تأثیر عمق و شعاع شیار U شکل بر مقدار متوسط چگالی انرژی کرنشی و بار بحرانی شکست در حالت بارگذاری خمشی

احسان براتی[۱] و یونس علیزاده[۲] **جمشید آقازاده[۳]**

دانشکده مهندسی مکانیک دانشکده مهندسی مواد

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(تاریخ دریافت: ۱۳۸۸/۰۲/۱۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۸۸/۰۹/۲۹)

چکیده

در این مقاله، معیار مقدار متوسط چگالی انرژی کرنشی برای پیش‌بینی بار بحرانی شکست در نمونه‌هایی با شیار U شکل تحت بار خمشی مورد استفاده قرار گرفته و رابطه‌ای برای محاسبه مقدار متوسط چگالی انرژی کرنشی درون این منطقه ارائه شده است. بارگذاری به صورت خمشی و تحت مود I انجام شده است. دو حالت در این مقاله مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته: ۱) حجم کنترل بخشی از قسمت نیم‌دایره انتهای شیار را در بر گیرد و ۲) حجم کنترل با لبه‌های مستطیل شکل شیار تلاقی داشته باشد. تأثیر مقدار شعاع انتهای شیار و نیز عمق آن بر مقدار متوسط چگالی انرژی کرنشی در هر دو حالت مورد بررسی قرار گرفته و تغییرات بار بحرانی شکست پیش‌بینی شده است. تحلیل المان محدود برای بررسی صحت روابط و نتایج به دست آمده انجام شده است. نتایج حاصل در این مقاله نشان داده که با افزایش شعاع شیار، مقدار بار بحرانی شکست ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. همچنین، با افزایش عمق شیار، مقدار آن به صورت نمایی کاهش می‌یابد.

واژه‌های کلیدی: مکانیک شکست الاستیک-پلاستیک، مقدار متوسط چگالی انرژی کرنشی، شیار U شکل، بار بحرانی شکست، بارگذاری خمشی

The Effect of Notch Depth and Notch Root Radius on the Averaged Strain Energy Density and on Fracture Load in U Notches under Bending

E. Barati and Y. Alizadeh — Mech. Eng. Dep't.

J. Aghazadeh — Materials Eng. Dep't.

Amirkabir Univ. of Tech.

ABSTRACT

In this paper, the mean value of strain energy density criterion has been used to predict the critical fracture load in specimens with U-shaped notch under bending loads. An equation for calculation of averaged strain energy density in this zone has been presented. Bending loads under mode I have been considered. Two cases have been studied: 1) the control volume only includes the semicircular arc of the notch root, and 2) the control volume includes rectilinear edge of the notch. The effect of notch root radius and notch depth on the mean value of strain energy density has been studied in two cases above and the critical fracture load rate has been predicted. Finite Element Analysis has been carried out for verification. The studies show that the critical fracture load increases and then decreases by increasing the notch root radius. Also, this parameter decreases exponentially by increasing the notch depth.

Key Words: Elastic-Plastic Fracture Mechanics, Mean Strain Energy Density, U Notch, Critical Fracture Load, Bending Loads

۱- دانشجوی دکتری (نویسنده پاسخگو): ehsanbarati@gmail.com

۲- استادیار: alizadeh@aut.ac.ir

۳-استاد: agazad@yahoo.com

۱- مقدمه

مکانیک شکست در شیارهای U و V شکل امروزه مورد توجه محققان زیادی قرار گرفته است. در اینگونه قطعات روش مکانیک شکست الاستیک ـ پلاستیک[1] مورد استفاده قرار می‌گیرد. معیارهای مختلفی برای شکست در شیارها ارائه شده است. یکی از مهمترین این معیارها، معیار مقدار متوسط چگالی انرژی کرنشی[2] می‌باشد. این معیار برای مواد ترد و شبه‌ترد کاربرد دارد. بر طبق این معیار، ابتدا منطقه‌ای در اطراف نوک شیار به عنوان حجم کنترل[3] تعریف می‌شود. سپس مقدار متوسط چگالی انرژی کرنشی درون این منطقه محاسبه می‌شود. یک مقدار بحرانی برای این پارامتر تعریف می‌شود. چنانچه مقدار این پارامتر به مقدار بحرانی خود برسد شکست اتفاق می‌افتد. در شیارهای U و V عموماً از این معیار برای پیش‌بینی بار بحرانی شکست استفاده می‌شود، هر چند که معیارهای دیگری نیز در این زمینه وجود دارند.

ماتوینکو[4] [۱] در سال ۱۹۹۴ رابطه‌ای برای چگالی انرژی کرنشی در روی مرز شیارهای U و V شکل ارائه داد و با استفاده از آن انتگرال J را محاسبه نمود. فیلیپی[5] [۲] و همکارانش در سال ۲۰۰۲ توزیع تنش را در اطراف شیار U و V شکل به صورت تحلیلی به دست آوردند. ماتوینکو و موروزوف[6] [۳] در سال ۲۰۰۴ انتگرال J را برای شیارهای U و V شکل تحت بارگذاری کششی به دست آورده و اثرات کارسختی را نیز درنظر گرفتند. یوسیباش[7] و همکارانش[۴] در سال ۲۰۰۴ پارامتر شعاع کنترل R_C را معرفی کردند که با استفاده از آن می‌توان ناحیه‌ای به نام حجم کنترل را مشخص نمود. با استفاده از معیار چگالی انرژی کرنشی موضعی و مقدار متوسط آن درون حجم کنترل شکست نمونه را پیش‌بینی نمودند. کار آنها توسط لازارین[8] و برتو[9] [۵] در سال ۲۰۰۵ توسعه یافت. گومز[10] و همکارانش[۶] در سال ۲۰۰۷ معیار انرژی کرنشی موضعی را برای بارگذاری در مود I و II معرفی نمودند و با استفاده از آن توانستند شکست نمونه را پیش‌بینی کنند. برتو و همکارانش[۷] در سال ۲۰۰۷ روشی ساده برای تعیین انتگرال J بر حسب تابعی از زاویه شیار برای شیارهای V شکل ارائه داد. لیویری[11] [۸] نیز در سال ۲۰۰۸ کار برتو را ادامه داد. برتو و لازارین [۹] در سال ۲۰۰۷ رابطه‌ای بین مقدار انتگرال J و مقدار متوسط چگالی انرژی کرنشی به دست آوردند. سپس برای بارهای کششی تغییرات مقدار این رابطه را بر حسب مقدار شعاع کنترل مورد بررسی قرار دادند.

در این مقاله ابتدا رابطه‌ای ساده و عملی برای محاسبه مقدار متوسط چگالی انرژی کرنشی در نمونه‌های با شیار U شکل ارائه می‌شود. برای این منظور دو حالت مجزا مورد بررسی قرار می‌گیرد: ۱) حجم کنترل بخشی از انحنای انتهای شیار را در بر گرفته باشد، ۲) حجم کنترل کاملاً انتهای شیار را در بر بگیرد. حالت اول بیشتر برای مواد ترد و حالت دوم بیشتر برای مواد شبه‌ترد یا نیمه‌ترد کاربرد دارد. سپس، با استفاده از رابطه به دست آمده تأثیر عمق و شعاع انتهای شیار بر مقدار این پارامتر مورد بررسی قرار می‌گیرد. اهمیت این بررسی در این است که با استفاده از آن می‌توان تأثیر این دو پارامتر را بر بار بحرانی شکست با استفاده از معیار مقدار متوسط چگالی انرژی کرنشی مورد تحلیل قرار داد. در نهایت با استفاده از معیار مذکور، شدت تغییرات بار بحرانی شکست برای مواد ترد و نیمه‌ترد پیش‌بینی می‌شود. تحلیل المان محدود برای بررسی صحت روابط به دست آمده مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۲- مدلسازی شیار U شکل

شیاری مطابق شکل **۱** با شعاع انتهای ρ، زاویه 2α و طول a درنظر گرفته می‌شود[۴]. پارامترهای زیر برای بیان مبدأ مختصات معرفی شده‌اند [۴]:

$$q = \frac{2(\pi - \alpha)}{\pi}, \quad r_0 = \left(\frac{q-1}{q}\right)\rho$$

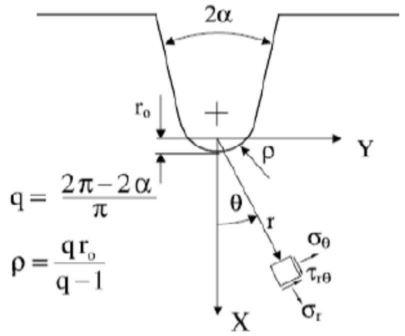
که در آن، q پارامتری است که اثرات زاویه شیار را دربر دارد و r_0 فاصله مبدأ مختصات از انتهای شیار می‌باشد.

1-Elastic- Plastic Fracture Mechanics (EPFM)
2-Averaged Strain Energy Density (ASED) Criterion
3-Control Volume
4-Y.G. Matvienko
5-S. Filippi
6-E.M. Morozov
7-Z. Yosibash
8-P. Lazzarin
9-F. Berto
10-F.J. Gomez

11- P. Livieri

در شیار U شکل و با جایگذاری $2\alpha = 0$ به دست می‌آید:

$$q = 2, \quad r_0 = 0.5\rho \tag{1}$$



شکل (۱): تحلیل تنش در شیار .

برای رسم حجم کنترل شعاع کنترل R_C تعریف می‌شود. روابط زیر به ترتیب برای حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای برای محاسبه مقدار شعاع کنترل در مقالات ارائه شده‌اند [۴ و ۵]:

$$R_C = \frac{(5-3\nu)}{4\pi}\left(\frac{K_C}{\sigma_{ut}}\right)^2, \quad R_C = \frac{(1+\nu)(5-8\nu)}{4\pi}\left(\frac{K_{IC}}{\sigma_{ut}}\right)^2, \tag{2}$$

که در آن، K_{IC} چقرمگی شکست، σ_{ut} تنش نهایی، و ν ضریب پواسون می‌باشد.

در نواحی اطراف شیار، توزیع تنش از رابطه زیر به دست می‌آید[۲]:

$$\sigma_{ij} = a_1 r^{\lambda-1}\left[f_{ij}(\theta) + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\mu-\lambda} g_{ij}(\theta)\right],$$

که در آن، توابع f و g با استفاده از رابطه زیر مشخص می‌گردند:

$$\begin{bmatrix} f_{\theta\theta} \\ f_{rr} \\ f_{r\theta} \end{bmatrix} = \frac{1}{1+\lambda+\chi_b(1-\lambda)}$$
$$\times\left\{\begin{bmatrix} (1+\lambda)\cos(1-\lambda)\theta \\ (3-\lambda)\cos(1-\lambda)\theta \\ (1-\lambda)\sin(1-\lambda)\theta \end{bmatrix} + \chi_b(1-\lambda)\begin{bmatrix} \cos(1+\lambda)\theta \\ -\cos(1+\lambda)\theta \\ \sin(1+\lambda)\theta \end{bmatrix}\right\},$$

$$\begin{bmatrix} g_{\theta\theta} \\ g_{rr} \\ g_{r\theta} \end{bmatrix} = \frac{q}{4(q-1)[1+\lambda+\chi_b(1-\lambda)]}$$
$$\times\left\{\chi_d\begin{bmatrix} (1+\mu)\cos(1-\mu)\theta \\ (3-\mu)\cos(1-\mu)\theta \\ (1-\mu)\sin(1-\mu)\theta \end{bmatrix} + \chi_c\begin{bmatrix} \cos(1+\mu)\theta \\ -\cos(1+\mu)\theta \\ \sin(1+\mu)\theta \end{bmatrix}\right\},$$

و پارامتر a_1 با استفاده از رابطه زیر بیان می‌شود:

$$a_1 = \frac{\sigma_{\max}}{r_0^{\lambda-1}\left\{1 + \frac{(1+\mu)\chi_d + \chi_c}{1+\lambda+\chi_b(1-\lambda)}\left(\frac{q}{4(q-1)}\right)\right\}} = \frac{\sigma_{\max} r_0^{1-\lambda}}{1+\tilde{\omega}}.$$

سایر پارامترهای بکار رفته در روابط فوق به مقدار زاویه شیار بستگی دارند. برای شیار U شکل این پارامترها توسط فیلیپی و همکارانش[۲] محاسبه شده که به صورت زیر می‌باشد:

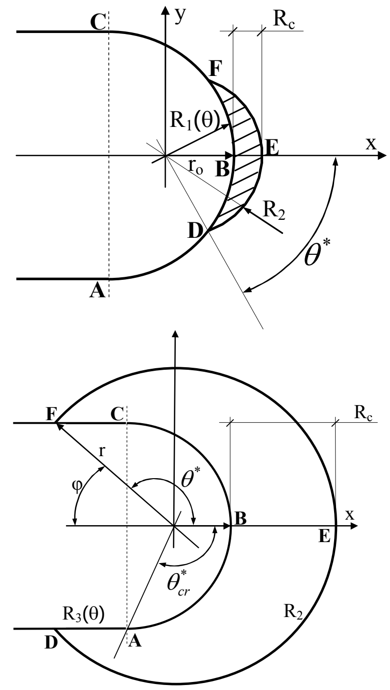
$$\begin{cases} \lambda = 0.5, \\ \mu = -0.5, \\ \chi_b = 1, \\ \chi_c = 4, \\ \chi_d = 0, \\ q = 2, \\ r_0 = 0.5\rho, \\ \tilde{\omega} = 1. \end{cases}$$

لازم به ذکر است که هر کدام از پارامترهای فوق از یک معادله غیر صریح و با حل عددی به دست می‌آیند که تکرار آنها در این مقاله بیهوده است (برای مطالعه بیشتر به مرجع [۲] مراجعه شود). با قرار دادن این مقادیر در رابطه توزیع تنش، می‌توان مقدار تنش در نواحی اطراف شیار را در مختصات قطبی به صورت آنچه در رابطه (۳) آمده است بیان نمود.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{rr} \\ \tau_{r\theta} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{\rho}{2r}}\frac{\sigma_{\max}}{4}\left\{\begin{bmatrix} \frac{3}{2}\cos\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \\ \frac{5}{2}\cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \\ \frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\sin\frac{3\theta}{2} \end{bmatrix} + \frac{\rho}{r}\begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ -\cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}\right\} \tag{3}$$

برای مشخص نمودن ناحیه حجم کنترل که چگالی انرژی کرنشی باید در درون این ناحیه میانگین‌گیری شود به این روش عمل می‌شود که از مبدأ مختصات که به اندازه r_0 از لبه شیار فاصله دارد (شکل ۱) دایره‌ای به شعاع $R_C + r_0$ زده می‌شود تا شیار را قطع نماید. سطح محصور شده بین این کمان دایره‌ای و شیار، ناحیه حجم کنترل را تشکیل

می‌دهد. همانطور که در شکل **۲** نشان داده شده دو نوع حجم کنترل قابل تمایز می‌باشد: ۱) حجم کنترل تنها بخشی از ناحیه دایره‌ای شکل انتهای شیار را دربر می‌گیرد (حالت حجم کنترل کوچک)، ۲) حجم کنترل کاملاً ناحیه دایره‌ای شکل انتهای شیار را دربر می‌گیرد و با قسمت لبه‌های شیار در تماس است (حالت حجم کنترل بزرگ).



شکل (۲): دو نوع حجم کنترل.

طبق معیار مقدار متوسط چگالی انرژی کرنشی، چنانچه مقدار میانگین چگالی انرژی کرنشی درون ناحیه حجم کنترل (سطح کنترل در مسائل صفحه‌ای) به مقدار بحرانی آن برسد، شکست در نمونه اتفاق می‌افتد. مقدار بحرانی این پارامتر برای مواد ترد و شبه‌ترد از رابطه (۴) محاسبه می‌شود [۵].

$$W_C = \frac{\sigma_{ut}^{\ 2}}{2E}. \qquad (۴)$$

در رابطه (۴)، σ_{ut} تنش نهایی، و E مدول یانگ می‌باشد. مطابق آنچه در شکل **۲** نشان داده شده است، زاویه θ^* محل برخورد مرز حجم کنترل با مرز شیار می‌باشد. مقدار بحرانی این پارامتر که در آن حالتهای اول و دوم حجم کنترل به یکدیگر تبدیل می‌شوند، تلاقی نقاط D و A (و نیز E و C) می‌باشد. این مقدار بحرانی با استفاده از روابط مثلثاتی به سادگی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\theta^*_{cr} = \pi - \tan^{-1}(2) = 2.035rad = 116.6^\circ \qquad (۵)$$

برای شیارهای U شکل، رابطه مرز شیار (منحنی EBD در شکل **۲**) را می‌توان با استفاده از روابط مثلثاتی به صورت زیر به دست آورد:

$$R_1(\theta) = \frac{\rho}{2}\left[\sqrt{\cos^2\theta + 3} - \cos\theta\right]. \qquad (۶)$$

با تعریف پارامتر A به صورت آنچه در رابطه ۷ آورده شده است، مرز ناحیه حجم کنترل (منحنی پررنگ در شکل **۲**) که با R_2 نشان داده می‌شود، از رابطه (۸) قابل محاسبه می‌باشد:

$$A = \left[1 + \frac{(1+\nu)(5-8\nu)}{2\pi\rho}\left(\frac{K_{IC}}{\sigma_u}\right)^2\right]_{Plane\ \ Strain} = 1 + 2\left(\frac{R_C}{\rho}\right),$$
$$A = \left[1 + \frac{(5-3\nu)}{2\pi\rho}\left(\frac{K_{IC}}{\sigma_u}\right)^2\right]_{Plane\ \ Stress} = 1 + 2\left(\frac{R_C}{\rho}\right), \qquad (۷)$$

$$R_2 = \frac{\rho A}{2}. \qquad (۸)$$

۳- حالت اول حجم کنترل (حجم کنترل کوچک)

در این بخش حالت اول حجم کنترل مورد بررسی قرار گرفته است.

۳-۱- محاسبه مقدار حجم کنترل

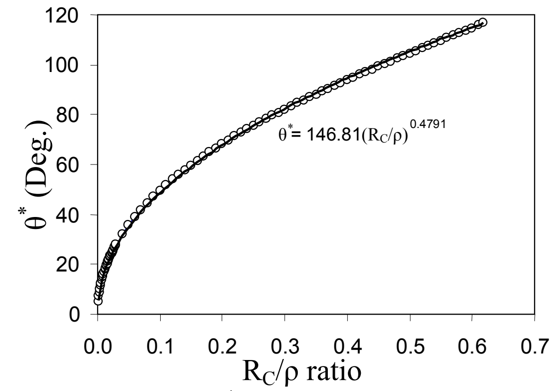
در حالت اول، زاویه θ^* که در آن مرز حجم کنترل و مرز شیار با یکدیگر تلاقی دارند (شکل **۲** در حالت اول) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\rho}{2}\left[\sqrt{\cos^2\theta^* + 3} - \cos\theta^*\right] = \frac{\rho A}{2},$$
$$\cos\theta^* = \frac{3 - A^2}{2A} \quad \Rightarrow \quad \theta^* = \cos^{-1}\left(\frac{3 - A^2}{2A}\right). \qquad (۹)$$

با توجه به رابطه (۹) مشخص می‌شود که زاویه θ^* تنها تابعی از پارامتر A می‌باشد. با توجه به اینکه این پارامتر نیز تنها تابعی از R_C/ρ می‌باشد (رابطه ۷)، بنابراین زاویه مذکور تابعی از R_C/ρ می‌باشد. در شکل **۳** نمودار تغییرات این زاویه ترسیم شده است. با توجه به این شکل می‌توان یک منحنی توانی از آن عبور داد که با دقت خوبی با حل دقیق توافق دارد. معادله تقریبی محاسبه زاویه θ^* به صورت رابطه (۱۰) می‌باشد. می‌توان برای

مقادیر مختلف نسبت شعاع کنترل به شعاع شیار، مقدار زاویه‌ای که از حل دقیق (رابطه ۹) و حل تقریبی (رابطه ۱۰) به دست می‌آید را با یکدیگر مورد مقایسه قرار داد. این مقایسه نشان داده که ماکزیمم اختلاف بین حل دقیق و حل تقریبی ۲/۳ درصد می‌باشد.

$$\theta^* = 2.5623\left(\frac{R_C}{\rho}\right)^{0.4791}. \qquad (۱۰)$$



شکل (۳): نمودار تغییرات زاویه θ^* بر حسب R_C/ρ.

با توجه به شکل **۲** می‌توان مقدار حجم کنترل را در حالت اول حجم کنترل به صورت زیر محاسبه نمود:

$$\Omega = \int_{-\theta^*}^{\theta^*}\left[\int_{R_1(\theta)}^{R_2} r dr\right] d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\theta^*}^{\theta^*}\left[R_2^{\,2} - R_1^{\,2}(\theta)\right]d\theta.$$

پس از انجام محاسبات ریاضی وانتگرال‌گیری، رابطه (۱۱) حاصل خواهد شد:

$$\Omega = \frac{\rho^2}{8}\left[\left(2A^2 - 8\right)\theta^* - \sin 2\theta^* + 4K\left(1,\theta^*\right)\right]. \qquad (۱۱)$$

در سرتاسر این مقاله برای سادگی انجام محاسبات تعاریف زیر بکار رفته است:

$$I\left(n,\theta^*\right) = \int_0^{\theta^*}\frac{\cos^n\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + 3}}d\theta,$$
$$K\left(n,\theta^*\right) = \int_0^{\theta^*}\cos^n\theta\sqrt{\cos^2\theta + 3}\,d\theta. \qquad (۱۲)$$

این مقادیر به صورت عددی انتگرال‌گیری و محاسبه می‌شود. این محاسبات برای مقادیری از زاویه θ^* محاسبه شده و در جداول **۲**- **۱** آورده شده است:

جدول (۱): مقادیر پارامترهای K به ازای زوایای مختلف.

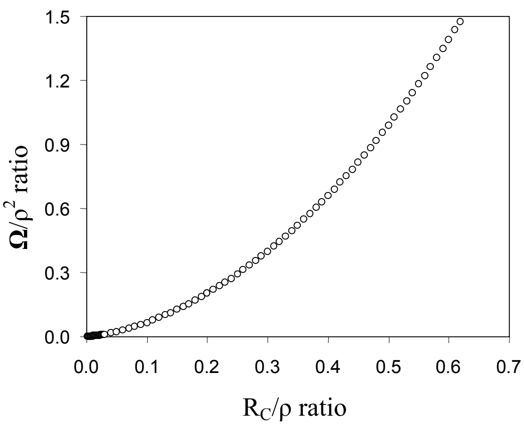
θ^*	$K(0,\theta^*)$	$K(1,\theta^*)$	$K(2,\theta^*)$	$K(3,\theta^*)$
0	0	0	0	0
5	0.1745	0.1743	0.1740	0.1738
10	0.3486	0.3469	0.3451	0.3434
15	0.5221	0.5162	0.5104	0.5047
20	0.6947	0.6807	0.6672	0.6543
25	0.8660	0.8389	0.8134	0.7893
30	1.0358	0.9895	0.9469	0.9077
35	1.2039	1.1312	1.0665	1.0086
40	1.3701	1.2631	1.1711	1.0917
45	1.5344	1.3842	1.2604	1.1576
50	1.6966	1.4938	1.3345	1.2077
55	1.8569	1.5913	1.3939	1.2439
60	2.0151	1.6763	1.4397	1.2686
65	2.1716	1.7486	1.4731	1.2841
70	2.3264	1.8078	1.4959	1.2929
75	2.4798	1.8540	1.5099	1.2972
80	2.6321	1.8870	1.5171	1.2988
85	2.7837	1.9068	1.5198	1.2992
90	2.9349	1.9134	1.5202	1.2992
95	3.0862	1.9068	1.5206	1.2992
100	3.2378	1.8870	1.5233	1.2988
105	3.3901	1.8541	1.5305	1.2972
110	3.5435	1.8080	1.5445	1.2930
115	3.6983	1.7488	1.5672	1.2842
116.6	3.7482	1.7271	1.5766	1.2801

جدول (۲): مقادیر پارامترهای I به ازای زوایای مختلف.

θ^*	$I(0,\theta^*)$	$I(1,\theta^*)$	$I(3,\theta^*)$	$I(5,\theta^*)$
0	0	0	0	0
5	0.0436	0.0436	0.0435	0.0434
10	0.0874	0.0869	0.0861	0.0852
15	0.1313	0.1298	0.1269	0.1241
20	0.1754	0.1719	0.1651	0.1589
25	0.2199	0.2129	0.2002	0.1888
30	0.2647	0.2527	0.2314	0.2134
35	0.3100	0.2909	0.2586	0.2328
40	0.3558	0.3272	0.2815	0.2472
45	0.4022	0.3614	0.3001	0.2573
50	0.4491	0.3931	0.3146	0.2640
55	0.4967	0.4220	0.3253	0.2680
60	0.5448	0.4478	0.3328	0.2702
65	0.5935	0.4703	0.3376	0.2712
70	0.6426	0.4891	0.3404	0.2716
75	0.6923	0.5041	0.3418	0.2718
80	0.7423	0.5149	0.3423	0.2718
85	0.7925	0.5214	0.3425	0.2718
90	0.8429	0.5236	0.3425	0.2718
95	0.8932	0.5214	0.3425	0.2718
100	0.9435	0.5149	0.3423	0.2718
105	0.9935	0.5041	0.3418	0.2718
110	1.0431	0.4892	0.3404	0.2716
115	1.0923	0.4704	0.3377	0.2712
116.6	1.1079	0.4636	0.3364	0.2710

با توجه به اینکه مقدار حجم کنترل (Ω) دارای دیمانسیون توان دوم طول می‌باشد، می‌توان پارامتر بدون بعدی به صورت Ω/ρ^2 تعریف نمود. با توجه به رابطه (۱۱) واضح است که پارامتر مذکور تنها تابعی از R_C/ρ می‌باشد. در شکل ۴ نمودار تغییرات این پارامتر ترسیم شده است.

با توجه به شکل ۴ می‌توان نمودارهایی توانی برای حل تقریبی این پارامتر به دست آورد. روابط حل تقریبی به صورت رابطه (۱۳) داده شده است.



شکل (۴): نمودار تغییرات Ω/ρ^2 بر حسب R_C/ρ برای حالت اول.

$$\Omega/\rho^2 = 2.3218\left(\frac{R_C}{\rho}\right)^{1.5425} \qquad 0 < \frac{R_C}{\rho} \le 0.25$$
$$\Omega/\rho^2 = 3.4381\left(\frac{R_C}{\rho}\right)^{1.7916} \qquad 0.25 < \frac{R_C}{\rho} \le 0.61835 \qquad (۱۳)$$

لازم به ذکر است که اختلاف محاسبات بر اساس حل دقیق (رابطه ۱۱) و حل تقریبی (رابطه ۱۳) حداکثر ۲ درصد خطا به همراه دارد. بنابراین، می‌توان از روابط (۱۳) برای محاسبه مقدار حجم کنترل که ساده‌تر است استفاده نمود.

۳-۲- محاسبه مقدار متوسط چگالی انرژی کرنشی

لازارین و برتو[۵] توزیع چگالی انرژی کرنشی را به صورت زیر به دست آورده‌اند:

$$W(r,\theta) = \frac{1}{2E}\left(\frac{\sigma_{\max}}{1+\widetilde{\omega}}\right)^2,$$
$$\times\left\{\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2(\lambda-1)}\widetilde{F}_\lambda + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2(\mu-1)}\widetilde{G}_\mu + 2\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\lambda+\mu-2}\widetilde{M}_{\lambda\mu}\right\}, \qquad (۱۴)$$

که در آن:

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}_\lambda &= f_{\theta\theta}^2 + f_{rr}^2 + f_{zz}^2 \\
&\quad - 2\nu\left(f_{\theta\theta}f_{rr} + f_{\theta\theta}f_{zz} + f_{rr}f_{zz}\right) + 2(1+\nu)f_{r\theta}^2 \\
\widetilde{G}_\mu &= g_{\theta\theta}^2 + g_{rr}^2 + g_{zz}^2 \\
&\quad - 2\nu\left(g_{\theta\theta}g_{rr} + g_{\theta\theta}g_{zz} + g_{rr}g_{zz}\right) + 2(1+\nu)g_{r\theta}^2 \\
\widetilde{M}_{\lambda\mu} &= f_{\theta\theta}g_{\theta\theta} + f_{rr}g_{rr} + f_{zz}g_{zz} \\
&\quad - \nu\left(f_{\theta\theta}g_{rr} + g_{\theta\theta}f_{rr} + f_{\theta\theta}g_{zz} + g_{\theta\theta}f_{zz}\right. \\
&\quad \left. + f_{rr}g_{zz} + g_{rr}f_{zz}\right) + 2(1+\nu)f_{r\theta}g_{r\theta}, \\
f_{zz}(\theta) &= \nu\left(f_{\theta\theta}(\theta) + f_{rr}(\theta)\right), \\
g_{zz}(\theta) &= \nu\left(g_{\theta\theta}(\theta) + g_{rr}(\theta)\right).
\end{aligned}$$

با جایگذاری مقادیر مربوط به شیار U شکل در رابطه فوق به دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}_\lambda &= \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{4}\nu - 2\nu^2\right) + \left(1 - \nu - 2\nu^2\right)\cos\theta \\
&\quad - \frac{1}{4}(1+\nu)\cos 2\theta, \\
\widetilde{G}_\mu &= 2 + 2\nu, \\
\widetilde{M}_{\lambda\mu} &= 0.
\end{aligned}$$

انرژی کرنشی در درون ناحیه حجم کنترل با انتگرال‌گیری از چگالی انرژی کرنشی در درون این ناحیه حاصل خواهد شد:

$$E_1 = \int_\Omega W d\Omega = \int_{-\theta^*}^{\theta^*}\int_{R_1(\theta)}^{R_2} W(r,\theta) r dr d\theta.$$

در نهایت، با انجام محاسبات ریاضی بر روی رابطه فوق می‌توان مقدار انرژی کرنشی را مطابق آنچه در رابطه ۱۵ آورده شده است به دست آورد:

$$E_1 = \frac{\rho I_1 \sigma_{\max}^2}{16E}, \qquad (۱۵)$$

که در آن، پارامتر I_1 به صورت زیر محاسبه می‌شود:

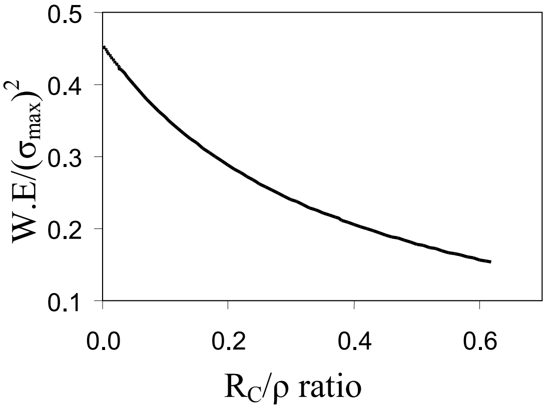
$$\begin{aligned}
I_1 = \rho\Bigg\{ &\left[A\left(\frac{5}{4} - \frac{3}{4}\nu - 2\nu^2\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2} - \nu^2\right) - \frac{2}{A}(1+\nu)\right]\theta^* \\
&+ \left[(1+A)\left(1-\nu-2\nu^2\right) + \frac{2}{3}(1+\nu)\right]\sin\theta^* \\
&+ \left[\frac{1}{4} - \frac{\nu}{4} - \frac{\nu^2}{2} - \frac{A}{8}(1+\nu)\right]\sin 2\theta^* \\
&+ \left(-\frac{5}{6} + \frac{7}{6}\nu + 2\nu^2\right)K(0,\theta^*) - \left(1-\nu-2\nu^2\right)K(1,\theta^*) \\
&+ \frac{(1+\nu)}{2}K\left(2,\theta^*\right) + \frac{1}{6}(1+\nu)\sin^3\theta^*\Bigg\}.
\end{aligned} \qquad (۱۶)$$

مقدار متوسط چگالی انرژی کرنشی از تقسیم مقدار انرژی کرنشی به اندازه حجم کنترل به دست می‌آید. بنابراین:

$$\overline{W} = \frac{\rho}{16E}\left(\frac{I_1}{\Omega}\right)\sigma_{\max}^2 , \qquad \frac{R_C}{\rho} < 0.61835 \qquad (۱۷)$$

که در آن، پارامتر I_1 از رابطه ۱۶، و پارامتر Ω از رابطه ۱۱ محاسبه می‌شود.

به عنوان مثال برای $\nu = 0.3$، نمودار تغییرات تابع $\left(\overline{W}.E\right)/\sigma_{\max}^2$ بر حسب R_C/ρ به صورت شکل ۵ می‌باشد. همانطور که از این شکل پیداست با افزایش شعاع کنترل (و ثابت نگاهداشتن سایر پارامترها) مقدار چگالی انرژی کرنشی کاهش می‌یابد که این امر بدیهی است چون ماکزیمم چگالی انرژی کرنشی در روی لبه شیار اتفاق می‌افتد و با دور شدن از لبه شیار این پارامتر کاهش می‌یابد.



شکل (۵): نمودار تغییرات تابع $\left(\overline{W}.E\right)/\sigma_{\max}^2$ بر حسب R_C/ρ برای حالت اول حجم کنترل.

۴- حالت دوم حجم کنترل (حجم کنترل بزرگ)

در این بخش حالت دوم حجم کنترل مورد بررسی قرار گرفته است.

۴-۱- محاسبه مقدار حجم کنترل

در حالت دوم، مرز حجم کنترل با قسمت لبه شیار تلاقی دارد. رابطه لبه شیار در سیستم مختصات قطبی را می‌توان به سادگی به صورت آنچه در زیر آمده است نوشت:

$$R_3(\theta) = \rho \csc\theta \, .$$

بنابراین، رابطه زاویه θ^* (که در آن مرز حجم کنترل و قست کناره‌های شیار با یکدیگر تلاقی دارند) را می‌توان به صورت زیر محاسبه نمود:

$$\theta^* = \pi - \sin^{-1}\left(\frac{2}{A}\right). \qquad (۱۸)$$

در این حالت رابطه مربوط به مقدار حجم کنترل به صورت آنچه در رابطه (۱۹) آمده است تغییر می‌یابد:

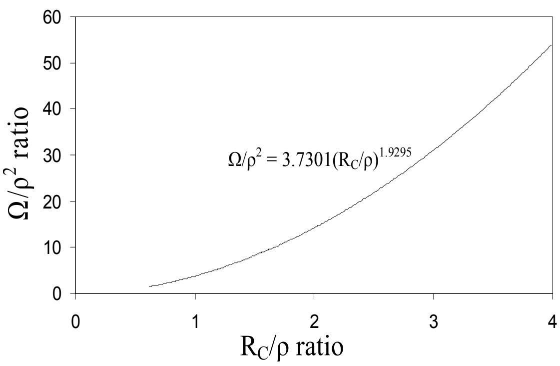
$$\Omega = \iint r\,dr\,d\theta = 2\left[\int_0^{2.035}\int_{R_1}^{R_2} r\,dr\,d\theta + \int_{2.035}^{\theta^*}\int_{R_3}^{R_2} r\,dr\,d\theta\right]. \qquad (۱۹)$$

با انجام محاسبات ریاضی در نهایت مقدار حجم کنترل به صورت رابطه (۲۰) درمی‌آید:

$$\Omega = \rho^2\left(\frac{A^2\theta^*}{4} + \cot\theta^* - 0.5715\right) \qquad \frac{R_C}{\rho} \geq 0.61835 \qquad (۲۰)$$

.

در این حالت نیز می‌توان تابع بدون بعد Ω/ρ^2 را تعریف نمود و نمودار تغییرات آنرا بر حسب پارامتر بدون بعد R_C/ρ به صورت شکل ۶ نمایش داد.



شکل (۶): نمودار تغییرات Ω/ρ^2 بر حسب R_C/ρ برای حالت دوم.

در اینجا نیز نمودار توانی رسم شده در شکل ۶، با دقت خوبی با مقدار حل دقیق (رابطه ۲۰) توافق دارد. بنابراین، می‌توان بجای استفاده از این رابطه (که محاسبه آن وقت‌گیر می‌باشد)، از رابطه تقریبی که در زیر آورده شده است استفاده نمود:

$$\frac{\Omega}{\rho^2} = 3.7301\left(\frac{R_C}{\rho}\right)^{1.9295} . \qquad (۲۱)$$

۴-۲- محاسبه مقدار متوسط چگالی انرژی کرنشی

در حالت دوم رابطه مربوط به محاسبه انرژی کرنشی درون ناحیه حجم کنترل به صورت آنچه در زیر آمده است بازنویسی می‌شود:

$$E_1 = 2\left(\int_{0}^{2.035}\int_{R_1(\theta)}^{R_2} W(r,\theta)\, r\,dr\,d\theta + \int_{2.035}^{\theta^*}\int_{R_3(\theta)}^{R_2} W(r,\theta)\, r\,dr\,d\theta\right).$$

و با انجام محاسبات ریاضی رابطه (۲۲) حاصل خواهد شد:

$$E_1 = \frac{\rho}{16E}\sigma_{\max}^2 L_1 , \qquad (۲۲)$$

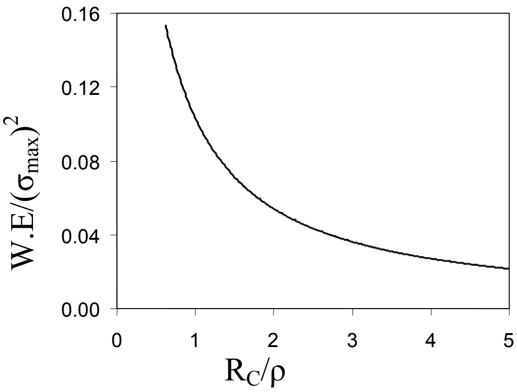
که در آن، پارامتر L_1 به صورت زیر تعریف شده است:

$$\begin{aligned} L_1 = \rho\Big\{&\left(1-\nu-2\nu^2\right)\left[2Ln\left(\cot\theta^* + \csc\theta^*\right) - 2Ln\sin\theta^* + A\sin\theta^*\right] \\ &+\left[\left(\frac{5}{4}-\frac{3}{4}\nu-2\nu^2\right)A - \frac{2(1+\nu)}{A}\right]\theta^* - \frac{A}{8}(1+\nu)\sin 2\theta^* \\ &-0.8965 + 5.1521\nu + 6.0476\nu^2\Big\}. \end{aligned} \qquad (۲۳)$$

و در نهایت مقدار متوسط چگالی انرژی کرنشی با تقسیم رابطه مربوط به مقدار انرژی کرنشی درون ناحیه حجم کنترل (رابطه ۲۳) بر مقدار حجم کنترل به صورت رابطه (۲۴) محاسبه خواهد شد:

$$\overline{W} = \frac{\rho}{16E}\left(\frac{L_1}{\Omega}\right)\sigma_{\max}^2 . \qquad (۲۴)$$

نمودار تغییرات تابع $\left(\overline{W}.E\right)/\sigma_{\max}^2$ بر حسب R_C/ρ نیز در شکل **۷** نشان داده شده است.

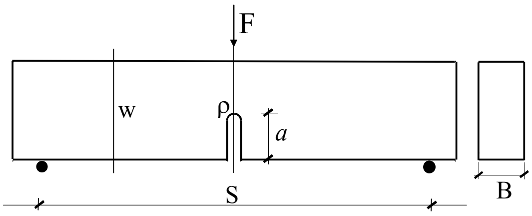


شکل (۷): نمودار تغییرات $\left(\overline{W}.E\right)/\sigma_{\max}^2$ بر حسب R_C/ρ برای حالت دوم.

در این حالت نیز مشابه حالت اول، با افزایش مقدار شعاع کنترل و ثابت نگاهداشتن سایر پارامترها مقدار متوسط چگالی انرژی کرنشی کاهش چشمگیری دارد.

۵- تأثیر شعاع انتهای شیار بر مقدار متوسط چگالی انرژی کرنشی و بار بحرانی شکست

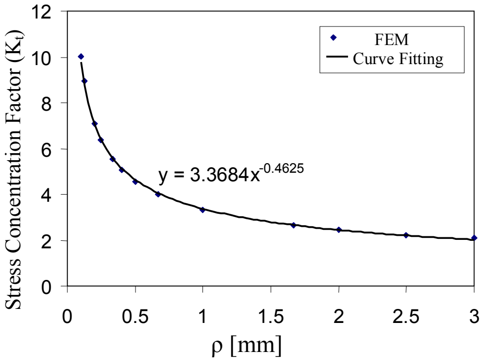
در این بخش تأثیر شعاع انتهای شیار بر مقدار متوسط چگالی انرژی کرنشی مورد بررسی و تحلیل قرار می‌گیرد. برای این منظور پارامترهای شعاع کنترل (R_C)، خواص ماده (E و ν)، و ابعاد نمونه ثابت نگه داشته می‌شود و تنها شعاع انتهای شیار به عنوان متغیر مورد بررسی قرار می‌گیرد. نمونه به صورت خمش سه نقطه‌ای[1] تحت بارگذاری قرار می‌گیرد که در شکل **۸** نشان داده شده است. نمونه تحت بار $F = 100N$ قرار می‌گیرد. بنابراین تنش نامی[2](σ_{nom})در تمام نمونه‌ها یکسان می‌باشد. ابعاد نمونه و ثابتهای ماده مطابق آنچه در رابطه زیر ذکر شده است انتخاب می‌شود.



شکل (۸): نمونه مورد بررسی.

$$\begin{cases} S = 200mm & B = 25mm & G = 70GPa \\ W = 50mm & a = 10mm & \nu = 0.3 \end{cases}$$

با توجه به رابطه (۱۷) ملاحظه می‌شود که به شرط ثابت نگاهداشتن تمام متغیرها بجز شعاع انتهای شیار، پارامترهای ضریب تمرکز تنش، I_1، و Ω توابعی از شعاع شیار می‌باشند که بر مقدار چگالی انرژی کرنشی در حالت اول تأثیرگذار هستند. همچنین دقت در رابطه (۲۴) نیز منجر به این می‌شود که پارامترهای ضریب تمرکز تنش، L_1، و Ω بر مقدار چگالی انرژی کرنشی موثر می‌باشد. ضریب تمرکز تنش با استفاده از المان محدود برای مقادیری از شعاع کنترل به صورت آنچه در نمودار شکل **۹** آمده است به دست می‌آید.

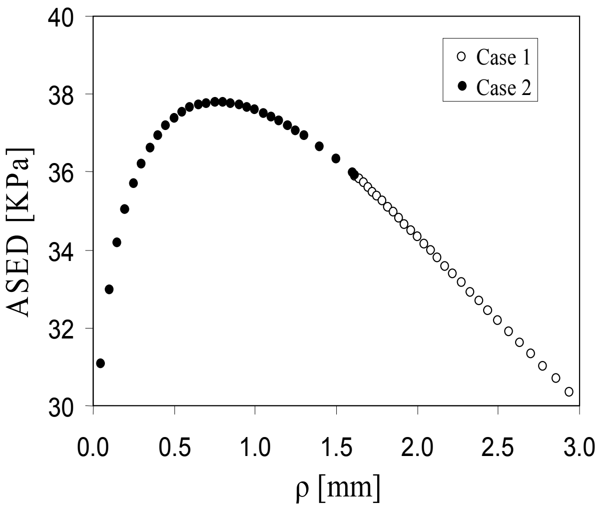


1-Three- Point Bending (TPB)
2-Nominal Stress

شکل (۹): نمودار تغییرات ضریب تمرکز تنش بر حسب شعاع انتهای شیار.

همانطور که ملاحظه می‌شود، می‌توان یک رابطه توانی با تقریب بسیار خوب برای محاسبه ضریب تمرکز تنش به صورت رابطه‌ای که در شکل **۹** آمده است نوشت. لازم به ذکر است که رابطه مذکور تنها برای مقادیر بکار رفته در این مقاله معتبر می‌باشد.

با درنظر گرفتن مقدار شعاع کنترل $R_C = 1mm$، نمودار تغییرات چگالی انرژی کرنشی بر حسب شعاع انتهای شیار به صورت شکل **۱۰** می‌باشد.
همانطور که ملاحظه می‌شود، شعاعهای درنظرگرفته شده برای انتهای شیار هر دو حالت اول و دوم حجم کنترل را دربر می‌گیرند. با توجه به نمودار فوق مشخص است که در شعاع $\rho = 0.75mm$ حداکثر مقدار برای مقدار متوسط چگالی انرژی کرنشی به دست می‌آید. این مقدار بیشینه در



شکل (۱۰): نمودار تغییرات میانگین چگالی انرژی کرنشی بر حسب شعاع انتهای شیار با فرض ثابت ماندن سایر پارامترها.

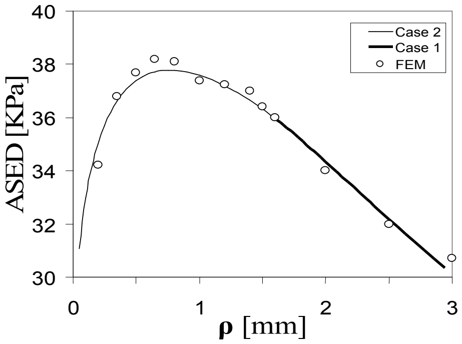
$R_C/\rho=1.333$ اتفاق می‌افتد. بررسی‌ها نشان داده است که اگر شعاع کنترل بجای $R_C = 1mm$، هر مقدار دیگری نیز درنظر گرفته شود و تغییرات مقدار متوسط چگالی انرژی کرنشی بر حسب تغییرات شعاع انتهای شیار رسم گردد، باز هم مقدار حداکثر این پارامتر در $R_C/\rho=1.333$ اتفاق می‌افتد. بنابراین برای یک ماده مشخص (شعاع کنترل ثابت) احتمال شکست وقتی ماکزیمم می‌شود که مقدار بی‌بعد R_C/ρ برابر ۱/۳۳۳ شود. لازم به ذکر است که نتایج به دست آمده فقط برای بارگذاری خمشی صادق است و چنانچه نوع بارگذاری تغییر کند ممکن است نتایج دیگری حاصل شود.

لازم به ذکر است که با افزایش شعاع انتهای شیار پارامتر L_1 ابتدا افزایش می‌یابد تا جایی که مقدار R_C/ρ مساوی ۱/۳۳۳ می‌شود. پس از آن با افزایش شعاع انتهای شیار، مقدار L_1 کاهش می‌یابد. در مقدار $\rho = 1.6172mm$، حالت دوم حجم کنترل به حالت اول تبدیل می‌شود. در این حالت پارامتر I_1 (که متناسب با پارامتر L_1 در حالت دوم می‌باشد) به روند نزولی خود ادامه می‌دهد. با افزایش شعاع انتهای شیار، مقدار حجم کنترل افزایش می‌یابد ولی مقدار ضریب تمرکز تنش کاهش می‌یابد. در نهایت با دقت در نتایج مقدار متوسط چگالی انرژی کرنشی ملاحظه می‌شود که این پارامتر (که پارامتر مورد نظر برای تشخیص بار بحرانی شکست بر مبنای معیار مقدار متوسط چگالی انرژی کرنشی است) با افزایش مقدار شعاع انتهای شیار ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد. بنابراین دارای یک مقدار ماکزیمم است که همانطور که قبلا بیان شد این مقدار ماکزیمم در $R_C/\rho=1.333$ اتفاق می‌افتد.

با استفاده از نرم‌افزار Ansys، تحلیل المان محدود برای تحقیق صحت روابط به دست آمده انجام شده است. بدین منظور نمونه‌هایی با ابعاد قبلی مدلسازی شده و مقادیر ۰/۲، ۰/۳۵، ۰/۵، ۰/۶۵، ۰/۸، ۱، ۱/۲، ۱/۴، ۱/۵، ۱/۶، ۲، ۲/۵، و ۳ میلیمتر برای شعاع انتهای شیار درنظر گرفته شده است. سپس مقدار متوسط چگالی انرژی کرنشی با استفاده از نگارش کد ماکرو[1] مناسب به دست آمده است و با مقدار تئوری مقایسه شده است. نمودار شکل **۱۱** نشان می‌دهد که توافق خوبی بین رابطه تئوری برای محاسبه مقدار متوسط چگالی انرژی کرنشی (روابط ۱۷ و ۲۴) و مقدار به دست آمده با مدلسازی المان محدود

1-Macro Code

وجود دارد. به طوری که ماکزیمم اختلاف بین این دو مقدار مربوط به $\rho = 1mm$ و مساوی ۶/۱ درصد می‌باشد.



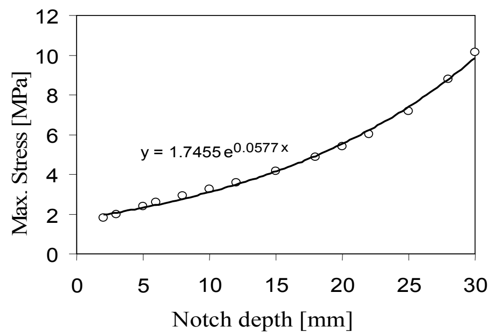
شکل (۱۱): مقایسه نتایج تئوری و مدلسازی المان محدود.

۶- تأثیر عمق شیار بر مقدار متوسط چگالی انرژی کرنشی و بار بحرانی شکست

با تغییر دادن عمق شیار و ثابت نگاهداشتن سایر پارامترها، فقط ماکزیمم تنش در نوک شیار[1] (σ_{max}) تغییر می‌کند. بنابراین تغییرات مقدار متوسط چگالی انرژی کرنشی در این حالت متناسب با مجذور ماکزیمم تنش در لبه شیار می‌باشد. برای بررسی این شرایط نیز مطابق آنچه در شکل **۸** نشان داده شده است، بارگذاری خمشی انجام می‌شود. با استفاده از المان محدود، ماکزیمم تنش در لبه شیار برای مقادیر مختلفی از عمق شیار (با فرض ثابت نگاهداشتن سایر ابعاد) به دست آمده و نمودار آن در شکل **۱۲** رسم شده است. ابعاد نمونه نیز به صورت زیر درنظر گرفته شده است.

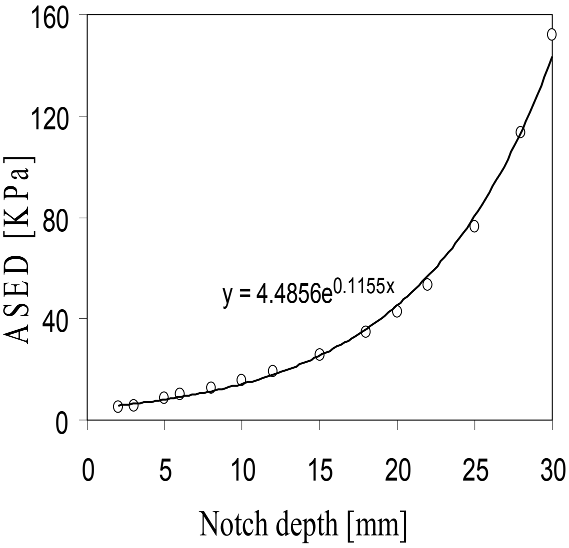
$$\begin{cases} S = 200mm \quad B = 25mm \quad G = 70GPa \\ W = 50mm \quad \rho = 1mm \quad \nu = 0.3 \end{cases}$$

$$R_C = 1mm$$



شکل (۱۲): نمودار تغییرات تنش ماکزیمم در لبه شیار بر حسب عمق شیار .

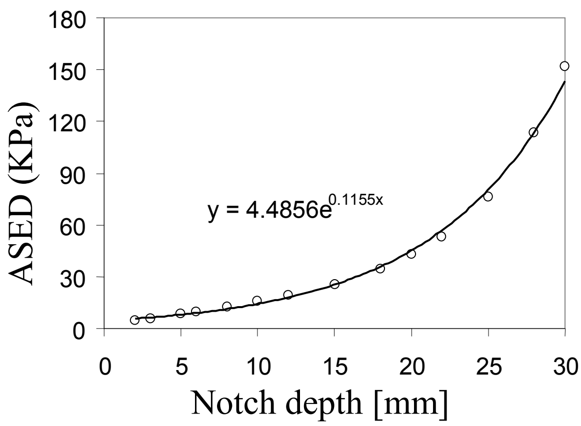
همانطور که از شکل **۱۲** نتیجه می‌شود، تغییرات تنش ماکزیمم در لبه شیار بر حسب عمق شیار (a)، با دقت خوبی از یک تابع نمایی مطابق آنچه در شکل **۱۲** آورده شده است پیروی می‌کند. بنابراین تغییرات مقدار متوسط چگالی انرژی کرنشی بر حسب عمق شیار یک تابع نمایی است. این مطلب برای ابعاد بکار رفته در این مدلسازیها در شکل **۱۳** نشان داده شده است.



شکل (۱۳): نمودار تغییرات مقدار متوسط چگالی انرژی کرنشی بر حسب عمق شیار.

به منظور مقایسه نتایج تئوری با نتایج عددی در این قسمت نیز مدلسازی المان محدود با استفاده از نرم‌افزار Ansys انجام شده است. نتایج نشان می‌دهد که مقادیر تئوری و عددی بسیار به یکدیگر نزدیک بوده که نشان دهنده صحت روابط به دست آمده می‌باشد. برای بررسی تأثیر عمق شیار بر مقدار متوسط چگالی انرژی کرنشی با درنظر گرفتن ابعاد مورد نظر، ۱۴ مقدار مختلف برای پارامتر عمق شیار (a) درنظر گرفته شده و مدلسازی انجام شده است. نتایج به صورت نمودار شکل **۱۴** خلاصه شده است.

1-Maximum Stress at the Notch Tip



شکل (۱۴): مقایسه روابط تئوری و نتایج عددی با استفاده از نرم‌افزار Ansys.

۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله، با استفاده از تعریف شعاع کنترل و حجم کنترل، مقدار متوسط چگالی انرژی کرنشی درون ناحیه حجم کنترل به دست آمد. دو حالت مختلف برای این منظور درنظر گرفته شد. برای هر دو حالت مورد نظر، روابط ریاضی و تحلیلی برای آن ارائه شد و در نهایت دو رابطه برای محاسبه پارامتر مذکور درون ناحیه حجم کنترل ارائه گردید. روابط تجربی ساده و نسبتاً دقیقی نیز با عبور دادن منحنی مناسب از نتایج تئوری به دست آمد. سپس، تأثیر عمق و شعاع انتهای شیار بر مقدار متوسط چگالی انرژی کرنشی به صورت جداگانه مورد بررسی قرار گرفت. در هنگام این بررسی‌ها، کلیه پارامترهای ورودی دیگر ثابت درنظر گرفته شد. با بررسی تأثیر شعاع انتهای شیار بر مقدار متوسط چگالی انرژی کرنشی مشخص شد که با افزایش شعاع شیار، این مقدار ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد. بنابراین، پارامتر مقدار متوسط چگالی انرژی کرنشی دارای یک مقدار ماکزیمم می‌باشد که برای هر شعاع کنترل دلخواه در مقدار $R_C/\rho=1.333$ اتفاق می‌افتد. همچنین، در بررسی تأثیر عمق شیار بر این پارامتر مشخص شد که با تغییر عمق شیار، مقدار متوسط چگالی انرژی کرنشی به صورت نمایی تغییر می‌کند. بنابراین، افزایش عمق شیار تأثیر بسیار زیادی بر افزایش مقدار متوسط چگالی انرژی کرنشی خواهد داشت. بر اساس معیار شکست، مقدار متوسط چگالی انرژی کرنشی، با توجه به ثابت بودن مقدار بحرانی برای یک ماده مشخص، واضح است که بار بحرانی شکست با افزایش عمق شیار به صورت نمایی کاهش می‌یابد. ولی، با افزایش شعاع انتهای شیار (با فرض ثابت بودن سایر پارامترهای ورودی)، بار بحرانی شکست ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. با استفاده از تحلیل المان محدود با نرم‌افزار Ansys صحت روابط به دست آمده مورد بررسی و تحقیق قرار گرفت. نتایج نشان داد که بین مقادیر تئوری و عددی اختلاف بسیار کمی وجود دارد.

مراجع

1. Matvienko, Y.G., "J–estimation Formulas for Non–linear Crack Problems", Int. J. Fracture, Vol. 68, No. 1, pp. 815-818, 1994.
2. Filippi, S., Lazzarin, P., and Tovo, R., "Developments of Some Explicit Formulas Useful to Describe Elastic Stress Fields Ahead of Notches in plates", Int. J. Solids and Structures, Vol. 39, No. 2, pp. 4543-4565, 2002.
3. Matvienko, Y.G. and Morozov, E.M., "Calculation of the Energy J-integral for Bodies with Notches and Cracks", Int. J. Fracture, Vol. 125, No. 1, pp. 249-261, 2004.
4. Yosibash, Z., Bussiba, A.R., and Gilad, I., "Failure Criteria for Brittle Elastic Materials", Int. J. Fracture, Vol. 125, No. 1, pp. 307-333, 2004.
5. Lazzarin, P. and Berto, F., "Some Expressions for the Strain Energy in a Finite Volume Surrounding the Root of Blunt V–Notches", Int. J. Fracture, Vol. 135, o. 1, pp. 161-185, 2005.
6. Gomez, F.J., Elices, M., Berto, F., and Lazzarin, P., "Local Strain Energy to Assess the Static Failure of U–Notches in Plates under Mixed Mode Loading", Int. J. Fracture, Vol. 145, No. 2, pp. 29-45, 2007.
7. Berto, F., Lazzarin, P., and Matvienko, Y.G., "J–integral Evaluation for U– and V–blunt Notches under Mode I Loading and Materials Obeying a Power Hardening Law", Int. J. Fracture, Vol. 146, No. 1, pp. 33-51, 2007.
8. Livieri, P., "Use of J–integral to Predict Static Failure in Sharp V–notches and Rounded U–Notches", Eng. Fracture Mech., Vol. 75, No. 3, pp. 1779-1793, 2008.
9. Berto, F. and Lazzarin, P., "Relationships between J- Integral and the Strain Energy Evaluated in a Finite Volume Surrounding the Tip of Sharp and Blunt V- notches", Int. J. Solids and Structures, Vol. 44, No. 2, pp: 4621-4645, 2007.