تحلیل ارتعاشات غیرخطی یک رشته حفاری دارای حرکت و نیروی محوری متغیر با زمان در یک چاه مایل

سید محمد صاحب کار[۱]، محمد رضا قضاوی[۲]، سیامک اسماعیل‌زاده خادم[۳] و مرگن حاج قایش[۴]
گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس

(تاریخ دریافت: ۱۳۸۶/۰۷/۰۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۸۷/۱۱/۱۹)

چکیده

در این مقاله، مدل غیرخطی یک رشته حفاری در یک چاه مایل با حرکت و نیروی محوری تهیه و سپس بـا اسـتفاده از روش اغتـشاشات تحلیل شده است. رشته حفاری همانند یک روتور دارای حرکت محوری روی تکیه‌گاه‌های ساده مدل شده است. بر اساس اصل همیلتـون و با در نظر گرفتن انرژی پتانسیل و انرژی های جنبشی مدل دینامیکی مربوطه به دست آمده که در آن که ترم‌های غیرخطی کوپل شده و باعث کوپل‌شدگی ارتعاشات محوری و خمشی شده است. روش مقیاس‌های چندگانه برای حل معادلات غیرخطی به کار گرفتـه شـده و پاسخ حالت دائم و محدوده‌های پایداری سیستم مورد تحلیل قرار گرفته است. نتایج تحلیلی و عـددی نـشانگر آن اسـت کـه پدیـده‌هـای غیرخطی مانند رزونانس‌های اصلی و پارامتریک رخ می‌دهد که تاکنون در تحقیقات قبلـی گـزارش نـشده اسـت. نتـایج عـددی بـا نتـایج آزمایشگاهی موجود در مراجع دیگر مقایسه شده که همخوانی نسبتاً خوبی را نشان می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: رشته حفاری، ارتعاشات غیرخطی، روتور دارای حرکت محوری، روش مقیاس‌های چندگانه، پایداری دینامیکی

Non-linear Vibrational Analysis of an Axially Moving Drillstring System with Time Dependent Axial Load and Velocity in an Inclined Well

S.M. Sahebkar, M.R. Ghazavi, S. Emailzadeh-Khadem, and M.H. Ghayesh
Mech. Eng. Dep't., School of Eng., Tarbiat Modarres Univ.

ABSTRACT

A non-linear model of a drill string system in an inclined well with axially moving motion and loading is established and analyzed by perturbation technique. The drillstring is modeled as a simply supported axially moving rotor. Based on Hamilton's principle, the dynamic model developed consists of kinetic and potential energy. Non-linear coupling terms are kept in the formulation, which leads to full coupling between the axial and the transverse vibrational modes. The method of multiple scales is employed to solve the non-linear equations, to analyze the steady state response, and to find the stability region of the system. Analytical and numerical results reveal the non-linear phenomena, such as primary and parametric resonance that have not been previously reported. Our results are compared with some existing experimental date showing relatively good agreements.

Key Words: Drillstring, Non-linear Vibration, Axially Moving Rotor, Method of Multiple Scales, Dynamic Stability

۱- دانشجوی دکترا (نویسنده پاسخگو): sahebkar@gmail.com
۲- استادیار
۳- استاد
۴-کارشناس ارشد

۱- مقدمه

هدف اصلی در حفاری چاه‌های نفت و گاز، انتقال حرکت دورانی به وسیله رشته حفاری به مته حفاری است. ارتعاشات رشته حفاری می‌تواند نرخ نفوذ[1] را کاهش و در نتیجه، زمان و قیمت حفاری را افزایش دهد، همچنین می‌تواند خسارات دائمی را به دیواره چاه وارد نموده و خرابی زود هنگام مته و سایر تجهیزات حفاری شود [۳-۱]. علاوه بر آن، ارتعاشات می‌تواند در عملکرد وسایل اندازه‌گیری تأثیر گذاشته و باعث ناپایداری در فرآیند حفاری چاه شود.

رشته حفاری می‌تواند به صورت خمشی ارتعاش نماید، زیرا قطر آن کمتر از قطر چاه است؛ این مود ارتعاشی به‌عنوان مهم‌ترین عامل خرابی رشته حفاری و خصوصاً بخش پایینی رشته حفاری[2] مطرح است[۴]. البته میرایی سیستم باعث می‌شود این ارتعاشات در سطح زمین قابل تشخیص نباشد که این موضوع باعث عدم توجه کافی به آن شده است. همه این موارد، جزء دلایلی است که ارتعاشات خمشی رشته حفاری طی سال‌های اخیر در کانون توجه تحقیقات مختلفی قرار گیرد. تحقیقات مربوط به تعیین فرکانس‌های طبیعی[۵]، تحلیل پایداری و تحلیل جابه‌جایی خمشی سیستم حفاری [۶] تاکنون صورت گرفته است.

مکانیزم‌های مختلفی می‌تواند باعث ایجاد مودهای ارتعاشی شود، مانند تماس مته حفاری و سازند خاک و تغییرات وزن بر روی مته. به دلیل کوپل‌شدگی خمشی- محوری، این اثرات باعث افزایش ناپایداری خمشی می‌شود[۲]. متهٔ حفاری نقش مهمی در این کوپل‌شدگی بازی می‌کند و می‌تواند ارتعاشات محوری را به خمشی تبدیل نماید. پایداری رشته حفاری به دلیل تغییرات هارمونیک نیروی محوری بررسی شده است [۷].

کارهای تئوری اولیه برای بررسی ارتعاشات خمشی رشته حفاری بر مبنای مدل ساده جفکات[3] آغاز شد [۹-۸]. همچنین مدل‌های پیوسته برای بررسی ارتعاشات خمشی مورد استفاده قرار گرفته است [۱۱-۱۰]. در تحقیقات اخیر روش اجزای محدود، ماتریس انتقال، تفاضل محدود و باقیمانده‌های وزن‌دار استفاده شده است [۱۴-۱۲ ,۵-۴].

تا کنون عمده تحقیقات برای تحلیل ارتعاشات رشته حفاری در چاه عمودی بوده است، اما با روند افزایش استفاده از چاه‌های مایل، بعضاً ارتعاشات رشته حفاری در چاه مایل نیز بررسی شده است[۱۵].

در این مقاله برای اولین بار، رشته حفاری به‌عنوان یک سیستم دارای حرکت محوری مدل‌سازی می‌شود که سرعت حرکت محوری سیستم برابر با نرخ نفوذ رشته حفاری در درون چاه است. تحقیقات زیادی برای بررسی تحلیل سیستم‌های دارای حرکت محوری تاکنون صورت گرفته است[۱۶]. در برخی از تحقیقات، پایداری سیستم دارای حرکت محوری بررسی شده و پاسخ غیرخطی بر مبنای روش اغتشاشات به دست آمده است [۱۹-۱۷].

همچنین، ارتعاشات غیرخطی و ناپایداری تسمه بر روی فونداسیون ویسکوالاستیک [۲۰] بررسی شده است. در بسیاری از این تحقیقات، سرعت محوری و نیروی محوری ثابت فرض شده است[۱۶]. البته در برخی تحقیقات سرعت محوری متغیر با زمان [۱۷ و ۲۱] و یا نیروی محوری متغیر با زمان [۲۲] به صورت جداگانه فرض شده است. در این تحقیق برای اولین بار به صورت همزمان تغییرات نیروی محوری و سرعت محوری مدنظر قرار گرفته است.

در این مقاله ارتعاشات رشته حفاری در چاه مایل با استفاده از مدل پیوسته تحلیل شده است. رشته حفاری به‌عنوان یک روتور بر روی تکیه‌گاه‌های ساده که دارای سرعت محوری هارمونیک است مدل‌سازی می‌شود و روش مرسوم در تئوری سیستم‌های در حال حرکت محوری برای تحلیل ارتعاشات آن استفاده می‌شود. همچنین برای اولین بار دوران سیستم‌های دارای حرکت محوری بررسی شده و اثر نیروی درگ سیال اطراف روتور در مدل‌سازی وارد می‌شود.

معادلات حرکت رشته حفاری بر مبنای اصل همیلتون به دست آمده و روش مقیاس‌های چندگانه برای اولین بار

1-Rate of Penetration (ROP)
2-Bottom Hole Assembly (BHA)
3-Jeffcott

برای حل معادلات حرکت استفاده شده است. به دلیل در نظر گرفتن کرنش محدود در عبارت انرژی پتانسیل، ترم‌های کوپل‌شده غیرخطی در معادلات به وجود می‌آید که باعث کوپل‌شدگی ارتعاشات محوری و خمشی می‌شود. با حل تحلیلی مسئله، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها به دست می‌آید و پاسخ سیستم بر این مبنا محاسبه می‌شود. همچنین نمودار تغییرات فرکانس‌های طبیعی سیستم بر اساس سرعت محوری، سختی خمشی، طول روتور و نیروی محوری ارائه شده و محدوده‌های پایداری برای رزونانس پارامتریک اصلی به صورت تحلیلی نشان داده می‌شود. نتایج این تحلیل با سایر نتایج آزمایشگاهی موجود که از سوی سایر محققان ارائه شده، مقایسه می‌شود.

۲- معادلات حرکت

مهم‌ترین نقش رشته حفاری، هدایت مته حفاری و انتقال حرکت دورانی و گشتاور تولید شده در سطح زمین به آن است، همچنین رشته حفاری وزن لازم روی مته[1] را فراهم می‌نماید. بخش پایینی رشته حفاری (BHA)، مهم‌ترین بخش رشته حفاری به شمار می‌رود و تحت تأثیر شدیدترین ارتعاشات قرار می‌گیرد.

پره‌های پایدارکننده‌ها که در مجموعهٔ BHA قرار می‌گیرند، معمولا دارای قطری مساوی با مته حفاری هستند و با لقی کمی روی دیواره چاه حرکت می‌کنند. معمولا فرض می‌شود که مجموعه BHA به صورت یک روتور الاستیک تغییر شکل می‌دهد و پایدار کننده و مته به صورت دو یاتاقان عمل می‌کنند. BHA به دلیل اعمال نیروی وزن، همیشه تحت فشار است. بر مبنای این ملاحظات رشته حفاری مانند یک روتور دارای حرکت محوری تحت نیروی فشاری محوری روی تکیه‌گاه‌های ساده (پایدارکننده‌ها)، مدل می‌شود.

همچنین، فرض می‌شود که قطر روتور در مقایسه با طول روتور کوچک باشد، لذا اثر تغییر شکل برشی در نظر گرفته نمی‌شود، اما اینرسی دورانی در نظر گرفته می‌شود.

سیال حفاری از درون لوله‌های رشته حفاری به سمت پائین هدایت می‌شود و با حرکت از بین رشته حفاری و دیواره چاه به سطح زمین باز می‌گردد. این سیال دو اثر مشخص دارد: اول آن که موجب افزایش جرم ظاهری رشته حفاری اضافه می‌شود که به "جرم افزوده" موسوم است. دوم آن که نیروی درگ متناسب با مربع سرعت رشته حفاری بر آن وارد می‌کند که جهتی برخلاف جهت سرعت رشته حفاری دارد.

در این مقاله بخش پایینی رشته حفاری مدل سازی شده است، از آنجا که سختی پیچشی بخش پایینی رشته حفاری (BHA) در مقایسه با بخش‌های بالایی بسیار بیشتر است، لذا از ارتعاشات پیچشی این بخش صرف‌نظر می‌شود و فقط ارتعاشات خمشی و محوری تحلیل می‌گردد[۱۱]. بنابراین ارتعاشات پیچشی BHA در نظر گرفته نمی‌شود و سرعت دورانی رشته حفاری ثابت فرض می‌شود.

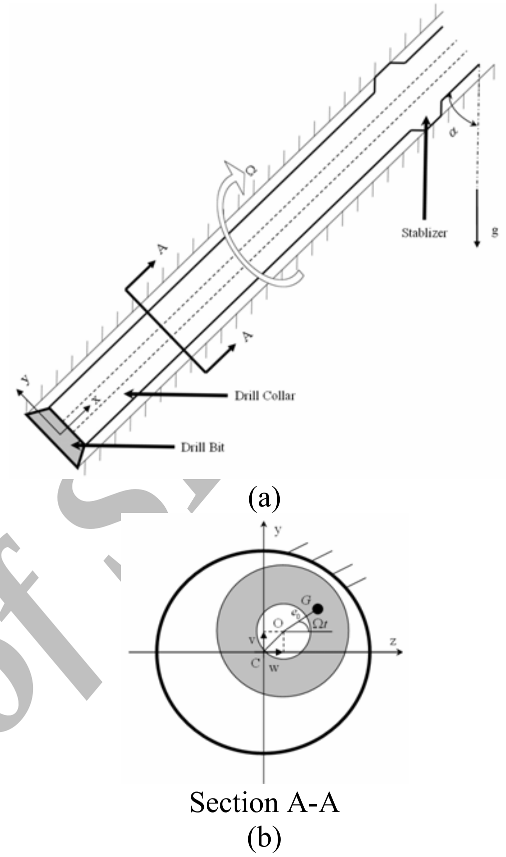
در این تحقیق کوپل‌شدگی غیرخطی بین تغییر شکل خمشی و محوری با در نظر گرفتن اندازه کرنش محدود بررسی شده و معادلات حرکت با استفاده از اصل همیلتون به دست می‌آید. نمای شماتیک سیستم رشته حفاری در شکل **۱** نشان داده شده است. رشته حفاری به صورت یک روتور با سطح مقطع ثابت فرض می‌شود که حول محور طولی x با سرعت ثابت می‌چرخد.

در این مقاله اثرات سرعت‌محوری، اینرسی دورانی، نیروی سیال، جرم افزوده سیال، کرنش محوری غیرخطی، نیروی جاذبه، نیروی فشاری محوری، نیروی نامیزانی جرمی و اثر ژیروسکپ در نظر گرفته می‌شود.

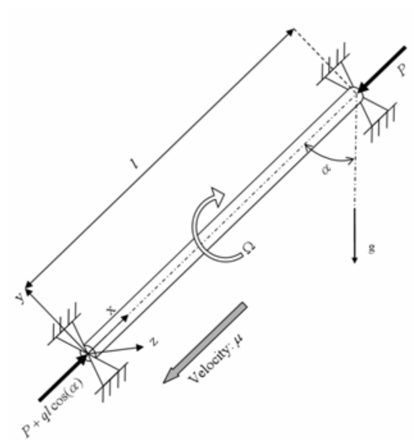
در شکل **۱** دستگاه مختصات xyz به رشته حفاری متصل است. سرعت دورانی رشته حفاری ثابت فرض می‌شود که برابر Ω است. G مرکز جرم، C مرکز چاه، O مرکز هندسی رشته حفاری، e_0 فاصله نامیزانی جرمی، α زاویه مایل بودن چاه، P نیروی محوری فشاری، l طول رشته حفاری بین پایدار کننده و مته، g شتاب جاذبه، u جابه‌جایی محوری و w وv جابه‌جایی خمشی نقطه O در صفحه yz است. روتور دارای سرعت محوری

1-Weight on Bit (WOB)

$\mu(t)$ است که برابر با نرخ نفوذ (ROP) رشته حفاری است.



شکل (۱): (a): رشته حفاری در چاه مایل؛ (b): سطح مقطع A-A رشته حفاری در درون چاه.



شکل(۲): مدل سازی رشته حفاری بین مته و پایدارکننده به صورت روتور با تکیه‌گاه‌های ساده تحت اثر نیروی محوری.

برای به دست آوردن معادلات حرکت، با استفاده از اصل همیلتون می‌توان نوشت[۲۳]:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(T+W_c+W_{nc})=0\,, \qquad (۱)$$

که در آن، معادلات δ نشان دهندهٔ تغییرات وردشی، T انرژی جنبشی، W_c کارصورت گرفته توسط نیروهای پایستار، W_{nc} کار نیروهای غیرپایستار است. برای W_c می‌توان نوشت: $W_c=-U$ که U انرژی پتانسیل سیستم است. انرژی جنبشی رشته حفاری می‌تواند به صورت زیر نوشته شود[۱۱، ۱۶]:

$$T=\frac{1}{2}\rho A\int_0^{\ell}\left\{\begin{aligned}&\left[\frac{\partial u}{\partial t}+\mu(1+\frac{\partial u}{\partial x})\right]^2+\\&\left[\frac{\partial v}{\partial t}+\mu\frac{\partial v}{\partial x}+e(x)\Omega\cos(\Omega t)\right]^2+\\&\left[\frac{\partial w}{\partial t}+\mu\frac{\partial w}{\partial x}-e(x)\Omega\sin(\Omega t)\right]^2\end{aligned}\right\}dx$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^{\ell}\left[-2\Omega J_p\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial x}+J_y(\frac{\partial\psi}{\partial t})^2+J_z(\frac{\partial\theta}{\partial t})^2\right]dx$$
$$+\Omega^2 J_p \qquad (۲)$$

که در آن، l و ρA به ترتیب طول و جرم موثر بر واحد طول است. در این معادله، اثر ژیروسکپ با ترم $\frac{1}{2}\int_0^{\ell}\left[-2\Omega J_p\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial x}\right]dx$ نشان داده شده است[۱۱]. درمعادله (۲) ψ زاویه خمش حول محور y ($\psi=\partial w/\partial x$) و θ زاویه خمش حول محور z ($\theta=\partial v/\partial x$) است.

برای در نظر گرفتن جرم افزوده سیال، جرم موثر بر واحد طول می‌تواند به صورت زیر بیان شود[۱۵ و ۲۴]:

$$\rho A=\rho_d A+\rho_f\frac{\pi}{4}(D_i^2+D_o^2\times\frac{D_h^2+D_o^2}{D_h^2-D_o^2}),$$
$$A=\frac{\pi}{4}(D_o^2-D_i^2), \qquad (۳)$$

که در آن، D_0 قطرخارجی رشته حفاری، D_i قطر داخلی رشته حفاری و D_h قطر چاه است و ρ_d و ρ_f به ترتیب چگالی رشته حفاری و سیال حفاری است.

اگر خروج از مرکزیت جرم در طول روتور ثابت فرض شود $e(x)=e_0$ و سطح مقطع رشته حفاری متقارن باشد $J=J_y=J_z$ و $J_p=2J$ که J_p ممان اینرسی جرمی رشته حفاری بر واحد طول حول محور رشته حفاری است $J_p=\rho_d\pi(D_o^4-D_i^4)/32$ [۱۱].

کار مجازی سیستم شامل اثرات کرنش الاستیک خمشی، کرنش محوری، نیروی محوری و نیروی جاذبه و کار صورت گرفته به وسیله نیروی غیرخطی سیال است. بنابراین می‌توان نوشت[۲۳،۱۶،۲۱]:

$$\delta(W_c + W_{nc}) = \delta\left\{ -\frac{1}{2}\int_0^{\ell}\left[EAe_{xx}^2 + EI\left((\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})^2 + (\frac{\partial^2 v}{\partial x^2})^2 \right)\right] dx + \frac{1}{2}\int_0^{\ell}\left[P + q(l-x)\cos(\alpha)\right] e_{xx} dx - \frac{1}{2}\int_0^{\ell} q\sin(\alpha) v\, dx + W_h \right\}, \quad (۴)$$

که در آن، E مدول یانگ، I ممان اینرسی سطحی حول محورهای y یا z، A سطح مقطع، P نیروی فشاری و q وزن غوطه‌وری رشته حفاری در سیال بر واحد طول است (رابطه ۵).

$$q = A(\rho_d - \rho_f)g \quad (۵)$$

همچنین، درمعادله (۴)، $\left[P + q(l-x)\cos(\alpha)\right]$ و $-q\sin(\alpha)$ به ترتیب نیروی توزیع شده در جهات u و v است. W_h کار صورت گرفته نیروی سیال است. کرنش غیرخطی محوری (e_{xx}) که مولفه‌های مرتبه دوم کرنش لاگرانژی را در بردارد، به صورت زیر قابل بیان است[۱۶]:

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial x})^2 + \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x})^2. \quad (۶)$$

کار مجازی نیروی سیال می‌تواند به صورت زیر نوشته شود[۱۱]:

$$\delta W_h = -\frac{1}{2}\int_0^{\ell}\left[\begin{array}{c} \rho_f C_D D_o \sqrt{(\frac{\partial v}{\partial t})^2 + (\frac{\partial w}{\partial t})^2} \\ *\left[(\frac{\partial w}{\partial t})\delta w + (\frac{\partial v}{\partial t})\delta v \right] \end{array}\right] dx, \quad (۷)$$

که در آن، C_D ضریب درگ نیروی سیال می‌باشد.

با استفاده از اصل همیلتون می‌توان معادلات حرکت را به دست آورد. برای بی بعدسازی می‌توان نوشت:

$$x^* = \frac{x}{l}, u^* = \frac{u}{l}, w^* = \frac{w}{l}, \quad v^* = \frac{v}{l}, t^* = t\sqrt{\frac{P_0}{\rho A l^2}}, \mu^* = \mu\sqrt{\frac{\rho A}{P_0}}. \quad (۸)$$

با استفاده از فرض شبه استاتیک، می‌توان نوشت[۱۶]:

$$e_{x^*x^*} = \frac{1}{2}\int_0^1\left[(\frac{\partial w^*}{\partial x^*})^2 + (\frac{\partial v^*}{\partial x^*})^2 \right] dx^*. \quad (۹)$$

اگر رابطه انرژی جنبشی (معادله ۲)، کار مجازی (معادله ۴) در رابطه اصل همیلتون (معادله ۱) قرار داده شده و ساده‌سازی گردد، معادله ارتعاش خمشی به دست می‌آید. با استفاده از عبارت‌های رابطه (۸)، می‌توان معادله حاصله را بی‌بعدسازی نمود که نتیجه به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 z^*}{\partial t^{*2}} + \mu^{*2}\frac{\partial^2 z^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial \mu^*}{\partial t^*}\frac{\partial z^*}{\partial x^*} + 2\mu^*\frac{\partial^2 z^*}{\partial x^*\partial t^*} \\ &+ i\lambda^2\frac{\partial^3 z^*}{\partial t^*\partial x^{*2}} - J^*\frac{\partial^4 z^*}{\partial t^{*2}\partial x^{*2}} + P^*\frac{\partial^2 z^*}{\partial x^{*2}} \\ &+ I^*\frac{\partial^4 z^*}{\partial x^{*4}} + C_D^*\sqrt{(\frac{\partial z^*}{\partial t^*})(\frac{\partial \overline{z}^*}{\partial t^*})}(\frac{\partial z^*}{\partial t^*}) - q_1^*\frac{\partial z^*}{\partial x^*} \\ &= e^*\exp(i\Omega t) + \beta\frac{\partial^2 z^*}{\partial x^{*2}}\int_0^1(\frac{\partial z^*}{\partial x^*})(\frac{\partial \overline{z}^*}{\partial x^*})dx^* - iq_2^*, \end{aligned} \quad (۱۰)$$

که در آن، $z^* = w^* + iv^*$ مقدار مختلط بی بعد شده ارتعاشات خمشی و $\overline{z}^*$ نشان دهنده مزدوج z^* است. در معادله (۱۰) پارامترهای بی بعد شده عبارتند از:

$$\begin{aligned} &\lambda^2 = \frac{J_p\Omega}{l\sqrt{\rho A P_0}}, J^* = \frac{J}{\rho A l^2}, \beta = \frac{EA}{2P_0}, \\ &I^* = \frac{EI}{P_0 l^2}, P^* = \frac{\left[P + ql(1-x^*)\cos(\alpha)\right]}{P_0}, \\ &e^* = \frac{\rho A l e_0 \Omega^2}{P_0}, C_D^* = \frac{\rho_f C_D D_o l}{2\rho A}, \\ &q_1^* = \frac{ql\cos(\alpha)}{P_0}, q_2^* = \frac{ql\sin(\alpha)}{P_0}. \end{aligned} \quad (۱۱)$$

برای روتور دارای تکیه‌گاه‌های ساده شرایط مرزی z^* عبارتند از[۲۱]:

$$z^*(0,t) = z^*(1,t) = \frac{\partial^2 z^*}{\partial x^{*2}}(0,t) = \frac{\partial^2 z^*}{\partial x^{*2}}(1,t) = 0. \quad (۱۲)$$

نیروی فشار محوری (P) که برابر با WOB است و سرعت حرکت محوری $\mu(t)$ به صورت هارمونیک حول مقدار ثابتی به صورت زیر تغییر می‌کنند[۲۱ و ۲۲]:

$$P(t) = P_0 + \varepsilon P_0\sin(\omega_p t), \quad (۱۳)$$

$$\mu(t) = \mu_0 + \varepsilon\mu_0\sin(\omega_\mu t), \quad (۱۴)$$

که در آن، P_0 مولفه استاتیکی نیروی محوری است و معادل با مقدار میانگین WOB است. ε یک پارامتر کوچک است و ω_p, ω_μ به ترتیب فرکانس تغییرات

سرعت محوری و نیروی فشاری محوری است. با توجه به این موارد و با استفاده از معادلات (۱۱،۱۳،۱۴) می‌توان نوشت:

$$P^* = 1 + \varepsilon \sin(\omega_p t) + q_1^* (1 - x^*), \qquad (۱۵)$$

$$\mu^* = \bar{\mu}_0 + \varepsilon \bar{\mu}_0 \sin(\omega_\mu t).$$
$$\bar{\mu}_0 = \mu_0 \sqrt{\frac{\rho A}{P_0}}. \qquad (۱۶)$$

اگر دامنه ارتعاش خمشی کوچک فرض شود، دامنه بی‌بعد شده ارتعاش خمشی می‌توانـد از مرتبـه $O(\sqrt{\varepsilon})$ فـرض شود، لذا می‌توان نوشت[۱۷ و ۲۱] : $z^* = \sqrt{\varepsilon} z$.

جدول (۱): ابعاد و مشخصات واقعی یک دستگاه رشته حفاری [۳،۱۱].

Drillstring	Drilling Fluid
$E = 210$ GPa $\rho_d = 7850$ kg/m^3 $D_o = 0.2286$ m (9 inch) $D_i = 0.0762$ m (3 inch)	$\rho_f = 1500$ kg/m^3 Bore hole
$e_0 = 0.00508$ m (0.2 inch) $\bar{l} = 10$ m (65 ft) $\mu_0 = 0.01$ m/s $\bar{P}_0 = 100$ kN $\Omega = 5$ rad/s (47.7 rpm)	$D_h = 0.4445$ m (17.5 inch) $\alpha = 0.1$ rad

پارامترهای به کار رفته در این مدل سازی در جدول **۱** ارایه شده است و مقادیر مربوط به ابعاد و مشخصات واقعی رشته حفاری را نشان می‌دهد [۳ و۱۱]. با توجه به داده‌های این جدول می‌توان مرتبه پارامترهای بی‌بعد شده را به صورت $q_2^* = \varepsilon^{\frac{3}{2}} \bar{q}_2,\ q_1^* = \varepsilon \bar{q}_1,\ J^* = \varepsilon \bar{J}$ و $\lambda^2 = \varepsilon \bar{\lambda}^2,\ e^* = \varepsilon^{\frac{3}{2}} \bar{e},\ C_D^* = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \bar{C}_D$ نوشت.

با جایگذاری روابط فوق در معادله (۱۰)، معادله نهایی حرکت سیستم به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 z}{\partial t^{*2}} + \left[\bar{\mu}_0 + \varepsilon \bar{\mu}_0 \sin(\omega_\mu t)\right]^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^{*2}} \\
&+ \left[\varepsilon \bar{\mu}_0 \omega_\mu \cos(\omega_\mu t)\right] \frac{\partial z}{\partial x^*} + i\varepsilon \bar{\lambda}^2 \frac{\partial^3 z}{\partial t^* \partial x^{*2}} \\
&+ 2\left[\bar{\mu}_0 + \varepsilon \bar{\mu}_0 \sin(\omega_\mu t)\right] \frac{\partial^2 z}{\partial x^* \partial t^*} - \varepsilon \bar{J} \frac{\partial^4 z}{\partial t^{*2} \partial x^{*2}} \\
&+ \left[1 + \varepsilon \sin(\omega_p t) + \varepsilon \bar{q}_1 (1 - x^*)\right] \frac{\partial^2 z}{\partial x^{*2}} \\
&+ I^* \frac{\partial^4 z}{\partial x^{*4}} + \varepsilon \bar{C}_D \sqrt{(\frac{\partial z}{\partial t^*})(\frac{\partial \bar{z}}{\partial t^*})} (\frac{\partial z}{\partial t^*}) - \varepsilon \bar{q}_1 \frac{\partial z}{\partial x^*} \\
&= \varepsilon \bar{e} \exp(i\Omega t) - i\varepsilon \bar{q}_2 \\
&+ \varepsilon \beta \frac{\partial^2 z}{\partial x^{*2}} \int_0^1 \left[(\frac{\partial z}{\partial x^*})(\frac{\partial \bar{z}}{\partial x^*}) \right] dx^*.
\end{aligned} \qquad (۱۷)$$

۳- روش اغتشاشات

برای حل معادلات (۱۷) روش‌های مختلف برمبنای تئوری اغتشاشات قابل استفاده است: روش هارمونیـک بـالانس، لیندشات پوانکاره، معادل‌سـازی خطـی، میـانگین‌گیـری و روش مقیاس‌های چندگانه. در عمدهٔ روش‌های اغتشاشات، هدف اصلی به دست آوردن پاسخ پریودیک سیستم اسـت که در حالت واقعـی رخ مـی‌دهـد. توضـیحات کامـل ایـن روش‌ها در مراجع [۲۵ و ۲۶] بیان شده است. با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه [۲۵ و ۲۶]، پاسخ معادله (۱۷) می‌تواند به صورت زیر بیان می‌شود:

$$z(x,t,\varepsilon) = z_0(x, T_0, T_1, ...) + \varepsilon z_1(x, T_0, T_1, ...) + ...$$
$$T_n = \varepsilon^n t^*, \qquad n = 0,1,2,....., \qquad (۱۸)$$

که در آن، ε یک ضریب کوچک است. با پیگیـری مراحـل مختلف روش مقیاس‌های چندگانـه، مقیـاس‌هـای زمـانی مختلف $T_0, T_1, T_2, ...$ تعریف می‌شود. T_0 مقیاس زمانی سریع است و $T_1, T_2, ...$ مقیاس‌های زمانی کند است کـه می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial t^*} = \frac{\partial T_0}{\partial t^*}\frac{\partial}{\partial T_0} + \frac{\partial T_1}{\partial t^*}\frac{\partial}{\partial T_1} + ... = D_0 + \varepsilon D_1 + ...$$
$$\frac{\partial^2}{\partial t^{*2}} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + ..., \quad D_0 = \frac{\partial}{\partial T_0}, D_1 = \frac{\partial}{\partial T_1}. \qquad (۱۹)$$

با جایگذاری معادلات (۱۸) و (۱۹) و مرتب‌سـازی ضـرایب توان‌های مختلف ε، معادلات زیر به دست می‌آید:

(۲۰)

$$O(\varepsilon^0):$$
$$D_0^2 z_0 + (\bar{\mu}_0{}^2 + 1)\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^{*2}} + 2\bar{\mu}_0 D_0 \frac{\partial z_0}{\partial x^*} + I^* \frac{\partial^4 z_0}{\partial x^{*4}} = 0 \ ,$$
$$O(\varepsilon^1):$$
$$\begin{aligned} & D_0^2 z_1 + (\bar{\mu}_0{}^2 + 1)\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^{*2}} + 2\bar{\mu}_0 D_0 \frac{\partial z_1}{\partial x^*} + I^* \frac{\partial^4 z_1}{\partial x^{*4}} = \\ & -2D_0 D_1 z_0 - 2\bar{\mu}_0{}^2 \sin(\omega_\mu t)\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^{*2}} - \bar{\mu}_0 \omega_\mu \cos(\omega_\mu t)\frac{\partial z_0}{\partial x^*} \\ & -2\bar{\mu}_0 \sin(\omega_\mu t) D_0 \frac{\partial z_0}{\partial x^*} - 2\bar{\mu}_0 D_1 \frac{\partial z_0}{\partial x^*} - i\bar{\lambda}^2 D_0 \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^{*2}} \\ & + \bar{J} D_0^2 \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^{*2}} - \sin(\omega_p t)\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^{*2}} - \bar{q}_1 (1 - x^*)\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^{*2}} \\ & + \bar{q}_1 \frac{\partial z_0}{\partial x^*} - \bar{C}_D \sqrt{D_0^2 z_0 \bar{z}_0} D_0 z_0 + \bar{e}\exp(i\Omega t) \\ & + \beta \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^{*2}} \int_0^1 \left[\frac{\partial z_0}{\partial x^*} \frac{\partial \bar{z}_0}{\partial x^*} \right] dx^* - i\bar{q}_2. \end{aligned} \tag{۲۱}$$

عبارت‌های با ضرایب $O(\varepsilon^2)$ و مرتبه‌های بالاتر در نظر گرفته نمی‌شود. جواب عمومی معادله (۲۰) به صورت زیر است[۲۵]:

$$z_0(x,t) = \sum_n \left[A_n(T_1)\exp(i\omega_n T_0) \right] Z_n(x), \tag{۲۲}$$

که در آن، n شماره مود، ω_n فرکانس طبیعی متناظر، $Z_n(x)$ شکل مود و $A_n(T_1)$ یک تابع از T_1 است که در ادامه مشخص می‌شود. $A_n(T_1)$ با حذف عبارت‌های سکولار از معادله مربوط به z_1 مشخص می‌شود. با جایگذاری معادله (۲۲) در معادله (۲۰) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} & I^* Z_n''''(x) + (\bar{\mu}_0{}^2 + 1) Z_n''(x) \\ & + 2i\bar{\mu}_0 \omega_n Z_n'(x) - \omega_n^2 Z_n(x) = 0. \end{aligned} \tag{۲۳}$$

مشتق‌گیری نسبت به x^* می‌تواند به صورت زیر بیان شود [۲۱]:

$$\begin{aligned} & (...)' = \frac{\partial}{\partial x^*}, (...)'' = \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}}, \\ & (...)''' = \frac{\partial^3}{\partial x^{*3}}, (...)'''' = \frac{\partial^4}{\partial x^{*4}}. \end{aligned} \tag{۲۴}$$

پاسخ معادله (۲۳) به صورت زیر نوشته می‌شود[۲۱]:

$$\begin{aligned} Z_n(x) = C_{n1}[& e^{i\eta_{n1}x} + C_{n2} e^{i\eta_{n2}x} \\ & + C_{n3} e^{i\eta_{n3}x} + C_{n4} e^{i\eta_{n4}x}]. \end{aligned} \tag{۲۵}$$

نتیجه حاصل از جایگذاری معادله (۲۵) در معادله (۲۳) عبارت است از:

$$I^* \eta_{ni}^4 - (\bar{\mu}_0{}^2 + 1)\eta_{ni}^2 - 2\bar{\mu}_0 \omega_n \eta_{ni} - \omega_n^2 = 0. \tag{۲۶}$$

با اعمال شرایط مرزی معادله (۱۲) در معادله (۲۵) ماتریس زیر قابل ارایه است:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \eta_{n1}^2 & \eta_{n2}^2 & \eta_{n3}^2 & \eta_{n4}^2 \\ \exp(i\eta_{n1}) & \exp(i\eta_{n2}) & \exp(i\eta_{n3}) & \exp(i\eta_{n4}) \\ \eta_{n1}^2 \exp(i\eta_{n1}) & \eta_{n2}^2 \exp(i\eta_{n2}) & \eta_{n2}^2 \exp(i\eta_{n3}) & \eta_{n2}^2 \exp(i\eta_{n4}) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ C_{n2} \\ C_{n3} \\ C_{n4} \end{bmatrix} C_{n1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{۲۷}$$

برای این که ضرایب C_{n2}, C_{n3}, C_{n4} پاسخ غیربدیهی داشته باشند، باید دترمینان ماتریس فوق برابر با صفر باشد. اگر C_{n2}, C_{n3}, C_{n4} از معادله (۲۷) به دست آید و در معادله (۲۵) جایگزین می‌شود، می‌توان شکل مود را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} & Z_n(x) = \\ & C_{n1} \left\{ \begin{aligned} & e^{i\eta_{n1}x} - \frac{(\eta_{n4}^2 - \eta_{n1}^2)(e^{i\eta_{n3}} - e^{i\eta_{n1}})}{(\eta_{n4}^2 - \eta_{n2}^2)(e^{i\eta_{n3}} - e^{i\eta_{n2}})} e^{i\eta_{n2}x} \\ & - \frac{(\eta_{n4}^2 - \eta_{n1}^2)(e^{i\eta_{n2}} - e^{i\eta_{n1}})}{(\eta_{n4}^2 - \eta_{n3}^2)(e^{i\eta_{n2}} - e^{i\eta_{n3}})} e^{i\eta_{n3}x} \\ & + \left[\begin{aligned} & -1 + \frac{(\eta_{n4}^2 - \eta_{n1}^2)(e^{i\eta_{n3}} - e^{i\eta_{n1}})}{(\eta_{n4}^2 - \eta_{n2}^2)(e^{i\eta_{n3}} - e^{i\eta_{n2}})} \\ & + \frac{(\eta_{n4}^2 - \eta_{n1}^2)(e^{i\eta_{n2}} - e^{i\eta_{n1}})}{(\eta_{n4}^2 - \eta_{n3}^2)(e^{i\eta_{n2}} - e^{i\eta_{n3}})} \end{aligned} \right] e^{i\eta_{n4}x} \end{aligned} \right\}. \end{aligned} \tag{۲۸}$$

مقادیر ω_n و η_{ni} با استفاده از معادلات (۲۶) و برابر با صفر قرار دادن دترمینان ماتریس معادله (۲۷) به دست می‌آید. ω_n فرکانس طبیعی خطی سیستم است.

با جایگذاری معادله (۲۸) و (۲۲) در معادله (۲۱) و نوشتن $\sin(\omega_\mu t), \cos(\omega_\mu t)$ و $\sin(\omega_p t)$ به صورت مختلط، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} & D_0^2 z_1 + \bar{\mu}_0{}^2 z_1'' + 2\bar{\mu}_0 D_0 z_1' + z_1'' + I^* z_1'''' = \\ & \zeta_{n1}\exp(i\omega_n T_0) + \zeta_{n2}\exp(i(\omega_n + \omega_\mu)T_0) \\ & + \zeta_{n3}\exp(i(\omega_n - \omega_\mu)T_0) + \zeta_{n4}\exp(i(\omega_n + \omega_p)T_0) \\ & + \zeta_{n5}\exp(i(\omega_n - \omega_p)T_0) + \bar{e}\exp(i\Omega t) - i\bar{q}_2. \end{aligned} \tag{۲۹}$$

شکل کامل عبارات $\zeta_{n5}, \zeta_{n4}, \zeta_{n3}, \zeta_{n2}, \zeta_{n1}$ در پیوست آمده است.

۴- بررسی رزونانس‌ها

برای بررسی رزونانس‌های ارتعاشی باید شرایط ایجاد عبارت‌های سکولار را مد نظر قرار داد. به این منظور باید در معادله (۲۹) حالاتی را بررسی کرد که عباراتی با ضرایب $\exp(i\omega_n T_0)$ یا $\exp(-i\omega_n T_0)$ به وجود آید.

با توجه به نتایج تجربی، رابطه بین سرعت دورانی رشته حفاری و فرکانس سرعت محوری می‌تواند به صورت زیر نوشته شود: $\omega = n\Omega$ [۷]. که Ω سرعت دورانی رشته حفاری و n یک عدد طبیعی است. بر مبنای نتایج آزمایشگاهی فرکانس تغییرات سرعت و نیروی محوری به نوع مته بستگی دارد.

مته‌های سه مخروطه، مودهای محوری را با فرکانس سه برابر فرکانس دورانی رشته حفاری تحریک می‌کنند. بنابراین برای مته های سه مخروطه n=3 و برای مته‌های یک مخروطه، n=1 خواهد بود [۷]. با در نظر گرفتن فرضیات فوق عبارت‌های سکولار به سه حالت زیر محدود می‌شود:

۱- حالت غیر رزونانس: اگر Ω از ω_n دور باشد و $\omega\ (=n\Omega)$ از 0 و $2\omega_n$ دور باشد،

۲- رزونانس در صورتی که Ω به ω_n نزدیک باشد و $\omega\ (=n\Omega)$ از 0 و $2\omega_n$ دور باشد و

۳- رزونانس در صورتی که $\omega\ (=n\Omega)$ به $2\omega_n$ نزدیک باشد و Ω از $2\omega_n$ دور باشد.

شرایط حل‌پذیری [۲۶] و حذف عبارت‌های سکولار از معادله (۲۹) به شرایطی منجر می‌گردد که در ادامه بررسی می‌شود.

۴-۱- حالت غیر رزونانس: اگر Ω از ω_n دور باشد و $\omega\ (=n\Omega)$ از 0 و $2\omega_n$ دور باشد.

برای به دست آوردن پاسخ سیستم باید شرایط حل‌پذیری در معادلات ارضا شود [۲۶]، مبنای شرایط حل‌پذیری حذف عبارت سکولار در معادلات است، در صورتی که شرایط حل‌پذیری اعمال شود و ساده‌سازی انجام گیرد $A(T_1)$ از معادله زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial A_n(T_1)}{\partial T_1} + \chi_{n1}A_n(T_1) + \chi_{n2}A_n^2(T_1)\bar{A}_n(T_1) + \chi_{n3}\sqrt{\bar{A}_n(T_1)A_n(T_1)}\,A_n(T_1) = 0, \qquad (۳۰)$$

که در آن، $\chi_{n1},\chi_{n2},\chi_{n3}$ در پیوست آمده است. در معادله فوق $\bar{A}_n$ و $\bar{Z}_n$ به ترتیب مزدوج A_n و Z_n است. $A(T_1)$ می‌تواند به صورت زیر نوشته شود[۲۵،۲۶]:

$$A_n(T_1) = \frac{1}{2}a_n(T_1)\exp\left[i\beta_n(T_1)\right], \qquad (۳۱)$$

که، $a_n(T_1)$ و $\beta_n(T_1)$ به ترتیب دامنه و فاز ارتعاش است و تابعی از T_1 هستند. با جایگذاری معادله (۳۱) در معادله (۳۰) و جداسازی بخش حقیقی و موهومی می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial a_n}{\partial T_1} + \mathrm{Re}(\chi_{n1})a_n + \mathrm{Re}(\chi_{n2})\frac{1}{4}a_n^3 + \mathrm{Re}(\chi_{n3})\frac{1}{2}a_n^2 = 0, \qquad (۳۲)$$

$$a_n\frac{\partial \beta_n}{\partial T_1} + \mathrm{Im}(\chi_{n1})a_n + \mathrm{Im}(\chi_{n2})\frac{1}{4}a_n^3 + \mathrm{Im}(\chi_{n3})\frac{1}{2}a_n^2 = 0, \qquad (۳۳)$$

که در آن، Re و Im به ترتیب بیانگر بخش حقیقی و موهومی ضرایب هستند.

دامنه a_n و فاز β_n به وسیله معادلات (۳۲) و (۳۳) توصیف می‌شوند. اگر $\chi_{n1},\chi_{n2},\chi_{n3}$ بر مبنای مقایر جدول **۱** محاسبه شود و در معادلات (۳۲) و (۳۳) جایگزین گردد، عبارات زیر حاصل می‌شود:

$$a_n' = 0 \Rightarrow a_n = a_{n0}$$
$$\beta_n = -\begin{bmatrix} \mathrm{Im}(\chi_{n1}) + \mathrm{Im}(\chi_{n2})\frac{1}{4}a_{n0}^2 \\ + \mathrm{Im}(\chi_{n3})\frac{1}{2}a_{n0} \end{bmatrix} T_1 + \beta_{n0}. \qquad (۳۴)$$

با در نظر گرفتن $T_1 = \varepsilon T_0 = \varepsilon t$، می‌توان از جایگذاری معادله (۳۴) در معادلات (۱۸) و (۲۲) پاسخ ارتعاشی سیستم را به صورت زیر به دست آورد:

$$z_0(x,t) = \frac{1}{2}a_n \exp\left[i(\beta_n + \omega_n T_0)\right]Z_n(x)$$
$$= \frac{1}{2}a_n \exp\left[i\left\{ \omega_n - \varepsilon\begin{bmatrix} \mathrm{Im}(\chi_{n1}) \\ + \mathrm{Im}(\chi_{n2})\frac{1}{4}a_{n0}^2 \\ + \mathrm{Im}(\chi_{n3})\frac{1}{2}a_{n0} \end{bmatrix} \right\} t + i\beta_{n0} \right] Z_n(x), \qquad (۳۵)$$

$$\omega_{n,nonlinear}=\omega_n-\varepsilon\begin{bmatrix}\mathrm{Im}(\chi_{n1})+\mathrm{Im}(\chi_{n2})\frac{1}{4}a_{n0}^2\\ +\mathrm{Im}(\chi_{n3})\frac{1}{2}a_{n0}\end{bmatrix}.$$

بدین ترتیب، فرکانس پاسخ کلی سیستم، تابعی غیرخطی از دامنه ارتعاشی به دست می‌آید و با تغییر دامنه ارتعاش فرکانس پاسخ نیز تغییر می‌کند که این مسئله یکی از خصوصیات سیستم‌های غیرخطی است و در ادامه نمودارهای مربوط به این تغییرات ارائه می‌گردد.

۴-۲- رزونانس در صورتی که Ω به ω_n نزدیک باشد و $\omega\ (=n\Omega)$ از 0 و $2\omega_n$ دور باشد.

اگر Ω به ω_n نزدیک باشد، برای بررسی رزونانس اصلی مود n ام، رابطه بین فرکانس دورانی سیستم و فرکانس طبیعی به صورت زیر است:

$$\Omega=\omega_n+\varepsilon\sigma, \qquad (۳۶)$$

که در آن، σ پارامتر تنظیمی است و معادله (۳۶) بیانگر نزدیکی Ω و ω_n است.

با جایگذاری معادله (۳۶) در معادله (۲۹) و اعمال شرایط حل‌پذیری، معادلات به صورت زیر ساده می‌شوند:

$$\frac{\partial A_n(T_1)}{\partial T_1}+\chi_{n1}A_n(T_1)+\chi_{n2}A_n^2(T_1)\bar{A}_n(T_1)$$
$$+\chi_{n3}\sqrt{\bar{A}_n(T_1)A_n(T_1)}A_n(T_1)+\chi_{n4}\exp(i\varepsilon\sigma T_0)=0. \qquad (۳۷)$$

$\chi_{n1},\chi_{n2},\chi_{n3}$ و χ_{n4} در پیوست آمده است. با جایگذاری $A_n(T_1)$ بر حسب معادله (۳۱) و جداسازی بخش‌های حقیقی و موهومی می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial a_n}{\partial T_1}+\mathrm{Re}(\chi_{n1})a_n+\mathrm{Re}(\chi_{n2})\frac{1}{4}a_n^3$$
$$+\mathrm{Re}(\chi_{n3})\frac{1}{2}a_n^2+2*\begin{bmatrix}\mathrm{Re}(\chi_{n4})\cos(\gamma_n)\\ -\mathrm{Im}(\chi_{n4})\sin(\gamma_n)\end{bmatrix}a_n=0, \qquad (۳۸)$$

$$a_n\frac{\partial \beta_n}{\partial T_1}+\mathrm{Im}(\chi_{n1})a_n+\mathrm{Im}(\chi_{n2})\frac{1}{4}a_n^3$$
$$+\mathrm{Im}(\chi_{n3})\frac{1}{2}a_n^2+2*\begin{bmatrix}\mathrm{Im}(\chi_{n4})\cos(\gamma_n)\\ +\mathrm{Re}(\chi_{n4})\sin(\gamma_n)\end{bmatrix}a_n=0, \qquad (۳۹)$$

که در آن، $\gamma_n=\sigma T_1-\beta_n$. برای به دست آوردن پاسخ حالت پایا باید شرایط $\partial a_n/\partial T_1=\partial\gamma_n/\partial T_1=0$ را در معادلات (۳۸، ۳۹) اعمال کرد که با توجه به این معادلات، جواب بدیهی همیشه به صورت $a_n=0$ وجود دارد. برای به دست آوردن پاسخ غیر بدیهی در حالت پایا باید از معادلات (۳۸) و (۳۹) انتگرال‌گیری نمود.

با حذف γ_n بین معادلات (۳۸) و (۳۹)، رابطه‌ای بین (a_n,σ) که نشانگر رابطه بین دامنه و فرکانس برای پاسخ غیربدیهی است به دست می‌آید:

$$\sigma=-\mathrm{Im}(\chi_{n1})-\mathrm{Im}(\chi_{n2})\frac{1}{4}a_n^2-\mathrm{Im}(\chi_{n3})\frac{1}{2}a_n$$
$$\pm\frac{1}{a_n}\sqrt{\begin{matrix}4\,\mathrm{Re}(\chi_{n4})^2+4\,\mathrm{Im}(\chi_{n4})^2\\ -\begin{bmatrix}\mathrm{Re}(\chi_{n1})+\mathrm{Re}(\chi_{n2})\frac{1}{4}a_n^2\\ +\mathrm{Re}(\chi_{n3})\frac{1}{2}a_n\end{bmatrix}^2\end{matrix}}. \qquad (۴۰)$$

معادله (۴۰) به معادله "فرکانس-پاسخ" موسوم است. در نمودار "فرکانس-پاسخ" پاسخ غیر بدیهی از پاسخ بدیهی جدا می‌شوند.

پاسخ حالت پایا (a_{n0},γ_{n0}) معادلات (۳۸) و (۳۹) را تحت شرایط $\partial a_n/\partial T_1=\partial\gamma_n/\partial T_1=0$ ارضا می‌کند. برای تحلیل پایداری سیستم در اطراف حالت پایا باید ماتریس ژاکوبی را به دست آورد.

مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبی $|J-\lambda I|=0$ بیانگر پایداری سیستم است. در صورتی که نامساوی زیر برقرار باشد، مقادیر ویژه (ریشه‌های λ) دارای بخش حقیقی مثبت می‌باشد که بیانگر حالات ناپایدار است:

$$\frac{\partial a_n}{\partial T_1}=F(a_n,\gamma_n),$$
$$\frac{\partial \gamma_n}{\partial T_1}=G(a_n,\gamma_n),$$
$$|J-\lambda I|=\begin{bmatrix}\frac{\partial F(a_n,\gamma_n)}{\partial a_n}-\lambda & \frac{\partial G(a_n,\gamma_n)}{\partial a_n}\\ \frac{\partial F(a_n,\gamma_n)}{\partial \gamma_n} & \frac{\partial G(a_n,\gamma_n)}{\partial \gamma_n}-\lambda\end{bmatrix}. \qquad (۴۱)$$

برای بررسی پایداری حل بدیهی، فرم معادله (۳۱) مناسب نیست و $A_n(T_1)$ باید به صورت زیر نوشته شود[۲۶]:

$$A_n=\frac{1}{2}(r_n+is_n)\exp(\frac{i\sigma T_1}{2}). \qquad (۴۲)$$

با جایگذاری معادله (۴۲) در معادله (۳۷) و جداسازی بخش حقیقی و موهومی و تشکیل ماتریس ژاکوبی، می‌توان تحلیل پایداری انجام داد. اگر مقادیر ماتریس

ژاکوبی بـه ازای $r_n = s_n = 0$ مقـداریابی شـود، شـرایط ناپایداری عبارت خواهد بود از:

$$\left| J - \lambda I \right|_{(r_n = s_n = 0)} = 0. \qquad (۴۳)$$

۴-۳- رزونانس در صورتی که $\omega \; (= n\Omega)$ به $2\omega_n$ نزدیک باشد و Ω از $2\omega_n$ دور باشد.

رزونانس دیگر در حالتی اتفاق می‌افتد که فرکانس نیـروی محوری یا فرکانس سـرعت محـوری در محـدوده دو برابـر فرکـانس طبیعـی سیـستم باشـد. پـارامتر تنظیمـی σ می‌تواند برای توصـیف میـزان نزدیکـی فرکـانس نیـرو یـا سرعت محوری به دو برابر فرکانس طبیعی سیستم به کـار رود [۲۱ و ۲۷]:

$$\omega = 2\omega_n + \varepsilon\sigma. \qquad (۴۴)$$

برای حذف مواردی که عبارت سکولار به وجـود مـی‌آورنـد شرایط حل پذیری به صورت زیر خلاصه خواهد شد:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial A_n(T_1)}{\partial T_1} + \chi_{n1} A_n(T_1) + \chi_{n2} A_n^2(T_1) \bar{A}_n(T_1) \\ &+ \chi_{n3} \sqrt{\bar{A}_n(T_1) A_n(T_1)}\, A_n(T_1) \\ &+ \chi_{n5} \exp(i\varepsilon\sigma T_0) A_n(T_1) = 0. \end{aligned} \qquad (۴۵)$$

عبارات $\chi_{n1}, \chi_{n2}, \chi_{n3}$ و χ_{n5} در پیوست آمده است. بـا جایگذاری $A_n(T_1)$ بـر طبـق معادلـه (۳۹) و جداسـازی بخش های حقیقی و موهومی می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial a_n}{\partial T_1} + \mathrm{Re}(\chi_{n1}) a_n + \mathrm{Re}(\chi_{n2}) \frac{1}{4} a_n^3 \\ &+ \mathrm{Re}(\chi_{n3}) \frac{1}{2} a_n^2 + \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(\chi_{n5}) \cos(\sigma T_1) \\ + \mathrm{Im}(\chi_{n5}) \sin(\sigma T_1) \end{bmatrix} a_n = 0, \end{aligned} \qquad (۴۶)$$

$$\begin{aligned} &a_n \frac{\partial \beta_n}{\partial T_1} + \mathrm{Im}(\chi_{n1}) a_n + \mathrm{Im}(\chi_{n2}) \frac{1}{4} a_n^3 \\ &+ \mathrm{Im}(\chi_{n3}) \frac{1}{2} a_n^2 + \begin{bmatrix} \mathrm{Im}(\chi_{n5}) \cos(\sigma T_1) \\ - \mathrm{Re}(\chi_{n4}) \sin(\sigma T_1) \end{bmatrix} a_n = 0, \end{aligned} \qquad (۴۷)$$

که در آن، a_n و β_n را می‌توان از معاملات (۴۶، ۴۷) بـه دست آورد.

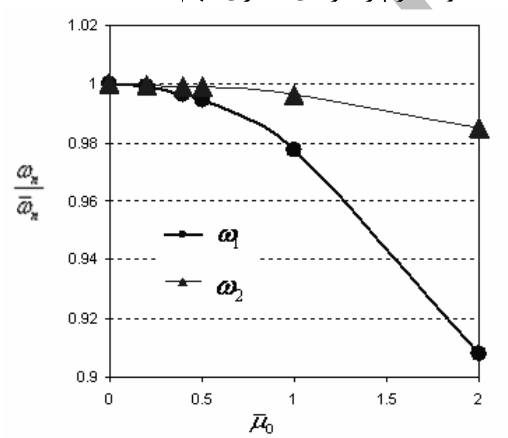
۴- نتایج

در این بخش، نتایج عددی برای فرکانس های طبیعی و محدوده‌های پایداری سیستم رشته حفاری ارائه می‌شود. با حل همزمان معادلات (۲۶) و برابر صفر قرار دادن عبارت مربوط به دترمینان ماتریس معادله (۲۷) فرکانس‌های طبیعی به دست می‌آیند. بر مبنای اطلاعات جدول **۱** که برای یک سیستم رشته حفاری با ابعاد واقعی است، فرکانس‌های طبیعی مودهای اول تا سوم عبارتند از: $\bar{\omega}_1 = 16.154$ و $\bar{\omega}_2 = 65.627$ و $\bar{\omega}_3 = 147.81$ rad/s. در نمودارهای آتی، فرکانس‌های طبیعی بر حسب $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$ بی‌بعد می‌شوند و تغییرات $\omega_n / \bar{\omega}_n$ رسم خواهد شد.

فرکـانس‌هـای طبیعـی و سـرعت‌هـای بحرانـی بـرای طراحی و بهـره‌بـرداری رشـته حفـاری از اهمیـت زیـادی برخوردار هستند. برای متـه یـک مخروطـه، n=1 اسـت و رزونـانس در حـالتی رخ مـی‌دهـد کـه $\Omega = \omega_n$ و $\Omega = 2\omega_n$ باشد. برای متـه سـه مخروطـه n=3 اسـت و شـرایط رزونـانس را مـی‌تـوان بـه صـورت زیـر نوشـت: $\Omega = \omega_n/3$ و $\Omega = 2\omega_n/3$.

معمولاً محدوده عملکرد و سرعت دورانی رشته حفاری در حدود فرکانس طبیعی اول یا دوم سیستم قرار دارد، لذا این دو فرکانس طبیعی به ازای پارامترهای مختلـف رسـم شده است.

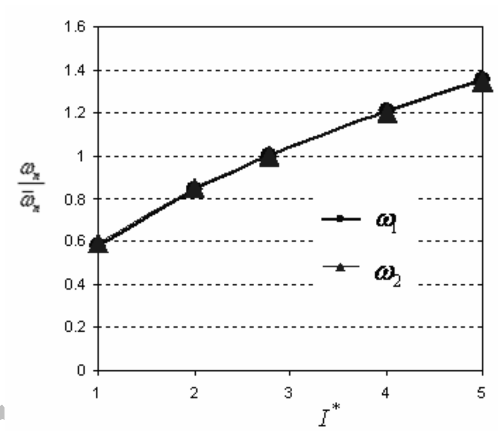
نرخ نفوذ (ROP) یا سـرعت محـوری رشـته حفـاری یکی از مهمترین پارامترها بـرای ارزیـابی کـارآیی فرآینـد حفاری است. برای بهینه‌سازی نرخ نفوذ، سـرعت دورانـی، WOB و دیگر پارامترهای حفاری مهم هستند.



شکل (۳): فرکانس طبیعی بی‌بعد شده اول و دوم برحسب سرعت محوری میانگین بی‌بعد شده ($\bar{\mu}_0$).

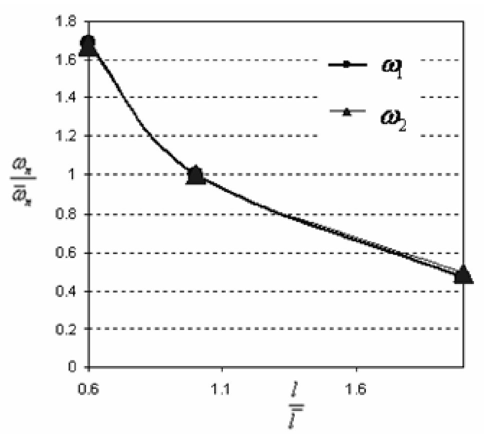
همان گونه که در شکل **۳** نشان داده شده است، فرکـانس طبیعی با افزایش سرعت محوری کاهش می‌یابد.

بنابراین، با افزایش نرخ نفوذ رشته حفاری، فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد و ممکن است باعث نزدیک شدن فرکانس دورانی و فرکانس طبیعی شده و رزونانس رخ دهد.



شکل (۴): فرکانس طبیعی بی‌بعد شده اول و دوم بر حسب سختی خمشی بی بعد شده (I^*).

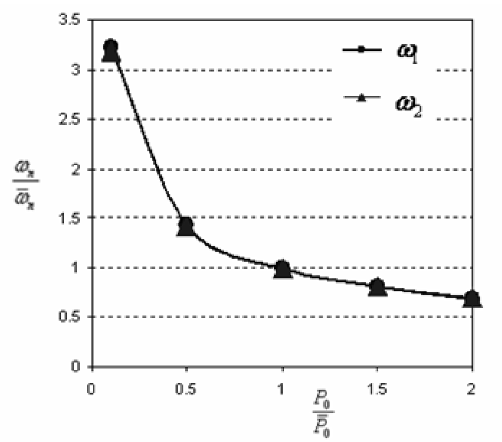
شکل **۴** فرکانس طبیعی را برحسب سختی خمشی بی‌بعد شده نشان می‌دهد که با افزایش سختی خمشی فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابد.



شکل (۵): فرکانس طبیعی اول و دوم بی‌بعد شده بر حسب طول روتور بی بعد شده ($l/\bar{l}$).

فاصله بین پایدار کننده و مته های حفاری ممکن است در آرایش‌های مختلف BHA متفاوت باشد. در شکل **۵**، طول روتور بر حسب طول مبنای روتور که در جدول **۱** آمده است $\bar{l}=10m$، بی‌بعد شده است. بر مبنای آنچه در شکل **۵** نشان داده شده است، با افزایش طول روتور بین دو تکیه گاه، فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابد.

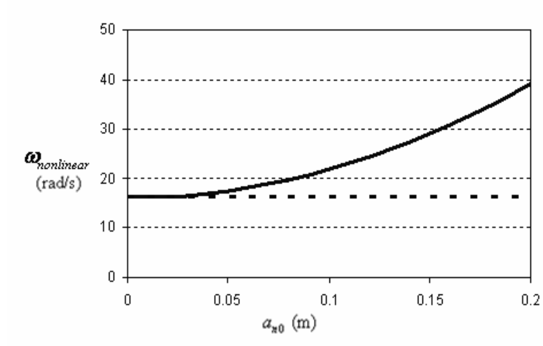
این نتایج می‌تواند برای انتخاب سرعت دورانی و سایر مشخصات رشته حفاری به نحوی که محدوده عملکرد آن از فرکانس طبیعی دور باشد، بسیار مفید واقع شود.



شکل (۶): فرکانس طبیعی بی‌بعد شده اول و دوم بر حسب نیروی میانگین فشاری محوری بی‌بعد شده ($P_0/\bar{P}_0$).

عامل مهم دیگر در فرآیند حفاری، وزن بر روی مته (WOB) است که نیروی فشاری محوری را فراهم می‌سازد. در فرآیند حفاری، WOB بر مبنای نوع مته و خواص چاه تعیین می‌شود. در برخی موارد برای افزایش ROP، باید WOB را افزایش داد. شکل **۶** تغییرات فرکانس طبیعی بر مبنای نیروی محوری را نشان می‌دهد.

در شکل **۶**، مقادیر نیروی محوری بر حسب نیروی محوری که در جدول **۱** آمده است $\bar{P}_0=100kN$، بی‌بعد شده است. از این شکل‌ها نتیجه می‌شود که با افزایش نیروی فشاری محوری، فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. لذا اپراتور دستگاه حفاری باید دقت فراوانی در جهت دور ماندن فرکانس دوران از فرکانس‌های طبیعی و رزونانس داشته باشد.

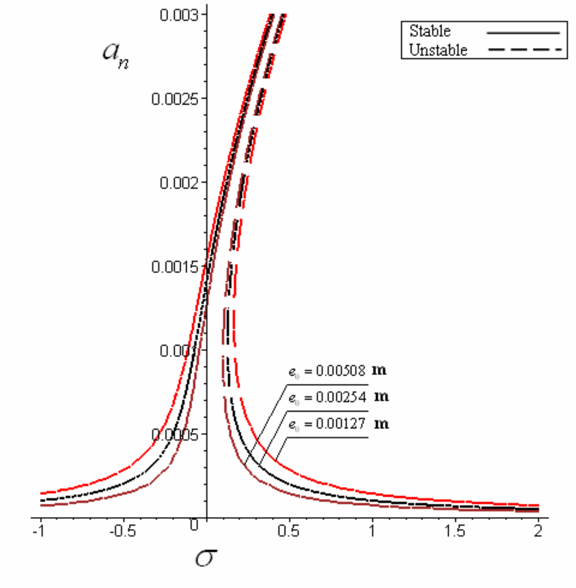


شکل (۷): فرکانس غیر خطی بر حسب دامنه برای پاسخ حالت پایا برای مود اول (خط چین: حالت خطی $\chi_{n1}=\chi_{n2}=\chi_{n3}=0$ و خط پیوسته: بر مبنای اطلاعات جدول ۱ - $\varepsilon=0.01$).

بر مبنای معادله (۳۵)، پاسخ ارتعاش رشته حفاری در حالت غیر رزونانس دارای فرکانسی است که به صورت غیرخطی تابع دامنه ارتعاش است، شکل ۷ نشانگر تغییرات فرکانس غیرخطی بر مبنای دامنه ارتعاش به ازای $\varepsilon=0.01$ است. همان گونه که از شکل ۷ نمایان است، با افزایش دامنه ارتعاش، فرکانس پاسخ ارتعاش نیز افزایش می‌یابد و پدیده سخت شوندگی اتفاق می‌افتد.

درصورتی که مسئله به صورت خطی در نظر گرفته شود و ترم‌های ایجاد کننده عبارت‌های غیر خطی مانند کرنش غیر خطی، نیروی سیال و اثر جاذبه درنظر گرفته نشود ($\chi_{n1}=\chi_{n2}=\chi_{n3}=0$) فرکانس پاسخ برای دامنه‌های مختلف ثابت باقی می‌ماند. اگر اثرات غیرخطی افزایش یابد، فرکانس پاسخ با افزایش دامنه ارتعاش افزایش بیشتری می‌یابد.

دیاگرام دامنه و فاز بر اساس معادله (۴۰) می‌تواند رسم شود به نحوی که اثرات تغییرات آهسته سرعت دورانی بر پاسخ ارتعاشی سیستم را نشان دهد. شکل ۸ نمودار پاسخ (a_n,σ) برای مقادیر مختلف نامیزانی جرمی را نشان می‌دهد. این نمودار دو شاخه دارد که بر اساس معادله (۴۲) و معیار ناپایداری، شاخه سمت راست ناپایدار و شاخه سمت چپ پایدار است.



شکل (۸): نمودار فرکانس-پاسخ برای مود اول برای نامیزانی جرمی متفاوت (خط پیوسته : پایدار، خط چین: ناپایدار).

با افزایش مقدار نامیزانی جرمی، دوشاخه (a_n,σ) از هم دور می‌شوند و محدوده ناپایداری افزایش می‌یابد.

مرجع [۱۲] بر مبنای یک نمونه دستگاه آزمایشگاهی در ابعاد کوچک، به شبیه‌سازی و تحلیل ارتعاشات رشته حفاری پرداخته است. نتایج آزمایشگاهی نشان می‌دهد که در صورتی که فرکانس تحریک نیروی محوری یک برابر یا دو برابر فرکانس طبیعی ارتعاشات خمشی باشد رزونانس رخ می‌دهد. ابعاد دستگاه آزمایشگاهی، از دستگاه واقعی کوچکتر است اما حالت بروز رزونانس (دوبرابر فرکانس طبیعی خمشی) برای دستگاه با ابعاد واقعی نیز قابل استنتاج خواهد بود [۱۲].

البته مرجع [۱۲] نتوانسته به صورت تحلیلی علت این رفتار را توضیح دهد که در این مقاله (بخش ۴-۳) به صورت تحلیلی علت بروز این رزونانس نشان داده شده است و با نتایج تحلیلی این مقاله کاملاً قابل تفسیر است.

طراحان و بهره برداران سیستم رشته حفاری با در نظرگرفتن فرکانس رزونانس‌های جدید، می‌توانند از نزدیکی به رزونانس‌ها و فعالیت در محدوده آنها که منجربه خرابی دستگاه می‌شود، جلوگیری کنند.

۶- نتیجه گیری

در این تحقیق، معادله حرکت سیستم رشته حفاری با استفاده از اصل همیلتون به دست آمد. روش مقیاس‌های چندگانه برای حل معادلات به کارگرفته شد و پاسخ حالت پایا و محدوده‌های ناپایداری مورد بررسی قرارگرفت. سیستم رشته حفاری به صورت یک روتور دارای حرکت محوری بر روی تکیه‌گاه‌های ساده مدل سازی شد و ارتعاش خمشی آن که از اعمال نیروی محوری و سرعت محوری ناشی می‌شود، بررسی شد.

ابتدا معادلات ارتعاشات کوپل‌شده خمشی و محوری سیستم ارائه شده، سپس بر اساس فرض شبه استاتیک، معادلات به یک معادله (شامل ارتعاشات خمشی) تبدیل شده و بعد از آن تحلیل‌ها روی این معادله اعمال شده است. فرکانس تحریک نیروی محوری (ω_p) به عنوان یکی از فرکانس‌های تحریک خارجی مد نظر بوده است که به صورت تحلیلی نشان داده شده و اثر مهمی هم در بروز رزونانس‌ها دارد.

این مدل دینامیکی و تحلیل رزونانس‌های آن برای استفاده در طراحی و عملکرد رشته حفاری بسیار با اهمیت است. دراین پژوهش دو نمونه رزونانس مورد بررسی قرارگرفت.

دراین مقاله، پایداری حل عمومی سیستم رشته حفاری بررسی شد که می‌تواند به درک بهتری از خصوصیات دینامیکی مانند پاسخ‌های پریودیک سیستم بینجامد. مشخص کردن محدوده‌های پایداری برای اطمینان از عملکرد و طراحی ایمن اهمیتی فوق‌العاده دارند.

نتایج حاصله بیانگر آن است که رفتار دینامیکی تحت تأثیر پارامترهایی است که به میزان کمی شناخته شده‌اند. علاوه برآن، نتایج حاصل از روش‌های معمولی تحلیلی (مانند روش مقیاس‌های چندگانه) می‌تواند برای ارزیابی نتایج آزمایشگاهی استفاده شود.

فرکانس بحرانی رشته حفاری، در اثر تغییر سرعت محوری، نیروی محوری، سفتی خمشی و طول روتور، تغییر می‌کند.

فرکانس طبیعی با افزایش سرعت محوری و نیروی محوری، کاهش می‌یابد البته با افزایش سفتی خمشی افزایش می‌یابد.

فرکانس غیرخطی رشته حفاری تابعی از دامنه ارتعاش رشته حفاری است و با افزایش دامنه ارتعاش و میزان غیرخطی بودن سیستم، افزایش می‌یابد. تغییرات فرکانس ارتعاش بر حسب دامنه ارتعاش یکی از خصوصیات سیستم‌های غیرخطی است که در این تحلیل به خوبی بیان شده است.

در این پژوهش نشان داده شد که فرکانس های بحرانی برای مته‌های تک مخروطه و سه مخروطه کاملاً متفاوت است و در سرعت‌های دورانی گوناگونی رخ می‌دهد. فرکانس بحرانی در حالتی که از مته سه مخروطه استفاده شود، بسیار زودتر رخ می‌دهد و با تعویض نوع مته حفاری می‌توان از بروز فرکانس‌های بحرانی جلوگیری کرد. این تحقیق، پشتوانه مناسب تئوری و تحلیلی برای نتایج آزمایشگاهی ارائه می‌کند.

مراجع

1. Mason, J. and Sprawls, B., “Addressing BHA Whirl: The Culprit in Mobile Bay”, SPE Drilling and Completion, Vol. 13, No. 4, pp. 231–236, 1998.
2. Vandiver, J.K., Nicholson, J., and Shyu, R.J., “Case Studies of the Bending Vibration and Whirling Motion of Drill Collars”, SPE Drilling Eng., Vol. 5, No.4, pp. 282–290, 1990.
3. Jansen, J., “Non-linear Rotor Dynamics as Applied to Oil well Drillstring Vibrations”, J. Sound and Vibration", Vol. 147, No. 1, pp.115–135, 1991.
4. Mitchell, R. and Allen, M., “Lateral Vibration: The Key to BHA Failure Analysis”, World Oil, Vol. 200, No. 4, pp. 101–104, 1985.
5. Chen, S. and Géradin, M., “An Improved Transfer Matrix Technique as Applied to BHA Lateral Vibration Analysis”, J. Sound and Vibration, Vol. 185, No.1, pp. 93–106, 1995.
6. Vaz, M., and Patel, M. “Analysis of Drill Strings in Vertical and Deviated Holes, Using the Galerkin Method”, Eng. Struc., Vol. 17, No.6, pp. 437–442, 1995.
7. Dunayevsky, V., Abbassian, F., and Judzis, A., “Dynamic Stability of Drillstrings under Fluctuating Weight on Bit”, SPE Drilling and Completion, Vol. 8, No. 2, pp. 84–92, 1993.
8. Leine, R.I., “Bifurcations in Discontinuous Mechanical Systems of Filippov-Type”, PhD

Dissertation, Mech. Eng. Dep't., Univ. of Eindhoven, Eindhoven, The Netherlands, 2000.
9. Zamanian, M., Khadem, S.E., and Ghazavi, M.R., "Stick-slip Oscillations of Drag Bits by Considering Damping of Drilling Mud and Active Damping System", J. Petroleum Science Eng., Vol. 59, No. 1, pp. 289-299, 2007.
10. Shyu, R.J. "Bending Vibration of Rotating Drill Strings", PhD Dissertation, Massachusetts Institute of Technology, Dep't. Ocean Eng., Cambridge Univ. 1989.
11. Christoforou, A. and Yigit, A. "Dynamic Modeling of Rotating Drillstrings with Borehole Interactions", J. Sound and Vibration, Vol. 206, No. 2, pp. 243–260, 1997.
12. Berlioz, A., Hagopian, J.D., Dufour, R., and Draoui, E., "Dynamic Behavior of a Drill String: Experimental Investigation of Lateral Instabilities", J. Vibration and Acoustics, Trans. ASME, Vol. 118, No. 3, pp. 292–298, 1996.
13. Zifeng, L., Xingrui, M., Wenhu, H., and Xisheng, L., "A 3-D Analysis of a Bottomhole Assembly under Large Deflection", SPE Drilling and Completion, Vol. 11, No. 2, pp.104–110, 1996.
14. Khulief, Y.A., Al-Sulaiman, F.A., and Bashmal, S., "Vibration Analysis of Drillstrings with Self-excited Stick Slip Oscillations", J. Sound and Vibration, Vol. 299, No. 3, pp. 540–558, 2007.
15. Heisig, G. and Neubert, M. "Lateral Drillstring Vibrations in Extended-Reach Wells", Paper IADC/SPE 59235, IADC/SPE Drilling Conf., New Orleans, LA, 2000.
16. Wickert, J.A. and Mote, C.D. "Classical Vibration Analysis of Axially Moving Continua", J. Appl. Mech., Vol. 57, No. 1, pp. 738–744, 1990.
17. Pakdemirli, M. and Ulsoy, A.G., "Stability Analysis of an Axially Accelerating String", J. Sound and Vibration, Vol. 203, No. 2, pp. 815-832, 1997.
18. Pellicano, F., Fregolent, A., Bertuzzi, A., and Vestroni, F., "Primary and Parametric Non-linear Resonances of a Power Transmission Belt: Experimental and Theoretical Analysis", J. Sound and Vibration, Vol. 244, No. 4, pp. 669–684, 2001.
19. Chakraborty, G., Mallik, A.K., and Hatal, H. "Non-linear Vibration of Traveling Beam", Int. J. Non-linear Mech., Vol. 34, No. 2, pp. 655–670, 1999.
20. Ghayesh, M.H. and Khadem S.E. "Non-linear Vibration and Stability Analysis of a Partially Supported Conveyor Belt by a Distributed Viscoelastic Foundation", J. Struc. Eng. Mech., Vol. 27, No. 1, pp. 17-32. 2007.
21. Oz, H.R. "On the Vibration of an Axially Traveling Beam on Fixed Supports with Variable Velocity", J. Sound and Vibration, Vol. 239, No. 3, pp. 556–564, 2001.
22. Marynowski, K. and Kapitaniak, T. "Zener Internal Damping in Modeling of Axially Moving Viscoelastic Beam with Time-dependent Tension", Int. J. Non-linear Mech., Vol. 42, No. 1, pp. 118-131, 2007.
23. Meirovitch. L. "Analytical Methods in Vibrations", New York, Macmillan, 1967.
24. Harris, C.M. and Piersol, A.G. "Harris Shock and Vibration Handbook", Fifth Ed., McGraw-Hill, New York, 2002 .
25. Nayfeh, A.H. and Mook, D.T. "Non-linear Oscillations", John Wiley, New York, 1979.
26. Nayfeh, A.H. and Balachandran, B., "Applied Non-linear Dynamics: Analytical, Computational, and Experimental Methods", John Wiley, New York, 1995.
۲۷. صاحب کار، س.م. "تحلیل دینامیکی کوپل شده رشته حفاری"، پایان نامه دکتری، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس، ۱۳۸۷.

پیوست:

$$\chi_{n1}=\frac{\left\{\int_0^1 \bar{Z}_n\begin{bmatrix}-\bar{q}_1(1-x^*)Z_n''(x)+\bar{q}_1 Z_n'(x)\\ +\omega_n\bar{\lambda}^2 Z_n''(x)-\bar{J}\omega_n^2 Z_n''(x)\end{bmatrix}dx\right\}}{\left\{\int_0^1 \bar{Z}_n\left[-2i\omega_n Z_n(x)-2\bar{\mu}_0 Z_n'(x)\right]dx\right\}}$$

$$\chi_{n2}=\frac{\left\{\int_0^1 \bar{Z}_n\beta Z_n''(x)\int_0^1\left[Z_n'(x^*)\bar{Z}_n'(x^*)\right]dx^*dx\right\}}{\left\{\int_0^1 \bar{Z}_n\left[-2i\omega_n Z_n(x)-2\bar{\mu}_0 Z_n'(x)\right]dx\right\}}$$

$$\chi_{n3}=-\frac{\left\{\int_0^1 \bar{Z}_n\bar{C}_D i\omega_n\sqrt{-\omega_n^2\bar{Z}_n(x)Z_n(x)}\,Z_n(x)dx\right\}}{\left\{\int_0^1 \bar{Z}_n\left[-2i\omega_n Z_n(x)-2\bar{\mu}_0 Z_n'(x)\right]dx\right\}}$$

$$\chi_{n4}=\frac{\left\{\int_0^1 \bar{Z}_n\left[\bar{e}\right]dx\right\}}{\left\{\int_0^1 \bar{Z}_n\left[-2i\omega_n Z_n(x)-2\bar{\mu}_0 Z_n'(x)\right]dx\right\}}$$

$$\chi_{n5}=\frac{\left\{\int_0^1 \bar{Z}_n\begin{bmatrix}-i\bar{\mu}_0^{\,2} Z_n''(x)-\frac{1}{2}\bar{\mu}_0\omega_\mu Z_n'(x)\\ +\omega_n\bar{\mu}_0 Z_n'(x)-iZ_n''(x)\end{bmatrix}dx\right\}}{\left\{\int_0^1 \bar{Z}_n\left[-2i\omega_n Z_n(x)-2\bar{\mu}_0 Z_n'(x)\right]dx\right\}}$$

$$\zeta_{n1}=\begin{Bmatrix}-2i\,\omega_n\dfrac{\partial A_n(T_1)}{\partial T_1}Z_n(x)-2\bar{\mu}_0\dfrac{\partial A_n(T_1)}{\partial T_1}Z_n'(x)\\ -\bar{q}_1(1-x^*)A_n(T_1)Z_n''(x)+\bar{q}_1 A_n(T_1)Z_n'(x)\\ +\omega_n\bar{\lambda}^2 A_n(T_1)Z_n''(x)-\bar{J}\omega_n^2 A_n(T_1)Z_n''(x)\\ -\bar{C}_D i\,\omega_n\sqrt{-\omega_n^2\bar{A}_n(T_1)\bar{Z}_n(x)A_n(T_1)Z_n(x)}\,A_n(T_1)Z_n(x)\\ +\beta A_n^2(T_1)\bar{A}_n(T_1)Z_n''(x)\int_0^1\left[Z_n'(x)\bar{Z}_n'(x)\right]dx^*\end{Bmatrix}$$

$$\zeta_{n2}=\begin{Bmatrix}i\,\bar{\mu}_0^{\,2}A_n(T_1)Z_n''(x)-\dfrac{1}{2}\bar{\mu}_0\omega_\mu A_n(T_1)Z_n'(x)\\ -\omega_n\bar{\mu}_0 A_n(T_1)Z_n'(x)\end{Bmatrix}$$

$$\zeta_{n3}=\begin{Bmatrix}-i\,\bar{\mu}_0^{\,2}A_n(T_1)Z_n''(x)-\dfrac{1}{2}\bar{\mu}_0\omega_\mu A_n(T_1)Z_n'(x)\\ +\omega_n\bar{\mu}_0 A_n(T_1)Z_n'(x)\end{Bmatrix}$$

$$\zeta_{n4}=iA_n(T_1)Z_n''(x)$$

$$\zeta_{n5}=-iA_n(T_1)Z_n''(x)$$