فرمول‌بندی المان محدود مسائل تماسی در سازه‌های ویسکوالاستیک بر مبنای مدل وارهیدگی ماکسول تعمیم یافته

حسین اشرفی[۱] و مهرداد فرید[۲]
قطب علمی محاسباتی، بخش مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه شیراز
(تاریخ دریافت: ۱۳۸۸/۰۱/۳۱، تاریخ پذیرش: ۱۳۸۸/۱۰/۱۵)

چکیده

هدف مقاله حاضر توسعه یک فرمول‌بندی محاسباتی المان محدود نموی- انطباقی بر مبنای الگوریتمی توانمند به منظور محاسبه فشارهای شبه‌استاتیک تماسی در سازه‌های ویسکوالاستیک می‌باشد. از مدل تعمیم یافته ماکسول برای مدل‌سازی توابع وارهیدگی معادلات متشکله ویسکوالاستیک بهره گرفته شده که در قالب دو تابع وارهیدگی کلی در اتساع (پاسخ حجمی) و برش (پاسخ انحرافی) نشان داده می‌شود. در این فرمول‌بندی، توابع وارهیدگی به وسیله حاصل جمع سری‌های توابع نمایی کاهشی با زمان بیان می‌شوند. بر اساس اعمال اصل کار مجازی، یک فرمول‌بندی مؤثر المان‌های محدود با یک فرآیند نموسازی در معادلات وارهیدگی ویسکوالاستیک بدست آمده است. به منظور تحلیل مسائل تماسی ویسکوالاستیک نیز، بر اساس شرایط سینماتیکی و هندسی اجزای در حال تماس، از رهیافت لاگرانژ الحاقی انطباقی استفاده گردیده است. همگرایی مناسب نتایج حاصل از مثال‌های عددی با نتایج حل تحلیلی نشانگر قابلیت‌های کاربردی بالای مدل المان‌های محدود ارائه شده می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: معادلات وارهیدگی ویسکوالاستیک، مسائل تماسی، حل نموی- انطباقی، رهیافت لاگرانژ الحاقی

A Finite Element Formulation of Contact Problems for Viscoelastic Structures, Based on the Generalized Maxwell Relaxation Model

H. Ashrafi and M. Farid
Center of Excellence in Computational Mechanics, Mech. Eng. Dep't., School of Eng., Shiraz Univ.

ABSTRACT

The objective of this study is to develop a general finite element formulation associated with an incremental adaptive procedure established for the calculation of contact pressure distributions in viscoelastic structures. A generalized Maxwell model has been used to model the viscoelastic constitutive equations in which bulk and shear relaxation functions are represented by sum of a series of decaying exponential functions of time. Based on the principle of virtual work, an effective finite element formulation, associated with an incremental relaxation procedure, has been developed. The viscoelastic contact behavior has been studied through an improved augmented Lagrangian approach, based on kinematical conditions of contact bodies. The proper convergence caused by the numerical examples with those obtained from analytical results shows the applicability of presented finite element formulation.

Key Words: Relaxation Viscoelastic Equations, Contact Problems, Incremental Adaptive Procedure, Augmented Lagrangian Approach

۱-کارشناس ارشد: ashrafi@shirazu.ac.ir
۲- استادیار (نویسنده پاسخگو): farid@succ.shiraz.ac.ir

۱- مقدمه

مسائل مقدار مرزی در برگیرنده تماس یکی از مهمترین مسائل در صنایع وابسته به مهندسی مکانیک، سازه و همچنین در کاربردهای علوم فضایی، علوم پزشکی و محیط زیست می‌باشند. این نوع مسائل در برهمکنش‌های مکانیکی سامانه‌های فیزیکی به دلیل نامشخص بودن ناحیه تماسی به عنوان مسائل مقدار مرزی غیرخطی شناخته می‌شوند و به الگوریتم‌های حل خاصی نیاز دارند. در این برهمکنش‌ها بسته به کاربرد سیستم فیزیکی ممکن است رفتار اصطکاکی، پاسخ گذرای نواحی مشترک، کوپلینگ ترمومکانیکی، برهمکنش با روانسازها یا لایه‌های میانجی سیال با پیکره هدف و تزویج آسیب سایشی نیز مورد تحلیل قرار گیرند. اغلب مسائل مرتبط با مکانیک تماس به دلیل طبیعت غیرخطی و پیچیده تماس در فرآیندهای طراحی مرسوم با فرضیات خاصی بطور تقریبی حل می‌شدند. اما امروزه مکانیسم‌های تماس را می‌توان با گسترش تکنولوژی کامپیوترهای مدرن با بکارگیری ابزاری به نام مکانیک محاسباتی شبیه‌سازی نمود.

مسائل کلاسیک چرخ دنده‌ها، یاتاقان‌ها و بادامک‌ها، تماس تایر با جاده، شکل دهی مواد، اتصال اعضای ساختاری سازه‌ها به وسیله پیچ و مهره یا پدیده ضربه اتومبیل‌ها از سطوح کاربرد تحلیل‌های تماسی در فرآیندهای طراحی مهندسی مکانیک می‌باشند. در برخی از این موارد هم نیاز به تأمل بیشتری در معادلات متشکله غیرالاستیک و گاهی نیز تغییرشکل‌های کراندار وجود دارد. از سوی دیگر به دلیل رفتار ویسکوالاستیک سازه‌های مهندسی ـ پاسخ خزشی و وارهیدگی تنشی ـ لزوم تحلیل برهمکنش های مکانیکی ناشی از تماس و ضربه در طراحی سازه‌هایی ایمن بسیار احساس می‌گردد.

در واقع هر پدیده در طبیعت به کمک قوانین فیزیک بر حسب معادلات جبری، دیفرانسیلی و یا انتگرالی قابل توصیف می‌باشد. مطالعه پدیده‌های فیزیکی توسط محققان علوم مهندسی در دو راستای اصلی مدل‌سازی و فرمول‌بندی پدیده‌ها و تحلیل عددی مدل ریاضی معطوف می‌باشد. اگرچه استخراج معادلات حاکمه اکثر مسائل مهندسی دشوار نمی‌باشد ولی حل آن‌ها با روش‌های تحلیلی دقیق بسیار دشوار و در مواردی هم غیرممکن است. در سال‌های اخیر شاخه‌های متفاوتی را می‌توان به دلیل تنوع کاربردی گسترده مسائل تماسی در مکانیک محاسباتی از یکدیگر متمایز نمود که مهمترین آن‌ها عبارتند از: روش‌های تفاضل محدود، روش‌های المان‌های مرزی، روش‌های بدون المان، روش‌های المان‌های گسسته، روش سیستم‌های چندپیکره و روش‌های المان‌های محدود [۱-۲]. بطور کلی در منابع دو نوع فرمول‌بندی اصلی نیز برای حل مسائل تماسی مورد استفاده قرار گرفته است: فرمول‌بندی‌های نامساوی تغییراتی و تساوی تغییراتی. از نامساوی‌های تغییراتی که بیانگر اصل کار مجازی به شکل نامساوی می‌باشد در فرمول‌بندی نوع اول استفاده می‌شود. ولی اغلب برای حل مسائل تماسی در کاربردهای عملی از فرمول‌بندی‌های تساوی تغییراتی استفاده می‌شود. در فرمول‌بندی نوع دوم هم از برابری‌های تغییراتی منتجه از اصل کار مجازی استفاده می‌شود [۳].

ادن[۱] و کیکوچی[۲] [۴] مسائل تماسی بدون اصطکاک را با استفاده از نامساوی‌های تغییراتی فرمول‌بندی کردند و در خصوص وجود و یکتایی حل خود نیز با ارائه مثال‌های عددی بحث نمودند. سیمو[۳] و لارسن[۴] [۵] نیز برای نخستین مرتبه از رهیافت لاگرانژ الحاقی برای تحلیل مسائل تماسی با قابلیت بهنگام‌سازی خودکار ضریب پنالتی و ارضای قیود از طریق مقادیر محدود پنالتی استفاده نمودند. حل مستقیم انتگرال‌های وارهیدگی ولترا از طریق کاربرد انتگرال گیری گام به گام تفاضل محدود توسط لی[۵] و راجرز[۶] [۶] در تحلیل تنش‌های ویسکوالاستیک ارائه شد. تیلور[۷] و همکارانش [۷] هم یک فرم بازگشتی را برای معادلات متشکله ویسکوالاستیک کلوین استخراج کردند که آن‌ها را قادر به حل مسائل زیادی می‌ساخت. مدل ویسکوالاستیک سه بعدی نوینی برای تحلیل مکانیک آسیب در این نوع پیکره‌ها به وسیله

1-Oden
2-Kikuchi
3-Simo
4-Laursen
5-Lee
6-Rogers
7-Taylor

روش المان‌های محدود و انتگرال گیری نقطه میانی توسط سیمو[1] [۸] ارائه شد. زوچر[2] و همکارانش [۹] هم در یک مدل المان‌های محدود سه بعدی شبه استاتیکی از یک فرمول‌بندی نموی مستقیم برای اعمال به معادلات متشکله‌ی یک محیط ویسکوالاستیک ارتوتروپیک استفاده کردند. ایدسمن[3] و همکارانش [۱۰] از گسسته‌سازی نامتقارن و یک فرمول‌بندی تغییراتی که از روش‌های پیوسته و غیرپیوسته گالرکین استخراج می‌شد برای مدل‌سازی رفتار وارهیدگی ویسکوالاستیک سازه‌ها با مدل ماکسول تعمیم‌یافته در دامنه زمانی و فضایی پیوسته استفاده نمودند.

یک مدل المان‌های محدود دو بعدی نیز بر اساس اعمال اصل کار مجازی توسط چن[4] و همکارانش [۱۱] با استفاده از یک فرآیند نموی در معادلات متشکله‌ی مدل ماکسول تعمیم یافته برای تحلیل مسائل تماسی ویسکوالاستیک ارائه گردید. بر اساس یک فرمول‌بندی تغییراتی و استفاده از اصل پسرونده اویلر، فرنانذز[5] و سوفونی[6] [۱۲] مسئله‌ی تماس شبه استاتیکی بدون اصطکاک بین یک پیکره‌ی ویسکوالاستیک با یک بستر تغییرشکل پذیر را مورد توجه قرار دادند. آماساد و فابر [۱۳] نیز مسئله تماسی تک سویه بین یک پیکره ویسکوالاستیک با یک بستر صلب را با در نظر گرفتن قانون اصطکاک کولمب تحلیل کردند. محمود و همکارانش [۱۴] یک فرمول‌بندی المان‌های محدود نموی را برای تحلیل مسائل تماسی ویسکوالاستیک در شرایط شبه استاتیکی و اصطکاکی ارائه نمودند که در آن به منظور مدل‌سازی معادلات متشکله ویسکوالاستیک از مدل ویچرت برای در نظر گرفتن هم رفتار وارهیدگی تنشی و هم خزشی استفاده کردند و برای اجرای قیود تماسی نیز از روش مرسوم ضریب لاگرانژ بهره گرفتند. فرآیند نموسازی متفاوتی برای انتگرال‌گیری از انتگرال‌های استیلجس معادلات وارهیدگی اتساعی و برشی به کمک توابع واحد و دلتا توسط اشرفی [۱۶- ۱۵] ارائه گردید، که در آن برای حل قیود تماسی ویسکوالاستیک نیز از یک رهیافت لاگرانژ الحاقی بهبود یافته استفاده شد.

بطور کلی، تماس در پیکره‌های تغییرشکل پذیر به دلیل تغییر پیوسته شرایط مرزی در نواحی مشترک تماسی با اعمال نیرو یک مسئله غیرخطی می‌باشد. از سوی دیگر، تنش‌های تماسی در سازه‌های ویسکوالاستیک، هم تحت تأثیر خواص الاستیک و هم خواص ویسکوز می‌باشند. از این رو هم پیکربندی تماسی و هم توزیع تنش‌های تماسی وابسته به زمان خواهند بود و با یک مسئله وابسته به زمان غیرخطی روبرو می‌گردیم. در این مقاله به توسعه‌ی یک فرمول‌بندی کلی بر اساس روش المان‌های محدود با در نظر گرفتن تماس در سازه‌های ویسکوالاستیک پرداخته می‌شود. به منظور مدل‌سازی معادلات متشکله از یک مدل ماکسول تعمیم‌یافته استفاده می‌شود که بر مبنای آن یک فرمول‌بندی جدید با یک فرآیند نموسازی در معادلات وارهیدگی استخراج می‌گردد. مدل ماکسول تعمیم‌یافته که جامع‌ترین مدل برای بیان رفتار متشکله ویسکوالاستیک محسوب می‌شود را می‌توان در قالب دو تابع وارهیدگی در اتساع و برش بیان نمود. در این فرمول‌بندی وابسته به زمان به دلیل اینکه جابجایی و کرنش کل در هر لحظه در محاسبه تنش کل مورد استفاده قرار نمی‌گیرند از بروز خطاهای عددی که در اثر انتخاب طول گام‌های زمانی بزرگ‌تر ممکن است ایجاد شوند نیز جلوگیری می‌کند.

۲- مدل‌سازی محیط‌های پیوسته معادلات متشکله وارهیدگی ماکسول تعمیم یافته

قابلیت ذخیره‌سازی و استهلاک همزمان انرژی مکانیکی در هنگام مواجه با نیروی خارجی در برخی مواد پرکاربرد مهندسی وجود دارد که ویسکوالاستیک نامیده می‌شوند. معادلات متشکله ویسکوالاستیک به صورت ذاتی نه تنها شامل تنش و کرنش بلکه در برگیرنده‌ی آهنگ‌های زمانی تغییرات تنش و کرنش نیز می‌باشند.

مختصات یک نقطه از جسمی در پیکربندی مرجع دستگاه کارتزین قائم با X_i و در پیکربندی فعلی با x_i نشان داده می‌شود. تاریخچه زمانی حرکت پیوسته و

1-Simo
2-Zocher
3-Idesman
4-Chen
5-Fernandez
6-Sofonea

مؤلفه‌های بردار جابجایی فعلی به ترتیب عبارتند از [۱۸- ۱۷]:

$$x_i(\tau) = x_i(X_j, \tau), \qquad [-\infty < \tau \le t], \tag{۱}$$

$$u_i(\tau) = x_i(\tau) - X_i, \tag{۲}$$

که در آن، τ بیانگر متغیر زمانی و (t) زمان فعلی می‌باشد. کرنش ε را نیز می‌توان با رابطه زیر تعریف نمود:

$$\varepsilon = \sup_{\tau} \left| u_{i,j}(\tau) \right|, \qquad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j}, \tag{۳}$$

که در آن، نماد sup بیانگر کمترین حد فوقانی است. تئوری ویسکو الاستیسیته در شرایطی که کرنش $\varepsilon <<$ ۱ و جابجایی‌های پیکره‌ی پیوسته در قیاس با ابعاد مشخصاتی آن کوچک باشند به صورت مقدار کوچک تعریف می‌شود. حال بردار تنش $\boldsymbol{\sigma}$ را بر حسب نیروی منتجه $\mathbf{G}$ اعمالی بر المان رویه‌ای δa یک پیکره می‌توان به صورت زیر تعریف نمود:

$$\sigma_i = \lim_{\delta a \to 0} G_i / \delta a. \tag{۴}$$

این بردار تنش بر روی رویه δa نسبت به جهت مثبت بردار واحد نرمال $\mathbf{n}$ تعریف می‌شود. رابطه متشکله بین تنش و کرنش در تئوری تغییرشکل‌های کوچک با فرض وابستگی کامل مقدار فعلی تانسور تنش به تاریخچه‌ی گذشته مؤلفه‌های تانسور کرنش به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\sigma_{ij}(t) = \mathop{\psi_{ij}}_{s=0}^{\infty} \left(\varepsilon_{kl}(t-s), \varepsilon_{kl}(t)\right), \tag{۵}$$

که در آن، ψ_{ij} بیانگر کنشمند تانسوری است که هر تاریخچه کرنش ε_{ij} را به یک تاریخچه تنش متناظر σ_{ij} تبدیل می‌کند. اگر تاریخچه زمانی کرنش $\varepsilon_{ij}(t)$ پیوسته و کنشمند تانسوری خطی فرض شوند با استفاده از تئوری بازنمایی ریس می‌توان کنشمند را به صورت انتگرالی استیلجس درآورد تا رابطه زیر حاصله گردد:

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^{\infty} \varepsilon_{kl}(t-s)\, \mathrm{d}G_{ijkl}(s), \tag{۶}$$

که در آن، توابع انتگرالی G_{ijkl} در این رابطه یک تانسور متقارن مرتبه چهارم می‌باشد. حال با برابر صفر قرار دادن $\varepsilon_{ij}(t)$ برای زمان‌های کوچکتر از صفر و با فرض پیوستگی در $G_{ijkl}(t)$ و مشتق زمانی اول آن در بازه ($0 \le t < \infty$)، معادله فوق را می‌توان با تغییر متغیرگیری ($\tau = t - s$) و انتگرال‌گیری جزء به جزء به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^t G_{ijkl}(t-\tau)\, \frac{\mathrm{d}\varepsilon_{kl}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\, \mathrm{d}\tau. \tag{۷}$$

در مشتق‌گیری از $\varepsilon_{kl}(t)$ باید دقت شود که مشتق حاصل به صورت تابعی پیوسته در زمان باشد ولی تاریخچه کرنش می‌تواند ناپیوسته هم باشد. رابطه تنش-کرنش (۷) بیانگر منظر کلی معادلات متشکله ویسکوالاستیک در وارهیدگی می‌باشد. توابع انتگرالی G_{ijkl} بیانگر خواص ویسکو الاستیک پیکره‌ها در وارهیدگی بوده که با آزمایش‌های وارهیدگی تنشی قابل اندازه‌گیری می‌باشند [۱۹].

کلی‌ترین بازنمایی فرم ایزوتروپیک تانسور مرتبه چهارم توابع وارهیدگی در کاربردهای عملی مهندسی به شکل زیر می‌باشد [۱۸]:

$$\begin{aligned} (t) &= \tfrac{1}{3}\left[G_2(t) - G_1(t)\right](\delta_{ij}\,\delta_{kl}) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\left[G_1(t)\right](\delta_{ik}\,\delta_{jl} + \delta_{il}\,\delta_{jk}), \end{aligned} \tag{۸}$$

که در آن، G_1 و G_2 به ترتیب بیانگر توابع وارهیدگی مستقل متناسب با رفتار برشی و حجمی سازه می‌باشند. متناظر با اصول مشابهی در تئوری الاستیسیته می‌توان مؤلفه‌های انحرافی تنش s_{ij} و کرنش e_{ij} را معرفی نمود و سپس معادله (۷) را با استفاده از رابطه (۸) بازنویسی نمود:

$$s_{ij} = \int_{-\infty}^{t} G_1(t-\tau)\, \frac{\mathrm{d}e_{ij}(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \mathrm{d}\tau, \tag{۹}$$

$$\sigma_{kk} = \int_{-\infty}^{t} G_2(t-\tau)\, \frac{\mathrm{d}\varepsilon_{kk}(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \mathrm{d}\tau. \tag{۱۰}$$

به طوری که:

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \tfrac{1}{3}\delta_{ij}\,\sigma_{kk}, \qquad s_{ii} = 0 \tag{۱۱}$$

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \tfrac{1}{3}\delta_{ij}\,\varepsilon_{kk}. \qquad e_{ii} = 0 \tag{۱۲}$$

در حالت کلی، معادلات متشکله وارهیدگی به صورت زوج انتگرال‌های هردیتاری (۱۰- ۹) بر حسب پاسخ‌های برشی و حجمی نشان داده می‌شوند. تئوری‌های ویسکو الاستیسیته خطی به وسیله مدل‌هایی که در برگیرنده دو المان بدون جرم، فنر خطی هوکین و مستهلک‌کننده

نیوتنی می‌باشند به صورت مـصور بازنمـایی مـی‌شـوند. بـا ترکیب‌های مناسـبی از ایـن دو المـان اساسـی مـدل‌هـای ویسکوالاستیک متفاوتی را می‌توان طرح ریزی نمود. یـک مدل ساده برای بیان رفتـار سـازه‌هـای ویـسکوالاستیک از ترکیب یک فنر و یک مستهلک‌کننده بطور سـری حاصـل می‌شود که به مدل ماکسول مشهور اسـت. یـک بازنمـایی مناسب از رفتار وارهیدگی سازه‌های ویسکوالاستیک واقعی را می‌توان به وسیله آرایش موازی مـدل‌هـای ماکـسول در کنار هم بدست آورد کـه بـه مـدل ماکـسول تعمـیم‌یافتـه مشهور است. توابع اتساعی و برشی ماکسول تعمیم‌یافته در بازنمایی رفتار وارهیدگی تنش تحت کرنش ثابت به صورت مجموع عبارات نمایی کاهشی در زمان بیان می‌گردند:

$$
\begin{aligned}
G_1(t) &= \sum_{p=1}^{N} A_p\, e^{(-a_p\, t)}, \\
G_2(t) &= \sum_{p=1}^{N} B_p e^{(-b_p\, t)},
\end{aligned}
\tag{۱۳}
$$

کـه در آن، N تعـداد کـل المـان‌هـای ماکـسول، A_p و B_p نیـز بیـانگر ضـرایب وارهیـدگی متنـاظر بـا معکـوس زمان‌های وارهیدگی a_p و b_p می‌باشند.

۳- فرآیند نموسازی انطباقی در معادلات وارهیدگی

به منظور نموسازی رفتـار متـشکله در یـک دامنـه زمـانی بایستی در ابتدا دامنه به فواصل زمـانی Δt گسـسته شـود. در نتیجه برای زمان فعلی t_{n+1} داریم: $t_{n+1} = t_n + \Delta t$. به منظور اعمال مستقیم فرمول‌بندی المان‌هـای محـدود بـه روابط متشکله (۱۲-۹) از یک فرآینـد نموسـازی انطبـاقی استفاده شده است. تانسور تنش حجمی σ_{kk} با جایگزینی تابع وارهیدگی اتساعی (۱۳) در معادلـه متـشکله (۱۰) در زمان t_n به صورت زیر استخراج شده است:

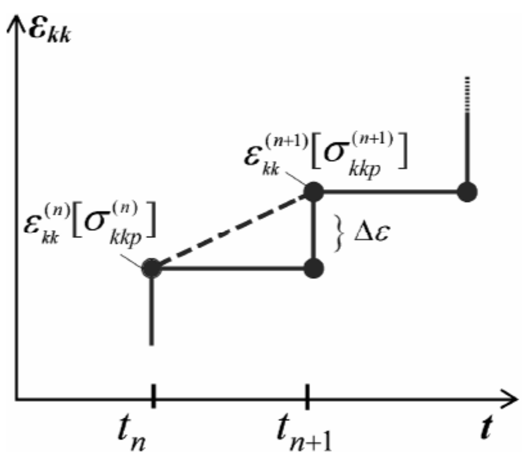
$$
\begin{aligned}
\sigma_{kk}^{(n)}(x,t_n) &= \int_0^{t_n} G_2(t_n-\tau)\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{kk}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau \\
&= \sum_{p=1}^{N}\Big(\int_0^{t_n} B_p e^{-b_p\,(t_n-\tau)}\,\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{kk}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau\Big) = \sum_{p=1}^{N}\sigma_{kkp}^{(n)},
\end{aligned}
\tag{۱۴}
$$

که در آن، $\sigma_{kkp}^{(n)}$ در این رابطه نشان دهنده تـنش حجمـی المـان ماکـسول p ام در لحظـه زمـانی t_n مـی‌باشـد. بـا استدلال مشابهی می‌توان تانسور تنش انحرافی $s_{ij}^{(n)}$ را نیز در لحظه زمانی t_n بدست آورد. حال می‌توان تانسور تنش حجمی σ_{kk} را در لحظه فعلی t_{n+1} به صـورت زیـر بیـان نمود:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{kk}^{(n+1)}(x,t_{n+1}) &= \int_0^{t_{n+1}} G_2(t_{n+1}-\tau)\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{kk}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau \\
&= \sum_{p=1}^{N}\left[\int_0^{t_{n+1}} B_p e^{-b_p\,(t_{n+1}-\tau)}\,\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{kk}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau\right] \\
&= \sum_{p=1}^{N}\left[\int_0^{t_n} B_p e^{-b_p\,(t_n-\tau)}\,\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{kk}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau\right]e^{-b_p(\Delta t)} \\
&\quad + \sum_{p=1}^{N}\left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} B_p e^{-b_p\,(t_{n+1}-\tau)}\,\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{kk}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau\right] \\
&= \{e^{-b_p(\Delta t)}\}\sum_{p=1}^{N}\sigma_{kkp}^{(n)} \\
&\quad + \sum_{p=1}^{N}\left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} B_p e^{-b_p\,(t_{n+1}-\tau)}\,\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{kk}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau\right].
\end{aligned}
\tag{۱۵}
$$

قسمت اول رابطه‌ی فوق وضعیت تنش در زمان t_n را بیان می‌کند و قسمت دوم بیانگر تغییرات تنش در بـازه زمـانی $[t_n, t_{n+1}]$ است که نموسازی مناسب معادلات وارهیـدگی آن در این مقاله مورد نظر قرار گرفته است (شکل **۱**).

در اینجا دو رهیافت متفاوت به منظور نموسازی بخش دوم رابطه انتگرالی ارائه گردیده است. در رهیافت اول تغییـرات کرنش حجمی $\Delta\varepsilon_{kk}$ در بازه زمانی $[t_n, t_{n+1}]$ ثابت فـرض شده است و به منظور پیشبرد حل عددی، تاریخچه زمـانی کرنش $\varepsilon_{kk}(\tau)$ هم به صورت حاصل جمع یک سری توابع پله‌ای واحد $1(\tau - t_n)$ در نمو کرنش مربوطه مـدل‌سـازی گردیده است:



شکل (۱): فرآیند نموسازی وارهیدگی.

$$\varepsilon_{kk}(\tau)=1(\tau-t_0)\,\Delta\varepsilon_{kk}^{(0)}+1(\tau-t_1)\,\Delta\varepsilon_{kk}^{(1)}+\ldots..+1(\tau-t_n)\,\Delta\varepsilon_{kk}^{(n)}. \quad (۱۶)$$

به دلیل آنکه کرنش در دامنه زمانی $[\,t_n,t_{n+1}\,]$ در فرآیند نموسازی به صورت توابع واحد فرض شده است از ایـن رو مشتق $d\varepsilon_{kk}(\tau)/d\tau$ آن هم در طی این بازه زمـانی برابـر با تابع دلتا خواهد بود [۲۰]. بنابراین، عبارت آهنگ کرنش حجمی را به صورت زیر می‌توان تعریف نمود:

$$\frac{d\varepsilon_{kk}(\tau)}{d\tau}\approx\delta(\tau-t_0)\,\Delta\varepsilon_{kk}^{(0)}+\delta(\tau-t_1)\,\Delta\varepsilon_{kk}^{(1)}+\ldots..+\delta(\tau-t_n)\,\Delta\varepsilon_{kk}^{(n)}. \quad (۱۷)$$

از این رو قسمت دوم معادله (۱۵) را با توجه به این قاعـده به صورت زیر می‌توان بیان نمود:

$$\sum_{p=1}^{N}\left[\int_{t_n}^{t_{n+1}}B_p\,e^{-b_p\,(t_{n+1}-\tau)}\,\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{kk}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]=\sum_{p=1}^{N}\left[B_p\,e^{-b_p\,(t_{n+1}-t_n)}\,\Delta\varepsilon_{kk}\right] \quad (۱۸)$$

با استفاده از رهیافت نقطه میانی [۱۵ و ۲۱] کـه از آن در بسیاری از نرم افزارهـای تجـاری المـان‌هـای محـدود هـم استفاده می‌گردد نیز قسمت دوم معادلـه‌ی انتگرالـی (۱۵) انتگرال‌گیری عددی شده است. از اینرو حل آن با رهیافـت دوم به صورت زیر بدست آمده است:

$$\sum_{p=1}^{N}\left[\int_{t_n}^{t_{n+1}}B_p e^{-b_p\,(t_{n+1}-\tau)}\,\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{kk}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau\right]=\sum_{p=1}^{N}\left[B_p e^{-b_p\,(t_{n+1}-t_n)/2}\,\Delta\varepsilon_{kk}\right]\;. \quad (۱۹)$$

به صورت مشابهی تنش انحرافی کلـی $s_{ij}^{(n+1)}$ در لحظـه‌ی زمانی t_{n+1} نیز با استفاده از هر دو رهیافت استخراج شـده است. در پایان، تانسور تنش ویـسکوالاستیک کـل $\sigma_{ij}^{(n+1)}$ در لحظه‌ی t_{n+1} با ترکیب معادلات حجمی و انحرافـی بـه صورت تخمینی زیر استخراج شده است:

$$\sigma_{ij}^{(n+1)}(x,t_{n+1})=C_{ijkl}(\Delta t)\,\Delta\varepsilon_{kl}+f_{ij}^{(n)}(\Delta t), \quad (۲۰)$$

به طوری که:

$$C_{ijkl}(\Delta t)\Delta\varepsilon_{kl}=G_1\left(\frac{\Delta t}{2}\right)\Delta e_{ij}+\frac{1}{3}\,\delta_{ij}\;G_2\left(\frac{\Delta t}{2}\right)\Delta\varepsilon_{kk}, \quad (۲۱)$$

$$f_{ij}^{(n)}(\Delta t)=\sum_{p=1}^{N}\,s_{ijp}^{(n)}\,e^{-a_p(\Delta t)}+\frac{1}{3}\delta_{ij}\sum_{p=1}^{N}\,\sigma_{kkp}^{(n)}\,e^{-b_p(\Delta t)}\;. \quad (۲۲)$$

از معادله نهایی (۲۰) می‌توان دریافت که تانسور تنش کـل $\sigma_{ij}^{(n+1)}$ متشکل از دو بخش مجـزا مـی‌باشـد: بخـشی کـه شامل تنشی است که در طی فاصله زمانی $[\,t_n,t_{n+1}\,]$ رونـد نمایی کاهشی دارد و بخش دیگری که شامل تنش نمـوی می‌باشد که در اثر کرنش نموی $\Delta\varepsilon_{kl}$ در این گـام زمـانی حاصل شده است. بنـابراین تـنش کـل $\sigma_{ij}^{(n+1)}$ در لحظـه t_{n+1} به جای کرنش کل تنهـا بـه سـطح تـنش گذشـته و کرنش نموی اعمالی در فاصله زمانی وابسته است.

۴- فرمول‌بندی المان‌های محدود مـسائل تماسـی ویسکوالاستیک

برای معرفی مشخصات مسئله تماسی دوبعدی، یک پیکـره تغییرشکل پذیر به عنوان جسم تماسی و یک پیکره صـلب به عنوان هدف مورد استفاده قـرار گرفتـه انـد. پیکربنـدی تماسی سیستم با مختصات مادی $\mathbf{X}=[\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2]$ در شـکل ۲ نشان داده شده است. پیکره تغییرشکل پـذیر یـا پیکـره تماسی به وسیله دامنه Ω و مرز Γ مشخص شـده اسـت. پیکره تماسی تحت اعمال نیروهـای حجمـی b_i، تراکـشن سطحی $\mathrm{T_i}$ بر روی مـرز Γ_s و جابجـایی مـشخص $\bar{\mathrm{u}}_\mathrm{i}$ بـر روی مرز Γ_d می‌باشـد. پیکـره تماسـی بـه تعـداد NOE المان محدود در برگیرنده‌ی NON گـره گـسسته سـازی شده است. گره (P) در پیکربندی مرجع روی مـرز پیکـره تماسی با بردار $\mathrm{X^P}$ و نقاط I و J روی لبه‌ی پیکره هـدف با بردارهای $\mathrm{X^I}$ و $\mathrm{X^J}$ قرار گرفته‌انـد. سیـستم مختـصات موضعی روی لبه پیکره هـدف بـا بردارهـای واحـد $\mathbf{n}$ و $\mathbf{t}$ نشان داده شده است. فاصله‌ی نرمال ابتدایی گـره تماسـی (P) با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{d_0^P}=(\mathrm{X^J}-\mathrm{X^P}).\,\mathbf{n}\;. \quad (۲۳)$$

فاصله نرمال همان گره در موقعیت فعلی پس از حرکـت و جابجایی پیکره تماس با رابطه زیر بیان می‌گردد:

$$\mathrm{d_n^P}=(\mathrm{d_0^P}-\mathbf{u}^\mathrm{P}.\,\mathbf{n})=(\mathrm{d_0^P}-\mathrm{u_n^P})\,, \quad (۲۴)$$

که در آن، $\mathrm{u_n^P}$ بیانگر جابجـایی نرمـال گـره تماسـی (P) مـی‌باشـد. نیـروی تماسـی $\mathbf{f}_\mathrm{c}^\mathrm{P}$ بـر روی پیکـره هـدف در نتیجه‌ی تماس گره (P) پیکره تماسی با لبه هـدف ایجـاد

می‌شود که به دو مؤلفه‌ی تماس نرمال R_n^P و تماس مماسی اصطکاکی f_f^P قابل تجزیه است.

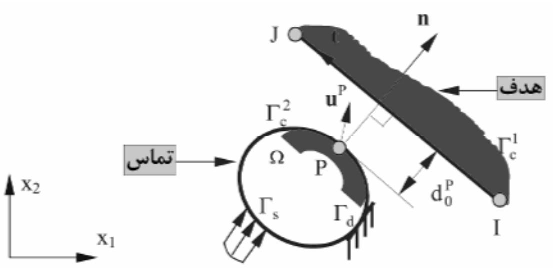
به منظور جلوگیری از نفوذ پیکره‌ها در یکدیگر از قید نفوذ ناپذیری تماس تک سویه استفاده شده است. قانون تماس تک سویه‌ی بین دو پیکره شامل شرایط نفوذ ناپذیری، فشاری و تکمیلی است که عبارتند از:

$$\begin{aligned} & g_n^P \le 0 \ \ [g_n^P = -d_n^P], \\ & R_n^P \ge 0, \\ & (R_n^P)\,(g_n^P) = 0. \qquad (\textit{for all } P \in \Gamma_c^2). \end{aligned} \tag{۲۵}$$

شرط اصلی قانون تماس تک سویه در عدم نفوذ پیکره‌های تماس و هدف در یکدیگر است. شرط فشاری تماس تک سویه بیانگر عدم ایجاد کشش بین پیکره‌های تماسی و هدف می‌باشد. شرط مکمل نیز نشان می‌دهد که پیکره‌ی تماس یا از هدف جدا می‌شود ($R_n^P = 0, g_n^P < 0$) و یا بر روی پیکره هدف فشرده می‌گردد ($R_n^P \ge 0, g_n^P = 0$).

تماس بدون اصطکاکی در این مقاله بین پیکره‌ها فرض شده است که در نتیجه با حل مسئله بهینه‌سازی زیر به حل سیستم تماسی دست یافته ایم:

$$\begin{aligned} & \min \quad \Pi := \tfrac{1}{2}\,\overline{\mathbf{U}}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{K}}\overline{\mathbf{U}} - \overline{\mathbf{U}}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{F}} \\ & \quad \text{subjected to} \qquad g_n^P := u_n^P - d_0^P, \end{aligned} \tag{۲۶}$$



شکل(۲): پیکربندی تماسی یک سامانه مکانیکی.

که در آن، Π انرژی پتانسیل کل، $\overline{\mathbf{K}}$ ماتریس سختی کل، $\overline{\mathbf{U}}$ بردار جابجایی کل، $\overline{\mathbf{F}}$ بردار نیروی خارجی کل و g_n^P قید تماسی گره P ام می‌باشد ($P = 1,2,\ldots, NON$).

برای حل این نوع مسائل تماسی به منظور بدست آوردن بردار جابجایی $\overline{\mathbf{U}}$ و ضرایب لاگرانژ R_n^P متناسب با NOC گره تماسی از یکی از روش‌های حل بهینه‌سازی استاندارد به نام روش لاگرانژ الحاقی استفاده شده است. به این دلیل که مسائل تماس بدون اصطکاک تنها در برگیرنده‌ی قیود نامساوی اند، لذا از قیود تساوی در الگوریتم استفاده نشده است. کنشمند لاگرانژ الحاقی Φ نیز برای مسئله تماسی تحت قیود (۲۶) به صورت زیر تعریف گردید:

$$\Phi(\overline{\mathbf{U}}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{K}_n) = \Pi + \frac{1}{2}\sum_{P=1}^{NOC} K_n^P[(g_n^P + \theta^P)_+ - (\theta^P)^2], \tag{۲۷}$$

که در آن، $\boldsymbol{\theta}$ بیانگر بردار در برگیرنده پارامترهای θ^P قید تماسی P ام است و $\mathbf{K}_n$ بردار پارامترهای پنالتی مثبت را بیان می‌کند. همچنین $(x)_+$ در این رابطه نشان دهنده‌ی $\max(0, x)$ و $R_n^P = K_n^P\,\theta^P$ نیز بیانگر ضریب لاگرانژ قید P ام می‌باشند. در این رهیافت، قیود مؤثر I_1 و غیرمؤثر I_2 به صورت زیر بیان شدند:

$$I_1 = \{P : (g_n^P + \theta^P) \ge 0, \quad P \in \Gamma_c^2\}, \tag{۲۸}$$

$$I_2 = \{P : (g_n^P + \theta^P) < 0, \quad P \in \Gamma_c^2\}. \tag{۲۹}$$

سپس، کنشمند لاگرانژ الحاقی Φ را با توجه به این قیود به صورت ساده‌سازی شده زیر بازنویسی نمودیم:

$$\Phi(\overline{\mathbf{U}}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{K}_n) = \Pi - \tfrac{1}{2}\sum_{P \in I_2} K_n^P(\theta^P)^2 + \sum_{P \in I_1} K_n^P\theta^P g_n^P + \tfrac{1}{2}K_n^P(g_n^P)^2. \tag{۳۰}$$

ایده روش لاگرانژ الحاقی در واقع بر مبنای تبدیل یک مسئله‌ی مقید مورد نظر به یک سری مسائل بدون قید و کمینه‌سازی شده کنشمند لاگرانژ الحاقی می‌باشد. مقادیر پارامترهای $\boldsymbol{\theta}$ و $\mathbf{K}_n$ در ابتدای هر کمینه‌سازی غیرمقید انتخاب می‌شود و سپس تابع $\Phi(\overline{\mathbf{U}}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{K}_n)$ نسبت به متغیر جابجایی $\overline{\mathbf{U}}$ کمینه می‌شود. پارامترهای $\boldsymbol{\theta}$ و $\mathbf{K}_n$ در انتهای این کمینه‌سازی در صورت نیاز بهنگام سازی می‌شوند و فرآیند به همین صورت تکرار می‌شود تا یک همگرایی حاصل شود. مسئله تماسی ما به دلیل وابستگی زمانی رفتار ویسکوالاستیک برای یک دامنه کرانداز زمان نیز بایستی حل شود. دامنه‌ی زمانی برای این منظور به تعداد محدودی گام گسسته‌سازی شده و سپس فرآیند بهنگام سازی شونده و انطباقی الگوریتم تماس بطور کامل برای هر گام زمانی نیز اجرا شده است. لازم به ذکر است که پارامترهای پنالتی روش لاگرانژ الحاقی در این رهیافت

حل نیازی نیست که برای دستیابی به همگرایی به سمت بی نهایت میل داده شوند، در نتیجه از شرط‌گذاری ضعیف روش مرسوم پنالتی نیز با این کار جلوگیری شده است.

پیشرفت این رهیافت لاگرانژ الحاقی به کمینه‌سازی غیر مقید کنشمند $\Phi(\overline{\mathbf{U}},\boldsymbol{\theta},\mathbf{K}_n)$ و نیز فرآیند بهنگام سازی ضرایب لاگرانژ آن بستگی دارد. دقت، بازدهی و توانمندی این رهیافت نیز بستگی به نحوه‌ی اجرای صحیح این دو مرحله دارد. شرط بهینگی مرتبه‌ی اول برای تابع لاگرانژ رابطه (۲۷) با استفاده از ضرایب لاگرانژ $R_n^P = K_n^P \theta^P$ منجر به یک معادله تعادلی می‌شود.

یک فرآیند بهنگام سازی مؤثر نیز برای ضرایب لاگرانژ با استفاده از قاعده دوگانگی تئوری بهینه‌سازی [۲۲] استخراج شده است. در این روش دوگانه برای بهنگام سازی با ضرایب لاگرانژ $\mathbf{R}_n$ به جای پارامترهای $\boldsymbol{\theta}$ کار شده است. یک فرآیند بیشینه‌سازی دوگانه غیرمقید برای دستیابی به مقدار تخمینی فعلی ضرایب لاگرانژ R_n^P استفاده شده که در منابع به آن بهنگام سازی ضرایب هم گفته می‌شود. رابطه تکرارشونده‌ی زیر به منظور بهنگام سازی بردار $[NOC\times 1]$ ضرایب لاگرانژ $\mathbf{R}_n$ بکار می‌رود:

$$\mathbf{R}_n^{j+1} = \mathbf{R}_n^{j} + \lambda^{j}\,\mathbf{d}, \qquad (۳۱)$$

که در آن، $\mathbf{d}$ یک بردار تعیین جهت $[NOC\times 1]$، λ طول گام و $\lambda^j \mathbf{d}^j = \Delta\mathbf{R}_n^i$ بیانگر تغییرات بردار ضرایب است.

حال، در اینجا مراحل الگوریتم فرمول‌بندی لاگرانژ الحاقی مورد استفاده به اختصار ارائه می‌گردند: ۱- قرار دادن $t=0$، ۲- قرار دادن $j=0$ و نیز تخمین لاگرانژ $\mathbf{R}_n^0$ و پارامترهای پنالتی $\mathbf{K}_n^0$، ۳- کمینه‌سازی $\Phi(\overline{\mathbf{U}})$ برای مسئله تماس (۲۶) با حل معادله تعادل و نیز اجازه دادن به $\overline{\mathbf{U}}^j$ برای جواب بودن، ۴- توقف فرآیند تکرار در صورت ارضای ملاک همگرایی، ۵- بهنگام سازی $\mathbf{R}_n^j$ و در صورت نیاز افزایش مقادیر پارامترهای پنالتی $\mathbf{K}_n^j$، ۶- قرار دادن $j=j+1$ و رفتن به مرحله سوم و ۷- قرار دادن $t=t+\Delta t$ و رفتن به مرحله دوم.

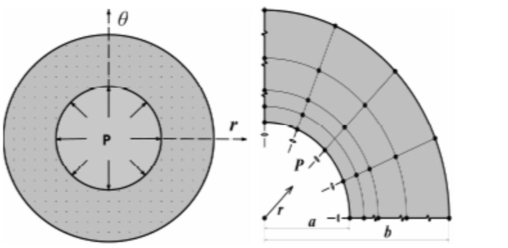
۵- کاربردهای مدل‌سازی عددی

به منظور ارزیابی و ارائه قابلیت‌های فرمول‌بندی المان‌های محدود غیرخطی و وابسته به زمان توسعه یافته در تحلیل مسائل ویسکوالاستیک سازه‌ای بر روی دو مسئله متفاوت مهندسی اعمال شده است.

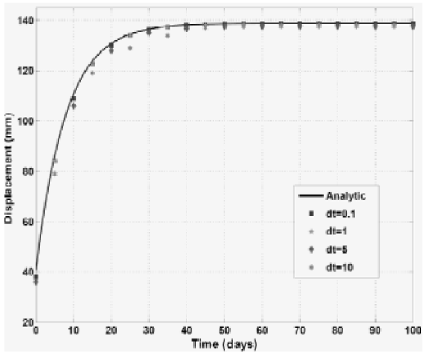
در مدل ابتدایی به بررسی پاسخ شبه‌استاتیک یک سازه استوانه‌ای ویسکوالاستیک جدار ضخیم تحت فشار داخلی یکنواخت P پرداخته شده است (شکل **۳**). اکثر مطالعات بر مبنای در نظرگیری مخازنی به اندازه کافی طویل است که شرایط کرنش صفحه‌ای در آن‌ها صادق باشند [۱۸- ۱۷]. فقط یک چهارم مدل اول به دلیل تقارن دوطرفه آن گسسته‌سازی المان‌های محدود شده است. شعاع داخلی مخزن ۲۵۰ و شعاع خارجی آن نیز ۵۰۰ میلی‌متر انتخاب گردیده است. خواص متشکله سازه در وارهیدگی به صورت پاسخ الاستیک در اتساع و پاسخ ویسکوالاستیک خطی استاندارد (SLS) در رفتار انحرافی فرض شده است که در قالب مدل ماکسول تعمیم‌یافته عبارتند از:

$$G_1(t)=3.53+8.47e^{\left(\frac{-t}{8}\right)}, \quad G_2(t)=20 \quad (MPa). \qquad (۳۲)$$

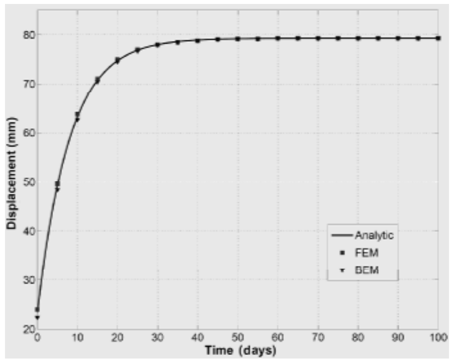
جابجایی شعاعی دیواره‌های داخلی و خارجی این مخزن استوانه‌ای به کمک فرمول‌بندی جدید محاسبه شده‌اند و سپس با حل تحلیلی [۱۸] و فرمول‌بندی عددی المان‌های مرزی [۲۳] نیز مورد مقایسه قرار گرفته‌اند که نتایج آن در شکل‌های **۵-۴** قابل مشاهده می‌باشند. همچنین، تأثیر وابستگی طول گام‌های زمانی برای جابجایی جداره داخلی مخزن استوانه‌ای در شکل **۴** مشخص است. این رهیافت از بروز خطاهای عددی که در اثر انتخاب طول گام‌های زمانی بزرگتر ممکن است ایجاد شوند جلوگیری می‌کند.



شکل(۳): نمای سطح مقطع عرضی سازه ویسکوالاستیک استوانه‌ای جدار ضخیم و نمای گسسته‌سازی شده آن.



شکل(۴): جابجایی شعاعی محاسبه شده با فرمول‌بندی برای دیواره داخلی به ازای طول گام‌های زمانی مختلف.

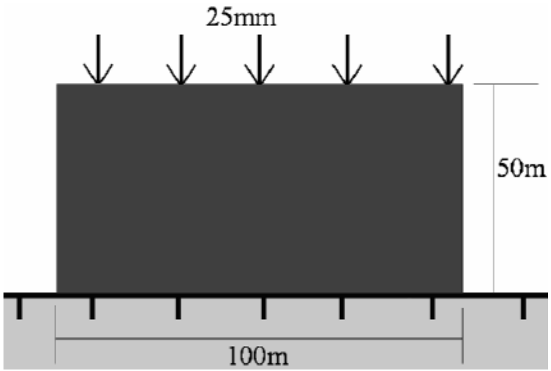


شکل(۵): جابجایی شعاعی محاسبه شده با فرمول‌بندی ارائه شده برای دیواره خارجی مخزن به ازای طول گام ۰/۱ مقایسه شده با حل تحلیلی و رهیافت المان‌های مرزی.

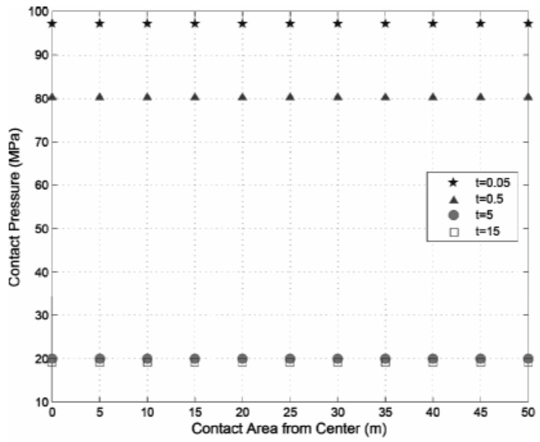
در مدل دوم، برهمکنش تماسی یک بلوک ویسکوالاستیک با یک فونداسیون الاستیک تحت جابجایی طولی مشخص ۲۵ میلی‌متری برای نشان دادن پاسخ وارهیدگی مورد تحلیل قرار گرفته است. هندسه کلی مدل و شرایط مرزی آن در شکل **۶** قابل مشاهده است. تنها نیمی از این مدل عددی به دلیل تقارن طولی گسسته‌سازی المان‌های محدود شده است. مشخصات مادی بلوک ویسکوالاستیک در وارهیدگی بر حسب گیگا پاسکال عبارتند از:

$$G_1(t) = 42 + 162e^{(-t)} \quad G_2(t) = 84 + 300e^{(-t)}. \qquad (۳۳)$$

نتایج حاصل از محاسبه توزیع فشار تماسی در میانجی به ازای زمان‌های متفاوت در شکل **۷** نشان داده شده است.



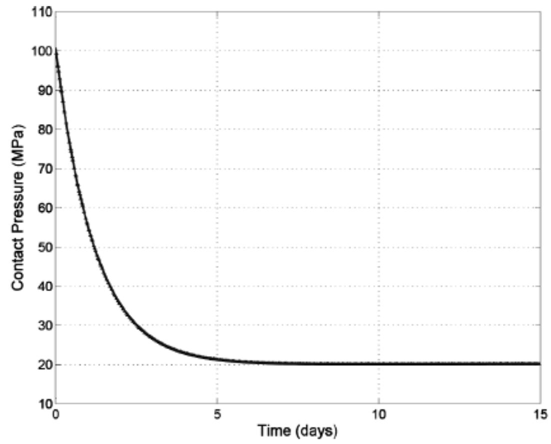
شکل(۶): پیکربندی مدل تماسی یک بلوک ویسکوالاستیک بر روی یک فونداسیون.



شکل(۷): چگونگی توزیع فشار تماسی در ناحیه میانجی.

همان طور که در شکل **۷** دیده می‌شود نحوه توزیع فشار تماسی در طول ناحیه مشترک میانجی مطابق آنچه هم انتظار می‌رود به صورت کاملاً یکنواختی بدست آمده است. فشار تماسی در زمان‌های ۵، ۱۰، ۱۵ و بالاتر در میانجی تقریباً ۲۰ مگا پاسکال بدست آمده است که نشان دهنده همگرایی سیستم به این فشار می‌باشد. همچنین چگونگی رفتار وارهیدگی فشار تماسی وارد بر سازه‌ها با گذشت زمان نیز در شکل **۸** نشان داده شده است. ناحیه میانجی تماسی اگر چه افزایش تدریجی اندکی با گذشت زمان داشته است ولی توزیع فشار تماسی در اثر پاسخ وارهیدگی متشکله مادی سازه‌ها کاهش یافته است. تنش در وارهیدگی تحت کرنش ثابت روند کاهشی در زمان دارد.

در پایان قابل ذکر است که ضریب پواسون در فرمول‌بندی ارائه شده برای مدل اول ۰/۴ و برای مدل دوم ۰/۳ فرض شده است.



شکل(۸): چگونگی رفتار وارهیدگی فشار تماسی.

۶- نتیجه‌گیری

یک الگوریتم حل محاسباتی نموی - انطباقی جدید به منظور محاسبه فشارهای شبه‌استاتیک تماسی سازه‌های ویسکوالاستیک در این پژوهش توسعه داده شد. مدل ماکسول تعمیم‌یافته به منظور مدل‌سازی معادلات متشکله وارهیدگی در قالب دو تابع کلی در پاسخ‌های اتساعی و انحرافی بهره گرفته شد. در این فرمول‌بندی، معادلات وارهیدگی به وسیله حاصل جمع سری‌های توابع نمایی کاهشی در زمان بیان شدند. تانسور تنش کل لحظه فعلی در این فرمول‌بندی به جای کرنش کل تنها به سطح تنش گذشته و کرنش نموی گام زمانی وابسته می‌باشد. یک رهیافت لاگرانژ الحاقی استخراج یافته از تئوری‌های بهینه سازی و قاعده دوگانگی نیز بر اساس شرایط سینماتیکی هندسی اجزای در حال تماس به منظور حل تماس ویسکو- الاستیک گسترش یافت. فرمول‌بندی ارائه شده به راحتی از قابلیت تعمیم یابی رفتار وارهیدگی به پاسخ خزشی برخوردار است که برای این منظور از مدل ویسکوالاستیک کلوین تعمیم‌یافته به جای ماکسول تعمیم‌یافته برای مدل‌سازی معادلات متشکله در خزش استفاده شده‌است. نتایج مناسب حاصل شده نشانگر قابلیت‌های کاربردی بالای مدل المان‌های محدود ارائه شده برای بکارگیری در این نوع مسائل تماسی می‌باشد.

۷- قدردانی

مؤلفان بر خود بایسته می‌دانند که از راهنمایی‌های آقایان دکتر محزون و دکتر کسرایی (دانشگاه شیراز)، دکتر نپ (لابراتوار ملی ساندیا) و دکتر آرورا (دانشگاه آیوا) تشکر و قدردانی نمایند.

۸- مراجع

1. Wriggers, P., “Computational Contact Mech.”, John Wiley & Sons, Chichester, 2004.
2. Laursen, T.A., “Computational Contact and Impact Mechanics”, Springer, Berlin, 2002.
3. Mijar, A.R. and Arora, J.S., “Study of Variational Inequality and Equality Formulations for Elastostatic Contact Problems”, Archives of Comp. Methods in Eng., Vol. 7, No. 1, pp. 387–449, 2000.
4. Oden, J.T. and Kikuchi, N., “Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods”, SIAM Pub., Philadelphia, 1988.
5. Simo, J.C. and Laursen, T.A., “An Augmented Lagrangian Treatment of Contact Problems Involving Friction”, Computers and Structures, Vol. 42, No. 1, pp. 97–116, 1992.
6. Lee, E.H. and Rogers, T.G., “Solution of Viscoelastic Stress Analysis Problems, Using the Measured Creep or Relaxation Functions”, ASME J. Applied Mech., Vol. 30, No. 1, pp. 127–133, 1963.
7. Taylor, R.L., Pister, K.S., and Goudreas, G.L., “Thermochemical Analysis of Viscoelastic Solids”, Int. J. Num. Methods in Eng., Vol. 2, No. 2, pp. 45–59, 1970.
8. Simo, J.C., “On Fully 3-D Finite Strain Viscoelastic Damage Model: Formulation and Computational Aspects”, Comp. Methods in Applied Mech. and Eng., Vol. 60, No. 1, pp. 153–173, 1987.
9. Zocher, M.A., Groves, S.E., and Allen, D.H., “A 3-D Finite Element Formulation for Thermoviscoelastic Orthotropic Media”, Int. J. Num. Methods in Eng., Vol. 40, No. 3, pp. 2267–2288, 1997.
10. Idesman, A., Niekamp, R., and Stein, E., “Finite Elements in Space and Time for Generalized Viscoelastic Maxwell Model”, Comp. Mechanics, Vol. 27, No. 1, pp. 49–60, 2001.
11. Chen, W.H., Chang, C.M., and Yeh, J.T., “An Incremental Relaxation Finite Element Analysis of Viscoelastic Problems with Contact and Friction”, Comp. Methods in Applied Mech. and Eng., Vol. 109, No.2, pp. 315–329, 1993.

12. Fernandez, J.R. and Sofonea, M., “Numerical Analysis of a Frictionless Viscoelastic Contact Problem with Normal Damped Response”, Comp. & Math. with Appl., Vol. 47, No. 1, pp. 549–568, 2004.
13. Amassad, A. and Fabre, C., “Analysis of a Viscoelastic Unilateral Contact Problem Involving the Coulomb Friction Law”, J. Optimization Theory and Appl., Vol. 116, No. 4, pp. 465–483, 2003.
14. Mahmoud, F.F., El–Shafei, A.G., Al–Shorbagy, A.E., and Abdel Rahman, A.A., “A Numerical Solution for Quasistatic Viscoelastic Frictional Contact Problems”, ASME J. Tribology, Vol. 130, No. 1, pp. 1–13, 2008.
۱۵- اشرفی، ح. "تحلیل عددی مسائل تماسی در اجسام ویسکوالاستیک"، پایان نامه کارشناسی ارشد، بخش مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شیراز، ۱۳۸۷.
16. Ashrafi, H., “An Augmented Lagrangian Treatment for the Viscoelastic Contact Formulation”, In Proceedings of the 2009 Joint ASCE – ASME – SES Conf. on Mech. and Materials, Blacksburg, VA, USA, pp. 122-123, 2009.
17. Malvern, L.E., “Introduction to Mechanics of Continuous Medium”, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.
18. Christensen, R.M., “Theory of Viscoelasticity, an Introduction”, Academic Press, New York, 1982.
19. Ferry, J.D., “Viscoelastic Properties of Polymer”, 3rd Ed., Wiley, New York, 1980.
20. Jeffrey, A. “Advanced Engineering Mathematics”, Academic Press, New York, 2002.
21. Simo, J.C., and Hughes, T.J.R. “Computational Inelasticity”, Springer, Berlin, 1998.
22. Jahn, J., “Introduction to the Theory of Non-linear Optimization”, Springer, Berlin, 2007.
23. Ashrafi, H. and Farid, M., “A Mathematical Boundary Integral Equation Analysis of Standard Viscoelastic Solid Polymers”, Comp. Math. and Modeling, Vol. 20, No. 4, pp. 397–415, 2009.