

ارائه یک رهیافت محاسباتی وارون سازی ماتریسی برای تحلیل مسائل تماسی بین هر نوع نانو فرورونده صلب و پیکره های ویسکوالاستیک

حسین اشرفی^۱ و مهرداد فرید^۲

مرکز عالی مکانیک محاسباتی، بخش مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه شیراز

(تاریخ دریافت: ۱۳۸۸/۰۴/۰۸؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۸۸/۱۰/۱۵)

چکیده

در این مقاله، فرآیند حل محاسباتی جدیدی به منظور فرمول بندی و تحلیل مسئله تماس نانو فروروی بین یک فرورونده صلب و یک نیم فضای ویسکوالاستیک برای یک هندسه دلخواه و بدون در نظر گرفتن اصطکاک ارائه می شود. استخراج روابط بین توزیع فشار تماسی، نیروی عامل بر فرورونده و میزان نفوذ در نیم فضای ویسکوالاستیک از خواسته های اصلی این مطالعه است. با بکارگیری یک فرمول بندی مناسب در معادلات و استفاده از یک رهیافت وارون سازی ماتریسی جدید، مسئله فروروی ویسکوالاستیک با ارضای دقیق شرایط مرزی حل می شود. مقایسه نتایج عددی با حل تحلیلی فرایند بارگذاری و باربرداری در فرورونده های کروی دقت بالای شیوه حل عددی را نشان می دهد.

واژه های کلیدی: مکانیک تماس ویسکوالاستیک، نانو فروروی تماسی، حل محاسباتی وارون سازی ماتریسی، فرورونده های کروی

A Computational Matrix Inversion Approach for Analysis of Contact Problems between any Rigid Nano-indenter and Viscoelastic Bodies

H. Ashrafi and M. Farid

Center of Excellence in Computational Mechanics, Mech. Eng. Dep't., School of Eng., Shiraz Univ.

ABSTRACT

In this paper, the procedure of a novel computational solution for the formulation and analysis of nano-indentation contact problems between a viscoelastic half-space and a rigid indenter of any arbitrary geometry is presented. The main objective of this paper is to develop the relations which link the contact pressure distribution, the load on the indenter, and the indentation depth with assumption that the surfaces are frictionless. The viscoelastic indentation problem has been solved numerically employing a proper formulation in constitutive equations and applying a new matrix inversion approach satisfying the boundary conditions. The computational approach has been validated by comparing the numerical results to the analytic ones for loading and unloading process of a spherical nano-indenter.

Keywords: Viscoelastic Contact Mechanics, Contact Nano-indentation, Computational Matrix Inversion Solution, Spherical Indenters

۱. کارشناس ارشد: ashrafi@shirazu.ac.ir

۲. استادیار (نویسنده پاسخگو): farid@succ.shirazu.ac.ir

Â ½ Â / Ä / n | Ä ² Ê • Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 É Á Ä / Ä ² Ê • Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 { Y Ä ² Ê • Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 d / ñ j ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 Â ½ Ä / Ä ² Ê • Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 Z / P ° ~ / ½ Y Ä ² Ê • Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 { Y Ä ² Ê • Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 • { É Á Ä / Ä ² Ê • Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 Â ½ Ä / Ä ² Ê • Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 Ä { Z " Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 ½ Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 É Z Ä / Ä ² Ê • Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 Ä ° É { Ä / Ä ² Ê • Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 ½ • Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 • Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 Ê n ½ Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 [18] 12 Ä / Ä 12 ½ Y Ä ² Ê • Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 Y ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 Ä ï " • Ä { Z " Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 ... Z ½ Ä / Ä ² Ê • Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 13 ... Ä • Ä b = Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 . | < Ê ± ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 Ê ± Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 É Z " P / Ä ² Ê • Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 • Y Ä ² Ê • Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 Ä ½ Ä / Ä ² Ê • Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 É / Ä • Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 ¾ ï / P / Ä ² Ê • Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 É / Ä • Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 . | < Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^

• Y Ä ² Ê • Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 ¾ Ä Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 Ê ± Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 Ä ½ • Z / - Ä ² Ê • Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 Ä " d ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 ... Z ½ Ä / Ä ² Ê • Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 Ä Ä / Ä ² Ê • Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 Ä , X Z / Ä ² Ê • Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 • { ° ^ m Ä É Y Ä ² Ê • Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 Z / Ä ² Ê • Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 , ½ Y Ä ² Ê • Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 É Z Ä / Ä ² Ê • Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 , / É Ä " Ä ² Ê • Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 . | Ê { Ä ² Ê • Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 • { ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 Ä / Ä ² Ê • Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 Ä / Ä ² Ê • Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 / Ä ² Ê • Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 d / Ä ² Ê • Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 ... Z / Ä ² Ê • Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 Ä v Ä ² Ê • Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 ¾ f ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 • Y Ä ² Ê • Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 Ä ² Ê • Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 ... Z ½ Ä / Ä ² Ê • Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 Ä ² Ê • Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 . d ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 • { Ê ± Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^
 • { / , Ä ² Ê • Z ²) f ± Ó Y Ä ° ^

6- Fu
 7- Cheng
 8- Vandame
 9- Ulm
 10- Gauthier
 11- Huang
 12- Lu
 13- Giannakopoulos

1- Ting
 2- Yang
 3- Hunter
 4- Graham
 5- Naghieh

- /] V A E A A r i f † O { E E } Z A A Y] Z ~ »
 E / S E M E / ~ D i f † O Y A E Z A A E a z u
 E / S E Y E c f O A Z V . Z » E † , y A E 3 | i A Z J Y A A e
 © / b A E E A / , 1/2 A E J E J † E S A { Z Z A A A 1/4 z
 c O { Z / E † A E 3 | / i A Z J Y A Z A E A E » z Z e
 : [2 Q { Y S E Z A A E A E • A A Y E . Y E † f z

$$s_j \int_0^t \mathcal{W} \frac{de_j}{dW} dW, \quad (3)$$

$$e_j \int_0^t \mathcal{J}(t) \mathcal{W} \frac{ds_j}{dW} dW \quad (4)$$

A E 3 | / i A Z J Y A A E A E A (t) A G (t) , Z / A A M
 . | z A A i i © Z f † O Y A E , y E A

© i f † O Y A E † E A A E S Z i | » 3
 z (x, y) A Y A A Z A A • A | z A A A E S A E Y
 © / A / e a 1/2 A A { -] Z ° ~ / 1/2 A E † Z E A A E S
 1/2 Y , { E » E † • Y E c e • A » i f † O Y A Z ° S E A
 E A A E M S • Z u Z A V i e A A z / z A (A) A E S z
 S E Y 1/2 S Z A Z / d E y J A A Y E © 3 • E V j e
 • Z O E / S E A e A { e i i m e f e » A A Y A E Z E
 z / E A A E / ~] 1/4 A S Z E A Y p (x, y, t) E † z 1/4 e
 © / E . Z A Y A / A A z i A E • A A E S E V A E J z O E S
 . { A E m Z S Z 1/4 E { Y E m E † z 1/4 u p A E Y E S d † e f A E J E A A 1/2 M E] E Z A A { A 1/2 1/4 e
 E Z 1/4 S i / A E A A E , e z z 1/4 z » A { Z f A J
 (x, y) A v ~ A A ^ ^ E • Y ~ 3 P Z © i f † O Y A ° ^
 A , X E Y E J E Y d e f A A | A { 1/2 z i O E z • {
 : { A E 1/2 z i E • A A z 0 • {

$$u(x, y, t) G(t) | z, (x, y) (t), \quad (5)$$

$$V_{xz} \quad yz \quad V_{zz} 0, (x, y) (t), \quad (6)$$

E E Z / e i A A A Y E R u (z, t) , Z A M A -
 E n z e i z A i A d A E m Z ° S A E • A E A ~ - z
 . | / A E / 1/2 Z O S A e A ^ z z A d † E , E S † z 1/4 e
 \ E E Z ° © i f † O Z A A E / ° (Y © ^ A i A A K ^ »
 E “ E S ~ - m z » E E z m A J z n e { A E] 1/2 A † Y A a

A S O E / t O { Z A † † A E i z A v E • z i † » 2
 © i f † O Y A ° ^ E A
 E / z A A E e Y z f y A Z A ° A A A S O E t O { Z »
 • E e A Z A A / A E Z m A / » | A E z z y A { © E
 q / i { A f O { Z E A A E E » z z O E Y A Z 1/2 M z f S •
 E J E { E J • C Z I / . Z ° z z E A V - 1/2 Y A A A A P z M
 , A r / i † O A r / i † O M A z E z A A E Z A A † •
 • { Y E / † z S Y z i A E z c j O Z A A i f † O Y A A ° ^
 A u { Z E z z z A E M A A V f { A E Z A v » © i z Z ° »
 A f / i A Z A v » z / E Y e A j h A E z i m f O { Z »
 { Y A E i z z Y Y A A S O E t O { z E • A z • { E J • z -
 . | z • E z z z O E z A E e Y z f y . z z e Y •
 A / A S O E / t O { z E i A » { A E z z e e o e A »
 , E z z e z m c O { z z z z - /] Y A • A i e i • {
 q W z E z E A A u j A » i e S E A E ° i e z † A E ° i z Z ° »
 e / o e A z † A f / i A Z A v » © i z Z ° e e J z «
 { Y A / E • e A S O E / t O { z E i A » { A E / E i S
 z A / | / † E J A | / » m A m E • A / A 1/2 A 3 z z A 3
 { Y A E / » » z A A S E Y E A z E z A i E e 3 • z °]
 e b e A ~ c v e Y A A Y 1/2 M . { A i A E » 1 z n z Y
 S E Y , E Y i O i f † O © i f † O Y z A E z v ~ 3 • z]
 E m z A A Y Y z E z A z ° z E z A • S f A S e
 E Y z / z O E A { © E z i z E Y e A • { © E A d i z
 . | z { E A v d Y z z » { E • Y E † f z Y

© i f † O Y / e z m z S u z e S A / e • { Z »
 < : { Y 1/4 z z O E A e e • A A Y e E ~ a z e j e
 s_j 2 P e_j . (1)

$$: e † E { Z A z A E \quad (2)$$

e_j (1/2 P s_j ,
 A S A E / S Y E z A A • V R e e e A s_j 1/2 M A -
 . | † z E J E † e j A z A E » E e e † z A S i z e -

• {Ä | / d M f t Z E A E S € i j u Ä ^ E Z - »
 . d / t Ä | Ä { 4 A M • { E , i , l E e Z f z Z A » A » Y {
 l E Z Z f i | / d / S A Z E Z f i y Ö f y X A } E Z a
 ¶ // u / Ä E A f S Z i j / « Ä | Ä A Z f // i , v e
 E Ä v Ä » 1/2 • Z 1/2 E Ä e i Ä r d t A e Z ^ t Z v
 . { € Ä / m E A S - S A Z A S E Y , (S) Y f t Ö Y Ä °
 • { p(0, y, t) • Z E E S A A e v A ¶ ° • { Ä i E Y A € }
 . d / t Ä | / Ä { 1/2 Z E E } » Z A • { Ä i E Z i Ä e v .
 1/2 Z E // j ¶ v e z f i | S A t E f i Ä E - »
 . d t X | Ä W E A Y E Ö Z E € Ä 1/4 A A {

(t) $V_0 [E - (E_0 H F) e^{t/W}]$, (19)
 d / . Z f / i Z E f » , Ä i E S M € , 1/2 N A -
 . | < Z E A • z O E Z A E Z M Z E A » , E E Z f ^ E Y
 Ä E / ~ y € / E / S Z Z A A f A t Z A A » € Z e]
 E Z µ A / E S { Z A t 1/2 Y E A E A E A | Ä A - A E f ^ »
 E Ä µ A / . f € E / E S € / Y E e A Z i f t Ö Y Ä ° ^
 c • Ä / Ä / Ä | Ä ° , A E f A E A S € e Ä E A { Z t
 1/2 A - Ä µ Ä ^ E Z µ A | » | i E A ¶ • Z E Y A E € t
 d i ^ - (S) f t Ö Y Ä E ° « M A A t i E A A i » Z i
 Ä / E O E / E S A A • Z A A ° , y { Ä { Z E 1/2 t Z E
 1/2 E i Z E t ^ } Y A » Z i • A A | Ä 1/4 Z E E Z E Ä e
 Y O i f t Ö Y Ä • Z t S E t Z E A E 1/4 t • Z i j { Y Ä °
 S / E A M t A A ° , / A E e • Z A t < E Y E Z E A e
 E • Z A t / E Y E A] Ä Z / A Z A E Z µ A | E € t
 E Z µ A E • Y S E A M t A E O E E e i A • A A e
 • Z f S Z E Y A E S E . Y • A M | q A • Z A (µ Ä ^ - Z »
 A E S / Ä • Z A A S A • Z • Z ° S (S) f t Ö Y Ä ° ^ E Ä
 Ä | / Ä { Z f y Y E Z f y t Z µ A t E E , y
 Ä / Ä m Z A E < , y ° ° € E E a i | Ä µ A A d t Y
 : { Ä 1/2 E E • A A 1/2 E A e Y | µ Z 1/4 E Y



€ j • E A Z E A E S € Ä 1/4 (A) ¶ ° <
 . 1/2 Z A t A ^ A | i Ä • A € S

G(t) $E_f - (E_0 - E_f) e^{t/W}$, (20)
 J(t) $\frac{1}{E} \frac{E_0 - E_f S}{E_0 F} e^{(E_f/E_0) t/W}$ (21)

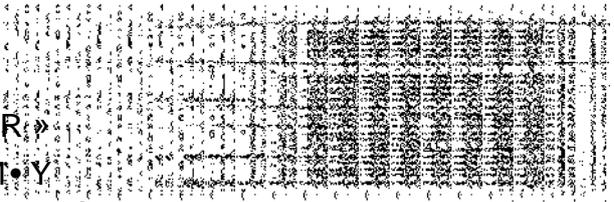


. E n i A A • { E t Z Z E S A E ' i A (5) ¶ ° <

1/453 € E Y , c Z Ä E f » Z A O E t Ö { Z E Y €]
 1/2 Z A µ Z ° t Z O O S € Y E €] Ä µ Z ° t Z a Z ' i ^
 . [18] d t X | Ä f S E E (100 €] Y A E z O E »
 • { 2.2 sin(t t / T) €] 1/2 Z A A f ^] . Y A Z e <
 E • Y ~ 1/2 Z A t • € ' j Z 1/2 M A A | Ä f S E e i
 Ä f S E e { A Z i O €] Y A E] E • Y ~ 1/2 Z A t Y
 • Y i ... Z 1/2 Z e Z] Ä 1/2 Y ; Z A E Y t t X | <
 . | < Ä { Z [15 t Z A E } i , ¶ v e
 E / t | E A 1/2 A (1/2 | E e Z A t A A E • Y € S
 € / h Y E t Z E Z 1/2 A (1/2 | M O e] Y E A
 Ä / f S E e (E / f » A O e] Y E A , i 201
 [Z / z € j M » A € A E A A] i A A A Z E S i | <
 . [1] | <

3A 7 Au A^Z | A E f Z Z u A / * Y 2 E A e
. { A A z ; f t e f d E { A A A f s z e

E z Y { 7 | «
1/2 Y { Z f z t A E i E Z 1 A A Y O A E 1/2 Z " . R »
` / E T f (. Y E A Z ') O E A A , E T 1/2 Z E A Z 1/4 M . Y
A e O e . { A Z) O E z A f A Z E | E , Z Y A e Y E] O
. | A Z E z Y { . | «



z m Y E » d ^ A | z A A A Z E A A E S z A 6) q ° «
. c Z A E E E 1/4 | , z A 1/2 Z A] .

1. Fischer-Cripps, A.C., "Nano-indentation", Springer, Berlin, 2002.
2. Christensen, R.M., "Theory of Viscoelasticity", Academic Press, New York, 1982.
3. Riande, E., Diaz-Calleja, R., Prolongo, M.G., and Salom, C., "Polymer Viscoelasticity", Marcel Dekker, New York, 2000.
4. Johnson, K.L., "Contact Mechanics", Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985.
5. Sneddon, I.N., "The Relation between Load and Penetration in the Axisymmetric Boussinesq Problem for a Punch of Arbitrary Profile", Int. J. Eng. Sci., Vol.3, No. 1, pp. 47-57, 1965.
6. Lee, E.H. and Radok, J.R.M., "The Contact Problem for Viscoelastic Bodies", ASME J. Appl. Mech., Vol. 27, No. 3, pp. 438-444, 1960.
7. Ting, T.C.T., "The Contact Stresses between a Rigid Indenter and a Viscoelastic Half-Space", ASME J. Appl. Mech., Vol. 33, pp. 845-854, 1966.
8. Ting, T.C.T., "Contact Problem in the Linear Theory of Viscoelasticity", ASME J. Appl. Mech., Vol. 35, pp. 254-284, 1968.
9. Yang, W.H., "The Contact Problem for Viscoelastic Bodies", ASME J. Appl. Mech., Vol. 33, pp. 395-401, 1966.
10. Hunter, S.C., "The Hertz Problem for a Rigid Spherical Indenter and a Viscoelastic Half-Space", J. Mech. and Phys of Solids, Vol. 8, No. 4, pp. 219-234, 1960.
11. Graham, G.A.C., "The Contact Problem in the Linear Theory of Viscoelasticity", Int. J. Eng. Sci., Vol. 3, No. 1, pp. 27-46, 1965.
12. Graham, G.A.C., "Viscoelastic Contact Problems with Friction", Int. J. Eng. Sci., Vol. 18, pp. 191-196, 1980.
13. Naghieh, G.R., Jin, Z.M., and Rahnejat, H., "Contact Characteristics of Viscoelastic Bonded Layers", Appl. Math. Modeling, Vol. 22, No. 8, pp. 569-581, 1998.

1/2 Z A A ^ E A E A A Z S A 1/2 Y , 1/2 Z E Z a
E / A v A A A A ^ t z z A E E E 1/4 A z A
E / 1/2 Z E d z A | A A O E A ° . (1/2 E z A ^ t z v »
• A 1/2 E { A f / t A Z A v O i z z 1/2 A A t A
{ Z / Y M A d / t Y Z E U t Z A A A E A Z v z ^ »
. [2 7] { A E 1/2 z Z A f t A A t E z A v A . z O E »

E E 3 A m f z 6
E z q A i , v A E z A z A E S E 3 a { E i E z A E { z t
O i / t E z A A , v e E , E z z A A A E S E k m
, A // . z E v x d // t A E E E // t z A A e q M S z ^ // »
A / i A z z O E / S , 1/2 z A A A ^ / E Y A E z A A E i
A z , // , A A A E / t z A A E / S E z z E n e z
E e z ^ / t z v A O E S A E A E z A z A . A E S
• O E z E A A A z]] Y k A . E z t A M t | E m
O / E { A 1/2 y , A A t / z A A A E S A E E t z 1/4 e
A / . z E Y A Y | A Y E O i f t O Y A E z ° S z
E] A A y E E E e z z A A E y A n S z . b A t A { A]
S A ° 1/4 A A E i z z A z A z t f t O E i A ° ^ E A
A / | E E M E O E { A E , z 1/4 i / 1/2 z E z E z z 1/4 e
E z / A E 1/2 Y A z A z | A ^ A q z ° ~ 1/2 Y E A e
mu z b u E z O A / i E n z z A t { E E d O E z z]
E 3 / i t a h / Y A z Y Y E O e A E t z S A ° 1/4 A E]
E z / z { 3/4 i / A . r 1/4 E , i z q W z A z E f i O E
E / , y 0 E / A E 3 / i A . Y A A 1/2 z E Y / A E M

14. Fu, G., "Theoretical Study of Complete Contact Indentation of Viscoelastic Materials", *J. Mater. Sci.*, Vol. 39, No. 8, pp. 2877–2878, 2004.
15. Cheng, L., Xia, X., Scriven, L.E., and Gerberich, W.W., "Spherical-tip Indentation of Viscoelastic Material", *Mech. of Mater.*, Vol. 37, No. 1, pp. 213–226, 2005.
16. Vandame, M. and Ulm, F.J., "Viscoelastic Solutions for Conical Indentation", *Int. J. Solids and Structures*, Vol. 43, No. 10, pp. 3142–3165, 2006.
17. Gauthier, A., Knight, P.A., and McKee, S., "The Hertz Contact Problem. Coupled Volterra Integral Equations and a Linear Complementarity Problem", *J. Comp. and Appl. Math.*, Vol. 206, No. 1, pp. 322–340, 2007.
18. Huang, G. and Lu, H., "Measurements of the Young's Relaxation Modulus, Using Nano-indentation", *Mech. of Time-dependent Mater.*, Vol. 10, No. 3, pp. 229–243, 2006.
19. Giannakopoulos, A.E., "Elastic and Viscoelastic Indentation of Flat Surfaces by Pyramid Indentors", *J. Mech. and Phys. of Solids*, Vol. 54, No. 7, pp. 1305–1332, 2006.
20. Mase, G.T. and Mase, G.E., "Continuum Mechanics for Engineers", CRC Press, New York, 1999.
21. Sladek, V. and Sladek, J., "Singular Integrals Boundary Element Methods", *Comput. Mech. Publications*, London, 1998.
22. Paul, B. and Hashemi, J., "Contact Pressure on Closely Conforming Elastic Bodies", *ASME J. of Appl. Mech.*, Vol. 48, pp. 543–556, 1981.
23. Kalker, J.J., "Two Algorithms for the Contact Problems in the Elastostatics", Report 82-86, Dep't. of Math. and Informatics, Delft Univ. of Tech., 1982.
24. Ciarlet, P.G., "Mathematical Elasticity: Three-dimensional Elasticity", Elsevier Publications, London, 2005.
25. Cheng, Y.T. and Cheng, C.M., "General Relationship between the Contact Stiffness, Contact Depth, and Mechanical Properties for Indentation in Linear Viscoelastic Solids, Using Axisymmetric Indenters of Arbitrary Profiles", *Appl. Phys. Letters*, Vol. 87, No. 11, Art. No. 111914, 2005.
26. Liu, W.K., Karpov, E.G., and Park, H.S., "Nano Mechanics and Materials", John Wiley and Sons, London, 2006.