فرمولبندی المان محدود مسائل تماسی در سازههای ویسکوالاستیک بر مبنای مدل وارهیدگی ماکسول تعمیم یافته

حسین اشرفی ^۱و مهرداد فرید ^۲ قطب علمی محاسباتی، بخش مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه شیراز (تاریخ دریافت: ۱۳۸۸/۱۰/۱۲، تاریخ پذیرش: ۱۳۸۸/۱۰/۱۵)

چکیدہ

هدف مقاله حاضر توسعه یک فرمول بندی محاسباتی المان محدود نموی - انطباقی بر مبنای الگوریتمی توانمند به منظور محاسبه فشارهای شبه استاتیک تماسی در سازه های ویسکوالاستیک می باشد. از مدل تعمیم یافته ماکسول برای مدل سازی توابع وار هیدگی معادلات متشکله ویسکوالاستیک بهره گرفته شده که در قالب دو تابع وار هیدگی کلی در اتساع (پاسخ حجمی) و برش (پاسخ انحرافی) نشان داده می شود. در این فرمول بندی، توابع وار هیدگی به وسیله حاصل جمع سری های توابع نمایی و برش (پاسخ انحرافی) نشان داده می شود. در این فرمول بندی، توابع وار هیدگی معادلات متشکله ویسکوالاستیک بهره گرفته شده که در قالب دو تابع وار هیدگی کلی در اتساع (پاسخ حجمی) و برش (پاسخ انحرافی) نشان داده می شود. در این فرمول بندی، توابع وار هیدگی به وسیله حاصل جمع سری های توابع نمایی کاهشی با زمان بیان می شوند. بر اساس اعمال اصل کار مجازی، یک فرمول بندی مؤثر المان های محدود با یک فرآیند نموسازی در معادلات وار هیدگی و هندسی این می شوند. بر اساس اعمال اصل کار مجازی، یک فرمول بندی مؤثر المانهای محدود با یک فرآیند نموسازی در معادلات وار هیدگی و هندسی اجزای در حال تماس اعمال اصل کار محازی، یک فرمول بندی مؤثر المانهای محدود با یک فرآیند نموسازی در معادلات وار هیدگی و هندسی اجزای در حال تماس اعمال اصل کار محازی، یک فرمول بندی مؤثر المانهای محدود با یک فرآیند نموسازی سی ماین این می شوند. بر اساس اعمال اصل کار محازی، یک فرمول بندی موثر المان های محدود با یک فرآیند نموسازی در معادلات وار هیدگی و هندسی اجزای در حال تماس، از رهیافت لاگرانژ الحاقی انطباقی استفاده گردیده است. همگرایی مناسب نتایج حاصل از مثال های عددی با نتایج حل تحلیلی نشانگر قابلیتهای کاربردی بالای مدل المانهای محدود ارائه شده می باشد.

واژههای كلیدی: معادلات وارهیدگی ویسكوالاستیك، مسائل تماسی، حل نموی- انطباقی، رهیافت لاگرانژ الحاقی

A Finite Element Formulation of Contact Problems for Viscoelastic Structures, Based on the Generalized Maxwell Relaxation Model

H. Ashrafi and M. Farid

Center of Excellence in Computational Mechanics, Mech. Eng. Dep't., School of Eng., Shiraz Univ.

ABSTRACT

The objective of this study is to develop a general finite element formulation associated with an incremental adaptive procedure established for the calculation of contact pressure distributions in viscoelastic structures. A generalized Maxwell model has been used to model the viscoelastic constitutive equations in which bulk and shear relaxation functions are represented by sum of a series of decaying exponential functions of time. Based on the principle of virtual work, an effective finite element formulation, associated with an incremental relaxation procedure, has been developed. The viscoelastic contact behavior has been studied through an improved augmented Lagrangian approach, based on kinematical conditions of contact bodies. The proper convergence caused by the numerical examples with those obtained from analytical results shows the applicability of presented finite element formulation.

Key Words: Relaxation Viscoelastic Equations, Contact Problems, Incremental Adaptive Procedure, Augmented Lagrangian Approach

ashrafi@shirazu.ac.ir -کارشناس ارشد: ۱

farid@succ.shiraz.ac.ir :- استادیار (نویسنده پاسخگو): ۲-

۱– مقدمه

۱۲

مسائل مقدار مرزی در برگیرنده تماس یکی از مهمترین مسائل در صنایع وابسته به مهندسی مکانیک، سازه و همچنین در کاربردهای علوم فضایی، علوم پزشکی و محیط زیست میباشند. این نوع مسائل در برهمکنشهای مکانیکی سامانہ ہای فیزیکے بہ دلیل نام شخص بودن ناحیه تماسی به عنوان مسائل مقدار مرزی غیرخطی شناخته می شوند و به الگوریتمهای حل خاصی نیاز دارند. در این برهمکنش ها بسته به کاربرد سیستم فیزیکی ممكن است رفتار اصطكاكي، ياسخ گذراي نواحي مشترك، كوپلينگ ترمومكانيكي، برهمكنش با روانسازها يا لايههاي میانجی سیال با پیکرہ هدف و تزویج آسیب سایشی نیز مورد تحلیل قرار گیرند. اغلب مسائل مرتبط با مکانیک تماس به دلیل طبیعت غیرخطی و پیچیده تماس در فرآيندهاي طراحي مرسوم با فرضيات خاصي بطور تقريبي حل میشدند. اما امروزه مکانیسمهای تماس را میتوان با گسترش تکنولوژی کامپیوترهای مدرن با بکارگیری ابزاری به نام مکانیک محاسباتی شبیهسازی نمود.

مسائل کلاسیک چرخ دندهها، یاتاقانها و بادامکها، تماس تایر با جاده، شکل دهی مواد، اتصال اعضای ساختاری سازهها به وسیله پیچ و مهره یا پدیده ضربه اتومبیلها از سطوح کاربرد تحلیلهای تماسی در فرآیندهای طراحی مهندسی مکانیک میباشند. در برخی از این موارد هم نیاز به تأمل بیشتری در معادلات متشکله غیرالاستیک و گاهی نیز تغییرشکلهای کراندار وجود دارد. از سوی دیگر به دلیل رفتار ویسکوالاستیک سازههای مهندسی – پاسخ خزشی و وارهیدگی تنشی – لزوم تحلیل برهمکنش های مکانیکی ناشی از تماس و ضربه در طراحی سازههایی ایمن بسیار احساس می گردد.

در واقع هر پدیده در طبیعت به کمک قوانین فیزیک بر حسب معادلات جبری، دیفرانسیلی و یا انتگرالی قابل توصیف میباشد. مطالعه پدیدههای فیزیکی توسط محققان علوم مهندسی در دو راستای اصلی مدلسازی و فرمولبندی پدیدها و تحلیل عددی مدل ریاضی معطوف میباشد. اگرچه استخراج معادلات حاکمه اکثر مسائل مهندسی دشوار نمیباشد ولی حل آنها با روشهای تحلیلی دقیق بسیار دشوار و در مواردی هم غیرممکن

است. در سالهای اخیر شاخههای متفاوتی را می توان به دلیل تنوع کاربردی گسترده مسائل تماسی در مکانیک محاسباتی از یک دیگر متمایز نمود که مهمترین آنها عبارتند از: روشهای تفاضل محدود، روشهای المانهای گسسته، مرزی، روشهای بدون المان، روشهای المانهای گسسته، روش سیستمهای چندپیکره و روشهای المانهای محدود ا-۲]. بطور کلی در منابع دو نوع فرمول بندی اصلی نیز برای حل مسائل تماسی مورد استفاده قرار گرفته است: نامساوی های تغییراتی که بیانگر اصل کار مجازی به شکل نامساوی می باشد در فرمول بندی نوع اول استفاده می شود. ولی اغلب برای حل مسائل تماسی در کاربردهای عملی از فرمول بندی های تساوی تغییراتی استفاده می شود. ولی اغلب برای حل مسائل تماسی در کاربردهای عملی از فرمول بندی های تساوی تغییراتی استفاده می شود. مرول بندی مای حمای تساوی تغییراتی استفاده می شود. مرمول بندی مای تساوی تغییراتی استفاده می شود. در

ادن ^۱ و کیکوچی ^۲ [۴] مسائل تماسی بدون اصطکاک را با استفاده از نامساویهای تغییراتی فرمول بندی کردند و در خصوص وجود و یکتایی حل خود نیز با ارائه مثال های عددی بحث نمودند. سیمو^۳ و لارسن^۴ [۵] نیز برای نخستین مرتبه از رهیافت لاگرانژ الحاقی برای تحلیل مسائل تماسی با قابلیت بهنگامسازی خودکار ضریب پنالتی و ارضای قیود از طریق مقادیر محدود پنالتی استفاده نمودند. حل مستقیم انتگرال های وارهیدگی ولترا استفاده نمودند. حل مستقیم انتگرال های وارهیدگی ولترا ویسط لیی⁶ و راجرز⁹ [۶] در تحلیل تسنشهای ویسکوالاستیک ارائه شد. تیلور⁹ و همکارانش [۷] هم یک فرم بازگشتی را برای معادلات متشکله ویسکوالاستیک کلوین استخراج کردند که آن ها را قادر به حل مسائل زیادی می ساخت. مدل ویسکوالاستیک سه بعدی نوینی

- 4-Laursen
- 5-Lee
- 6-Rogers
- 7-Taylor

¹⁻Oden

²⁻Kikuchi

³⁻Simo

روش المانهای محدود و انتگرال گیری نقطه میانی توسط سیمو^۱[۸] ارائه شد. زوچر^۲ و همکارانش [۹] هم در یک مدل المانهای محدود سه بعدی شبه استاتیکی از یک فرمول بندی نموی مستقیم برای اعمال به معادلات متشکلهی یک محیط ویسکوالاستیک ارتوتروپیک استفاده کردند. ایدسمن^۳ و همکارانش [۱۰] از گسستهسازی نامتقارن و یک فرمول بندی تغییراتی که از روشهای پیوسته و غیرپیوسته گالرکین استخراج می شد برای مدل سازی رفتار وارهیدگی ویسکوالاستیک سازهها با مدل ماکسول تعمیمیافته در دامنه زمانی و فضایی پیوسته استفاده نمودند.

یک مدل المان های محدود دو بعدی نیز بر اساس اعمال اصل كار مجازى توسط چن أو همكارانش [11] با استفاده از یک فرآیند نموی در معادلات متـشکلهی مـدل ماكـسول تعميم يافتـه براى تحليل مـسائل تماسي ویسکوالاستیک ارائه گردید. بر اساس یک فرمولبندی تغييراتي و استفاده از اصل پسرونده اويلر، فرناندز⁶ و سوفونی [17] مـسئلهی تمـاس شـبه اسـتاتیکی بـدون اصطکاک بین یک پیکرہی ویسکوالاستیک با یک بستر تغییر شکل یذیر را مورد توجه قـرار دادنـد. آماسـاد و فـابر [۱۳] نیز مسئله تماسی تک سویه بین یک پیکره ویسکوالاستیک با یک بستر صلب را با در نظر گرفتن قانون اصطکاک کولمب تحلیل کردند. محمود و همکارانش [۱۴] یک فرمول بندی المان های محدود نموی را برای تحلیل مسائل تماسی ویسکوالاستیک در شرایط شبه استاتیکی و اصطکاکی ارائه نمودند که در آن به منظور مدلسازی معادلات متشکله ویسکوالاستیک از مدل ویچرت برای در نظر گرفتن هم رفتار وارهیدگی تنشی و هم خزشی استفاده کردند و برای اجرای قیود تماسی نیز از روش مرسوم ضريب لاگرانـ ثبهـره گرفتنـد. فرآينـد نموسازی متفاوتی برای انتگرال گیری از انتگرال های استیلجس معادلات وارهیدگی اتساعی و برشی به کمک

1-Simo

- 2-Zocher 3-Idesman
- 4-Chen
- 5-Fernandez
- 6-Sofonea

توابع واحد و دلتا توسط اشرفی [۱۶– ۱۵] ارئه گردید، کـه در آن برای حل قیود تماسی ویـسکوالاستیک نیـز از یـک رهیافت لاگرانژ الحاقی بهبود یافته استفاده شد.

بطور کلی، تماس در پیکرههای تغییرشکل پذیر به دلیل تغییر پیوسته شرایط مرزی در نواحی مشترک تماسی با اعمال نیرو یک مسئله غیرخطی میاشد. از ســوی دیگــر، تــنشهـای تماسـی در سـازههـای ويسكوالاستيك، هم تحت تأثير خواص الاستيك و هم خواص ویسکوز میباشند. از این رو هم پیکربندی تماسی و هم توزیع تنشهای تماسی وابسته به زمان خواهند بود و با یک مسئله وابسته به زمان غیرخطی روبرو می گردیم. در این مقاله به توسعهی یک فرمول بندی کلی بر اساس روش المانهای محدود با در نظر گرفتن تماس در سازههای ویسکوالاستیک پرداخته میشود. به منظور مـدلسـازی معـادلات متـشکله از یـک مـدل ماکـسول تعمیمیافته استفاده میشود که بر مبنای آن یک فرمول بندی جدید با یک فرآیند نموسازی در معادلات وارهيدگي استخراج مي گردد. مدل ماكسول تعميميافته كه جامعترين مدل براى بيان رفتار متشكله ويسكوالاستيك محسوب می شود را می توان در قالب دو تابع وارهیدگی در اتساع و برش بیان نمود. در این فرمول بندی وابسته به زمان به دلیل اینکه جابجایی و کرنش کل در هر لحظه در محاسبه تنش کل مورد استفاده قرار نمی گیرند از بروز خطاهای عددی که در اثر انتخاب طول گامهای زمانی بزرگتر ممکن است ایجاد شوند نیز جلوگیری میکند.

۲- مدلسازی محیطهای پیوسته معادلات متشکله وارهیدگی ماکسول تعمیم یافته

قابلیت ذخیرهسازی و استهلاک همزمان انرژی مکانیکی در هنگام مواجه با نیروی خارجی در برخی مواد پرکاربرد مهندسی وجود دارد که ویسکوالاستیک نامیده میشوند. معادلات متشکله ویسکوالاستیک به صورت ذاتی نه تنها شامل تنش و کرنش بلکه در برگیرندهی آهنگهای زمانی تغییرات تنش و کرنش نیز میباشند.

مختصات یک نقطه از جسمی در پیکربنـدی مرجـع x_i الم کارتزین قائم بـا X_i و در پیکربنـدی فعلـی بـا نشان داده مـیشـود. تاریخچـه زمـانی حرکـت پیوسـته و

$$\sigma_{ij}(t) = \int_{0}^{t} G_{ijkl}(t-\tau) \frac{\mathrm{d}\varepsilon_{kl}(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \,\mathrm{d}\tau. \tag{Y}$$

در مشتق گیری از $\mathcal{E}_{kl}(t)$ باید دقت شود که مشتق حاصل به صورت تابعی پیوسته در زمان باشد ولی تاریخچه کرنش میتواند ناپیوسته هم باشد. رابطه تنش–کرنش (۷) بیانگر منظر کلی معادلات متشکله ویسکوالاستیک در وارهیدگی میباشد. توابع انتگرالی I_{ijkl} بیانگر خواص ویسکو الاستیک پیکرهها در وارهیدگی بوده که با آزمایشهای وارهیدگی تنشی قابل اندازه گیری میباشند [۱۹].

کلیترین بازنمایی فـرم ایزوتروپیـک تانـسور مرتبـه چهارم توابع وارهیدگی در کاربردهای عملی مهندسـی بـه شکل زیر میباشد [۱۸]:

که در آن، _۱G_و G₂ به ترتیب بیانگر توابع وارهیدگی مستقل متناسب با رفتار برشی و حجمی سازه میباشند. متناظر با اصول مشابهی در تئوری الاستیسیته میتوان مؤلفههای انحرافی تنش _{ij} و کرنش _{ij} را معرفی نمود و سپس معادله (۲) را با استفاده از رابطه (۸) بازنویسی نمود:

$$s_{ij} = \int_{-\infty}^{t} G_1(t-\tau) \frac{\mathrm{d}e_{ij}(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \mathrm{d}\tau, \qquad (9)$$

$$\sigma_{kk} = \int_{-\infty}^{t} G_2(t-\tau) \frac{\mathrm{d}\varepsilon_{kk}(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \mathrm{d}\tau.$$
 (1.2)

به طوری که:

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk}, \qquad s_{ii} = 0 \tag{11}$$

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij} \varepsilon_{kk}. \qquad e_{ii} = 0 \tag{11}$$

در حالت کلی، معادلات متشکله وارهیدگی به صورت زوج انتگرالهای هردیتاری (۱۰– ۹) بر حسب پاسخهای برشی و حجمی نیشان داده می شوند. تئوری های ویسکو الاستیسیته خطی به وسیله مدل هایی که در برگیرنده دو المان بدون جرم، فنر خطی هوکین و مستهلک کننده مؤلفههای بردار جابجایی فعلی به ترتیب عبارتند از [۱۸– ۱۷]:

$$\begin{aligned} x_i(\tau) &= x_i(X_j, \tau), \qquad [-\infty < \tau \le t], \qquad (1) \\ u_i(\tau) &= x_i(\tau) - X_i, \qquad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{split} \sum_{\tau} \sum_{i=1}^{T} \sum_{\tau} u_{i,j}(\tau) \left(t \right) & = \sum_{\tau} \sum_{\tau} \sum_{i=1}^{T} \sum_{\tau} \sum_{\tau} \sum_{\tau} \sum_{\tau} \sum_{i=1}^{T} \sum_{\tau} \sum_$$

که در آن، نماد sup بیانگر کمترین حد فوقانی است. تئوری ویسکو الاستیسیته در شرایطی که کرنش ۱>> ε و جابجاییهای پیکرهی پیوسته در قیاس با ابعاد مشخصاتی آن کوچک باشند به صورت مقدار کوچک تعریف میشود. حال بردار تنش σ را بر حسب نیروی منتجه G اعمالی بر المان رویهای δa یک پیکره میتوان به صورت زیر تعریف نمود:

$$\sigma_i = \lim_{\delta a \to 0} G_i / \delta a. \tag{(f)}$$

این بردار تنش بر روی رویه δa نسبت به جهت مثبت بردار واحد نرمال n تعریف میشود. رابط ه متشکله بین تنش و کرنش در تئوری تغییرشکلهای کوچک با فرض وابستگی کامل مقدار فعلی تانسور تنش به تاریخچهی گذشته مؤلفههای تانسور کرنش به شکل زیر بیان میشود:

$$\sigma_{ij}(t) = \psi_{ij}^{\infty} \left(\varepsilon_{kl}(t-s), \varepsilon_{kl}(t) \right), \qquad (\Delta)$$

که در آن، ψ_{ij} بیانگر کنشمند تانسوری است که هر σ_{ij} بیانگر کنشمند تانسوری است که هر تاریخچه کرنش متناظر σ_{ij} پیوسته و تبدیل می کند. اگر تاریخچه زمانی کرنش (t_{ij} پیوسته و کنشمند تانسوری خطی فرض شوند با استفاده از تئوری بازنمایی ریس می توان کنشمند را به صورت انتگرالی استیلجس درآورد تا رابطه زیر حاصله گردد:

$$\sigma_{ij}(t) = \int_{0}^{\infty} \varepsilon_{kl}(t-s) \, \mathrm{d}G_{ijkl}(s),$$

که در آن، توابع انتگرالی G_{ijkl} در این رابطه یک تانسور متقارن مرتبه چهارم میباشد. حال با برابر صفر قرار دادن (t) برای زمانهای کوچکتر از صفر و با فرض پیوستگی در $G_{ijkl}(t)$ و مشتق زمانی اول آن در بازه ($\infty > t \geq 0$)،

(6)

نیوتنی میباشند به صورت مصور بازنمایی میشوند. با ترکیبهای مناسبی از این دو المان اساسی مدلهای ویسکوالاستیک متفاوتی را میتوان طرح ریزی نمود. یک مدل ساده برای بیان رفتار سازههای ویسکوالاستیک از ترکیب یک فنر و یک مستهلککننده بطور سری حاصل میشود که به مدل ماکسول مشهور است. یک بازنمایی مناسب از رفتار وارهیدگی سازههای ویسکوالاستیک واقعی مناسب از رفتار وارهیدگی سازههای ویسکوالاستیک واقعی کنار هم بدست آورد که به مدل ماکسول تعمیمیافته در مشهور است. توابع اتساعی و برشی ماکسول تعمیمیافته در بازنمایی رفتار وارهیدگی تنش تحت کرنش ثابت به صورت مجموع عبارات نمایی کاهشی در زمان بیان میگردند:

$$G_{1}(t) = \sum_{p=1}^{N} A_{p} e^{(-a_{p}t)},$$

$$G_{2}(t) = \sum_{p=1}^{N} B_{p} e^{(-b_{p}t)},$$
(17)

که در آن، N تعداد کل المانهای ماکسول، A_p و B_p نیز بیانگر ضرایب وارهیدگی متناظر با معکوس زمانهای وارهیدگی a_p و b_p میباشند.

- فرآیند نموسازی انطباقی در معادلات وارهیدگی به منظور نموسازی رفتار متشکله در یک دامنه زمانی بایستی در ابتدا دامنه به فواصل زمانی Δt گسسته شود. در نتیجه برای زمان فعلی t_{n+1} داریم: $t_n + \Delta t$ سیته منظور اعمال مستقیم فرمولبندی المانهای محدود به روابط متشکله (۱۲–۹) از یک فرآیند نموسازی انطباقی استفاده شده است. تانسور تنش حجمی σ_{kk} با جایگزینی تابع وارهیدگی اتساعی (۱۳) در معادله متشکله (۱۰) در زمان t_n به صورت زیر استخراج شده است:

$$\sigma_{kk}^{(n)}(x,t_n) = \int_0^{t_n} G_2(t_n-\tau) \frac{\mathrm{d}\varepsilon_{kk}(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \mathrm{d}\tau$$
$$= \sum_{p=1}^N \left(\int_0^{t_n} B_p e^{-b_p(t_n-\tau)} \frac{\mathrm{d}\varepsilon_{kk}(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \mathrm{d}\tau\right) = \sum_{p=1}^N \sigma_{kkp}^{(n)}, \quad (1\%)$$

که در آن، $\sigma_{kkp}^{(n)}$ در این رابطه نشان دهنده تنش حجمی المان ماکسول p ام در لحظه زمانی t_n می باشد. با استدلال مشابهی می توان تانسور تنش انحرافی $s_{ij}^{(n)}$ را نیز

در لحظه زمانی t_n بدست آورد. حال میتوان تانسور تنش حجمی σ_{kk} را در لحظه فعلی t_{n+1} به صورت زیـر بیـان نمود:

$$\begin{aligned} \sigma_{kk}^{(n+1)}(x,t_{n+1}) &= \int_{0}^{t_{n+1}} G_{2}(t_{n+1}-\tau) \frac{d\varepsilon_{kk}(\tau)}{d\tau} d\tau \\ &= \sum_{p=1}^{N} \left[\int_{0}^{t_{n+1}} B_{p} e^{-b_{p}(t_{n+1}-\tau)} \frac{d\varepsilon_{kk}(\tau)}{d\tau} d\tau \right] \\ &= \sum_{p=1}^{N} \left[\int_{0}^{t_{n}} B_{p} e^{-b_{p}(t_{n}-\tau)} \frac{d\varepsilon_{kk}(\tau)}{d\tau} d\tau \right] e^{-b_{p}(\Delta t)} \\ &+ \sum_{p=1}^{N} \left[\int_{t_{n}}^{t_{n+1}} B_{p} e^{-b_{p}(t_{n+1}-\tau)} \frac{d\varepsilon_{kk}(\tau)}{d\tau} d\tau \right] \end{aligned}$$
(12)

قسمت اول رابطهی فوق وضعیت تنش در زمان t_n را بیان میکند و قسمت دوم بیانگر تغییرات تنش در بازه زمانی [t_n, t_{n+1}] است که نموسازی مناسب معادلات وارهیـدگی

آن در این مقاله مورد نظر قرار گرفته است (شکل ۱). در اینجا دو رهیافت متفاوت به منظور نموسازی بخش دوم رابطه انتگرالی ارائه گردیده است. در رهیافت اول تغییرات کرنش حجمی $\Delta \varepsilon_{kk}$ در بازه زمانی $[t_n, t_{n+1}]$ ثابت فرض شده است و به منظور پیشبرد حل عددی، تاریخچه زمانی کرنش (τ) هم به صورت حاصل جمع یک سری توابع پلهای واحد $(\tau - t_n)$ در نمو کرنش مربوطه مدل سازی گردیده است:



$$f_{ij}^{(n)}(\Delta t) = \sum_{p=1}^{N} s_{ijp}^{(n)} e^{-a_p(\Delta t)} + \frac{1}{3} \delta_{ij} \sum_{p=1}^{N} \sigma_{kkp}^{(n)} e^{-b_p(\Delta t)} .$$
 (YY)

از معادله نهایی (۲۰) می توان دریافت که تانسور تنش کل از معادله نهایی (۲۰) می توان دریافت که تانسور تنش که $\sigma_{ij}^{(n+1)}$ متشکل از دو بخش مجزا می باشد: بخشی که شامل تنشی است که در طی فاصله زمانی [t_n, t_{n+1}] روند نمایی کاهشی دارد و بخش دیگری که شامل تنش نموی می باشد که در اثر کرنش نموی $\Delta \varepsilon_{kl}$ در این گام زمانی می باشد که در اثر کرنش نموی $\Delta \varepsilon_{kl}$ در این گام زمانی حاصل شده است. بنابراین تنش کل $\sigma_{ij}^{(n+1)}$ در لحظه r_{n+1} به جای کرنش کل تنها به سطح تنش گذشته و کرنش نموی اعمالی در فاصله زمانی وابسته است.

۴- فرمول بندی المان های محدود مـــسائل تماســی ویسکوالاستیک

برای معرفی مشخصات مسئله تماسی دوبعدی، یک پیکره تغییر شکل پذیر به عنوان جسم تماسی و یک پیکره صلب به عنوان هدف مورد استفاده قرار گرفته اند. پیکربندی تماسی سیستم با مختصات مادی $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$ در شکل ۲ نشان داده شده است. پیکره تغییر شکل پذیر یا پیکره تماسی به وسیله دامنه Ω و مرز Γ مشخص شده است. پیکرہ تماسی تحت اعمال نیروہای حجمے ، تراکشن سطحی \overline{u}_i بر روی مرز Γ_s و جابجایی مشخص \overline{u}_i بر NOE روی مرز Γ_d میباشد. پیکره تماسی به تعداد NOE المان محدود در برگیرندهی NON گره گسسته سازی شده است. گره (P) در پیکربندی مرجع روی مرز پیکره تماسی با بردار ^۳ X و نقاط I و J روی لبهی پیکره هدف با بردارهای X^I و X^I قرار گرفتهاند. سیستم مختصات موضعی روی لبه پیکره هـدف با بردارهای واحـد n و نشان داده شده است. فاصلهی نرمال ابتدایی گره تماسی (P) با رابطه زیر تعریف می شود:

$$\mathbf{d}_{0}^{\mathbf{P}} = (\mathbf{X}^{\mathbf{J}} - \mathbf{X}^{\mathbf{P}}) \cdot \mathbf{n} .$$
 (YY

$$\mathbf{d}_{n}^{P} = (\mathbf{d}_{0}^{P} - \mathbf{u}^{P}, \mathbf{n}) = (\mathbf{d}_{0}^{P} - u_{n}^{P}), \qquad (\Upsilon \mathfrak{F})$$

که در آن، u_n^p بیانگر جابجایی نرمال گره تماسی (P) میباشد. نیروی تماسی f_c^P بر روی پیکره هـدف در نتیجهی تماس گره (P) پیکره تماسی با لبه هـدف ایجاد

$$\begin{split} \boldsymbol{\varepsilon}_{kk}(\tau) = \mathbf{l}(\tau - t_0) \, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{kk}^{(0)} + \mathbf{l}(\tau - t_1) \, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{kk}^{(1)} + \dots \\ &+ \mathbf{l}(\tau - t_n) \, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{kk}^{(n)} \,. \end{split} \tag{19}$$

به دلیل آنکه کرنش در دامنه زمانی $[t_n, t_{n+1}]$ در فرآیند نموسازی به صورت توابع واحد فرض شده است از ایـن رو مشتق $d\varepsilon_{kk}(\tau)/d\tau$ آن هم در طی این بازه زمـانی برابـر با تابع دلتا خواهد بود [۲۰]. بنابراین، عبارت آهنگ کرنش حجمی را به صورت زیر میتوان تعریف نمود:

$$\frac{d\varepsilon_{kk}(\tau)}{d\tau} \approx \delta(\tau - t_0) \,\Delta\varepsilon_{kk}^{(0)} + \delta(\tau - t_1) \,\Delta\varepsilon_{kk}^{(1)} + \dots + \delta(\tau - t_n) \,\Delta\varepsilon_{kk}^{(n)}.$$
(1Y)

از این رو قسمت دوم معادله (۱۵) را با توجه به این قاعـده به صورت زیر میتوان بیان نمود:

$$\sum_{p=1}^{N} \left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} B_p e^{-b_p (t_{n+1}-\tau)} \frac{\mathrm{d}\varepsilon_{kk}(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \mathrm{d}\tau \right] \qquad (1\lambda)$$
$$= \sum_{p=1}^{N} \left[B_p e^{-b_p (t_{n+1}-t_n)} \Delta \varepsilon_{kk} \right]$$

با استفاده از رهیافت نقطه میانی [۱۵ و ۲۱] که از آن در بسیاری از نرم افزارهای تجاری المانهای محدود هم استفاده می گردد نیز قسمت دوم معادلهی انتگرالی (۱۵) انتگرال گیری عددی شده است. از اینرو حل آن با رهیافت دوم به صورت زیر بدست آمده است:

$$\sum_{p=1}^{N} \left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} B_p e^{-b_p (t_{n+1} - \tau)} \frac{\mathrm{d} \mathcal{E}_{kk}(\tau)}{\mathrm{d} \tau} \mathrm{d} \tau \right]$$
$$= \sum_{p=1}^{N} \left[B_p e^{-b_p (t_{n+1} - t_n)/2} \Delta \mathcal{E}_{kk} \right].$$
(19)

به صورت مشابهی تنش انحرافی کلی $s_{ij}^{(n+1)}$ در لحظه ی زمانی t_{n+1} نیز با استفاده از هر دو رهیافت استخراج شده است. در پایان، تانسور تنش ویسکوالاستیک کل $\sigma_{ij}^{(n+1)}$ در لحظهی t_{n+1} با ترکیب معادلات حجمی و انحرافی به صورت تخمینی زیر استخراج شده است:

$$\sigma_{ij}^{(n+1)}(x,t_{n+1}) = C_{ijkl}(\Delta t) \Delta \varepsilon_{kl} + f_{ij}^{(n)}(\Delta t), \qquad (\Upsilon \cdot)$$

$$C_{ijkl}(\Delta t)\Delta \varepsilon_{kl} = G_1\left(\frac{\Delta t}{2}\right)\Delta e_{ij} + \frac{1}{3}\delta_{ij} G_2\left(\frac{\Delta t}{2}\right)\Delta \varepsilon_{kk}, \quad (\Upsilon)$$

www.SID.ir

می شود کے بے دو مؤلف ہی تماس نرمال R_n^P و تماس مماسی اصطکاکی f_{f}^{P} قابل تجزیه است. به منظور جلوگیری از نفوذ پیکرهها در یکدیگر از قید نفوذ ناپذیری تماس تک سویه استفاده شده است. قانون تماس تک سویهی بین دو پیکره شامل شرایط نفوذ ناپذیری، فشاری و تکمیلی است که عبارتند از: $g_{n}^{P} \leq 0 [g_{n}^{P} = -d_{n}^{P}],$ (۲۵) $R_n^P \ge 0$, $(\mathbf{R}_{n}^{P})(\mathbf{g}_{n}^{P}) = 0.$ (for all $P \in \Gamma_{c}^{2}$). شرط اصلی قانون تماس تک سویه در عدم نفوذ پیکرههای تماس و هدف در یکدیگر است. شرط فشاری تماس تک سویه بیانگر عدم ایجاد کشش بین پیکرههای تماسی و هدف میباشد. شرط مکمل نیز نشان میدهد که پیکرهی تماس یا از هدف جدا می شود (R_n^P = 0, g_n^P < 0) و یا بر روی پیکرہ هدف فشردہ میگردد ($R_n^P \ge 0, g_n^P = 0$). تماس بدون اصطکاکی در این مقاله بین پیکرهها

فرض شده است که در نتیجه با حل مـــــله بهینــهسـازی زیر به حل سیستم تماسی دست یافته ایم:

min $\Pi := \frac{1}{2} \overline{\mathbf{U}}^{\mathrm{T}} \overline{\mathbf{KU}} - \overline{\mathbf{U}}^{\mathrm{T}} \overline{\mathbf{F}}$ subjected to $\mathbf{g}_{n}^{\mathrm{P}} := \mathbf{u}_{n}^{\mathrm{P}} - \mathbf{d}_{0}^{\mathrm{P}},$ (79)



که در آن، Π انرژی پتانسیل کل، $\overline{\mathbf{K}}$ ماتریس سختی کل، $\overline{\mathbf{U}}$ بردار جابجایی کل، $\overline{\mathbf{F}}$ بردار نیروی خارجی کل و g_n^P قید تماسی گره P ام میباشد (NON,..., NO P = 1,2,... برای حل این نوع مسائل تماسی به منظور بدست آوردن بردار جابجایی $\overline{\mathbf{U}}$ و ضرایب لاگرانژ R_n^P متناسب با NOC گره تماسی از یکی از روشهای حل بهینهسازی استاندارد به نام روش لاگرانژ الحاقی استفاده شده است. به

این دلیل که مسائل تماس بدون اصطکاک تنها در برگیرندهی قیود نامساوی اند، لذا از قیود تساوی در الگوریتم استفاده نشده است. کنشمند لاگرانژ الحاقی Φ نیز برای مسئله تماسی تحت قیود (۲۶) به صورت زیر تعریف گردید:

$$\Phi(\overline{\mathbf{U}}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{K}_{n}) = \Pi +$$

$$\frac{1}{2} \sum_{P=1}^{NOC} K_{n}^{P} [(\mathbf{g}_{n}^{P} + \boldsymbol{\theta}^{P})_{+} - (\boldsymbol{\theta}^{P})^{2}],$$
(YY)

که در آن، بیانگر بردار در برگیرنده پارامترهای θ^{P} قید ranks در آن، بیانگر بردار در برگیرنده پارامترهای پنالتی مثبت ranks ام است و \mathbf{K}_{n} بردار پارامترهای پنالتی مثبت $(\mathbf{I}_{n}, \mathbf{L}_{n})$ ام است و \mathbf{K}_{n} بردار پارامترهای پنالتی مثبت $(\mathbf{I}_{n}, \mathbf{L}_{n})$ دهنده $\mathbf{R}_{n}^{P} = \mathbf{K}_{n}^{P} \theta^{P}$ i در این رابط نیا نگر ضریب \mathbf{V} رانژ قید P ام می باشند. در این رهیافت، قیود مؤثر \mathbf{I}_{1} و غیرمؤثر \mathbf{I}_{2} به صورت زیر بیان شدند:

- $\mathbf{I}_{1} = \{ \mathbf{P} : (\mathbf{g}_{n}^{\mathbf{P}} + \boldsymbol{\theta}^{\mathbf{P}}) \ge 0, \quad \mathbf{P} \in \Gamma_{c}^{2} \}, \quad (\Upsilon \boldsymbol{\Lambda})$
- $I_2 = \{P : (g_n^P + \theta^P) < 0, P \in \Gamma_c^2\}.$ (Y9)

سپس، کنشمند لاگرانژ الحاقی Φ را با توجه به این قیود به صورت سادهسازی شده زیر بازنویسی نمودیم:

$$\Phi(\overline{\mathbf{U}}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{K}_{n}) = \Pi - \frac{1}{2} \sum_{P \in I_{2}} K_{n}^{P} (\boldsymbol{\theta}^{P})^{2} \qquad (\boldsymbol{\mathcal{V}} \boldsymbol{\cdot})$$
$$+ \sum_{P \in I_{1}} K_{n}^{P} \boldsymbol{\theta}^{P} \mathbf{g}_{n}^{P} + \frac{1}{2} K_{n}^{P} (\mathbf{g}_{n}^{P})^{2}.$$

ایده روش لاگرانژ الحاقی در واقع بر مبنای تبدیل یک مسئلهی مقید مورد نظر به یک سری مسائل بدون قید و کمینهسازی شده کنشمند لاگرانژ الحاقی میباشد. مقادیر پارامترهای θ و \mathbf{K}_n در ابتدای هر کمینهسازی غیرمقید انتخاب میشود و سپس تابع $(\mathbf{U}, \mathbf{\theta}, \mathbf{K}_n)$ نسبت به متغیر جابجایی \mathbf{U} کمینه میشود. پارامترهای θ و \mathbf{K}_n میشوند و فرآیند به همین صورت نیاز بهنگام سازی همگرایی حاصل شود. مسئله تماسی ما به دلیل وابستگی زمانی رفتار ویسکوالاستیک برای یک دامنه کراندار زمان نیز بایستی حل شود. دامنهی زمانی برای این منظور به بهنگام سازی شونده و انطباقی الگوریتم تماس بطور کامل بهنگام سازی شونده و انطباقی الگوریتم تماس بطور کامل برای هر گام زمانی نیز اجرا شده است. لازم به ذکر است

حل نیازی نیست که برای دستیابی به همگرایی به سـمت بی نهایت میل داده شوند، در نتیجه از شرطگذاری ضعیف روش مرسوم پنالتی نیز با این کار جلوگیری شده است.

پیشرفت این رهیافت لاگرانژ الحاقی به کمینهسازی غیر مقید کنشمند ($\overline{U}, \theta, K_n$) و نیز فرآیند بهنگام سازی ضرایب لاگرانژ آن بستگی دارد. دقت، بازدهی و توانمندی این رهیافت نیز بستگی به نحوهی اجرای صحیح این دو مرحله دارد. شرط بهینگی مرتبهی اول برای تابع لاگرانژ رابطیه (۲۷) بیا استفاده از ضرایب لاگرانژ

یک فرآیند بهنگام سازی مؤثر نیز برای ضرایب لاگرانژ با استفاده از قاعده دوگانگی تئوری بهینهسازی [۲۲] استخراج شده است. در این روش دوگانه برای بهنگام سازی با ضرایب لاگرانژ \mathbf{R} به جای پارامترهای $\boldsymbol{\theta}$ کار شده است. یک فرآیند بیشینهسازی دوگانه غیرمقید برای دستیابی به مقدار تخمینی فعلی ضرایب لاگرانژ \mathbf{R}^{P}_{n} استفاده شده که در منابع به آن بهنگام سازی ضرایب هم گفته میشود. رابطه تکرارشوندهی زیر به منظور بهنگام سازی بردار [1× NOC] ضرایب لاگرانژ \mathbf{R}_{n} بکار میرود:

$$\mathbf{R}_{n}^{j+1} = \mathbf{R}_{n}^{j} + \lambda^{j} \mathbf{d}, \qquad (\texttt{T1})$$

 λ ، [NOC ×1] که در آن، **d** یک بردار تعیین جهت [NOC]، $\lambda^j \mathbf{d}^j = \Delta \mathbf{R}_n^i$ طول گام و $\lambda^j \mathbf{d}^j = \Delta \mathbf{R}_n^i$ بیانگر تغییرات بردار ضرایب است.

حال، در اینجا مراحل الگوریتم فرمول بندی لاگرانژ الحاقی مورد استفاده به اختصار ارائه می گردند: ۱- قرار دادن 0 = t، ۲- قرار دادن 0 = j و نیز تخمین لاگرانژ \mathbf{P}_n^0 و پارامترهای پنالتی \mathbf{K}_n^0 ، ۳- کمینه سازی $(\overline{\mathbf{U}})$ برای مسئله تماس (۲۶) با حل معادله تعادل و نیز اجازه دادن به $\overline{\mathbf{U}}$ برای جواب بودن، ۴- توقف فرآیند تکرار در صورت ارضای ملاک همگرایی، ۵- بهنگام سازی \mathbf{R}_n^j و در صورت نیاز افزایش مقادیر پارامترهای پنالتی پنالتی \mathbf{r}_n^j ، ۶-قرار دادن $\mathbf{t} + j = j$ و رفتن به مرحله سوم و ۲- قرار دادن قرار دادن t + t = t

۵- کاربردهای مدلسازی عددی

به منظور ارزیابی و ارائه قابلیتهای فرمول بندی المانهای محدود غیرخطی و وابسته به زمان توسعه یافته در تحلیل مسائل ویسکوالاستیک سازهای بر روی دو مسئله متف اوت مهندسی اعمال شده است.

در مدل ابتدایی به بررسی پاسخ شبه استاتیک یک سازه استوانه ای ویسکوالاستیک جدار ضخیم تحت فشار داخلی یکنواخت *P* پرداخته شده است (شکل **۳**). اکثر مطالعات بر مبنای در نظرگیری مخازنی به اندازه کافی طویل است که شرایط کرنش صفحه ای در آنها صادق باشند [۱۸–۱۷]. فقط یک چهارم مدل اول به دلیل تقارن دوطرفه آن گسسته سازی المانهای محدود شده است. شعاع داخلی مخزن ۲۵۰ و شعاع خارجی آن نیز ۵۰۰ میلی متر انتخاب گردیده است. خواص متشکله سازه در وارهیدگی به صورت پاسخ الاستیک در اتساع و پاسخ ویسکوالاستیک خطی استاندارد (SLS) در رفتار انحرافی فرض شده است که در قالب مدل ماکسول تعمیم یافته عبارتند از:

$$G_1(t) = 3.53 + 8.47 e^{\left(\frac{-1}{8}\right)}$$
. $G_2(t) = 20$ (MPa). (TT)

جابجایی شعاعی دیوارههای داخلی و خارجی این مخزن استوانهای به کمک فرمول بندی جدید محاسبه شدهاند و سپس با حل تحلیلی [۱۸] و فرمول بندی عددی المانهای مرزی [۲۳] نیز مورد مقایسه قرار گرفتهاند که نتایج آن در شکلهای ۵-۴ قابل مشاهده می باشند. همچنین، تأثیر وابستگی طول گامهای زمانی برای جابجایی جداره داخلی مخزن استوانهای در شکل ۴ مشخص است. این رهیافت از بروز خطاهای عددی که در اثر انتخاب طول گامهای زمانی بزرگتر ممکن است ایجاد شوند جلوگیری می کند.



ش کل(۳): نمای سطح مقطع عرضی سازه وی سکوالاستیک استوانهای جدار ضخیم و نمای گسستهسازی شده آن.



شکل(۴): جابجایی شعاعی محاسبه شده با فرمولبندی برای دیواره داخلی به ازای طول گامهای زمانی مختلف.



شکل(۵): جابجایی شعاعی محاسبه شده با فرمولبندی ارائه شده برای دیواره خارجی مخزن به ازای طول گام ۰/۱ مقایسه شده با حل تحلیلی و رهیافت المانهای مرزی.

در مدل دوم، برهمکنش تماسی یک بلوک ویسکوالاستیک با یک فونداسیون الاستیک تحت جابجایی طولی مشخص ۲۵ میلیمتری برای نشان دادن پاسخ وارهیدگی مورد تحلیل قرار گرفته است. هندسه کلی مدل و شرایط مرزی آن در شکل ۶ قابل مشاهده است. تنها نیمی از این مدل عددی به دلیل تقارن طولی گسستهسازی المانهای محدود شده است. مشخصات مادی بلوک ویسکوالاستیک در وارهیدگی بر حسب گیگا پاسکال عبارتند از: $G_1(t) = 42 + 162 e^{(-t)}$ $G_2(t) = 84 + 300 e^{(-t)}$ (۳۳) نتایج حاصل از محاسبه توزیع فشار تماسی در میانجی به ازای زمانهای متفاوت در شکل ۷ نشان داده شده است.



شکل(۶): پیکربندی مدل تماسی یک بلوک ویسکوالاستیک بر روی یک فونداسیون.



شکل(۷): چگونگی توزیع فشار تماسی در ناحیه میانجی.

همان طور که در شکل ۷ دیده می شود نحوه توزیع ف شار تماسی در طول ناحیه مشترک میانجی مطابق آنچه ه م انتظار می رود به صورت کاملاً یکنواختی بدست آمده است. فشار تماسی در زمانهای ۵، ۱۰، ۱۵ و بالاتر در میانجی تقریباً ۲۰ مگا پاسکال بدست آمده است که ن شان دهنده همگرایی سیستم به این فشار می باشد. همچنین چگونگی رفتار وارهیدگی فشار تماسی وارد بر سازه ها با گذشت زمان نیز در شکل ۸ نشان داده شده است. ناحیه میانجی تماسی اگر چه افزایش تدریجی اندکی با گذشت زمان داشته است ولی توزیع فشار تماسی در اثر پاسخ وارهیدگی مت شکله مادی سازه ها ک اهش یافته است. تسن در وارهیدگی تحت کرنش ثابت روند کاهشی در زمان دارد.

در پایان قابل ذکر است که ضریب پواسون در فرمول-بندی ارائه شده برای مدل اول ۲/۴ و برای مدل دوم ۲/۳ فرض شده است. ۷- قدردانی مؤلفان بر خود بایسته میدانند که از راهنماییهای آقایان دکتر محزون و دکتر کسرایی (دانشگاه شیراز)، دکتر نپ (لابراتوار ملی ساندیا) و دکتر آرورا (دانشگاه آیوا) تشکر و قدردانی نمایند.

۸- مراجع

- 1. Wriggers, P., "Computational Contact Mech.", John Wiley & Sons, Chichester, 2004.
- 2. Laursen, T.A., "Computational Contact and Impact Mechanics", Springer, Berlin, 2002.
- 3. Mijar, A.R. and Arora, J.S., "Study of Variational Inequality and Equality Formulations for Elastostatic Contact Problems", Archives of Comp. Methods in Eng., Vol. 7, No. 1, pp. 387– 449, 2000.
- 4. Oden, J.T. and Kikuchi, N., "Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods", SIAM Pub., Philadelphia, 1988.
- 5.Simo, J.C. and Laursen, T.A., "An Augmented Lagrangian Treatment of Contact Problems Involving Friction", Computers and Structures, Vol. 42, No. 1, pp. 97–116, 1992.
- 6.Lee, E.H. and Rogers, T.G., "Solution of Viscoelastic Stress Analysis Problems, Using the Measured Creep or Relaxation Functions", ASME J. Applied Mech., Vol. 30, No. 1, pp. 127–133, 1963.
- 7. Taylor, R.L., Pister, K.S., and Goudreas, G.L., "Thermochemical Analysis of Viscoelastic Solids", Int. J. Num. Methods in Eng., Vol. 2, No. 2, pp. 45–59, 1970.
- 8.Simo, J.C., "On Fully 3-D Finite Strain Viscoelastic Damage Model: Formulation and Computational Aspects", Comp. Methods in Applied Mech. and Eng., Vol. 60, No. 1, pp. 153–173, 1987.
- 9.Zocher, M.A., Groves, S.E., and Allen, D.H., "A 3-D Finite Element Formulation for Thermoviscoelastic Orthotropic Media", Int. J. Num. Methods in Eng., Vol. 40, No. 3, pp. 2267–2288, 1997.
- Idesman, A., Niekamp, R., and Stein, E., "Finite Elements in Space and Time for Generalized Viscoelastic Maxwell Model", Comp. Mechanics, Vol. 27, No. 1, pp. 49–60, 2001.
- Chen, W.H., Chang, C.M., and Yeh, J.T., "An Incremental Relaxation Finite Element Analysis of Viscoelastic Problems with Contact and Friction", Comp. Methods in Applied Mech. and Eng., Vol. 109, No.2, pp. 315–329, 1993.



۶- نتیجهگیری

یک الگوریتم حل محاسباتی نموی - انطباقی جدید به منظور محاسبه فشارهای شبهاستاتیک تماسی سازههای ویسکوالاستیک در این پژوهش توسعه داده شد. مدل ماکسول تعمیمیافته به منظور مدل سازی معادلات متشکله وارهیدگی در قالب دو تابع کلی در پاسخهای اتساعی و انحرافی بهره گرفته شد. در این فرمولبندی، معادلات وارهیدگی به وسیله حاصل جمع سریهای توابع نمایی کاهشی در زمان بیان شدند. تانسور تنش کل لحظه فعلی در این فرمول بندی به جای کرنش کل تنها به سطح تنش گذشته و کرنش نموی گام زمانی وابسته میاشد. یک رهیافت لاگرانژ الحاقی استخراج یافته از تئوریهای بهینه سازی و قاعده دوگانگی نیز بر اساس شرایط سینماتیکی هندسی اجزای در حال تماس به منظور حل تماس ويسكو- الاستيك گسترش يافت. فرمول بندى ارائه شده به راحتے، از قابلیت تعمیم یابی رفتار وارهیدگی به پاسخ خزشی برخوردار است که برای این منظور از مدل ويسكوالاستيك كلوين تعميميافته به جاى ماكسول تعمیمیافته برای مدلسازی معادلات متشکله در خزش استفاده شدهاست. نتایج مناسب حاصل شده نشانگر قابلیتهای کاربردی بالای مدل المان های محدود ارائه شده برای بکارگیری در این نوع مسائل تماسی میباشد.

ASCE – ASME – SES Conf. on Mech. and Materials, Blacksburg, VA, USA, pp. 122-123, 2009.

- 17. Malvern, L.E., "Introduction to Mechanics of Continuous Medium", Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.
- Christensen, R.M., "Theory of Viscoelasticity, an Introduction", Academic Press, New York, 1982.
- 19. Ferry, J.D., "Viscoelastic Properties of Polymer", 3rd Ed., Wiley, New York, 1980.
- 20. Jeffrey, A. "Advanced Engineering Mathematics", Academic Press, New York, 2002.
- 21. Simo, J.C., and Hughes, T.J.R. "Computational Inelasticity", Springer, Berlin, 1998.
- 22. Jahn, J., "Introduction to the Theory of Non-linear Optimization", Springer, Berlin, 2007.
- 23. Ashrafi, H. and Farid, M., "A Mathematical Boundary Integral Equation Analysis of Standard Viscoelastic Solid Polymers", Comp. Math. and Modeling, Vol. 20, No. 4, pp. 397–415, 2009.

- Fernandez, J.R. and Sofonea, M., "Numerical Analysis of a Frictionless Viscoelastic Contact Problem with Normal Damped Response", Comp. & Math. with Appl., Vol. 47, No. 1, pp. 549–568, 2004.
- Amassad, A. and Fabre, C., "Analysis of a Viscoelastic Unilateral Contact Problem Involving the Coulomb Friction Law", J. Optimization Theory and Appl., Vol. 116, No. 4, pp. 465–483, 2003.
- Mahmoud, F.F., El–Shafei, A.G., Al–Shorbagy, A.E., and Abdel Rahman, A.A., "A Numerical Solution for Quasistatic Viscoelastic Frictional Contact Problems", ASME J. Tribology, Vol. 130, No. 1, pp. 1–13, 2008.

۱۵- اشــرفی، ح. "تحلیــل عــددی مــسائل تماســی در اجــسام وی۔ سکوالاستیک"، پایان نامہ کارشناسے ارشد، بخش مہندسے

مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شیراز، ۱۳۸۷.

16. Ashrafi, H., "An Augmented Lagrangian Treatment for the Viscoelastic Contact Formulation", In Proceedings of the 2009 Joint