یک بیضی با محورهایی موازی با محورهای مختصات است که به نام بیضی ماخ نامیده می‌شود. . روابط سازگاری دستگاه معادلات (۲) با قرار دادن مقادیر به دست آمده برای ψ از روابط (۴) به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} \dfrac{\beta}{n_t} du + \cos\varphi \, dp = 0, \\ \dfrac{\beta}{n_t} dv + \sin\varphi \, dp = 0. \end{cases} \qquad (۸)$$

روابط (۸) به ازای هر دو مقدار $n_t = n_1, n_2$ برقرار هستند و نشان دهندهٔ روابط سازگاری حاکم در روی مسیرهای مشخصه می‌باشند.

۳- معادلات حاکم

معادلات ناویر- استوکس دوبعدی برای جریان تراکم ناپذیر نیوتونی تصحیح شده با روش تراکم پذیری مصنوعی به صورت زیر است:

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial y}, \qquad (۹)$$

که در آن،

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial y},$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \end{bmatrix}, \ \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \beta u \\ u^2 + p \\ uv \end{bmatrix}, \ \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \beta v \\ uv \\ v^2 + p \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\mathrm{Re}} \begin{bmatrix} 0 \\ \partial u/\partial x \\ \partial v/\partial x \end{bmatrix}, \ \mathbf{S} = \frac{1}{\mathrm{Re}} \begin{bmatrix} 0 \\ \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial y \end{bmatrix}.$$

در روابط بالا، $\mathbf{W}$ بردار متغیرهای اولیه جریان و $\mathbf{F}, \mathbf{G}$ و $\mathbf{R}, \mathbf{S}$ به ترتیب بردارهای شار جابه‌جایی و لزج می‌باشند. β پارامتر تراکم پذیری مصنوعی و Re نشانگر عدد رینولدز است. معادلات (۹) به شکل بی‌بعد نوشته شده‌اند که بی‌بعد سازی توسط پارامترهای زیر انجام شده است:

$$(x, y) = \left(x^*/l^*, y^*/l^*\right), \ t = \frac{t^*}{l^*/U_{ref}},$$
$$(u, v) = \left(u^*/U_{ref}, v^*/U_{ref}\right), \ p = \frac{p^* - p_{ref}}{\rho_{ref} U_{ref}^2}. \qquad (۱۰)$$

بالانویس * نشانگر پارامترهای با بعد و پانویس ref نشانگر مقادیر مرجع است. معادلات (۹) در شکل حجم محدود گسسته شده و با استفاده از قضیه انتگرال گرین[2] به صورت زیر نوشته می شوند:

$$A_{ij} \frac{\partial \mathbf{W}_{ij}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{4} \left(\mathbf{F}\Delta y - \mathbf{G}\Delta x\right)_k = \sum_{k=1}^{4} \left(\mathbf{R}\Delta y - \mathbf{S}\Delta x\right)_k, \qquad (۱۱)$$

که در آن، A_{ij} نشانگر مساحت سلول محاسباتی است.

۴- طرح محاسباتی

از روابط مشخصه‌های به دست آمده در بخش (۲) می‌توان برای محاسبه بردارهای شار در مرز مشترک بین دو سلول در روش حجم محدود استفاده کرد. به منظور ایجاد یک

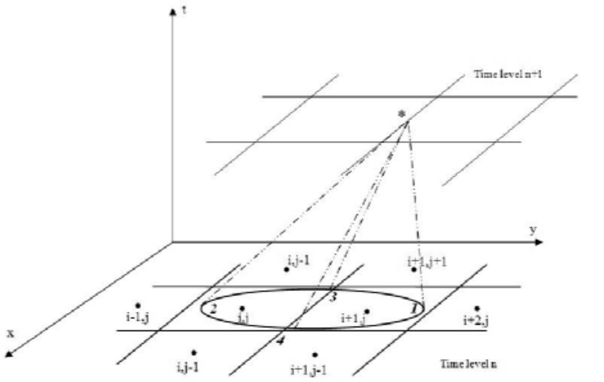
1 - Bicharacteristics

2- Green

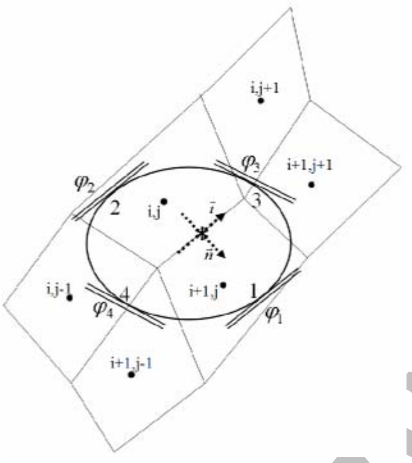
طرح محاسباتی بالادست چندبعدی براساس مشخصه‌های معادلات تراکم پذیری مصنوعی، می‌توان مسیرهای مشخصه مختلف و روابط سازگاری متناظر به آنها را برای محاسبه بردارهای شار مرز مشترک به کار برد. در این مقاله، یک روش جدید بالادست کاملاً دوبعدی بر پایه مشخصه‌ها برای گسسته سازی معادلات تراکم ناپذیر ناویر-استوکس تصحیح شده با روش تراکم پذیری مصنوعی ارائه شده است. رابطه سازگاری (۸) برای محاسبه بردارهای شار جابه‌جایی در مرز مشترک بین دو سلول مورد استفاده قرار گرفته‌اند در حالی که بردارهای شار لزج با طرح معمولی مرکزی گسسته سازی شده‌اند.

۴-۱- بردارهای شار جابه‌جایی

به منظور محاسبه بردارهای شار جابه‌جایی در روی مرز مشترک بین دو سلول از مقادیر زمان قبل، چهار موج مجازی اکوستیک با مسیرهای تصویر شده موازی و عمود بر مرز مشترک دو سلول انتخاب شده‌اند. این انتخاب اختیاری است و می‌تواند شامل انتخاب تعداد موج‌های متفاوت و زوایای موج مختلف نیز باشد که در واقع مشابه با مدل‌های موج مختلف ارائه شده برای جریان‌های تراکم پذیر می‌باشد. همان طورکه در شکل **۲** نشان داده شده است، سطح مقطع کنج ماخ متناظر با نقطه مورد نظر در روی مرز مشترک دو سلول با صفحه xy، نشان دهنده محدوده فیزیکی انتشار اطلاعات از زمان قبل است که نقطه مذکور را در زمان حاضر تحت تأثیر قرار می‌دهد. همانطورکه گفته شد، در این تحقیق، به منظور در نظر گرفتن فیزیک واقعی چند بعدی جریان، چهار موج اکوستیک مجازی متناظر به شبکه انتخاب شده و معادلات (۸) در روی آنها گسسته سازی شده‌اند شکل **۳**.



شکل (۲): سطح مقطع کنج ماخ با صفحه xy در زمان قبل و طرح محاسباتی برای تخمین جملات جابه‌جایی.



شکل (۳): طرح محاسباتی MCB برای محاسبه جملات جابه‌جایی در مرز مشترک دو سلول.

به عنوان مثال برای محاسبه بردارهای شار جابه‌جایی در نقطه * در روی مرز مشترک دو سلول در شکل **۳**، دو موج $\varphi_3,\ \varphi_4$ و دو موج $\varphi_1,\ \varphi_2$ متناظر به جهت n متناظر به جهت t در نظر گرفته می‌شود. چهار رابطه سازگاری متناظر به موج‌های $\varphi_1,\ \varphi_2$ عبارتند از:

$$\begin{cases} \dfrac{\beta}{n_{t1}} du + \cos\varphi_1\, dp = 0, & \varphi_1 \text{ wave, x-direction },\\ \dfrac{\beta}{n_{t1}} dv + \sin\varphi_1\, dp = 0, & \varphi_1 \text{ wave, y-direction},\\ \dfrac{\beta}{n_{t2}} du + \cos\varphi_2\, dp = 0, & \varphi_2 \text{ wave, x-direction},\\ \dfrac{\beta}{n_{t2}} dv + \sin\varphi_2\, dp = 0, & \varphi_2 \text{ wave, y-direction}, \end{cases} \qquad (۱۲)$$

که در آن، n_{t1} و n_{t2} از جاگذاری زوایای موج φ_1 و φ_2 در معادله (۶) به دست می‌آیند. مشابه با روابط (۱۲) می‌توان برای موج‌های φ_3 و φ_4 نیز چهار رابطه سازگاری متناظر نوشت. با گسسته سازی معادلات (۱۲) در طول خطوط مشخصه متناظر داریم:

$$\begin{cases} p^* - p_1 + A\left(u^* - u_1\right) = 0, \\ p^* - p_1 + B\left(v^* - v_1\right) = 0, \\ p^* - p_2 + C\left(u^* - u_2\right) = 0, \\ p^* - p_2 + D\left(v^* - v_2\right) = 0, \end{cases} \tag{۱۳}$$

که در آن، ضرایب A, B, C, D از معادله (۱۲) به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} A = 2\beta/\{\cos\varphi_1[-u_1\cos\varphi_1 - v_1\sin\varphi_1 \\ \quad + \sqrt{(u_1\cos\varphi_1 + v_1\sin\varphi_1)^2 + 4\beta}]\}, \\ B = 2\beta/\{\sin\varphi_1[-u_1\cos\varphi_1 - v_1\sin\varphi_1 \\ \quad + \sqrt{(u_1\cos\varphi_1 + v_1\sin\varphi_1)^2 + 4\beta}]\}, \\ C = 2\beta/\{\cos\varphi_2[-u_2\cos\varphi_2 - v_2\sin\varphi_2 \\ \quad + \sqrt{(u_2\cos\varphi_2 + v_2\sin\varphi_2)^2 + 4\beta}]\}, \\ D = 2\beta/\{\sin\varphi_2[-u_2\cos\varphi_2 - v_2\sin\varphi_2 \\ \quad + \sqrt{(u_2\cos\varphi_2 + v_2\sin\varphi_2)^2 + 4\beta}]\}. \end{cases} \tag{۱۴}$$

روابط بالا در واقع روابط سازگاری موجود برای موج‌های φ_1 و φ_2 هستند. قابل ذکر است که چهار معادله مشابه نیز برای موج های φ_3 و φ_4 داریم. در روابط (۱۳) مقادیر p^*, u^* و v^* نشانگر متغیرهای اولیه جریان روی مرز مشترک بین دو سلول هستند.

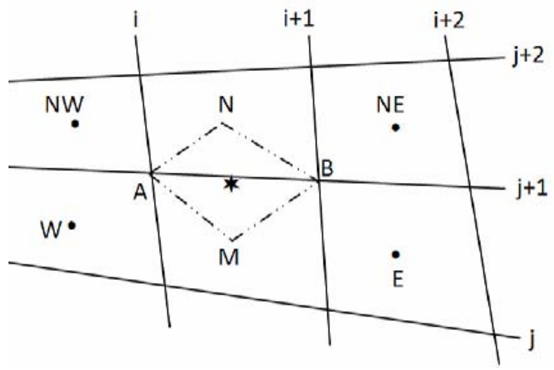
روش محاسبه مقادیر پارامترهای جریان در روی مرز بین دو سلول در اینجا به این صورت است که ابتدا مقادیر u^* و p^* از روابط اول و سوم و v^* و p^* از روابط دوم و چهارم معادلات (۱۳) به دست می‌آید. مقدار p^* برابر با میانگین دو مقدار به دست آمده در نظر گرفته می‌شود. با توجه به استفاده از معادلات سازگاری موج‌های φ_1 و φ_2، مقادیر u^* و v^* به دست آمده از این طریق به عنوان مؤلفه‌های سرعت در جهت n در نظر گرفته می‌شوند (شکل **۳**). با انجام عملیات مشابه برای روابط سازگاری متناظر به φ_3 و φ_4، مؤلفه های سرعت در جهت t به دست می‌آید. نهایتاً بردار سرعت در روی مرز مشترک دو سلول از برآیند دو بردار به دست آمده مشخص شده و فشار روی مرز مشترک از میانگین‌گیری دو مقدار به دست آمده برای p^* مشخص می‌شود. به این ترتیب مقادیر ستاره دار از ۸ رابطه سازگاری متناظر به موج‌های $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ و از مقادیر متغیرهای سیال در نقاط ۴-۱ از زمان قبل به دست می‌آیند که برای محاسبه بردارهای شار جابه‌جایی در مرز مشترک بین دو سلول مورد استفاده قرار می‌گیرند. با استفاده از این روش، یک طرح محاسباتی کاملاً بالادست دوبعدی با تکیه بر مشخصه‌های دوبعدی معادلات تراکم ناپذیر ارائه شده است. برای طرح MCB مرتبه اول، مقادیر متغیرهای جریان در نقاط ۱، ۲ برابر با مقادیر سلول‌های مجاور در نظر گرفته شده و برای نقاط ۳، ۴ از دو سلول شامل وجه مورد نظر درونیابی شده است. به منظور بهبود طرح MCB به دقت مرتبه دوم، نقطه ۱ از سلول‌های (i+1,j) و (i+2,j) و نقطه ۲ از سلول‌های (i,j) و (i-1,j) درونیابی شده است. همچنین مقادیر جریان در نقطه ۳ از مقادیر سلول های (i,j+1) و (i+1,j+1) و در نقطه ۴ از مقادیر سلول های (i,j-1) و (i+1,j-1) درونیابی شده است.

۲-۴- بردارهای شار لزج

در این تحقیق، گسسته‌سازی معمولی مرکزی برای تخمین جملات لزج در مرز مشترک دو سلول مورد استفاده قرار گرفته است. به عنوان مثال، مشتق مرتبه اول در روی وجه AB در شکل **۴** با انتگرال‌گیری روی یک شبکه ثانویه به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{AB} &= \frac{1}{S'}\iint_{S'}\frac{\partial\phi}{\partial x}\,dS = \frac{1}{S'}\oint_{\partial S'}\phi\,dy = \frac{1}{S'}\sum_{k=1}^{4}\phi_k\Delta y_k \\ &= \frac{1}{S'}\left[0.5(\phi_N+\phi_A)\Delta y_{AN} + 0.5(\phi_N+\phi_B)\Delta y_{NB}\right. \\ &\quad \left. + 0.5(\phi_B+\phi_M)\Delta y_{BM} + 0.5(\phi_M+\phi_A)\Delta y_{MA}\right], \end{aligned} \tag{۱۵}$$

که در آن، ϕ یکی از پارامترهای جریان است و مقادیر پارامترهای در گره‌های مجهول از میانگین نقاط همسایه محاسبه می شوند.



شکل (۴): شبکه ثانویه برای محاسبه جملات لزج.

۴-۳- انتگرال‌گیری زمانی

انتگرال‌گیری زمانی از معادلات گسسته شده توسط روش صریح رانگ- کوتا مرتبه چهار انجام شده است. جزئیات روابط گسسته شده با این روش در مرجع [۱۱] آمده است. بیشینه مقدار گام زمانی Δt از شرط پایداری که روی عدد کورانت CFL اعمال می‌گردد، محاسبه می‌شود. عدد CFL به صورت زیر تعریف شده است:

$$\text{CFL}=\left[\sqrt{u^2+v^2}+\sqrt{u^2+v^2+\beta}\right]\frac{\Delta t}{\Delta l}, \quad (۱۶)$$

که در آن، Δl برابر با کمترین فاصله بین مرکز سلول مورد نظر تا مراکز سلول‌های مجاور است. از نتایج عددی این مقاله معلوم می‌شود که استفاده از طرح محاسباتی پیشنهادی MCB مقدار CFL مجاز را تا حد چشمگیری افزایش داده و باعث افزایش سرعت همگرایی به حالت پایا می‌شود.

۵- نتایج و بحث

به منظور مقایسهٔ دقت و نرخ همگرایی روش جدید ارائه شده با روش‌های معمول، دو جریان شناخته شده داخلی و خارجی مورد بررسی قرار گرفته است که عبارتند از جریان داخل حفره مربعی و جریان صلیبی حول استوانه دایروی. در جریان داخل حفره محدوده وسیعی از اعداد رینولدز از رینولدزهای پایین تا خیلی بالا مورد بررسی قرار گرفته و در مورد جریان حول استوانه علاوه بر رژیم پایا، جریان در رژیم ناپایا نیز مورد بررسی قرار گرفته است.

۵-۱- جریان تراکم ناپذیر لزج داخل یک حفره مربعی شکل

جریان تراکم ناپذیر و پایای لزج داخل حفره مربعی شکل از آزمون‌های موردی معروف برای سنجش اعتبار و توانایی روش‌های عددی می باشد. جریان توسط حرکت صفحه بالایی به وجود می‌آید. شرایط مرزی برای سرعت روی دیواره‌ها، شرط عدم لغزش بوده و برای فشار از معادله مومنتوم در جهت عمود بر دیواره استفاده شده است. به منظور مقایسه توانایی روش ارائه شده MCB از نظر دقت جواب‌ها و نرخ همگرایی به حالت پایا با روش‌های موجود، ابتدا حل جریان داخل حفره در عدد رینولدز ۱,۰۰۰ (بر اساس سرعت دیواره متحرک و طول ضلع حفره) و در شبکه ۴۰×۴۰ در نظر گرفته شده است. در همه نتایج ارائه شده، روش‌های مورد استفاده در تمامی موارد از جمله گسسته‌سازی زمانی، شرایط مرزی و گسسته‌سازی جملات لزج کاملاً یکسان بوده و تنها در نحوه محاسبه بردارهای شار جابه‌جایی تفاوت دارند. نتایج به دست آمده برای مؤلفه سرعت u در روی خط عمودی گذرا از مرکز حفره و مؤلفه v روی خط افقی گذرا از مرکز حفره با استفاده از طرح‌های رایج CB و روش جدید MCB در شکل‌های **۶-۵** نشان داده شده است. هر دو روش با دقت مرتبه اول مورد استفاده قرار گرفته‌اند و نتایج حاصل از آنها در مقایسه با نتایج معروف ژیا و دیگران [۲۴].که در ادبیات فن به عنوان حل استاندارد برای جریان داخل حفره شناخته شده است، نشان داده شده است. همان طورکه در شکل‌های **۶-۵** دیده می‌شود نتایج به دست آمده با استفاده از طرح محاسباتی MCB مرتبه اول به مراتب دقیق‌تر از روش مرسوم CB با دقت مرتبه اول در روی شبکه یکسان ۴۰×۴۰ است. نتایج مشابه برای طرح‌های MCB و CB مرتبه دوم به همراه نتایج حاصل از روش میانگین‌گیری مرکزی با اضافه کردن لزجت مصنوعی در شکل‌های **۹-۷** ارائه شده است. نمای بزرگ شده بیشینه و کمینه پروفیل های u و v نیز به منظور مقایسه دقیق‌تر نشان داده شده است. همان طور که در شکل‌های **۹-۷** دیده می‌شود، طرح پیشنهادی بالادست دو بعدی بر پایه مشخصه‌ها (MCB) نتایج دقیق‌تری را در شکل مرتبه دوم خود در مقایسه با طرح مرسوم CB مرتبه دوم ارائه می‌دهد. نکته جالب توجه مقایسه نتایج حاصل از

روش MCB مرتبه دوم با طرح میانگین‌گیری مرکزی می‌باشد. با وجود این که روش مرکزی در مورد شبکه حاضر دقت کاملاً مرتبه دوم را ارائه می‌دهد (به دلیل کارتزین بودن شبکه)، نتایج حاصل از طرح MCB مرتبه دوم از نتایج روش مرکزی در شبکه یکسان دقیق‌تر است. در مورد سرعت همگرایی طرح پیشنهادی به حالت پایا، نتایج به دست آمده نشانگر آن است که روش MCB سریع‌تر از روش‌های مرسوم CB و مرکزی به جواب‌های نهایی پایا همگرا می‌شود. با توجه به کند بودن نرخ همگرایی طرح‌های رایج CB که قبلاً در مراجع مختلف مانند [۲۰- ۱۹] به آن اشاره شده است، نرخ همگرایی بسیار سریع روش پیشنهادی، مزیت چشم‌گیر طرح MCB را نسبت به روش بر پایه مشخصه‌های مرسوم یک بعدی نشان می دهد. نمونه ای از تاریخچه همگرایی سه طرح محاسباتی مورد بحث در شکل **۱۰** برای Re=۱,۰۰۰ در شبکه ۴۰×۴۰ و Re=۱,۰۰۰ در شبکه ۸۰×۸۰ نشان داده شده است. نورم خطا به صورت زیر تعریف شده است:

$$\text{ENORM} = \sqrt{\sum_{i=1}^{IM}\sum_{j=1}^{JM}\left(p_{i,j}^{n+1}-p_{i,j}^{n}\right)^2} \Big/ IM\times JM\,, \qquad (۱۷)$$

که در آن، IM و JM تعداد سلول ها در جهت های x و y هستند. با استفاده از روش MCB بیشینه عدد CFL مجاز در مورد Re=۱,۰۰۰ و شبکه ۴۰×۴۰ برابر با ۱/۹ است در حالی که در شرایط مشابه برای طرح های مرکزی و CB به ترتیب برابر با ۱/۷ و ۰/۹ می‌باشد. به ویژه همان طور که در ادبیات فن ذکر شده است، در آزمایش‌های عددی انجام شده نیز نرخ همگرایی کند طرح CB مشاهده می‌شود به طوری که برای کاهش جذر مجموع خطاهای $\partial p/\partial t$ به مقدار 1×10^{-3} با استفاده از طرح CB مرتبه دوم نیاز به ۱۱۹۶۵ تعداد تکرار است در حالیکه برای طرح‌های مرکزی و MCB این تعداد به ترتیب برابر با ۵,۹۳۸ و ۴,۸۳۰ می‌باشد. به منظور مقایسه دقیق‌تر دقت طرح‌های MCB و CB مرتبه دوم در محدوده وسیعی از اعداد رینولدز و شبکه، انحراف کلی[1] از نتایج استاندارد به صورت زیر تعریف شده است:

$$\text{DEV} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\phi-\phi^*}{\phi^*}\right|\,, \qquad (۱۸)$$

که در آن، N تعداد نقاط، ϕ^* داده‌های ژیا و دیگران [۲۴] و ϕ نتایج به دست آمده از روش‌های مورد استفاده در نقاط مشابه می‌باشد. جریان داخل حفره با استفاده از روش‌های MCB و CB مرتبه دوم در محدوده وسیعی از اعداد رینولدز و شبکه در مورد دقت، بیشینه عدد CFL مجاز و تعداد تکرارها مورد تحلیل قرار گرفته و نتایج در جدول **۱** ارائه شده است، معیار همگرایی در نظر گرفته شده کاهش جذر مجموع خطاهای $\partial p/\partial t$ به مقدار 1×10^{-4} بوده و در تمام حالت‌ها پارامتر تراکم پذیری مصنوعی مقدار ۱ در نظر گرفته شده است. همان طور که در جدول **۱** نشان داده شده است، روش جدید MCB نسبت به CB نتایج بهتری را در تمام زمینه‌ها ارائه می‌دهد. شکل **۱۱** نتایج به دست آمده برای کانتورهای تابع جریان در شبکه ۲۵۶×۲۵۶ را برای محدوده وسیعی از اعداد رینولدز نشان می‌دهد. منحنی‌های هم فشار و هم چرخش در شکل **۱۲** برای عدد رینولدز ۵,۰۰۰ با استفاده از روش MCB مرتبه دوم در مقایسه با نتایج ارائه شده توسط برونیو[2] و سد[3] [25] نشان داده شده است. با به کار بردن طرح محاسباتی جدید MCB که از روش بالادست ذاتی دوبعدی برای محاسبه بردارهای شار جابه‌جایی استفاده می‌کند، روش عددی حاصل بسیار پایدار بوده و نیاز به افزودن هیچ‌گونه لزجت مصنوعی به منظور پایدار ساختن حل نیست. شکل‌های **۱۴-۱۳** نتایج به دست آمده با استفاده از طرح MCB مرتبه دوم برای مؤلفه سرعت u در روی خط عمودی و مؤلفه سرعت v روی خط افقی گذرا از مرکز حفره را در شبکه ۲۵۶×۲۵۶ نشان می‌دهند. همان طورکه دیده می‌شود، نتایج به دست آمده با روش پیشنهادی توافق خوبی با نتایج مرجع قیا و دیگران[۲۴] دارد.

بوتلا[4] و پیرت[5] [۲۶] نتایج با دقت بالا برای مقادیر چرخش در روی خطوط افقی و عمودی گذرا از مرکز

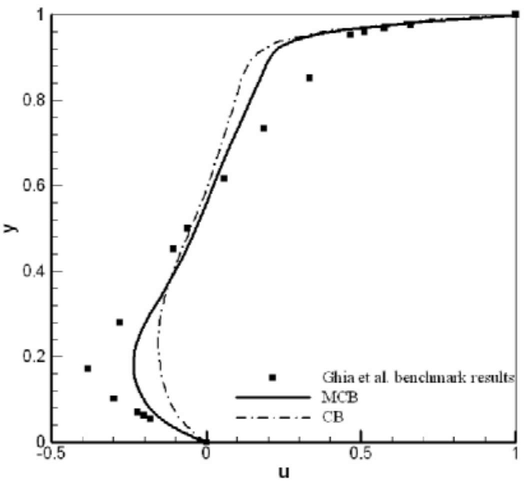
1- Total Deviation

2- Bruneau
3- Saad
4- Botella
5- Peyret

حفره را با استفاده از روش طیفی[1] برای عدد رینولدز ۱,۰۰۰ ارائه داده‌اند. نتایج آنها و نتایج حاصل از روش MCB مرتبه دوم در شکل **۱۵** نشان داده شده است. همان طورکه ملاحظه می‌شود، همخوانی نتایج عالی است.

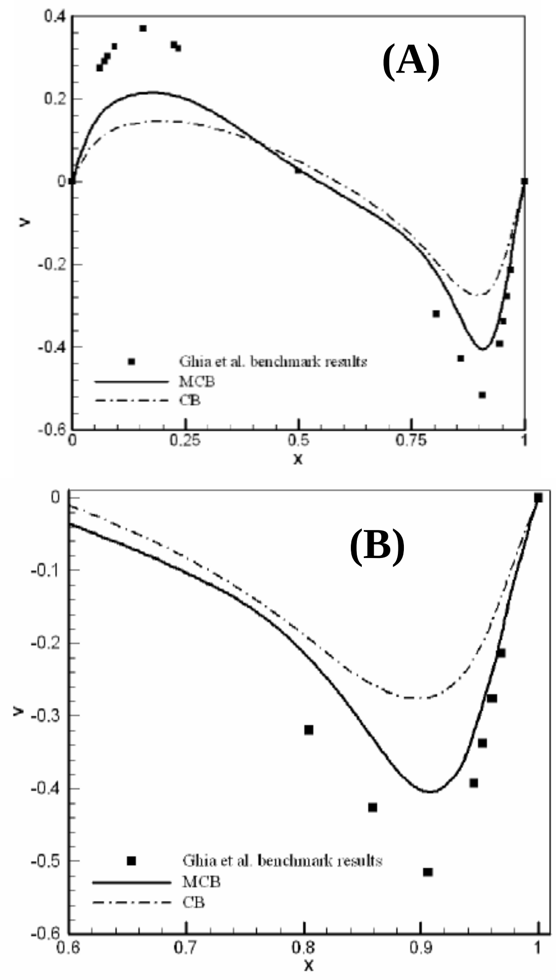
جدول (۱): مقایسه بین نتایج و نرخ همگرایی روش MCB و CB مرتبه دوم برای محدوده وسیعی از اعداد رینولدز و شبکه در جریان داخل حفره.

		Max. permissible CFL		Number of iterations		U-y total dev. (%)		V-x total dev. (%)	
		CB	MCB	CB	MCB	CB	MCB	CB	MCB
Re=400	20*20 grid	0.9	1.6	3125	985	39.34	10.07	22.23	15.92
	40*40 grid	0.8	1.6	12,327	2,534	12.93	5.32	10.45	3.68
Re=1000	20*20 grid	0.8	1.5	4,380	2,105	44.14	23.09	46.96	28.83
	40*40 grid	0.9	1.6	14,926	5,667	24.13	5.62	18.81	8.02
	60*60 grid	0.9	1.6	32,247	9,582	8.67	2.10	7.37	3.11
Re=5000	40*40 grid	0.8	1.6	Residuals stabilized at 2×10^{-3} after 14,800 iterations	23,186	32.01	20.60	49.44	35.80
	60*60 grid	0.9	1.6	50,401	45,732	20.38	10.90	22.95	15.60
	80*80 grid	0.9	1.7	Residuals stabilized at 1.4×10^{-4} after 100,000 iterations	70,321	14.14	8.30	11.40	9.08
Re=10,000	60*60 grid	0.8	1.5	92,724	87,364	28.84	14.92	39.69	28.11
	80*80 grid	0.8	1.6	155,208	135,718	16.05	11.12	19.81	13.46
	100*100 grid	0.9	1.5	195,206	166,136	9.44	8.85	8.56	7.74

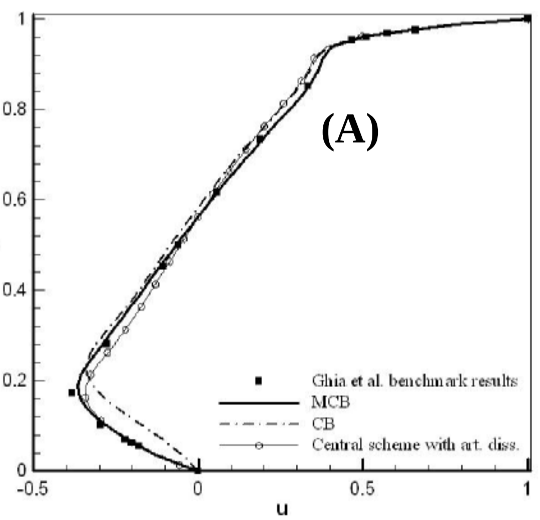


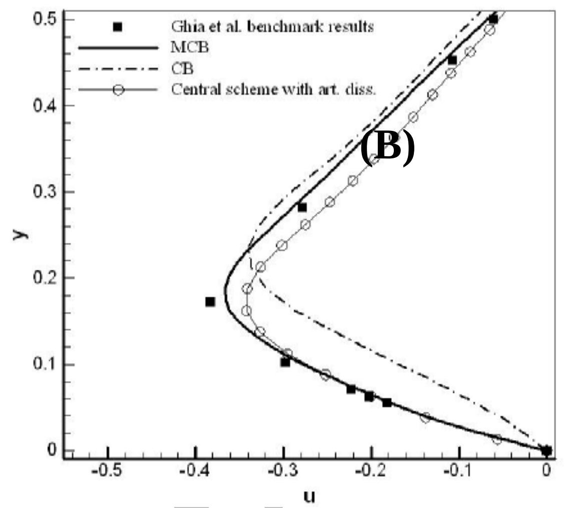
شکل (۵): مقایسه نتایج به دست آمده برای مؤلفه سرعت u در روی خط عمودی گذرا از مرکز حفـره بـا استـفاده از طـرح‌هـای CB و MCB مرتبـه اول در Re=۱,۰۰۰ و شبکه ۴۰×۴۰ .

1- Chebyshev

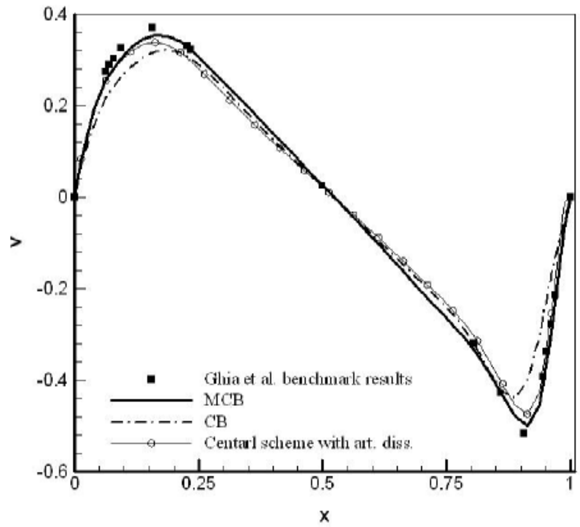


شکل (۶): A) مقایسه نتایج به دست آمـده بـرای مؤلفـه سـرعت v در روی خـط افقـی گـذرا از مرکـز حفـره از طـرح‌هـای CB و MCB مرتبـه اول در Re=۱,۰۰۰ و شبکه ۴۰×۴۰، B) بزرگنمایی نمودار (A) برای $x > 0.6$.

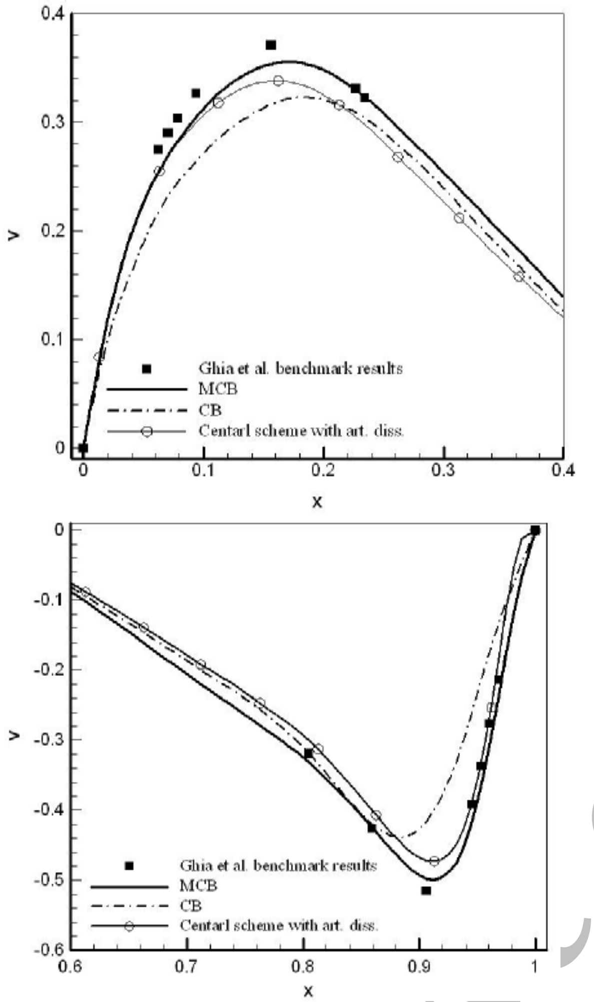




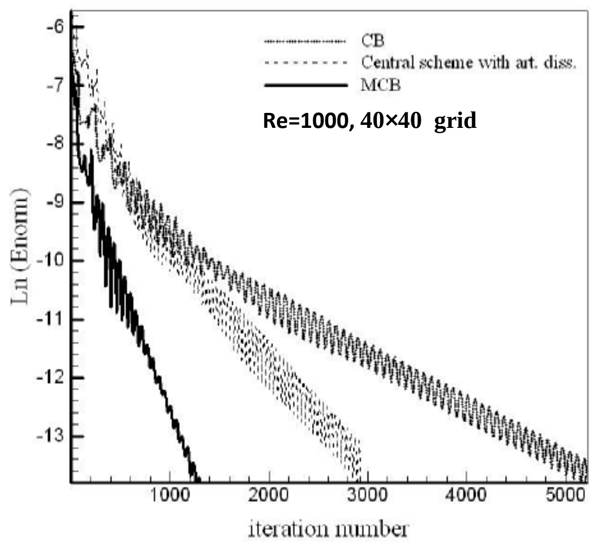
شکل (۷): A) مقایسه نتایج به دست آمـده بـرای مؤلفـه سرعت u در روی خـط عمـودی گـذرا از مرکـز حفـره بـا اسـتفاده از طـرح هـای CB و MCB مرتبـه دوم و طـرح میانگین‌گیری مرکـزی در Re=۱,۰۰۰ و شـبکه ۴۰×۴۰، B) بزرگنمایی نمودار (A) برای $x < 0$.

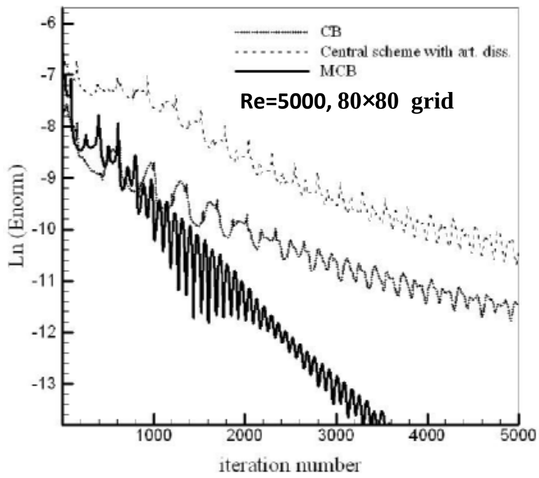


شکل (۸): مقایسه نتایج به دست آمده برای مؤلفه سرعت v در روی خط افقـی گـذرا از مرکـز حفـره بـا اسـتفاده از طرح‌های CB و MCB مرتبه دوم و طرح میـانگین‌گیـری مرکزی در Re=۱,۰۰۰ و شبکه ۴۰×۴۰ .

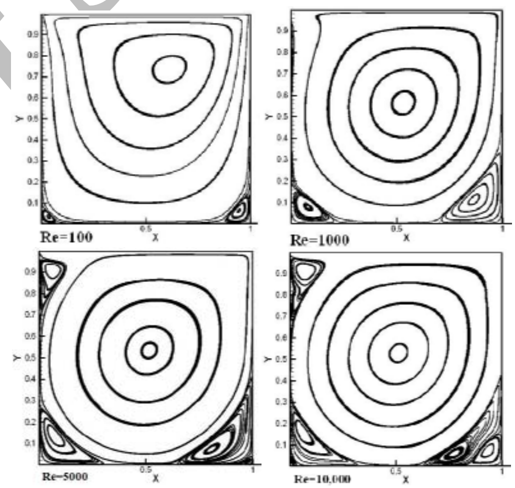


شکل (۹): نمای بزرگ شده بیشینه و کمینه نمودار شکل **۸** برای $0 < x < 0.4$ و $0.6 < x < 1$.

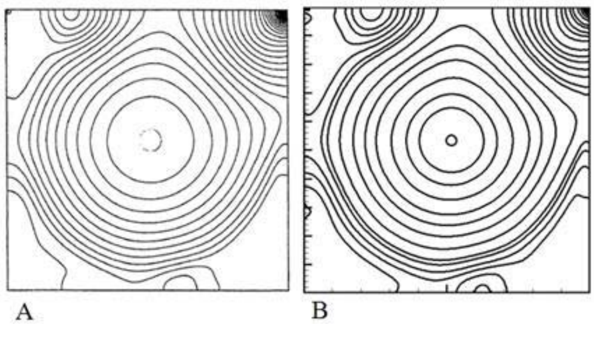


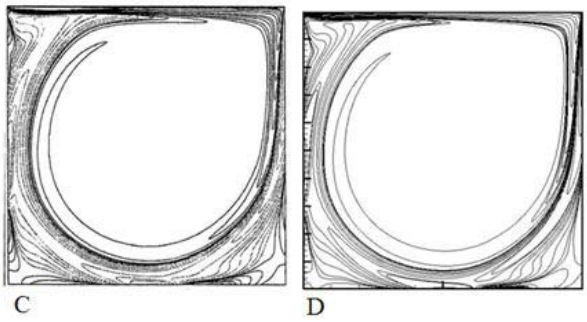


شکل (۱۰): مقایسه تاریخچه همگرایی روش‌های MCB، CB و میانگین گیری برای Re=1,000 روی شبکه ۴۰×۴۰ و Re=۵,۰۰۰ روی شبکه ۸۰×۸۰.

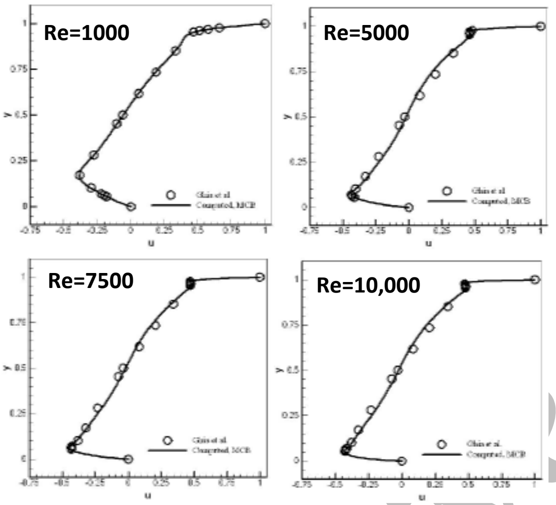


شکل (۱۱): نتایج روش MCB برای خطوط جریان داخل حفره در اعداد رینولدز مختلف و شبکه ۲۵۶×۲۵۶.

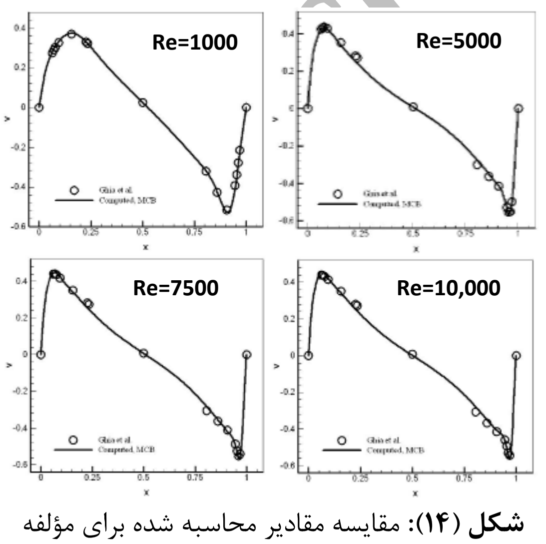




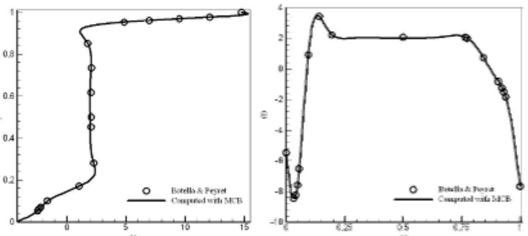
شکل (۱۲): منحنی های هم فشار و هم چرخش برای Re=۵,۰۰۰ در شبکه ۲۵۶×۲۵۶ ، (A,C روش مرجع [۲۵]، B,D) روش MCB مرتبه دوم.



شکل (۱۳): مقایسه مقادیر محاسبه شده برای مؤلفه سرعت u در روی خط عمودی گذرا از مرکز حفره با نتایج مرجع[۲۴] در اعداد رینولدز مختلف.



شکل (۱۴): مقایسه مقادیر محاسبه شده برای مؤلفه سرعت v در روی خط افقی گذرا از مرکز حفره با نتایج مرجع [۲۴] در اعداد رینولدز مختلف.



شکل (۱۵): نتایج به دست آمده برای چرخش در روی خطوط افقی و عمودی گذرا از مرکز هندسی حفره در Re=1,000 با استفاده از طرح MCB مرتبه دوم در مقایسه با مرجع [۲۶].

۵-۲- جریان تراکم ناپذیر حول استوانه دایروی

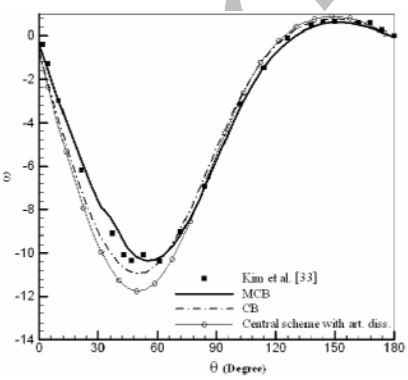
به منظور ارزیابی توانایی روش MCB در شبکه‌های غیرکارتزین، جریان تراکم ناپذیر پایا و ناپایا حول استوانه دایروی در شبکه O شکل با ریز کردن شبکه نزدیک دیواره جامد مورد تحلیل قرار گرفته است. عدد رینولدز بر اساس قطر استوانه و سرعت جریان آزاد تعریف شده است. در مرزهای ورودی، مقدار فشار از داخل محدوده حل درونیابی شده و مؤلفه‌های سرعت برابر با مقادیر جریان آزاد در نظر گرفته شده است در حالیکه در مرزهای خروجی مؤلفه‌های سرعت مقادیر ثابت در نظر گرفته شده و فشار درونیابی شده است.

۵-۲-۱- جریان پایا حول استوانه دایروی

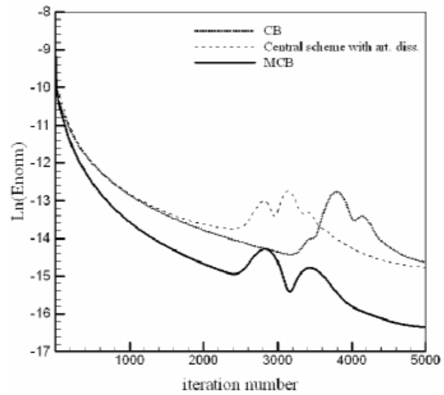
در این قسمت جریان حول استوانه در رژیم پایا که در آن $Re \le 40$ بررسی می شود. در شکل **۱۶** نتایج حاصل از روش های مرتبه دوم MCB و CB و روش میانگین گیری شارها برای چرخش (vorticity) روی سطح استوانه در Re=۴۰ و شبکه ۸۰×۸۰ ارائه شده است. روش MCB دراین مورد نیز نتایج بهتری را نسبت به روش‌های دیگر مورد بحث ارائه می‌دهد. نرخ همگرایی سه طرح محاسباتی MCB, CB و میانگین‌گیری در اعداد رینولدز پایین تر از ۴۰ مورد بررسی قرار گرفته که در تمامی موارد طرح MCB برتری قابل ملاحظه‌ای را نشان می‌دهد. نمونه‌ای از نرخ همگرایی سه روش مورد بحث در شکل **۱۷** برای Re=40 و شبکه ۸۰×۸۰ ارائه شده است. شکل **۱۸** نتایج به دست آمده برای منحنی‌های هم فشار و خطوط جریان با استفاده از روش MCB را در Re=20, 40 نشان می‌دهد. در جدول **۲** نتایج به دست آمده برای ضریب پسا در اعداد رینولدز پایین با استفاده از روش MCB در مقایسه با سایر داده‌های موجود در ادبیات فن آمده است. همچنین مقایسه بین نتایج به دست آمده برای ضریب فشار روی سطح استوانه در Re=40 با استفاده از روش MCB و نتایج چوی و دیگران [۲۷] در شکل **۱۹** نشان داده شده است.

جدول (۲): مقایسه نتایج به دست آمده برای ضریب پسای متوسط در جریان حول استوانه در رژیم پایا.

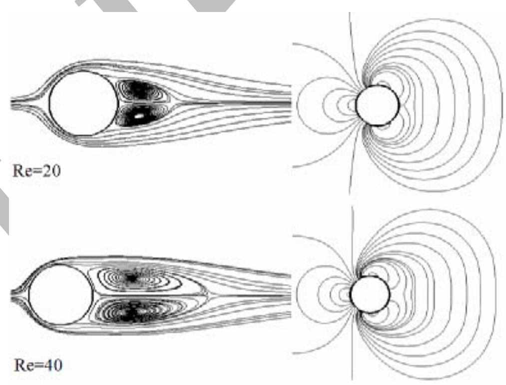
Re	Reference	Drag coefficient
10	Dennis and Chang [28]	2.85
	Takami and Keller [29]	2.80
	Tuann and Olson [30]	3.18
	Ding et al. [31]	3.07
	Nithiarasu et al. [32]	2.85
	Present (MCB result)	2.98
20	Dennis and Chang [28]	2.05
	Takami and Keller [29]	2.01
	Tuann and Olson [30]	2.25
	Ding et al. [31]	2.18
	Nithiarasu et al. [32]	2.06
	Present (MCB result)	2.03
40	Dennis and Chang [28]	1.522
	Takami and Keller [29]	1.536
	Tuann and Olson [30]	1.675
	Ding et al. [31]	1.713
	Nithiarasu et al. [32]	1.564
	Present (MCB result)	1.55



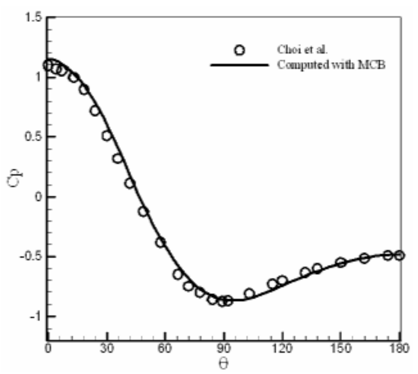
شکل (۱۶): مقایسه نتایج حاصل از طرح های محاسباتی مختلف برای چرخش روی دیواره استوانه، Re=40 و شبکه ۸۰×۸۰.



شکل (۱۷): مقایسه تاریخچه همگرایی روشهای MCB، CB و میانگین گیری برای جریان حول استوانه در Re=40 و شبکه ۸۰×۸۰.



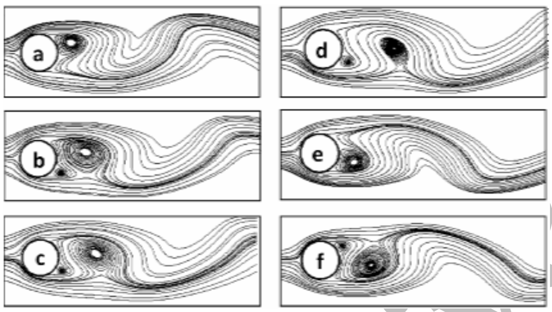
شکل (۱۸): نتایج به دست آمده با استفاده از روش MCB مرتبه دوم برای خطوط جریان و منحنی های هم فشار حول استوانه دایروی، Re = 20 و Re=40.



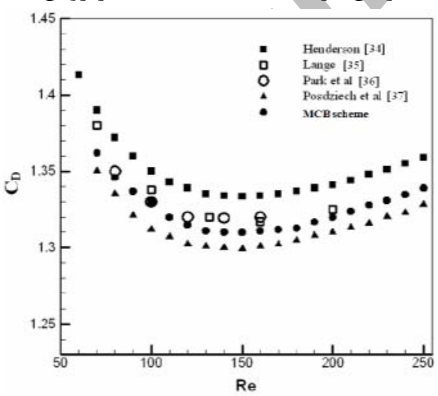
شکل (۱۹): مقایسه ضریب فشار متوسط به دست آمده با روش MCB روی دیواره استوانه در Re = 40 و نتایج [۲۷].

۵-۲-۲- جریان ناپایا حول استوانه دایروی

روش MCB برای تحلیل جریان ناپایا حول استوانه برای اعداد رینولدز بالاتر از ۴۰ نیز مورد استفاده قرار گرفته و نتایج به دست آمده در این قسمت ارائه شده است. در شکل **۲۰** تغییرات خطوط جریان برحسب زمان در Re=۱۰۰ نشان داده شده است. همان طورکه دیده می‌شود روش پیشنهادی قادر به تسخیر پدیده جداشدن گردابه‌ها[1] از پشت استوانه می‌باشد. در شکل **۲۱** تغییرات ضریب درگ متوسط برحسب عدد رینولدز در مقایسه با سایر نتایج موجود در ادبیات فن ارائه شده است. شکل **۲۲** منحنی‌های هم فشار و مؤلفه‌های سرعت لحظه‌ای را برای Re=100 نشان می‌دهد. همان طور که از نتایج ارائه شده دیده می‌شود، روش پیشنهادی MCB به خوبی قادر به پیش بینی میدان جریان خارجی ناپایا نیز می‌باشد.

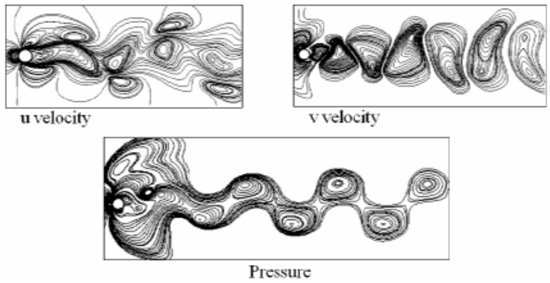


شکل (۲۰): نتایج به دست آمده برای خطوط جریان برحسب زمان در Re=100 با استفاده از روش MCB.



شکل (۲۱): مقایسه تغییرات ضریب درگ متوسط برحسب عدد رینولدز.

1- Vortex Shedding



شکل (۲۲): منحنی‌های هم فشار و مؤلفه های سرعت لحظه ای لحظه ای در Re=100.

۶- نتیجه گیری

در این مقاله یک روش جدید بالادست کاملاً دوبعدی برپایه مشخصه‌ها برای تحلیل جریان‌های تراکم ناپذیر لزج ارائه شده است. برای اولین بار ساختار مشخصه‌های دوبعدی معادلات تراکم‌پذیری مصنوعی استخراج شده است. با استفاده از روابط به دست آمده برای مشخصه‌های دوبعدی معادلات، یک طرح بالادست کاملاً دوبعدی به نام MCB ارائه شده که بر اساس پدیده انتشار امواج مجازی در محیط سیال تراکم ناپذیر است. با استفاده از روش حجم محدود و طرح محاسباتی MCB یک برنامه کامپیوتری با روش حجم محدود صریح برای تحلیل جریان تراکم ناپذیر داخل حفره در اعداد رینولدز مختلف و جریان حول استوانه دایروی در رژیم‌های پایا و ناپایا نوشته شده است. در مورد جریان داخل حفره، دقت جواب‌های به دست آمده از روش MCB در محدوده وسیعی از اعداد رینولدز و شبکه با روش CB مقایسه شده و در تمامی موارد روش MCB نتایج دقیق‌تری را ارائه می‌دهد. برای جریان خارجی حول استوانه، در هر دو مورد رژیم پایا و ناپایا، نتایج به دست آمده از روش MCB با داده‌های موجود در ادبیات فن مقایسه شده است و در تمامی موارد توافق خوبی بین آنها مشاهده می‌شود. یکی از برجسته‌ترین مزیت‌های روش MCB نسبت به روش رایج CB و همچنین روش میانگین‌گیری، نرخ همگرایی سریع آن و قابلیت استفاده از اعداد CFL بالاتر می‌باشد. همچنین روش MCB به دلیل استفاده از روابط مشخصه‌های چندبعدی، کاملاً پایدار بوده و نیازی به اضافه کردن هیچ گونه لزجت مصنوعی به منظور پایدار ساختن حل ندارد. نهایتاً می‌توان نتیجه‌گیری کرد که روش بالادست چندبعدی برپایه مشخصه‌ها که برای اولین بار در این مقاله برای جریان‌های تراکم ناپذیر ارائه شده است، روشی توانمند و انعطاف‌پذیر برای شبیه‌سازی جریان‌های تراکم ناپذیر لزج با دقت بالا و نرخ همگرایی سریع نسبت به روش‌های رایج برپایه مشخصه‌های یک بعدی می‌باشد.

مراجع

1. Chorin, A.J. ”A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems”, J. Comput. Phys., Vol. 2, No. 1, pp. 12– 26, 1967.
2. Kwak, D., Kiris, C., and Kim, C.S. “Computational Challenges of Viscous Incompressible Flows”, Comput. Fluids, Vol. 34, No. 3, pp. 283–299, 2005.
3. Farmer, J., Martinelli, L., and Jameson, A. "Fast Multigrid Method for Solving Incompressible Hydrodynamic Problems with Free Surface", AIAA J., Vol. 32, No. 1, pp. 1175-1182, 1994.
4. Rogers, S.E. and Kwak, D. "Steady and Unsteady Solutions of the Incompressible Navier-Stokes Equations", AIAA J., Vol. 29, No. 4, pp. 603-610, 1991.
5. Liu, C., Zheng, X., and Sung, C.H. "Preconditioned Multigrid Methods for Unsteady Incompressible Flows", J. Comput. Phys., Vol. 139, No. 1, pp. 35-57, 1998.
6. Kallinderis, Y. and Ahn, H.T. “Incompressible Navier–Stokes Method with General Hybrid Meshes”, J. Comput. Phys., Vol. 210, No. 1, pp. 75-108, 2005.
7. Yuan, L. “Comparison of Implicit Multigrid Schemes for Three-dimensional Incompressible Flows”, J. Comput. Phys., Vol. 177, No. 1, pp. 134-155, 2002.
8. Drikakis, D., Govatsos, P.A., and Papantonis, D.E. "A Characteristic Based Method for Incompressible Flows", Int. J. Numer. Meth. Fluids, Vol. 19, No. 8, pp. 667-685, 1994.
9. Drikakis, D. "A Parallel Multiblock Characteristic Based Method for 3-D Incompressible Flows", Adv. Eng. Software, Vol. 26, No. 2, pp.111-119, 1996.
10. Drikakis, D., Iliev, O.P., and Vassileva, D.P. "A Non-linear Multigrid Method for the 3-D Incompressible Navier–Stokes Equations", J. Comput. Phys., Vol. 146, No. 1, pp. 301-321, 1998.
11. Zhao, Y. and Zhang, B. “A High-order Characteristics Upwind FV Method for Incompressible Flow and Heat Transfer Simulation on Unstructured Grids”, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., Vol. 190, No’s. 5-7, pp. 733-756, 2000.
12. Tai, C.H. and Zhao, Y. “Parallel Unsteady Incompressible Viscous Flow Computations, Using an Unstructured Multigrid Method”, J.

Method", J. Comput. Phys., Vol. 48, No. 3, pp. 387-411, 1982.
25. Bruneau, C.H. and Saad, M. "The 2-D Lid-Driven Cavity Problem Revisited", Comput. Fluids, Vol. 35, No. 3, pp. 326-348, 2006.
26. Botella, O. and Peyret, R. "Benchmark Spectral Results on the Lid-Driven Cavity Flow", Comput. Fluids, Vol. 27, No. 4, pp. 421-433, 1998.
27. Choi, J., Oberoi, R.C., Edwards, J.R., and Rosati, J.A. "An Immersed Boundary Method for Complex Incompressible Flows", J. Comput. Phys., Vol. 224, No. 2, pp. 757–784, 2007.
28. Dennis, S.C.R. and Chang, G.Z. "Numerical Solution for Steady Flow Past a Circular Cylinder at Reynolds Number up to 100", J. Fluid Mech., Vol. 42, No. 3, pp. 471-489, 1970.
29. Takami, H. and Keller, H.B. "Steady 2-D Viscous Flow of an Incompressible Fluid Past a Circular Cylinder", Phys. Fluids, Vol. 12, No. 51, 1969.
30. Tuann, S.Y. and Olson, M.D. "Numerical Studies of the Flow around a Circular Cylinder by a Finite Element Method", Comput. Fluids, Vol. 6, No. 4, pp. 219-240, 1978.
31. Ding, H., Shu, C., Yeo, K.S., and Xu, D. "Simulation of Incompressible Viscous Flow Past a Circular Cylinder by Hybrid FD Scheme and Meshless Least-Square Based Finite Difference Method", Comput. Methods Appl. Mech. Eng., Vol. 193, No. 9-11, pp. 727-744, 2004.
32. Nithiarasu, P. and Zienkiewicz, O.C. "Analysis of an Explicit and Matrix Free Fractional Step Method for Incompressible Flows", Comput. Methods Appl. Mech. Eng., Vol. 195, No's. 41-43, pp. 5537–5551, 2006.
33. Kim, J., Kim, D., and Choi, H. "An Immersed Boundary Finite Volume Method for Simulations of Flow in Complex Geometries", J. Comput. Phys., Vol. 171, No. 1, pp. 132-150, 2001.
34. Henderson, R.D. "Details of the Drag Curve Near the Onset of Vortex Shedding", Phys. Fluids, Vol. 7, No.1, pp. 2102–2104, 1995.
35. Lange, C. "Numerical Predictions of Heat and Momentum Transfer From a Cylinder in Cross Flow with Implications to Hot-wire Anemometry", Ph.D. Dissertation, College of Eng., Erlangen-Nurnberg Univ. 1997.
36. Park, J., Kwon, K., and Choi, H. "Numerical Solutions of Flow Past a Circular Cylinder at Reynolds Numbers up to 160", KSME Int. J., Vol. 12, No. 6, pp. 1200–1205, 1998.
37. Posdziech, O. and Grundmann, R. "A Systematic Approach to the Numerical Calculation of Fundamental Quantities of the 2-D Flow over a Circular Cylinder", J. Fluids Struct., Vol. 23, No. 3, pp. 479–499, 2007.

Comput. Phys., Vol. 192, No. 1, pp. 277-311, 2003.
13. Tai, C.H., Zhao, Y., and Liew, K.M. "Parallel Computation of Unsteady 3-D Incompressible Viscous Flow, Using an Unstructured Multigrid Method", Comput. Struct., Vol. 82, No. 28, pp. 2425-2436, 2004.
14. Tai, C.H., Zhao, Y., and Liew, K.M. "Parallel-multigrid Computation of Unsteady Incompressible Viscous Flows, Using a Matrix-free Implicit Method and High-resolution Characteristics-based Scheme", Comput. Methods Appl. Mech. Eng., Vol. 194, No's. 36-38, pp. 3949-3983, 2005.
15. Tai, C.H., Zhao, Y., and Liew, K.M. "Parallel Computation of Unsteady Incompressible Viscous Flows Around Moving Rigid Bodies, Using an Immersed Object Method with Overlapping Grids", J. Comput. Phys., Vol. 207, No. 1, pp. 151-172, 2005.
16. Siong, K. and Zhao, C.Y. " Numerical Study of Steady Unsteady Flow and Heat Transfer in Porous Media, Using a Characteristics-based Matrix-free Implicit FV Method on Unstructured Grids", Int. J. Heat and Fluid Flow, Vol. 25, No. 6, pp. 1015-1033, 2004.
17. Drikakis, D. and Smolarkiewicz, P.K. "On Spurious Vortical Structures", J. Comput. Phys., Vol. 172, No. 1, pp. 309-325, 2001.
18. Drikakis, D. "Bifurcation Phenomena in Incompressible Sudden Expansion Flows", Phys. Fluids, Vol. 9, No. 1, pp. 76-87, 1997.
19. Neofytou, P. and Drikakis, D. "Non-Newtonian Flow Instability in Achannel with a Sudden Expansion", J. Non-Newtonion Fluid Mech., Vol. 111, No's. 2-3, pp. 127-150, 2003.
20. Neofytou, P., Drikakis, D., and Leschziner, M.A. "Study of Newtonian and Non Newtonian Fuid Flow in a Channel with a Moving Indentation", Sajjadi, Nash, Rampling (Eds.), IMA Conf. on Cardiovascular Flow Modelling with Application to Clinical Medicine, Salford, UK, 1998, Clarendon Press, Oxford, 1999.
21. Neofytou, P. "Revision of the Characteristics-based Scheme for Incompressible Flows", J. Comput. Phys., Vol. 222, No. 2, pp. 475-484, 2007.
22. Razavi, S.E. "Far Field Boundary Conditions for Computation of Compressible Aerodynamic Flows", Ph.D. Dissertation, Mech. Eng., Dep't. McGill Univ., Montreal, Canada, 1995.
23. Zacrow, M.J. and Hoffman, J.D. "Gas Dynamics", Vol. II, John Wiley, New York, 1976.
24. Ghia, U., Ghia, K.N., and Shin, C.T. "High-Re Solutions for Incompressible Flow, Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid