Archive of SID

مجله مکانیک و هوافضا (رفتار مکانیکی مواد و سازه ها)، جلد۵، شماره ۴، زمستان ۱۳۸۸، از صفحه ۳۳ تا ۴۲

ارائه یک رهیافت محاسباتی وارون‌سازی ماتریسی برای تحلیل مسائل تماسی بین هر نوع نانو فرورونده صلب و پیکره‌های ویسکوالاستیک

حسین اشرفی[۱] و مهرداد فرید[۲]

مرکز عالی مکانیک محاسباتی، بخش مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه شیراز

(تاریخ دریافت: ۱۳۸۸/۰۴/۰۸؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۸۸/۱۰/۱۵)

چکیده

در این مقاله، فرآیند حل محاسباتی جدیدی به منظور فرمول‌بندی و تحلیل مسئله تماس نانو فرورَوی بین یک فرورونده صلب و یک نیم‌فضای ویسکوالاستیک برای یک هندسه دلخواه و بدون در نظر گرفتن اصطکاک ارائه می‌شود. استخراج روابط بین توزیع فشار تماسی، نیروی عامل بر فرورونده و میزان نفوذ در نیم‌فضای ویسکوالاستیک از خواسته‌های اصلی این مطالعه است. با بکارگیری یک فرمول‌بندی مناسب در معادلات و استفاده از یک رهیافت وارون‌سازی ماتریسی جدید، مسئله فرورَوی ویسکوالاستیک با ارضای دقیق شرایط مرزی حل می‌شود. مقایسه نتایج عددی با حل تحلیلی فرایند بارگذاری و باربرداری در فرورونده‌های کروی دقت بالای شیوه حل عددی را نشان می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: مکانیک تماس ویسکوالاستیک، نانو فرورَوی تماسی، حل محاسباتی وارون‌سازی ماتریسی، فرورونده‌های کروی

A Computational Matrix Inversion Approach for Analysis of Contact Problems between any Rigid Nano-indenter and Viscoelastic Bodies

H. Ashrafi and M. Farid

Center of Excellence in Computational Mechanics, Mech. Eng. Dep't., School of Eng., Shiraz Univ.

ABSTRACT

In this paper, the procedure of a novel computational solution for the formulation and analysis of nano-indentation contact problems between a viscoelastic half-space and a rigid indenter of any arbitrary geometry is presented. The main objective of this paper is to develop the relations which link the contact pressure distribution, the load on the indenter, and the indentation depth with assumption that the surfaces are frictionless. The viscoelastic indentation problem has been solved numerically employing a proper formulation in constitutive equations and applying a new matrix inversion approach satisfying the boundary conditions. The computational approach has been validated by comparing the numerical results to the analytic ones for loading and unloading process of a spherical nano-indenter.

Keywords: Viscoelastic Contact Mechanics, Contact Nano-indentation, Computational Matrix Inversion Solution, Spherical Indenters

۱. کارشناس ارشد: ashrafi@shirazu.ac.ir

۲. استادیار (نویسنده پاسخگو): farid@succ.shiraz.ac.ir

www.SID.ir

Archive of SID

[1] [2] [3] [4] [6]

1- Correspondence Theorem
2- Boussinesq
3- Hertz
4- Sneddon
5- Lee
6- Radok

www.SID.ir

www.SID.ir

$$s_{ij} = \int_0^t 3G(t-\tau)\frac{de_{ij}(\tau)}{d\tau}d\tau, \quad (3)$$

$$e_{ij} = \int_0^t J(t-\tau)\frac{ds_{ij}(\tau)}{d\tau}d\tau \quad (4)$$

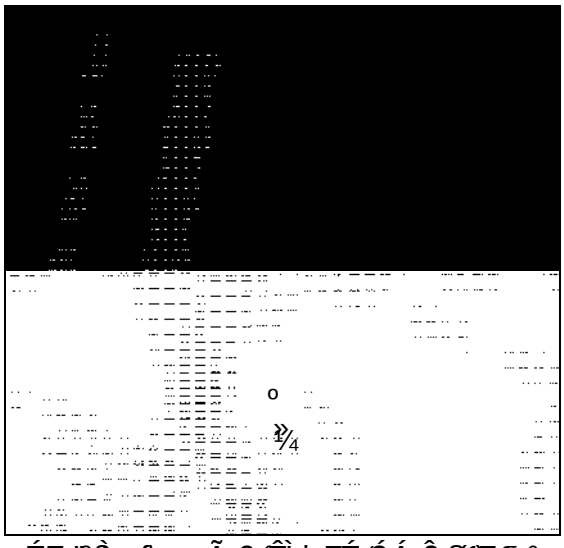
$$u(x,y,t) = G(t)\,|_{z=}, \quad (x,y) \quad (t), \quad (5)$$

$$V_{xz} \quad _{yz} \quad V_{zz} \quad 0, \quad (x,y) \quad (t), \quad (6)$$

$$s_{ij} \quad 2Pe_{ij}. \quad (1)$$

$$e_{ij} \quad (1/2P)s_{ij}, \quad (2)$$

www.SID.ir



$$u_z(x,y,t) \quad \frac{(1 \quad Q)}{S} \int_0^t J(t \quad W)\, dW$$

$$\int_{\Omega} \frac{p(\xi,\kappa)}{r} d\xi\, d\kappa \qquad W$$

$$\frac{(1 \quad Q)}{S} \int_0^t J(t \quad W)\, dW \qquad (12)$$

$$\int_{\Omega} \frac{1}{r} \frac{dp(\xi,\kappa)}{dW} d\xi\, d\kappa \qquad W$$

$$G(t) \quad |z| \qquad \sim$$

$$u_z(x,y) \quad \frac{(1 \quad Q)}{2\,S\,P} \frac{p}{r}, \qquad (7)$$

$$r \quad \sqrt{(x \quad)^2 \quad (y \quad \xi)^2} \qquad \kappa \qquad (8)$$

$$\bar{u}_z(x,y,s) \quad \frac{(1 \quad Q)}{S} \bar{J}(s)\, \bar{p}(s) \sim \qquad (9)$$

$$\bar{J}(s) \quad 1/s^2 G(s) \sim \qquad (10)$$

$$\bar{u}_z(x,y,s) \quad \frac{1 \quad G}{S} \int_{\Omega} \frac{p(\xi,\kappa)}{r} d\xi\, d\kappa \qquad (11)$$

1- Convolution Theorem

www.SID.ir

Archive of SID

¶ / Ì Ä{/d / ‡ÃY | Ã { ½ ¿ZÃŒ€¿ÄÌ ëÉÁ••Ä‡ ^ ^ ³
Ä n Ì•f{Á® Ì f ‡ Ó Y ÊŽZ ’ º§Ë¼ÁZÄ »Ä f ^] YZ Á§ •
Ä /,]/ Ì Ê¿ ¿ ZÉ/ •»Z•Ä‡ ^ ^ ® Ë‡ ËZÊ ‡ ZÉ¼ À] € ° Ì a
ÉY €Ä V /]Ìn¿ {{ € Ìc³ • Â½ Z ^ Ê ° Ë ¿ Z Z n³ w { Y | e
: d ‹ Y º{Å Y º Ã Å Ê ¿ ZÄÀ » Y {

$$W \; n_W d\,W \qquad \sim \qquad (13)$$

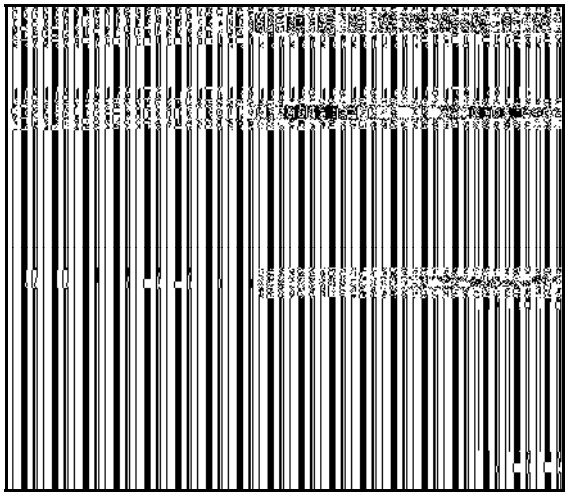
Ê¿ Z ⁄ ËŸ €Y µ Z ½ Z (1]2) YÊ ‡ ZÉ/ Ë Á Ë § { µ Z »u
: { { €Ê³ » Ê Ë Z €/ ÉÃ • ⁄ É] ZÄ ‡ f ^ ^ ¹³ € Ë §]

$$\int_{j\,1}^{I} J([I \quad j]d\,W \int_{k\,1}^{n} B_{ik}\,\frac{p_k^j \quad p_k^{j\,1}}{d\,W}\,d\,W \qquad I \qquad (14)$$

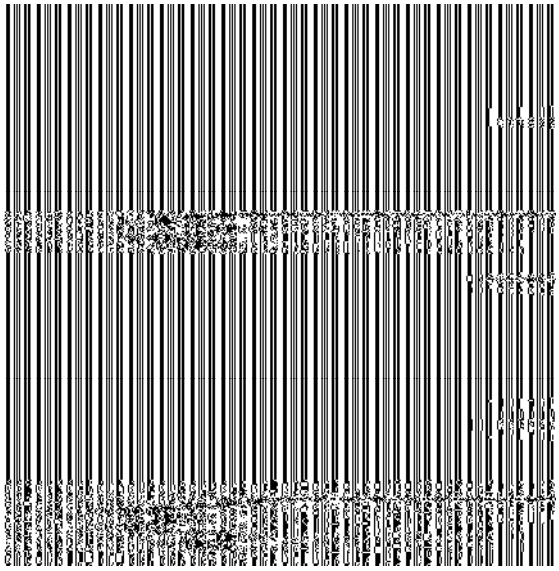
$$G \quad z_i \quad [i \quad 1,2,\ldots n],$$

, G Œ d W , p_k^j $p(x_k, y_k, j\,d\,W$, ½ M{ Ä¯
• {Ê ‡ ZÉ/ Z Œ Å Z {½ Y · ‰ Y e n(t) , Ì Á z_i z(x_i, y_i)
€ ´ ¿ Ä / B_ik] € Ìi P \ Ë € .“ | Å Ê » ½ Z Y Œ • ¿ ½ Z » •
€ i • Y{Ê ‡ | À ½ Å Z i ¼ Ê ¤ Y Z • Ä z » ¿ Ê ¸ Ê Ë Z n] Z m
• {É | Ì ¸ Š ¬ ¿ d ‡ k Y Ä ~ ¬ ¿ Ä f § Z Ë ¼ u è • Á Œ §
• Y Ã { Z · Z f] Ë Y € ¾ Ë [Y Y Ê { e Z ^ ‡ º Z Ë v / Â ¼ Ë Y
® Ë Ê ¸ Ì ~ f ^ Ä / Ë ® Á Ë É Y [2 5] Á 5] ² Á Ó É • Â Ì Ë e Z f ¿
: d ‡ Ã X | Ä ^ ‡ Z Ë c » Â Ä ® Ì f ‡ Ë Z Y º § ¿

$$B_{ij} \quad \frac{(1 \quad X)}{S} \int_{y_k \; dy/2}^{y_k \; dy/2} 3 \int_{x_k \; dx/2}^{x_k \; dx/2} 3 \qquad \frac{d\,dK \quad [}{\sqrt{(y_i \quad)^2 \quad (x_i \quad K)^2}} \sim \qquad (15)$$



. Ê ‡ Z Ê / n e ¿ Ê Z ‡ ‰ À Æ Å Ä ‡ ^ ^ { (3) ¶ ° ‹



. Ê ‡ Z • ½ Z Œ Ë § Z É ¼ Ä ¥ ^ ^ s € : (2) ¶ ° ‹

€ ´ Ë d { · Z ¾ u Ë · { Ê ‡ Z Ê / n e ¿ Å Z Ë Ë Á Z Æ Ê Å Ë Z n] Z m
| À e Æ • Y | É ¬ Y » Z Y Å { Z ½ Z · ¥ Y { Á { { € Ê ³ ½ ¿ Ì ° e
Ä ˜ ‡ Y Ä Á ¯ ¾ Œ ž Y Ë e ¾ Å Y e €. [Z Å] Å Y { Ã Y v / »
¾ Ì Ì ¶ ¸ Z [» Z Â ˜ Ä] f ^ ^ É Z ½ Å Z ¾ Œ Y € Y Ë { Z ¬ »
Ê ^ Ë Æ e • Z Z ‡ Á Ê Y e Z Á ^ d ‡ S Z Å Z ¸ Z Ë Ë Á { { Â Ê »
¾ Œ » ¯ Ë Z Æ Å Z ½ Ë Y { Z Z ¼ ¬ Ì » • e Â œ Ä À] Ë z | Ë m
Ä Ì · Á Á É Y • € → Ë Y \ Ë ‹ Z À » Z “ Z »] Y ® Ì f ‡ Ó Y Â ° ^ Ë Á
c • Â Ä É • € → Ë Y d Ë § Z ³ Å Ë • Y { |] Ê Z Ë Z Ä ‡ Â e
É , ¯ e Z ½ Z Å Ë Ž z Œ Ä f ^ ^ • Z ¬ ¿ a Ì « {
• Y | ¿ { Ê € » Z “ Ê Y Z Ê / n e ¿ » Z Ä Á Ë Ë É • € Ë » Z ½ Å Z ¼ · Y
Á [23] [17] [5] € Ì œ ž] Z Ê y » €] { d § Å Z • ¾ Ë Y
… Z Á É e e € Å ® Ë Ì e Z f ‡ ¶ Y Å f Ê ‡ ˆ Ú Ë Y [2 4]
c • Â Ä Z / n Ë Å { Ä ¯ Ã | ‹ Ã { Z ¹ Ä Ë Y Å Ë { Â ¼ Ÿ
Ê Ë Z ¼ ¿ ® • Ì Z ‡] Ó ^ Y Ë Å Â { • Y Æ » Y € É] Ä f § Ê Z Â ^ Æ]
. { { € Ê »
Z ß ¼ / ´ ® Ì Å ‡ Ó ^ Y / Ê | / » Æ Z n ’ º § ® Ë Ä Ë Á •
½ / Z ¼ N · Y n_x n_y Ž z Œ » { Y | Ä V] D_x uD_y) { Z /] Y
É { Z / Z] ¹ Å Z ¾ Ë Y { Y € Ê ³ » É • Ä ‡ ^ ^ Ê ¸ • Z Æ q
[Z / / / (z d ¿ D_x / n_x × dy D_y / n_y) c • Â / / Ä / / /]
• { (x_i , y_i) , / ¯ Y Z Ê] » ¸ / • “ Z / Æ Z ½ Å Z / | ¼ Ã Y
, / ¯ Y • { Ä » f § Z Ë Ë ¼ • e Â Ä Ê f y Y Å Z Ì Ã Æ Ë § ¿ € Ì ³ €]
, / Ì ³ ¶ ° / • { Ä / ⁄ / Ã Y | / Ä / f § € Œ ³ { { Â y ˜ ‡

2- Love’s Theory

1- Unilateral Contact

www.SID.ir

Archive of SID

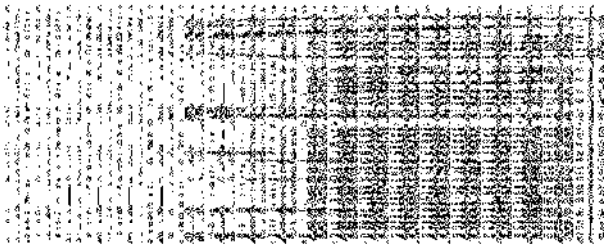
$$J(0) \sum_{k=1}^{n} B_k p_k^{l} \quad G \quad z_i \quad q_i^{l-1}, \qquad (16)$$

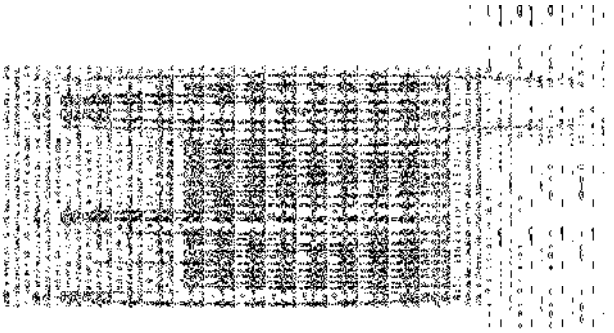
$$q_i^{l-1} \quad J([\,l \quad j]d \sum_{k=1}^{n} B_k \frac{p_k^{j} \quad p_k^{j-1}}{d\,W} d\,W \qquad (17)$$

$$J(0) \sum_{k=1}^{n} B_k p_k^{l-1}$$

$$F^{l} \sum_{k=1}^{n} p_k^{j}\, dx\, dy \qquad (18)$$

www.SID.ir



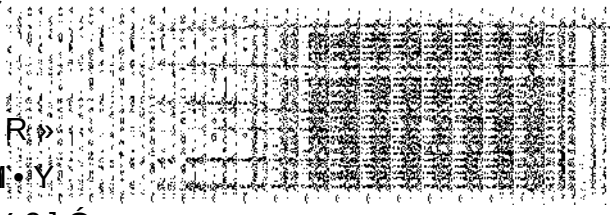


(19) $$V_0[E \quad (E_0 H E_f) e^{t/\eta},$$

(20) $$G(t) \quad E_f \quad (E_0 \quad E_f) e^{t/w},$$

(21) $$J(t) \quad \frac{1}{E} \quad \frac{E_0 \quad E_f}{E_0 E_f} e^{(E_f/E_0)\ t/w} \quad {}_{f}{}^{\prime}1$$

Archive of SID



1. Fischer–Cripps, A.C., “Nano-indentation”, Springer, Berlin, 2002.
2. Christensen, R.M., “Theory of Viscoelasticity”, Academic Press, New York, 1982.
3. Riande, E., Diaz-Calleja, R., Prolongo, M.G., and Salom, C., “Polymer Viscoelasticity”, Marcel Dekker, New York, 2000.
4. Johnson, K.L., “Contact Mechanics”, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985.
5. Sneddon, I.N., “The Relation between Load and Penetration in the Axisymmetric Boussinesq Problem for a Punch of Arbitrary Profile”, Int. J. Eng. Sci., Vol. 3, No. 1, pp. 47–57, 1965.
6. Lee, E.H. and Radok, J.R.M., “The Contact Problem for Viscoelastic Bodies”, ASME J. Appl. Mech., Vol. 27, No. 3, pp. 438–444, 1960.
7. Ting, T.C.T., “The Contact Stresses between a Rigid Indenter and a Viscoelastic Half–Space”, ASME J. Appl. Mech., Vol. 33, pp. 845–854, 1966.
8. Ting, T.C.T., “Contact Problem in the Linear Theory of Viscoelasticity”, ASME J. Appl. Mech., Vol. 35, pp. 254–284, 1968.
9. Yang, W.H., “The Contact Problem for Viscoelastic Bodies”, ASME J. Appl. Mech., Vol. 33, pp. 395–401, 1966.
10. Hunter, S.C., “The Hertz Problem for a Rigid Spherical Indenter and a Viscoelastic Half–Space”, J. Mech. and Phys. of Solids, Vol. 8, No. 4, pp. 219–234, 1960.
11. Graham, G.A.C., “The Contact Problem in the Linear Theory of Viscoelasticity”, Int. J. Eng. Sci., Vol. 3, No. 1, pp. 27–46, 1965.
12. Graham, G.A.C., “Viscoelastic Contact Problems with Friction”, Int. J. Eng. Sci., Vol. 18, pp. 191–196, 1980.
13. Naghieh, G.R., Jin, Z.M., and Rahnejat, H., “Contact Characteristics of Viscoelastic Bonded Layers”, Appl. Math. Modeling, Vol. 22, No. 8, pp. 569–581, 1998.

www.SID.ir

Archive of SID

14. Fu, G., “Theoretical Study of Complete Contact Indentation of Viscoelastic Materials”, J. Mater. Sci., Vol. 39, No. 8, pp. 2877–2878, 2004.
15. Cheng, L., Xia, X., Scriven, L.E., and Gerberich, W.W., “Spherical–tip Indentation of Viscoelastic Material”, Mech. of Mater., Vol. 37, No. 1, pp. 213–226, 2005.
16. Vandame, M. and Ulm, F.J., “Viscoelastic Solutions for Conical Indentation”, Int. J. Solids and Structures, Vol. 43, No. 10, pp. 3142–3165, 2006.
17. Gauthier, A., Knight, P.A., and McKee, S., “The Hertz Contact Problem. Coupled Volterra Integral Equations and a Linear Complementarity Problem”, J. Comp. and Appl. Math., Vol. 206, No. 1, pp. 322–340, 2007.
18. Huang, G. and Lu, H., “Measurements of the Young’s Relaxation Modulus, Using Nano-indentation”, Mech. of Time–dependent Mater., Vol. 10, No. 3, pp. 229–243, 2006.
19. Giannakopoulos, A.E., “Elastic and Visco-elastic Indentation of Flat Surfaces by Pyramid Indentors”, J. Mech. and Phys. of Solids, Vol. 54, No. 7, pp. 1305–1332, 2006.
20. Mase, G.T. and Mase, G.E., “Continuum Mechanics for Engineers”, CRC Press, New York, 1999.
c Y | »•Z{ê ‡ Z ¶¼ Ve Z É ^ {» | Ÿ ¶ Ì ¸ "v ¸ s , Ê § € 2 1 Y
Ã | ° Œ ¸ ¿ ‹ Y ‰ Ê Y ‡ Z À Ä •» Z Z Z ¸ Ë ® Z Ì a ‡ Ó Y Â ° ^ Ë Á
.1387 , • Y € • Ì Y Æ Ã Z ‹ ´ Œ Ê ¿ ‡ Y À { Æ »
22. Sladek, V. and Sladek, J., “Singular Integrals in Boundary Element Methods”, Comp. Mech. Publications, London, 1998.
23. Paul, B. and Hashemi, J., “Contact Pressure on Closely Conforming Elastic Bodies”, ASME J. of Appl. Mech., Vol. 48, pp. 543–556, 1981.
24. Kalker, J.J., “Two Algorithms for the Contact Problems in the Elastostatics”, Report 82-86, Dep’t. of Math. and Informatics, Delft Univ. of Tech., 1982.
25. Ciarlet, P.G., “Mathematical Elasticity: Three–dimensional Elasticity”, Elsevier Publications, London, 2005.
26. Cheng, Y.T. and Cheng, C.M., “General Relationship between the Contact Stiffness, Contact Depth, and Mechanical Properties for Indentation in Linear Viscoelastic Solids, Using Axisymmetric Indenters of Arbitrary Profiles”, Appl. Phys. Letters, Vol. 87, No. 11, Art. No. 111914, 2005.
27. Liu, W.K., Karpov, E.G., and Park, H.S., “Nano Mechanics and Materials”, John Wiley and Sons, London, 2006.

www.SID.ir