تحلیل جریان سیال تراکم ناپذیر به روش حجم محدود- بولتزمن شبکه‌ای به همراه انتقال گرما

احمد فرزادی[۱]
دانشکده فنی مهندسی
دانشگاه آزاد اسلامی واحد تبریز

سیّد اسماعیل رضوی[۲]
دانشکده مهندسی مکانیک
دانشگاه تبریز

جلال قاسمی[۳]
دانشکده مهندسی
دانشگاه زنجان

(تاریخ دریافت: ۱۳۸۸/۰۳/۰۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۸۹/۰۱/۱۶)

چکیده

در این مقاله، روش حجم محدود-بولتزمن شبکه‌ای برای جریان و انتقال حرارت در سیال تراکم ناپذیر توسعه داده شده است. برای حل میدان دما از تابع توزیع دوگانه بولتزمن استفاده شده است. دو ضریب تصحیح مرتبه دو برای محاسبه شار بر اساس فشار و دما در مرز سلول‌ها در روش بولتزمن شبکه‌ای و تلفیق آن با روش حجم محدود ارائه گردیده که به صورت قابل توجهی باعث افزایش سرعت همگرایی و کاهش تعداد تکرار حل عددی شده و امکان تحلیل عددی جریان و انتقال گرما را برای عدد رینولدزهای بالاتر با روش بولتزمن شبکه‌ای میسر ساخته است. شرایط مرزی مناسبی برای مرزهای ورودی، خروجی و دیواره بر اساس نظریه بولتزمن شبکه‌ای و سازگار با گسسته‌سازی معادلات به روش حجم محدود استفاده شده و برای شرایط مرزی دما و شار گرمایی روش تجزیه معادله توزیع انرژی به بخش‌های تعادلی و غیر تعادلی استفاده گردیده که بخش غیر تعادلی آن با استفاده از گره‌های مجاور برونیابی شده است. جریان در پلّه وارون و جریان اطراف استوانه در داخل کانال و انتقال گرما در پلّه وارون با مانع استوانه‌ای و بدون آن از موارد مطالعه شده در ارزیابی دقت محاسبات عددی در کار حاضر می‌باشد.

واژه های کلیدی: جریان آرام، انتقال گرما، حجم محدود-بولتزمن شبکه‌ای، ضرایب تصحیح شار، تابع توزیع دوگانه

Flow and Heat Transfer Analysis of Incompressible Flow, Using Finite Volume Lattice-Boltzmann Approach

A. Farzadi
School of Eng.
Islamic Azad Univ., Tabriz

S.E. Razavi
Mech. Eng. Dep't.
Tabriz Univ.

J. Ghasemi
Eng. Dep't.
Zandjan Univ.

ABSTRACT

In this paper, the thermo-hydrodynamical analysis of incompressible flow in conjunction with cell-centered finite volume-lattice Boltzmann method (FV-LBM) was developed. To demonstrate the temperature field, the double distributions function (DDF) was used. A novel approach was applied in cell flux calculation by definition of biasing factors based on pressure and temperature. This treatment enlarges the domain stability and leads to faster convergence. A consistent open and solid boundary treatment of flow was also addressed. The unknown energy distribution at the boundary cells were decomposed into its equilibrium and non-equilibrium parts. Then, the non-equilibrium part was approximated with extrapolation of the non-equilibrium part of the populations at the neighboring nodes. Two test cases namely, thermo-hydrodynamic in a backward-facing step and around a circular cylinder inserted within the backward-facing step were carried out. The results were compared with the available solutions in the technical literature showing reasonable agreements.

Keywords: Laminar Flow, Heat Transfer, Finite Volume-Lattice Boltzmann, Biasing Factors, Double Distribution Function

۱- استادیار: afarzadi@yahoo.com.uk
۲- دانشیار: razavi@tabrizu.ac.ir
۳- استادیار(نویسنده پاسخگو): jghasemi@znu.ac.ir

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر روش بولتزمن شبکه‌ای در تحلیل جریان سیال و انتقال گرما رشد چشم‌گیری داشته است. این روش که بر پایه نظریه جنبشی ذرات بنا گردیده یک روش مزوسکوپیک[1] بوده و رفتار ذرات در آن بر حسب تابع توزیع بیان می‌گردد. از مزایای مهم این روش امکان اعمال نیروهای بین ذره‌ای در سیالات دو یا چند جزئی و سادگی الگوریتم حل به خصوص برای هندسه و مرزهای پیچیده است[۱]. گسسته‌سازی اختلاف محدود معادله بولتزمن برای شبکه منظم مربعی بوده و در هندسه‌های پیچیده و مرزهای منحنی محدودیت دارد[۲].

در میان روشهای عددی، روش حجم محدود به دلیل فیزیکی بودن و انطباق مناسب آن با قوانین بقاء، بیش از پیش مورد توجه پژوهش‌گران در این زمینه قرار گرفته است. زی[2] و همکارش[۳] از این روش به شکل راس-سلول[3] در شبکه چهارضلعی برای حل جریان‌های دوبعدی و سه‌بعدی استفاده کردند. پینگ[4] و همکارش[۴] روش حجم‌محدود را برای شبکه بی‌سازمان مثلثی توسعه داده‌اند. در حالت کلی سه روش در این زمینه ارائه شده است که عبارتند از: روش اسکالر غیر فعال[5]، چند سرعته[6] و تابع توزیع دوگانه[7]. روش اسکالر غیر فعال محدود به حالتی از تحلیل گرما در جریان سیال است که در آن از اتلافات ناشی از لزجت سیال و همچنین، کار تراکمی ناشی از تغییرات فشار صرف‌نظر می‌گردد[۵]. در روش چند سرعته فقط یک تابع توزیع برای جریان سیال و انتقال گرما استفاده می شود و از جملات با مرتبه بالاتر سرعت(ممنتوم) در تقریب تابع توزیع تعادلی بهره‌گیری می‌شود. به دلیل استفاده از یک زمان رهایش[8]، محدود به یک عدد پرانتل ثابت بوده که در مسائل مهندسی کاربردی نبوده و از پایداری عددی کمتری برخوردار است[۶]. در روش تابع توزیع دوگانه، میدان های جریان و انرژی(دما) با استفاده از دو تابع توزیع جداگانه به طور همزمان حل می‌شوند. برای هر تابع توزیع یک زمان رهایش تعریف می‌گردد که محدودیت روش چند سرعته را نداشته و از پایداری عددی خوبی نیز برخوردار است [۸-۷].

اعمال شرایط مرزی در روش بولتزمن شبکه‌ای از مسائل مهم این روش محسوب می‌گردد. چن[9] و همکاران[۹] روش برگشت به عقب[10] استاندارد را با برون‌یابی برای مرز دیواره استفاده کرده‌اند که این روش دارای دقت مرتبه دوم بوده و در شبکه منظم به کار می‌رود. چوپارد[11] و همکارش[۱۰] روش برگشت به عقب نیمه راه[12] را در روش حجم محدود-بولتزمن شبکه‌ای معرفی نموده‌اند که دارای دقت مرتبه دوم بوده و کارائی خوبی در مرزهای منحنی شکل دارد. با وجود اینکه روش‌های مناسبی برای اعمال شرایط مرزی جریان ارائه شده است ولی اعمال شرایط مرزی گرما، به ویژه برای گسسته‌سازی حجم محدود از تکامل بالایی برخوردار نبوده و از موضوعات تحقیقی مهم این روش محسوب می‌شود.

در تحلیل انتقال گرما در جریان سیال با بولتزمن شبکه‌ای از مفهوم برگشت به عقب در تابع توزیع غیر تعادلی برای اعمال شرط مرزی گرمای دیواره استفاده گردید[۵]. اورازیو[13] و همکارش[۱۱] تابع توزیع انرژی را برای مرزها در حالت تعادل فرض نمودند که این توابع با استفاده از خواص میکروسکوپی محاسبه پذیرند؛ ولی نتایج این روش از دقت خوبی برخوردار نمی‌باشد. جیو[14] و همکاران[۱۲] ایده جدیدی را ارائه دادند که در آن تابع توزیع انرژی به دو بخش تعادلی و غیر تعادلی تقسیم شده و بخش تعادلی بر اساس خواص ماکروسکوپی و بخش غیر تعادلی از مقادیر مشابه گره‌های داخلی با درون‌یابی محاسبه می‌گردد. این روش با

1- Mesoscopic
2- Xi
3- Cell-vertex
4- Peng
5- Passive scalar
6- Multispeed
7- Double Distribution Function (DDF)
8- Relaxation Time

9- Chen
10- Bounce-back
11- Chopard
12- Halfway Bounce-back
13- D'orazio
14- Guo

ترکیب کامل‌تری برای مرزهای منحنی توسعه داده شده است[۱۳].

در این تحقیق، روش حجم محدود مرکز-سلول[1] برای شبکه چهار وجهی دلخواه بر روی شبکه D_2Q_9 برای گسسته‌سازی معادلات به کار رفته و از روش تابع توزیع دوگانه برای تحلیل انتقال گرما استفاده شده است. با تعریف دو ضریب تصحیح، محاسبه شار در مرز سلول‌ها بر اساس فشار و دما (ضمن حفظ دقت مرتبه دو عددی) خاصیت بالا دست[2] را نیز در گره‌هایی که با گرادیان فشار و دما مواجهه می شوند به همراه خواهد داشت. همچنین، با ارائه مفهوم شبکه مجازی در سلول های مرزی روش مناسب و سازگار با این نوع گسسته‌سازی برای شرایط مرزی ورودی، خروجی و دیواره برای جریان و گرما انتخاب گردیده است.

برای ارزیابی دقت پارامترهای عددی مورد نظر، برای جریان از دو مطالعه موردی: جریان در پلّه وارون[3] و جریان در اطراف استوانه، در داخل کانال و پلّه وارون با مانع استوانه‌ای و بدون آن استفاده شده و نتایج به دست آمده با نتایج عددی و تجربی موجود مقایسه گردیده است. برای انجام تمامی مراحل تحقیق، از نرم افزاری که به زبان فرترن۹۰ و توسط نویسندگان تهیه گردیده استفاده شده است.

۲- روش حجم محدود-بولتزمن شبکه‌ای

با استفاده از روش تابع توزیع دوگانه، شکل گسسته شده انتگرالی دو تابع توزیع جریان و انرژی در حالت فشرده به صورت زیر خواهد بود[۳]:

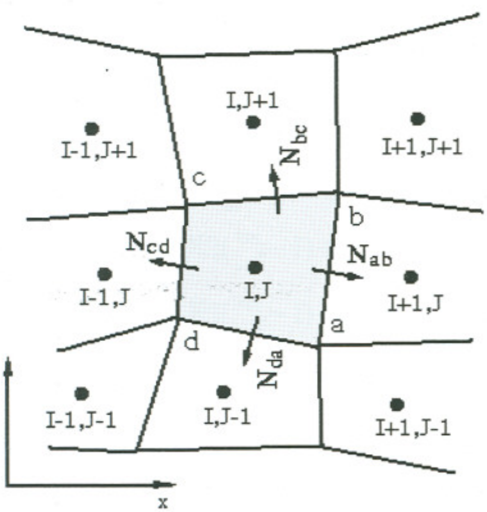
$$\int_S \left(\frac{\partial \Re_i}{\partial t} + v_i.\nabla \Re_i + \frac{1}{\tau_\sigma}(\Re_i - \Re_i^{eq})\right) ds = 0, \quad i = 0,1,\dots,M, \quad \Re = f, g, \quad \Re_i^{eq} = f^{eq}, g^{eq}, \quad \sigma = \nu, th, \tag{۱}$$

1- Cell Centered
2- Upwind
3- Backward Facing Step

که در آن، f و g به ترتیب توابع توزیع ذره و انرژی و v_i سرعت میکروسکوپیکی ذرات در جهت iام شبکه، τ_ν (τ_σ در $\sigma \to \nu$) و τ_{th} (τ_σ در $\sigma \to th$) زمان رهایش جریان و گرما است. برای شبکه D_2Q_9 خواهیم داشت:

$$v_0 = 0; \quad v_i = (\cos(\tfrac{i-1}{2}\pi), \sin(\tfrac{i-1}{2}\pi))c, \quad i = 1,2,3,4;$$
$$v_i = \sqrt{2}(\cos(\tfrac{i-5}{2} + \tfrac{1}{4})\pi, \sin(\tfrac{i-5}{2} + \tfrac{1}{4})\pi)c, i = 5,6,7,8; \tag{۲}$$
$$c^2 = \frac{3k_B T}{m_p}$$

که در آن، $k_B = 1.38 \times 10^{-23}\,(N.m.K^{-1})$ ثابت بولتزمن، T دما و m_p جرم واحد ذره می‌باشند. در روش حجم محدود در حالت مرکز-سلول مطابق شکل۱ برای هر سلول(I,J) انتگرال تک تک جملات معادله(۱) تقریب زده می‌شوند.



شکل(۱): شبکه حجم محدود مرکز-سلول.

برای جمله زمان می‌توان نوشت:

$$\int_{abcd} \frac{\partial \Re_i}{\partial t} ds \approx \left[\frac{\partial \Re_i}{\partial t}\right]_{I,J} .S_{I,J} \cdot \tag{۳}$$

در ادامه، نحوه گسسته سازی مشتق زمانی معادله فوق ارائه می‌گردد. از قضیه گرین برای جمله همرفت در معادله(۱) داریم:

$$\int_{abcd} v_i.\nabla\Re_i\, ds = \int_{abcd} \left\{\frac{\partial(v_{ix}.\Re_i)}{\partial x} + \frac{\partial(v_{iy}.\Re_i)}{\partial y}\right\} dx\, dy \approx \sum_k v_i.N_k [\tilde{\Re}_i]_k, \tag{۴}$$

که در آن،

$$N_k = (\Delta y\,\mathbf{i} - \Delta x\,\mathbf{j})_k,\ k = ab, bc, cd, da\,. \quad (۵)$$

در این قسمت، دو ضریب تصحیح مرتبه دو برای محاسبه شار بر اساس فشار و دما در مرزهای سلول(I,J) برای جمله همرفت در معادله(۱) مانند زیر تعریف می‌گردد:

$$\xi^{\sigma}_{k-up} = \frac{\psi_{node}}{\psi_{up} + \psi_{node}}\ ,\ \xi^{\sigma}_{k-down} = \frac{\psi_{node}}{\psi_{node} + \psi_{down}}, \quad (۶)$$
$$\xi^{\sigma}_{ab} = \frac{\xi^{\sigma}_{up} + \xi^{\sigma}_{down}}{2},$$

که در آن، ψ با فشار P برای جریان و دما T برای گرما جایگزین می‌گردد و k مشابه معادله(۵) نمایانگر هریک از اضلاع سلول(I,J) می باشد. لذا جمله همرفت با وارد کردن ضرایب تصحیح فوق به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$\int_{abcd} v_i.\nabla\Re_i\, ds \approx$$
$$\{ v_i.N_{ab}(\xi^{\sigma}_{ab}[\Re_i]_{I,J} + (1-\xi^{\sigma}_{ab})[\Re_i]_{I+1,J}) +$$
$$v_i.N_{bc}(\xi^{\sigma}_{bc}[\Re_i]_{I,J} + (1-\xi^{\sigma}_{bc})[\Re_i]_{I,J+1}) + \quad (۷)$$
$$v_i.N_{cd}(\xi^{\sigma}_{cd}[\Re_i]_{I,J} + (1-\xi^{\sigma}_{cd})[\Re_i]_{I-1,J}) +$$
$$v_i.N_{da}(\xi^{\sigma}_{da}[\Re_i]_{I,J} + (1-\xi^{\sigma}_{da})[\Re_i]_{I,J-1})\}\cdot$$

با تقریب خطی $\Re_i$ و $\Re_i^{eq}$ در سلول داخلی، انتگرال جمله برخورد در معادله(۱) با دقت مرتبه دو به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$-\int_{abcd} \frac{1}{\tau_\sigma}(\Re_i - \Re_i^{eq})ds = -\frac{S_{I,J}}{\tau_\sigma}\Big[\frac{1}{4}[\Delta\Re_i]_{I,J} +$$
$$\frac{1}{8}\{[\Delta\Re_i]_{I+1,J} + [\Delta\Re_i]_{I,J+1} + [\Delta\Re_i]_{I-1,J} + \quad (۸a)$$
$$[\Delta\Re_i]_{I,J-1}\} + \frac{1}{16}\{[\Delta\Re_i]_{I+1,J-1} + [\Delta\Re_i]_{I+1,J+1} +$$
$$[\Delta\Re_i]_{I-1,J+1} + [\Delta\Re_i]_{I-1,J-1}\}\Big],$$

و برای سلول‌های مرزی:

$$-\int_{abcd} \frac{1}{\tau_\sigma}(\Re_i - \Re_i^{eq})ds = -\frac{S_{I,J}}{\tau_\sigma}\Big[[\Re_i]_{I,J} - [\Re_i^{eq}]_{I,J}\Big]. \quad (۸b)$$

در معادلات فوق، $S_{I,J}$ نشان دهنده سطح سلول (I,J) بوده و بنابراین، داریم:

$$\Delta\Re_i = \Re_i - \Re_i^{eq}\,. \quad (۹)$$

در حالت کلی، روش بولتزمن شبکه‌ای با نوسانات عددی همراه است که برای کنترل و کاهش آن به خصوص در جریان با رینولدز بالا از اتلاف مصنوعی مرتبه چهار استفاده شده است. با گسست زمانی معادله(۳) با رانگ-کوتای اصلاح شده مرتبه پنج، داریم:

$$\Re^{n+1} = \Re^n + \alpha_k \Delta\Re^{k-1}; k = 1,...,5\ ;$$
$$\alpha_1 = 0.0695,\ \alpha_2 = 0.1602, \quad (۱۰)$$
$$\alpha_3 = 0.2898,\ \alpha_4 = 0.5,\ \alpha_5 = 1;$$
$$\Delta\Re^{k-1} = \frac{\Delta t}{S_{I,J}} Q^{k-1};$$
$$Q^{k-1} = \sum[\Re^{k-1}]_{Collisions} - \sum[\Re^{k-1}]_{Fluxes}$$

در معادله (۱۰) اندیس‌های Collisions و Fluxes مربوط به جملات برخورد و شار در معادله بولتزمن می‌باشند. تابع توزیع تعادلی ذرات، $\Re_i^{eq} = f_i^{eq}$ برای شبکه D_2Q_9 مانند زیر خواهد بود[۱۴]:

$$f_0^{eq} = \frac{4}{9}\rho[1 - \frac{3}{2c^2}\mathbf{u}.\mathbf{u}],$$
$$f_{1,2,3,4}^{eq} = \frac{1}{9}\rho\left[1 + \frac{3}{c^2}v_i.\mathbf{u} + \frac{9}{2c^4}(v_i.\mathbf{u})^2 - \frac{3}{2c^2}\mathbf{u}.\mathbf{u}\right], \quad (۱۱a)$$
$$f_{5,6,7,8}^{eq} = \frac{1}{36}\rho\left[1 + \frac{3}{c^2}v_i.\mathbf{u} + \frac{9}{2c^4}(v_i.\mathbf{u})^2 - \frac{3}{2c^2}\mathbf{u}.\mathbf{u}\right].$$

همچنین، تابع توزیع تعادلی انرژی، $\Re_i^{eq} = g_i^{eq}$ با عبارات زیر بیان می شود[۱۴]:

$$g_0^{eq} = -\frac{2\rho\varepsilon\mathbf{u}^2}{3c^2},$$
$$g_{1,2,3,4}^{eq} = \frac{\rho\varepsilon}{9}\left[\frac{3}{2} + \frac{3}{2c^2}v_i.\mathbf{u} + \frac{9}{2c^4}(v_i.\mathbf{u})^2 - \frac{3}{2c^2}\mathbf{u}.\mathbf{u}\right], \quad (۱۱b)$$
$$g_{5,6,7,8}^{eq} = \frac{\rho\varepsilon}{36}\left[3 + \frac{6}{c^2}v_i.\mathbf{u} + \frac{9}{2c^4}(v_i.\mathbf{u})^2 - \frac{3}{2c^2}\mathbf{u}.\mathbf{u}\right],$$

که در آن، $\varepsilon = {}^{DRT}\!/_{2}$ و D بعد مسأله و R ثابت گازها می‌باشد. پارامترهای ماکروسکوپیکی جریان و انرژی برای هر شبکه واقع در هر گره به صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$\rho = \sum_{i=0}^{8} f_i \quad , \quad \rho \mathbf{u} = \sum_{i=0}^{8} v_i f_i \quad , \rho\varepsilon = \sum_{i=0}^{8} g_i \,. \tag{۱۲}$$

لزجت سینماتیکی، υ و پخشندگی گرمای، α به روش زیر محاسبه می‌گردند[۱۵]:

$$\upsilon = (\frac{2\tau_v - 1}{6})\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t},$$
$$\alpha = \frac{2}{3}(\tau_e - \frac{1}{2})\Delta t. \tag{۱۳}$$

اعداد پرانتل و نوسلت به صورت زیر بیان می‌گردند[۱۳]:

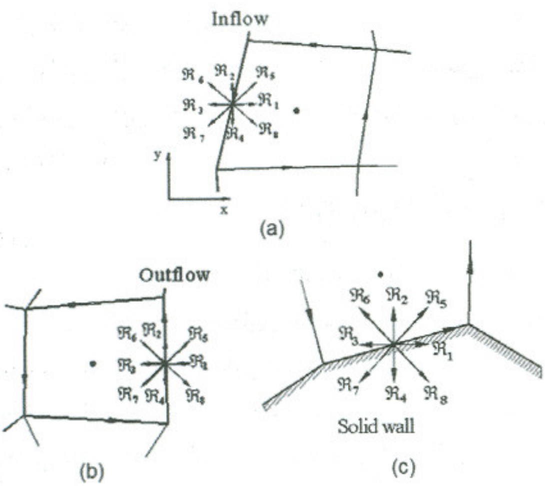
$$\Pr = \frac{\tau_v - 1/2}{2\tau_e - 1}\Delta x^2,$$
$$Nu_x = \frac{D_h q_{w,x}}{\kappa}.\frac{1}{(T_{w,x} - T_{bulk,x})}, \tag{۱۴}$$

که در آن، D_h قطر هیدرولیکی و $T_{bulk,x}$ دمای حجمی در نقطه x می‌باشند. گام زمانی Δt بر اساس عدد CFL انتخاب و معیار همگرایی بر اساس باقیمانده سرعت، Res_v و دما، Res_{th} توسط معادلات زیر تعیین می‌گردد:

$$Res_V = \frac{\sum_{I,J}\left|\sqrt{(u_{I,J}^2 + v_{I,J}^2)^{n+1}} - \sqrt{(u_{I,J}^2 + v_{I,J}^2)^{n}}\right|}{\sum_{I,J}\left|\sqrt{(u_{I,J}^2 + v_{I,J}^2)^{n}}\right|},$$
$$Res_{th} = \frac{\sqrt{\sum_{I,J}\left|T_{I,J}^{n+1} - T_{I,J}^{n}\right|^2}}{\sqrt{\sum_{I,J}\left|T_{I,J}^{n}\right|^2}}. \tag{۱۵}$$

۳- شرایط مرزی سرعت و دما

در مرزها پارامترهای ماکروسکوپی اعم از سرعت، فشار، چگالی و دما مطرح می‌گردد و این پارامترها به توابع توزیع(متغیر محاسباتی در این روش) ارتباط داده می شوند. در این تحقیق، مطابق شکل۲ در وجه منطبق بر مرز هر یک از سلول‌های مرزی شبکه مجازی جداگانه‌ای به غیر از شبکه اصلی در مرکز سلول فرض شده است.



شکل(۲): سلولهای مرز، **(a)** ورودی، **(b)** خروجی و **(c)** دیواره جامد.

در مرز ورودی (شکل**۲a**) مؤلفه افقی با معلوم فرض نمودن مؤلفه افقی سرعت ورودی، u_{in} (مؤلفه عمودی صفر در نظر گرفته شده است) و چگالی، ρ مؤلفه‌های تابع توزیع برابر خواهند بود با:

$$f_1 = f_3 + \frac{2}{3}[\rho u]_{in} \,,$$
$$f_5 = f_7 + 0.5(f_4 - f_2) + \frac{1}{6}[\rho u]_{in} \,, \tag{۱۶}$$
$$f_8 = f_6 + 0.5(f_2 - f_4) + \frac{1}{6}[\rho u]_{in}$$

بقیه مؤلفه‌ها از رابطه زیر درونیابی می‌گردند:

$$[f_i]_{in} = 1.5[f_i]_{1,J} - 0.5[f_i]_{2,J} \,, \quad i = 0,2,3,4,6,7. \tag{۱۷}$$

در مرز خروجی(شکل**۲b**) فشار بر اساس مؤلفه‌های تابع توزیع تعادلی تعیین می‌گردد. برای دیواره‌ها از روش برگشت به عقب نیمه راه استفاده شده که در دیواره‌های مستقیم دقت مرتبه دو داشته و جرم و ممنتوم را در گوشه های مقعر و محدب نظیر آنچه که در پلّه وارون رخ می‌دهد، حفظ می‌کند[۱۰]. در روش بولتزمن شبکه‌ای برای اعمال شرایط مرزی گرمایی دما ثابت و شار گرمایی ثابت از روشهای مختلفی استفاده گردیده است[۱۵, ۱۳, ۸, ۵]. در این تحقیق، از روش تجزیه تابع توزیع انرژی به بخش تعادلی و بخش غیر تعادلی استفاده شده که بخش تعادلی آن بر

اساس پارامترهای ماکروسکوپی در مرزها محاسبه و بخش غیر تعادلی آن طبق رابطه (۱۸) از مؤلفه‌های مشابه نزدیکترین سلول به سلول مرزی به صورت زیر تعیین می‌گردد[۱۳]:

$$g_i(x_b) = g_i^{eq}(x_b, \rho_b, \varepsilon_b) + [g_i(x_f) - g_i^{eq}(x_f, \rho_f, \varepsilon_f)] \cdot \quad (۱۸)$$

برای حالت شار گرمایی ثابت، ابتدا گرادیان دمای محاسبه شده از شار گرمایی با تقریب مرتبه دوم به دمای دیواره ارتباط داده شده و روند اعمال این نوع شرط مرزی گرمایی نیز مانند حالت دما ثابت صورت می‌گیرد. چنین تقریبی برای دیواره به صورت معادله (۱۹) خواهد بود.

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{4T_{I,b+1} - 3T_{I,b} - T_{I,b+2}}{(y_{I,b+2} - y_{I,b+1}) + (y_{I,b+1} - y_{I,b})} \quad (۱۹)$$

در معادلات (۱۹-۱۸) زیرنویس b و f به ترتیب نشان دهنده مقادیر در گره مرزی و نزدیکترین گره به گره مرزی می‌باشد. نتایج عددی نشان می‌دهد که این روش نتایج دقیق‌تری نسبت به روش‌های موجود در گسسته‌سازی حجم محدود مرکز-سلول دارد.

۴- نتایج عددی

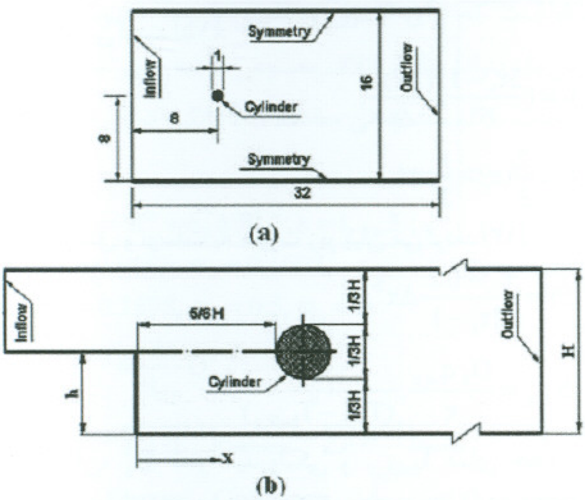
برای ارزیابی دقت محاسبات و اعتباربخشی نتایج به دست آمده از روش ارائه شده، چند مطالعه موردی بررسی شده است و نتایج به دست آمده با نتایج عددی و تجربی موجود مقایسه گردیده‌اند.

مطالعه موردی۱: جریان آرام اطراف استوانه در داخل کانال با هندسه مطابق شکل**۳a** است. سرعت ورودی، U به کانال ثابت و عدد رینولدز بر اساس سرعت ثابت ورودی و قطر استوانه محاسبه شده است.

مطالعه موردی۲: جریان آرام و انتقال گرما در پلّه وارون مطابق شکل**۳b** .

الف - بدون مانع استوانه‌ای که در آن سرعت ورودی توسعه یافته بوده و طول بخش خروجی به حد کافی طولانی است و لذا گرادیان سرعت در خروجی صفر می گردد. دمای دیواره پایین بعد از پلّه ثابت و بقیه دیواره‌ها بی‌دررو می‌باشند.

ب - با مانع استوانه‌ای که شرایط مرزی مانند حالت الف بوده ولی دمای تمامی دیواره‌ها ثابت و کمتر از دمای ورودی سیال است و مانع استوانه‌ای به صورت بی‌دررو می‌باشد. عدد رینولدز برای همه موارد به‌صورت $4U_{max}(H-h)/3\upsilon$ محاسبه می‌گردد که U_{max} بیشینه سرعت سیال ورودی می‌باشد.

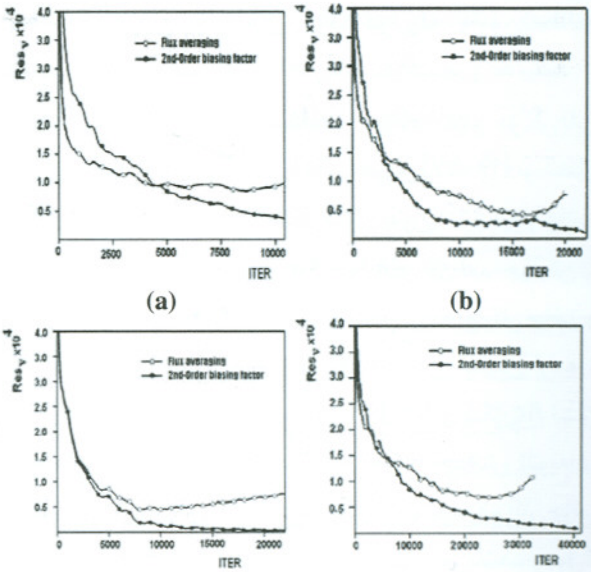


شکل(۳): هندسه های مورد مطالعه، **(a)** استوانه در داخل کانال، **(b)** پلّه وارون با مانع استوانه‌ای.

۴-۱- تأثیر ضرایب تصحیح فشار و دما

قبل از ارائه نتایج محاسبات، اهمیت ضرایب تصحیح محاسبه شار بر اساس فشار و دما بررسی می گردد.

نمودارهای شکل**۴** مربوط به رفتار همگرائی و تکرار لازم برای رسیدن به دقت مشخص یعنی باقیمانده‌های سرعت و شکل **۵** برای دما در شرایط بیان شده در مطالعه موردی ۲-ب است که در مقایسه با بقیه موارد دارای هندسه و شکل جریان پیچیده‌ای می‌باشد. شکل‌های **۴a**، **۴b**، **۵a** و **۵b** بدون اعمال اتلاف مصنوعی و شکل‌های **۴c**، **۴d**، **۵c** و**۵d** با اعمال کمینه اتلاف مصنوعی می‌باشند. نتایج نشان می‌دهند که در هر دو حالت ضرایب تصحیح ارائه شده سبب بهبود چشم‌گیری در همگرائی دقت عددی شده و این موضوع ما را قادر می‌سازد که روش بولتزمن شبکه‌ای را برای جریان با عدد رینولدز بالاتر از آنچه در مقالات معتبر گزارش شده، به کار بریم. علاوه بر آن محدودیت ناپایداری عددی در



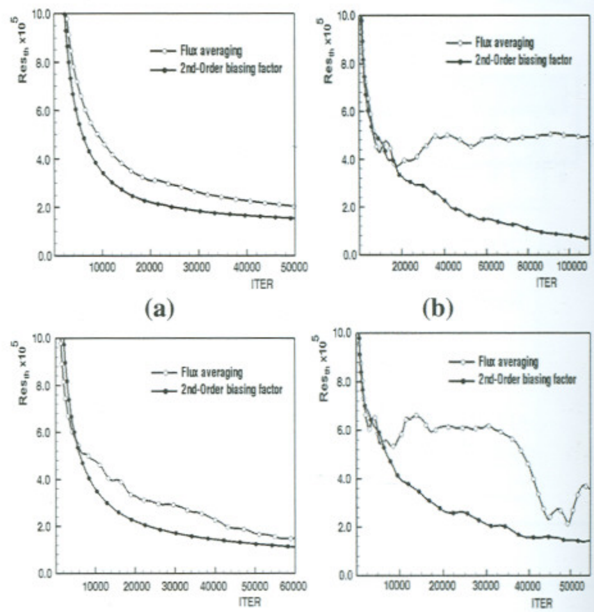
(a) (b)

(c) (d)

(a) Re=20, **(b)** Re=40, **(c)** Re=80, **(d)** Re=100

(b),(a): بدون اتلاف مصنوعی و **(d),(c)** با کمینه اتلاف مصنوعی

شکل(۴): تأثیر ضرایب تصحیح محاسبه شار بر اساس فشار در همگرائی.



(a) (b)

(c) (d)

(a) Re=20, **(b)** Re=50, **(c)** Re=80, **(d)** Re=200

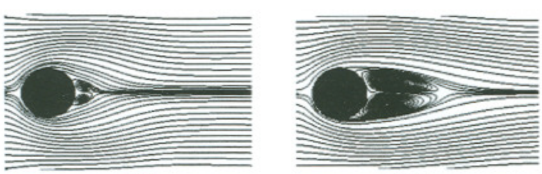
(b),(a): بدون اتلاف مصنوعی و **(d),(c)** با کمینه اتلاف مصنوعی

شکل(۵): تأثیر ضرایب تصحیح محاسبه شار بر اساس دما در همگرائی.

زمینه تحلیل گرما به روش بولتزمن شبکه‌ای را نیز کاهش می‌دهند.

۴-۲- جریان آرام اطراف استوانه(مطالعه موردی۱)

جریان اطراف استوانه یکی از مطالعات موردی مهم برای ارزیابی روش‌های تجربی و عددی ارائه شده در CFD می باشد. شکل**۶** نمونه‌ای از خطوط جریان به دست آمده را برای40 و Re=10 نشان می‌دهد. یکی از پارامترهای مهم ارزیابی در این جریان، نسبت s/D (s طول جریان چرخشی[1] و D قطر استوانه) و ضریب پسا می‌باشد. شکل**۷** نتایج به دست آمده از حل را برای نسبت s/D در اعداد رینولدز مختلف و مقایسه آن را با نتایج تجربی[۱۶] و عددی[۱۸] نشان می‌دهد. در جدول**۱** مقادیر ضریب پسا به همراه نسبت s/D در مقایسه با نتایج تجربی[۱۶] و عددی[۲۱-۱۷] آورده شده‌اند و همانطور که دیده می‌شود دقت روش ارائه شده رضایت بخش است. با افزایش عدد رینولدز، گردابه‌های[2] لحظه‌ای در پشت استوانه ظاهر می‌گردد که در شکل**۸** برای Re=100 در دوره زمانی یک ثانیه نشان داده شده است و از نتایج مهم این مقاله است. لازم بذکر است که در بررسی‌های صورت گرفته، در منابع معتبر و مقالات متعددی که پژوهشگران در زمینه استفاده و یا توسعه روش بولتزمن شبکه‌ای ارائه نموده‌اند، گزارشی در خصوص تشکیل گردابه‌ها با حل عددی به روش بولتزمن شبکه‌ای یافت نگردید.

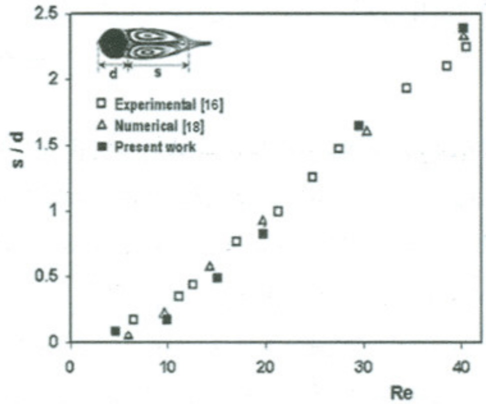


(a) (b)

(a) Re=10, **(b)** Re = 40.

شکل(۶): خطوط جریان اطراف استوانه در حالت پایا.

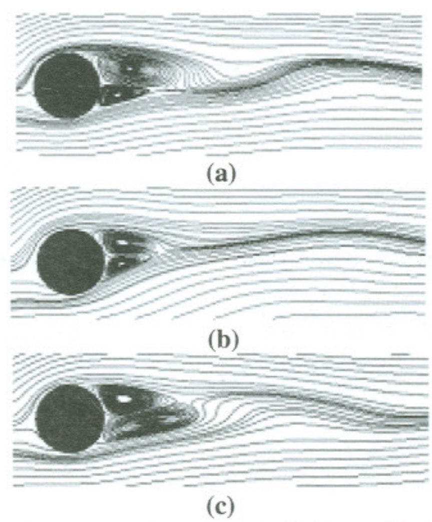
1- Wave Length
2- Vortex Shedding



شکل(۷): نسبت s/D بر حسب عدد رینولدز.

جدول(۱): مقایسه نسبت $\left(\frac{S}{d}\right)$ و C_D ، مطالعه موردی ۱.

	Re=20		Re=40	
	s/d	C_D	*s/d*	C_D
Coutanceau [16]	0.73	-	1.89	-
Fornberg[17]	0.91	2.00	2.24	1.50
Dennis et al.[18]	0.94	2.05	2.35	1.522
قدیری و همکاران[۱۹]	0.92	2.01	2.25	1.525
Calhoun D.[20]	0.91	2.19	2.18	1.62
Ye et al.[21]	0.92	2.03	2.27	1.52
کار حاضر	***0.905***	***2.205***	***2.220***	***1.551***

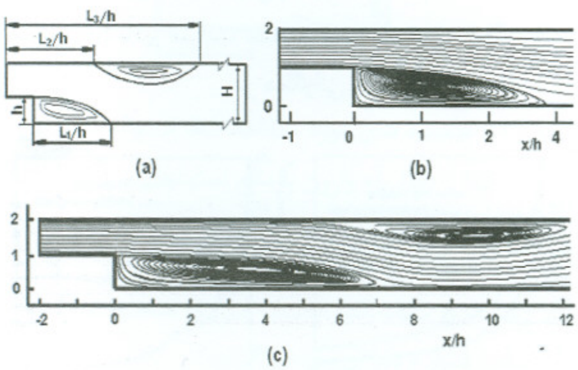


Re = 100, **(a)** t_0 , **(b)** t_0+1^s ,**(c)** t_0+2^s

شکل(۸): خطوط جریان لحظه ای اطراف استوانه.

۴-۳- جریان و انتقال گرما در پلّه وارون(مطالعه موردی ۲)

پلّه وارون نیز یکی از مطالعات موردی مهم در ارزیابی روش های تجربی و عددی برای جریان[۲۷-۲۲] و انتقال گرما[۲۷،۱۵-۲۶] است. شکل**3b** (بدون مانع استوانه‌ای)، هندسه و ابعاد آن و شکل **9a** طول‌های بی بعد جدایش را برای این حالت نشان می‌دهند. نمونه‌ای از نتایج کار حاضر با H=2h برای جدایش اولیه با Re=145 و جدایش اولیه و ثانویه با Re=485 به ترتیب در شکل**9b** و شکل**9c** نشان داده شده است. قابل ذکر است که تشکیل جدایش ثانویه در حل عددی با روش بولتزمن شبکه‌ای از نتایج مهم کار حاضر در اثر استفاده از ضرایب تصحیح ارائه شده می‌باشد. جدول**۲** نتایج مدل ارائه شده را در مقایسه با دیگر کارهای عددی و



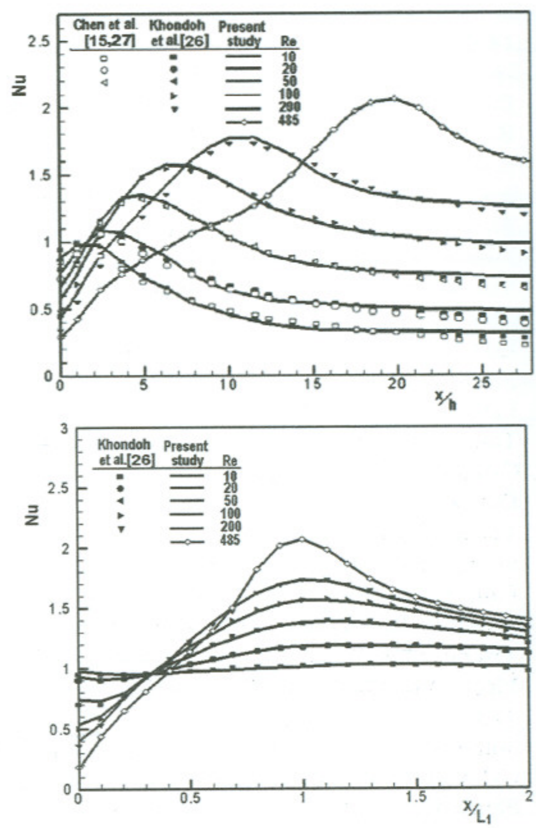
شکل(۹): **(a)** طولهای بی‌بعد جدایش، **(b)** جدایش اولیه Re=145، **(c)** جدایش اولیه و ثانویه Re=485.

جدول(۲): طولهای بی بعد جدایش در پلّه وارون (مطالعه موردی۲).

(§ : تجربی، £: عددی)

	$\frac{L_1}{h}$			$\frac{L_2}{h}$		$\frac{L_3}{h}$	
Re	*100*	*150*	*200*	*400*	*450*	*400*	*450*
Armaly[22]§	-	4.04	5.13	7.35	7.15	-	9.89
Guj[23]£	2.91	-	4.81	-	-	-	-
Barton[24]£	-	3.85	4.87	7.32	7.96	9.32	10.34
Erturk[25]£	2.95	-	4.96	7.65	-	9.85	-
کار حاضر	***2.96***	***4.15***	***4.87***	***6.82***	***6.93***	***9.45***	***10.86***

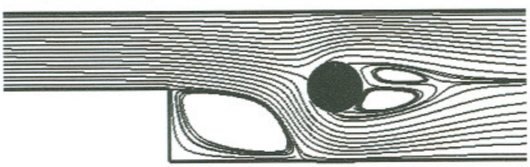
تجربی نشان می‌دهد که در آن هماهنگی خوبی بین جواب ها وجود دارد. شکل **۱۰a** توزیع محلی عدد نوسلت را به ازای رینولدزهای مختلف برای H=3h(حالت الف) بر حسب $\frac{x}{h}$ نشان می‌دهد. با افزایش رینولدز، عدد نوسلت نه تنها افزایش می‌یابد بلکه نقطه بیشینه آن به پایین دست منتقل می‌گردد. برای بررسی این موضوع، عدد نوسلت به ازای رینولدزهای مختلف برحسب $\frac{x}{L_1}$ در شکل **۱۰b** نشان داده شده و بیانگر آن است که مقدار بیشینه نوسلت تقریباً در انتهای جدایش جریان روی می‌دهد. نتایج شکل **۱۰** حاکی از دقت خوب کار حاضر در مقایسه با دیگر نتایج عددی[۱۵و۲۷-۲۶] است. شکل **۱۱** خطوط جریان به دست آمده از کار حاضر برای حالت **ب** را با H=2h برای Re=150



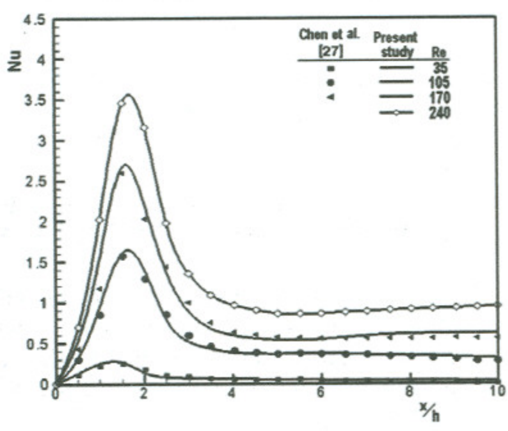
شکل(۱۰): تغییرات عدد نوسلت محلی به ازای رینولدزهای مختلف، H=3h، Pr=0.7

(a) بر حسب $\frac{x}{h}$، **(b)** بر حسب $\frac{x}{L_1}$.

نشان می‌دهد. با وجود پیچیده شدن الگوی جریان در نتیجه مانع استوانه‌ای در نزدیکی پله، نتایج نشان از توانایی خوب مدل ارائه شده در زمینه روش بولتزمن شبکه‌ای است. همچنین شکل **۱۲** تغییرات عدد نوسلت را به ازای رینولدزهای مختلف بر حسب $\frac{x}{h}$ در این حالت نشان می‌دهد. نتایج در این شکل بیانگر افزایش چشمگیر انتقال گرما در اثر وجود مانع استوانه‌ای در مقایسه با حالت مشابه بدون مانع است. ولی مانع موجود باعث کاهش سریع عدد نوسلت می‌گردد. در این حالت نیز نتاج کار حاضر توافق خوبی در مقایسه با دیگر کار عددی[۲۷] دارد.



شکل(۱۱): خطوط جریان در پلّه وارون با مانع استوانه‌ای، مطالعه موردی۲(ب)، H=2h، Re=150 .



شکل(۱۲): تغییرات عدد نوسلت به ازای رینولدزهای مختلف، مطالعه موردی۲(ب)، H=2h، Pr=0.7 .

۵- بحث و نتیجه‌گیری

در کار حاضر روش بولتزمن شبکه‌ای و حجم محدود برای شبکه غیر یکنواخت چهارضلعی مرکز-سلول با مرزهای منحنی ترکیب شده و برای تحلیل جریان و انتقال گرما در

جریان آرام تراکم‌ناپذیر به کار رفته است. برای تحلیل گرما از روش DDF استفاده شده و شبکه استفاده شده در هر دو معادله ممنتوم و انرژی D_2Q_9 است. با تعریف دو ضریب مرتبه دوم برای تصحیح محاسبه شار در مرز سلول ها برای جریان و انتقال گرما برحسب فشار و دما باعث بهبود قابل توجه در همگرائی که از کاستی‌های مهم روش بولتزمن شبکه‌ای به خصوص در بحث انتقال گرما می‌باشد، گردیده و تعداد تکرار را به گونه قابل توجه کاهش داده است. اعمال شرط مرزی جریان به روش برگشت به عقب نیمه راه که دقت مرتبه دو دارد، با در نظر گرفتن شبکه مجازی در سلول مرزی، کارآئی خوبی را نشان می‌دهد. همچنین اعمال شرط مرزی گرما با تجزیه تابع توزیع انرژی به بخش های تعادلی و غیر تعادلی که از روش های دقیق می‌باشد، به آسانی در روش حجم محدود مرکز-سلول قابل اجرا است.

مراجع

1. He, X. and Luo, L., "Theory of the Lattice Boltzmann Method: From the Boltzmann Equation to the Lattice Boltzmann Method", Phys. Rev. E, Vol. 56, No. 6, pp. 6811–6817, 2001.
2. Cao, N., Chen, S., Jin, S., and Martinez, D., "Physical Symmetry and Lattice Symmetry in the Lattice Boltzmann Method", Phys. Rev. E, Vol. 55, No. 1, pp. 21-24, 1997.
3. Xi, H., Peng, G., and Chou, S., "Finite-volume Lattice Boltzmann Method", Phys. Rev. E, Vol. 59, No. 5, pp. 6202-6205, 1999.
4. Peng, G., Xi, H., and Chou, S., "On Boundary Conditions in the Finite-Volume Lattice Boltzmann Method on Unstructured Meshes", Int. J. Modern Phys. C, Vol. 10, No. 6, pp. 1003-1016, 1999.
5. He, X., Chen, S., and Doolen, G.D., "A Novel Thermal Model for the Lattice Boltzmann Method in Incompressible Limit", J. Comp. Phys., Vol. 146, No. 1, pp. 282-300, 1998.
6. Shi, Y., Zhao, T.S., and Guo, Z.L., "Thermal Lattice Bhatnagar–Gross–Krook Model for Flows with Viscous Heat Dissipation in the Incompressible Limit", Phys. Rev. E, Vol. 70, No. 6, pp. 1-10, Art. No. 066310, 2004.
7. Van-der-Sman, R.G.M., " Lattice Boltzmann Scheme for Natural Convection in Porous Media", Int. J. Modern. Phys. C, Vol. 8, No. 4, pp. 879-888, 1997.
8. Palmer, B.J. and Rector, D.R., "Lattice Boltzmann Algorithm for Simulating Thermal Flow in Compressible Fluids", J. Comput. Phys., Vol. 161, No. 1, pp. 1-20, 2000.
9. Chen, S., Martinez, D., and Mei, R., "On Boundary Conditions in Lattice Boltzmann Methods", Phys. Fluids, Vol. 8, No. 9, pp. 2527-2535, 1996.
10. Chopard, B. and Dupuis, A., "A Mass Conserving Boundary Condition for Lattice Boltzmann Models", Int. J. Modern phys. B, Vol. 17, No. 1, pp. 103-107, 2003.
11. D'Orazio, A. and Succi, S., "Simulating Two-dimensional Thermal Channel Flows by Means of a Lattice Boltzmann Method with New Boundary Conditions", Future Generation Comp. Sys., Vol. 20, No. 6, pp. 935-944, 2004.
12. Guo, Z.L., Zheng, C., and Shi, B., "An Extrapolation Method for Boundary Conditions in Lattice Boltzmann Method", Phys. Fluids, Vol. 14, No. 6, pp. 2007-2010, 2002.
13. Tang, G.H., Tao, W.Q., and He, Y.L., "Thermal Boundary Condition for the Thermal Lattice Boltzmann Equation", Phys. Rev. E, Vol. 72, No. 1, pp. 1-6, Art. No. 016703, 2005.
14. Peng, Y., Shu, C., and Chew, Y.T., "Simplified Thermal Lattice Boltzmann Model for Incompressible Thermal Flows", Phys. Rev. E, Vol. 68, No. 2, pp. 1-8, Art. No. 026701, 2003.
15. Chen, C.K., Yen, T.S., and Yang, Y.T., "Lattice Boltzmann Method Simulation of Backward-Facing Step on Convective Heat Transfer with Field Synergy Principle", Int. J. Heat and Mass Trans., Vol. 49, No. 5, pp. 1195-1204, 2006.
16. Coutanceau, M. and Bouard, R., "Experimental Determination of the Main Features of the Viscous Flow in the Wake of a Circular Cylinder in Uniform Translation, Part 1. Steady Flow", J. Fluid Mech.,Vol. 79, No. 2, pp. 231–256, 1977.
17. Fornberg, B., "A Numerical Study of Steady Viscous Flow Past a Circular Cylinder", J. Fluid Mech., Vol. 98, No. 4, PP. 819-855, 1980.
18. Dennis, S.C.R. and Chang, G., "Numerical Solutions for Steady Flow Past a Circular Cylinder at Reynolds Numbers Up to 100", J. Fluid Mech.,Vol. 42, No. 2, pp. 471-489, 1970.

۱۹. قدیری، ب. و حوری جعفری، ح.، "مدلسازی عددی جریان حول دسته سیلندرهای استوانه‌ای"، مجله مکانیک و هوافضا (سیالات و آئرودینامیک)، جلد ۵، شماره ۱، ص.ص. ۱-۲۲، ۱۳۸۸.

20. Calhoun, D., "A Cartesian Grid Method for Solving the Two-dimensional Streamfunction–Vorticity Equations in Irregular Regions", J. Comput. Phys., 176 (2), Vol. 176, No. 2, pp. 231–275, 2002.
21. Ye, T., Mittal, R., Udaykumar, H.S., and Shyyy, W., "An Accurate Cartesian Grid Method for Viscous Incompressible Flows with Complex Immersed Boundaries", J. Comput. Phys., Vol. 156, No. 1, pp. 209–240, 1999.
22. Armaly, B.F., Durst, F., Pereira, J.C.F., and Schonung, B., "Experimental and Theoretical Investigation of Backward- Facing Step Flow", J. Fluid Mech., Vol. 127, No. 1, pp. 473-496,1983.
23. Guj, G. and Stella, F., "Numerical Solutions of High-Re Recirculating Flows in Vorticity-velocity Form", Int. J. Num. Meth. Fluids, Vol. 8, No. 4, pp. 405-416, 1988.
24. Barton, I.E., "A Numerical Study of Flow over a Confined Backward-facing Step", Int. J. Num. Meth. Fluids, Vol. 21, No. 8, pp. 653-665, 1995.
25. Erturk, E., "Numerical Solutions of 2-D Steady Incompressible Flow over a Backward-Facing Step, Part I: High Reynolds Number Solutions", Int. J. Comput. & Fluids 37, Vol. 37, No. 6, pp. 633–655, 2008.
26. Kondoh, T., Nagano, Y., and Tsuji, T., "Computational Study of Laminar Heat Transfer Downstream of a Backward-facing Step", Int. J. Heat and Mass Trans., Vol. 36, No. 3, pp. 577-591, 1993.
27. Chen, C.K., Yen, T.S., and Yang, Y.T., "Lattice Boltzmann Method of a Cylinder in the Backward-facing Step with Field Synergy Principle", Int. J. Thermal Sci., Vol. 45, No. 10, pp. 982-989, 2006.