Archive of SID

بررسی تحلیلی اثر ثابت‌های زمانی سیال ویسکوالاستیک بر جریان در لوله‌های خمیده

محمود نوروزی[۱] و محمد حسن کیهانی[۲]
دانشکده مهندسی مکانیک
دانشگاه صنعتی شاهرود

محمدرضا حیرانی نوبری[۳]
دانشکده مهندسی مکانیک
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

امین احمدی جنیدی[۴]
دانشکده مهندسی مکانیک
دانشگاه صنعتی شاهرود

(تاریخ دریافت: ۱۳۸۸/۰۴/۰۸؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۸۹/۰۱/۱۶)

چکیده

در این تحقیق، حل تحلیلی برای جریان سیال مرتبه دو در یک لوله خمیده ارائه شده است. در این راستا از روش حساب اختلالات برای تحلیل میدان جریان استفاده شده و برخلاف تحقیقات پیشین، جملات سری‌های حساب اختلالات تا مرتبه دو محاسبه شده‌اند. در ضمن، رابطه تحلیلی برای دبی جریان ارائه شده و سرعت محوری، جریان‌های ثانویه و مولفه‌های میدان تنش به شکل دقیقی محاسبه شده‌اند. همچنین، براساس حل ارائه شده برای سیال مرتبه دو در تحقیق حاضر و نیز برای سیال فوق همرفتی ماکسول در تحقیقات پیشین، اثر دو ثابت زمانی رهایی از تغییر شکل و رهایی از تنش سیال ویسکوالاستیک بر جریان در لوله‌های خمیده بررسی شده است. نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که افزایش زمان رهایی از تغییر شکل و زمان رهایی از تنش سیال ویسکوالاستیک به ترتیب به افزایش و کاهش دبی جریان منجر می‌شود که این امر از جمله مهم‌ترین نوآوری‌های تحقیق حاضر می‌باشد.

کلمات کلیدی: سیال مرتبه دو، جریان در لوله خمیده، زمان رهایی از تغییر شکل، زمان رهایی از تنش، روش حساب اختلالات

Analytical Investigation of Viscoelastic Fluid's Time Constants on Flow in Curved Pipes

M. Norouzi and M.H. Kayhani
Mech. Eng. Dep't.
Shahrood Univ. of Tech.

M.R. Heirani-Nobari
Mech. Eng. Dep't.
Amirkabir Univ. of Tech.

A.A. Joneidi
Mech. Eng. Dep't.
Shahrood Univ. of Tech.

ABSTRACT

In this paper, an analytical solution for the second order fluid flow in a curved pipe is presented. Perturbation method is used for solving the governing equations and unlike the previous researches, the second order perturbation terms were considered. Here, an analytical relation for the flow rate was presented and axial velocity, secondary flows, and components of stress field were calculated accurately. Also, based on the solution of second order fluid flow presented in current work and upper convected Maxwell fluid flow obtained in previous studies, the effect of retardation and relaxation times of viscoelastic fluids on flow in curved pipes were investigated. In this article, it was shown that increasing the retardation and relaxation times cause the flow rate enhancement and reduction, respectively, which is one of the main innovations of current study.

Keywords: Second Order Fluid, Curved Pipe Flow, Relaxation Time, Retardation Time, Perturbation Method

---

۱- دانشجوی دکتری (نویسنده پاسخگو): mnorouzi@shahroodut.ac.ir
۲- دانشیار
۳- دانشیار
۴- دانشجوی کارشناسی ارشد

www.SID.ir

Archive of SID

۱- مقدمه

جریان در مجاری خمیده یکی از جریان های پایه و مهم در مکانیک سیالات محسوب می شود که از دیرباز تاکنون مورد توجه محققین بوده است. با این وجود، بسیاری از پژوهش های گذشته به سیالات نیوتونی محدود بوده و تنها تعداد کمی از آن‌ها به تحقیق در ارتباط با سیالات غیر نیوتونی پرداخته‌اند. مطالعه این جریان به ویژه در پزشکی از اهمیت بسزایی برخوردار است که برای نمونه می‌توان به مطالعه جریان خون در رگ های خمیده اشاره نمود به این علت که احتمال وقوع انسداد در این رگ‌ها بالاتر است. همچنین این جریان بخشی از هندسه تجهیزات آزمایش‌های تشخیص طبی، نظیر کیت های مونیتورینگ انسولین و استخراج DNA را تشکیل می دهد.

به طور کلی بخش عمده کاربردهای جریان سیالات غیرنیوتنی در مجاری خمیده مربوط به انتقال این مواد در علوم پزشکی، کاربردهای صنعتی و بیولوژیکی، صنایع غذایی، هسته‌ای، شیمیایی سبک و سنگین، پتروشیمی و ... است. امروزه استفاده از مواد ویسکوالاستیک به عنوان سیال عامل در مبدل های حرارتی مورد توجه قرار گرفته که این امر مبین لزوم مطالعه جریان و انتقال حرارت این مواد در مجاری مستقیم و خمیده است. یکی دیگر از کاربردهای اصلی این جریان مربوط به تزریق مذاب ها و محلول های پلیمری در قالب های ساخت قطعات پلاستیکی است.

برخی از محققین، جریان سیالات غیر نیوتونی در مجاری خمیده را به شکل عددی بررسی نموده اند. ژانگ[1] و همکارانش[۱] از روش گالرکین[2] برای مطالعه بر روی جریان سیال اولدروید- بی[3] در یک لوله خمیده استفاده کردند و نتایج خود را برای اعداد دین و وایزنبرگ[4] بزرگ ارائه دادند.

فن تین و ژنگ[5] [۲] نیز معادلات متشابهی را برای جریان سیال اولدروید-بی بین دو صفحه خمیده در نسبت های انحنای کوچک ارائه دادند و با استفاده از روش‌های عددی و تحلیلی تقریبی اقدام به حل این معادلات کردند. نتایج تحلیلی و عددی بدست آمده توسط آن‌ها در اعداد رینولدز پایین تر از ۱,۰۰۰ هم‌خوانی مناسبی با هم داشتند.

فن[6] و همکارانش[۳] تحقیقات خود را بر روی جریان توسعه یافته خزشی و اینرسی سیال اولدروید-بی و $UCMN_2$ در یک لوله خمیده به انجام رسانده‌اند. آن‌ها برای این منظور از روش حجم محدود استفاده نمودند و دریافتند که با ازدیاد اثر اختلاف تنش نرمال اول، شدت جریان‌های ثانویه و افت فشار افزایش می یابد، حال آنکه ازدیاد اختلاف تنش نرمال دوم دارای اثری معکوسی است که این نتایج به خوبی با مشاهدات آزمایشگاهی [۶-۴] توافق داشت.

چن[7] وهمکارانش [۷] با استفاده از روش های عددی و تحلیلی جریان توسعه یافته سیال اولدروید-بی در یک لوله خمیده چرخان را مورد بررسی قرار دادند و دریافتند که توزیع فشار دینامیکی در سطح مقطع لوله در تعادل با نیروی کوریولیس است. تحلیل مشابهی نیز توسط کیهانی و همکاران [۸] درخصوص اثر زاویه دوران کانال خمیده صورت گرفته است. در طی این تحقیق آن ها دریافتند که تغییر زاویه دوران کانال سبب تغییر جهت راستای برهم کنش نیروهای کریولیس و نیروی گریز از مرکز ناشی از انحناء می‌شود که این امر تغییرات بزرگی را در شدت و شکل برآیند جریان های ثانویه درپی دارد.

در کنار مطالعات عددی، محققانی نیز به مطالعه تحلیلی این جریان پرداخته اند. دین[8] [۱۰-۹] از اولین پژوهشگرانی بود که جریان نیوتنی در مجاری خمیده را مورد بررسی قرار داد. او با استفاده از روش حساب اختلالات[9] جریان سیال نیوتنی در یک لوله خمیده را تحلیل نمود و توانست وجود جریان های ثانویه تیلور-گورتلر[10] ناشی از انحناء را بطور تحلیلی اثبات نماید.

توپک اوقلو[11] [۱۱] حل دین را از طریق محاسبه جملات مرتبه بالای سری های حساب اختلالات تکمیل نمود و رابطه تحلیلی را برای افت فشار این جریان بدست آورد.

1- Zhang
2- Galerkin Method
3- Oldroyd-B
4- Weissenberg Number
5- Phan-Thien and Zhang
6- Fan
7- Chen
8- Dean
9- Perturbation Method
10- Taylor-Gortler
11- Topakoglu

www.SID.ir

Archive of SID

اولین نمونه از این دسته تحقیقات در مورد جریان سیالات غیرنیوتنی، توسط توماس و والترز[۱] [۱۲] انجام شده است. آن ها جریان سیال اولدروید- بی در یک لوله خمیده را مورد بررسی قرار دادند و دریافتند که جریان های ثانویه رابطه مستقیمی با خواص الاستیک این سیال دارند. سارین[۲] [۱۴-۱۳] تحقیق مشابه ای را انجام داد و دریافت که شدت جریان های ثانویه با توان چهارم عدد دبورا[۳] رابطه دارد.

رابرتسون و مولر[۴][۱۵] تحقیقاتی را بر روی جریان خزشی و اینرسی سیال اولدروید-بی در یک لوله خمیده و با استفاده از روش تحلیلی انجام دادند و دریافتند که در جریان خزشی برای سیالات با عدد وایزنبرگ پایین، مقدار دبی جریان در لوله خمیده اندکی بیشتر از دبی جریان در یک لوله مستقیم می باشد. با افزایش عدد وایزنبرگ و همچنین کاهش ویسکوزیته حلال نیوتونی در جریان اینرسی، نسبت مقاومت به شدت کاهش می‌یابد.

ایمتو[۵] و همکارانش[۱۷-۱۶] بر روی سیالات پاورلو[۶] و وایت-متزنر[۷] در لوله های دارای انحنای سینوسی، سهموی و هذلولوی مطالعاتی را انجام دادند و داس[۸] [۱۸] نیز مطالعات ایمتو را برای سیالات بینگهام ادامه داد.

شرما و پراکاش[۹][۱۹] در تحقیقات خود بر روی سیال مرتبه دو[۱۰]، تنها به اختلاف تنش نرمال اول توجه کردند و با صفر در نظر گرفتن اختلاف تنش نرمال دوم، نتایج خود را ارائه نمودند. بون[۱۱] و همکارانش[۲۰] حل مشابهی را برای جریان خزشی سیال فوق همرفتی ماکسول[۱۲] و سیال مرتبه دو در یک لوله خمیده ارائه داده اند.

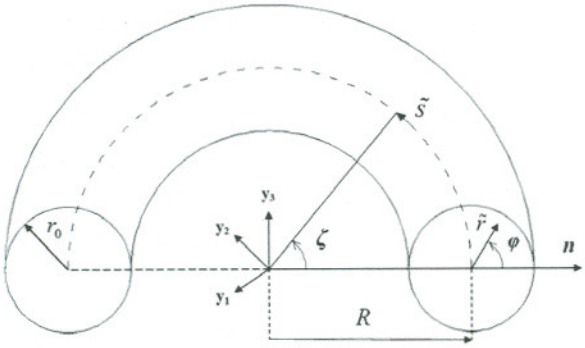
جیتچوت و رابرتسون[۱۳] [۲۱] ضمن بررسی امکان حل جریان اینرسی سیال مرتبه دو در لوله خمیده به روش حساب اختلالات، پاسخ تحلیلی تا مرتبه اول بدست آوردند

1- Thomas and Walters
2- Sarin
3- Deborah Number
4- Robertson and Muller
5- Iemoto
6- Power Law
7- White-Metzner
8- Das
9- Sharma and Prakash
10- Second Order Fluid (SOF)
11- Bowen
12- Upper Convected Maxwell (UCM)
13- Jitchote and Robertson

www.SID.ir

ولی به دلیل عدم محاسبه جملات مرتبه بالا، تحلیل آن‌ها به رابطه تحلیلی برای تعیین دبی جریان منجر نمی شود.

در این تحقیق، جریان توسعه یافته سیال مرتبه دو در یک لوله خمیده به طور تحلیلی مورد بررسی قرار گرفته است. شکل **۱** هندسه جریان در تحقیق حاضر را نشان می دهد. در اینجا مقطع مجرا به صورت مدور و شعاع انحنای کانال ثابت فرض شده است. در این پژوهش، جهت بررسی تحلیلی جریان از دستگاه مختصات منحنی الخط تروید‌ال[۱۴] ($\tilde{r},\phi,\tilde{s}$) استفاده شده و مشابه تحقیقات پیشین[۱۵و ۲۱-۲۰]، تحلیل جریان با استفاده از روش حساب اختلالات صورت گرفته است. محاسبه تغییرات مقاومت مجرای خمیده در برابر جریان نیازمند محاسبه جملات مرتبه بالای سری های حساب اختلالات است که عملیات ریاضی مربوط به محاسبه این جملات، بسیار دشوارتر از جملات دارای مرتبه پایین است. در اینجا بر خلاف تحقیقات پیشین، این جملات مرتبه بالا برای جریان سیال مرتبه دو در لوله‌های خمیده محاسبه شده و رابطه تحلیلی برای تغییرات دبی جریان اینرسی این سیال ارائه شده است. همچنین، با محاسبه این جملات، سرعت محوری، جریان های ثانویه و میدان تنش به شکل دقیق تری محاسبه شده است. از آنجا که ثابت زمانی سیال فوق همرفتی ماکسول (UCM)، زمان رهایی از تنش[۱۵] و



شکل (۱): هندسه جریان در تحقیق حاضر.

14- Toroidal Coordinate System
15- Relaxation Time

Archive of SID

ثابت زمانی سیال مرتبه دو، زمان رهایی از تغییر شکل[1] است، بنابراین می‌توان برای یک هندسه، لزجت و تحت گرادیان فشار یکسان ادعا نمود که عدد وایزنبرگ در سیال UCM معرف اثر زمان رهایی از تنش و در سیال مرتبه دو معرف زمان رهایی از تغییر شکل سیال ویسکوالاستیک است.

در اینجا بر اساس نتایج بدست آمده برای سیال مرتبه دو از تحقیق اخیر و نیز سیال فوق همرفتی ماکسول از تحقیق رابرتسون و مولر [۱۵]، بر روی اثر این دو ثابت زمانی بر میدان جریان و بخصوص بر تغییرات دبی و رفتار کاهش/افزایش مقاومت[2] در برابر جریان بحث شده است.

۲- بی‌بعد سازی

پارامترهای بی‌بعد جریان در تحقیق حاضر، عبارتند از:

$$s=\frac{\tilde{s}}{r_0},\qquad r=\frac{\tilde{r}}{r_0},\qquad v_i=\frac{\tilde{v}_i\cdot \underline{e}_i}{W_0},$$
$$p=\frac{r_0}{\eta W_0}\tilde{p},\quad \gamma=\tilde{\gamma}\frac{r_0}{W_0},\quad \frac{\Im\gamma}{\Im t}=\frac{\Im\tilde{\gamma}}{\Im t}\left(\frac{r_0}{W_0}\right)^2, \qquad (۱)$$
$$We=\frac{\tilde{\Psi}_1 W_0}{2\eta r_0},\qquad \mathrm{Re}=\frac{\rho W_0 r_0}{\eta},\qquad \delta=\frac{r_0}{R}.$$

در رابطه فوق، علامت ~ در بالانویس هر کمیت نشانگر بعد دار بودن آن کمیت است. همچنین r و s جهات دستگاه مختصات ترویدال، r_0 شعاع مقطع لوله، W_0 سرعت مرجع، $\underline{\tilde{v}}$ بردار سرعت، $\tilde{p}$ ترم فشار، $\tilde{\Psi}_1$ ثابت اختلاف تنش نرمال اول، η ویسکوزیته سیال، $\tilde{\gamma}$ و $\Im\tilde{\gamma}/\Im t$ مشتقات مرتبه اول و دوم همرفتی پاد همبسته نرخ برش[3]، We عدد وایزنبرگ، Re عدد رینولدز، δ نسبت انحناء و R شعاع انحنای گام لوله خمیده می‌باشد.

۳- معادلات حاکم

معادلات حاکم بر جریان توسعه یافته سیال مرتبه دو در یک لوله خمیده شامل معادله پیوستگی و معادلات مومنتوم است. در این تحقیق از صورت تابع جریانی معادلات حاکم به صورت زیر استفاده شده است [۲۱]:

$$\mathrm{Re}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{rB}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial\phi}-\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\frac{\partial w}{\partial r}\right)-\\ \delta\frac{w}{B^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\cos\phi+\frac{\partial\psi}{\partial r}\sin\phi\right)\end{array}\right]= \qquad (۲\text{-الف})$$
$$\frac{4}{B}+\frac{\partial\tau_{rs}}{\partial r}+\frac{1}{r}+\frac{\partial\tau_{\phi s}}{\partial\phi}+\frac{1}{r}\tau_{rs}+$$
$$\frac{2\delta}{B}\left(\tau_{rs}\cos\phi-\tau_{\phi s}\sin\phi\right),$$

$$\mathrm{Re}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{rB^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\phi}\nabla^2\psi-\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2\psi\right)+\\ \frac{\delta}{B}[2w\left(\frac{\partial w}{\partial r}\sin\phi+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\phi}\cos\phi\right)\end{array}\right.$$
$$+\frac{1}{B^2}\left(\sin\phi\left(\begin{array}{l}\frac{3}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2+\frac{3}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\frac{\partial\psi}{\partial r}\\ -\frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\phi}+\\ \frac{1}{r^3}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\right)^2+2\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\end{array}\right)\right.$$
$$\left.+\cos\phi\left(\begin{array}{l}\frac{3}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\phi}+\\ \frac{3}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}+\frac{2}{r^3}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\end{array}\right)\right)]$$
$$+\delta^2\frac{3}{B^4}\left[\begin{array}{l}\frac{\sin 2\phi}{2}\left(\begin{array}{l}\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\right)^2\\ -\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2\end{array}\right)-\\ \cos 2\phi\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\right)\end{array}\right]= \qquad (۲\text{-ب})$$
$$\left[\begin{array}{l}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2\tau_{rr}}{\partial r\partial\phi}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\tau_{rr}}{\partial\phi}\\ +\frac{1}{r}\frac{\partial^2\tau_{\phi\phi}}{\partial r\partial\phi}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial\tau_{\phi\phi}}{\partial\phi}+\frac{\partial^2\tau_{r\phi}}{\partial r^2}\\ +\frac{3}{r}\frac{\partial\tau_{r\phi}}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\tau_{r\phi}}{\partial\phi^2}\end{array}\right]$$
$$+\frac{\delta}{B}\left[\begin{array}{l}\sin\phi\left(\begin{array}{l}\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\phi}}{\partial\phi}-\frac{1}{r}\left(\tau_{\phi\phi}-\tau_{rr}\right)\\ +\frac{\partial\tau_{ss}}{\partial r}-\frac{\partial\tau_{\phi\phi}}{\partial r}\end{array}\right)\\ +\cos\phi\left(\begin{array}{l}\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{ss}}{\partial\phi}-\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{rr}}{\partial\phi}\\ +\frac{2}{r}\tau_{r\phi}-\frac{\partial\tau_{r\phi}}{\partial r}\end{array}\right)\end{array}\right].$$

1- Retardation Time
2- Drag Deduction/Enhancement
3- The First and Second Contravariant Convected Derivative of the Shear Rate Tensor

www.SID.ir

Archive of SID

در رابطه فوق، w مؤلفه سرعت محوری و ψ تابع جریان های ثانویه است. ∇^2 نیز نمایشگر عملگر لاپلاسین بوده و به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \qquad (۳)$$

همچنین، ترم B معرف شعاع انحنای هر نقطه از مقطع جریان است که از رابطه $1+\delta r Cos\varphi$ بدست می آید. برای حل معادلات حاکم، شرط مرزی عدم لغزش بر روی جداره لوله صادق است:

$$w = \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad \text{در} \quad r = 1. \qquad (۴)$$

بایستی توجه داشت که در جریان توسعه یافته در یک لوله خمیده، مشتق کلیه پارامترهای جریان بجز فشار استاتیکی نسبت به مسیر پیشروی (s) برابر صفر است. به همین دلیل در معادلات حاکم اثری از مشتقات نسبت به s به چشم نمی‌خورد. همچنین گرادیان فشار جریان در یک لوله خمیده بر اساس گرادیان فشار در راستای خط محور کانال (جهت s) تعریف می شود. با در نظر گرفتن مقدار G به عنوان قدر مطلق افت فشار محوری داریم:

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{s}} = -G. \qquad (۵)$$

مقدار G در رابطه بالا یک مقدار ثابت است. در اینجا از ماکزیمم سرعت جریان سیال نیوتنی در یک لوله مستقیم که دارای قطر هیدرولیکی، گرادیان فشار و ویسکوزیته یکسانی نسبت به جریان سیال مرتبه دو در لوله خمیده است به عنوان سرعت مرجع (W_0) استفاده شده است:

$$W_0 = \frac{G r_0^2}{4\eta}. \qquad (۶)$$

به سادگی می توان رابطه زیر را برای گرادیان فشار بی بعد سیال نیوتنی در لوله مستقیم بدست آورد:

$$\frac{\partial P}{\partial s} = -4. \qquad (۷)$$

از آنجا که سرعت مرجع بر اساس ماکزیمم سرعت جریان سیال نیوتنی در یک لوله مستقیم تعریف شده که دارای گرادیان فشار یکسانی ($-G$) نسبت به جریان تحت بررسی در لوله خمیده است، لذا گرادیان فشار محوری بی بعد از رابطه (۷) در معادله مومنتوم محوری لحاظ شده است. (به جمله اول سمت راست معادله (۲-الف) توجه شود.)

www.SID.ir

۴- معادله متشکله

در این تحقیق، جریان سیال مرتبه دو در یک لوله خمیده مورد بررسی قرار گرفته است. مدل سیال مرتبه دو، مشابه مدل کریمینال- اریکسون- فیلبی[1] (CEF) بوده با این تفاوت که توابع رئولوژیکی در سیال مرتبه دو مستقل از نرخ برش هستند. این معادلات متشکله، برای مدل سازی جریان های برشی دائمی سیالات ویسکوالاستیک بسیار مناسب بوده و استفاده از آن برای محاسبات صنعتی متداول است [۲۲]. معادله متشکله سیال مرتبه دو همچون معادله CEF در ناحیه ویسکومتریک دیاگرام پیپکین معتبر است و به همین دلیل از این مدل و مدل CEF برای تحلیل مکانیکی رئومترهای استاندارد استفاده می شود [۲۳]. ناحیه ویسکومتریک دیاگرام پیپکین شامل اعداد دبورای کوچک و محدوده وسیعی از عدد وایزنبرگ است[۲۴]. همچنین استفاده از این مدل برای جریان های سریع توصیه نمی شود [۲۲]؛ اما از آنجا که محدوده تحلیل تحقیق حاضر مربوط به اعداد رینولدز کوچک ($Re < 80$) است (مشابه تحقیق جیتچوت و رابرتسون [۱۵]) لذا مشکلی از نظر کاربرد این مدل در این محدوده از جریان اینرسی وجود ندارد. همچنین تانسور تنش $\tilde{\tau}$ برای سیال مرتبه دو تراکم ناپذیر به صورت زیر است [۲۳].

$$\tilde{\tau} = \eta\tilde{\gamma} - \frac{1}{2}\tilde{\Psi}_1 \frac{\Im\tilde{\gamma}}{\Im t} + \tilde{\Psi}_2(\tilde{\gamma}.\tilde{\gamma}). \qquad (۸)$$

در عبارت بالا، η ویسکوزیته، $\tilde{\Psi}_1$ ثابت اختلاف تنش نرمال اول و $\tilde{\Psi}_2$ ثابت اختلاف تنش نرمال دوم است. همچنین، در جریان دائمی، مشتقات همرفتی پاد همبسته نرخ برش مرتبه اول و دوم به صورت زیر تعریف می‌شوند [۲۴]:

$$\tilde{\gamma} = \nabla\tilde{V} + \nabla\tilde{V}^T, \qquad (۹-۱)$$

$$\frac{\Im\tilde{\gamma}}{\Im t} = \tilde{V}.\nabla\tilde{\gamma} - \left[\left(\nabla\tilde{V}\right)^T \cdot \tilde{\gamma} + \tilde{\gamma}\cdot\left(\nabla\tilde{V}\right)\right]. \qquad (۹-۲)$$

اگر در رابطه (۸)، مقدار $\tilde{\Psi}_1 = 0$ باشد، مدل راینر- ریولین[2]

1- Criminale-Eriksen-Filbey (CEF)
2- Reiner-Rivlin

Archive of SID

بدست خواهد آمد. چنانچه هر دو مقدار $\tilde{\Psi}_1$ و $\tilde{\Psi}_2$ برابر صفر باشند، معادله متشکله سیال نیوتونی حاصل می شود. در معادله متشکله سیال مرتبه دو، زمان رهایی از تغییر شکل (λ_2) رابطه‌ای مستقیم با ثابت اختلاف تنش نرمال اول به صورت زیر دارد [۲۳]:

$$\lambda_2 = \frac{\tilde{\Psi}_1}{2\tilde{\eta}}. \qquad (۱۰)$$

همان‌گونه که جیتچوت و همکارانش [۲۱] نشان داده‌اند، با در نظر گرفتن ترم اختلاف تنش نرمال دوم، به جز تعداد بسیار محدودی از شرایط، در سایر شرایط نمی‌توان جوابی یکتا برای ترم های سرعت محوری یافت. به همین دلیل در حل موجود برای جلوگیری از قرار گرفتن معادلات در وضعیت منفرد، از مقدار $\tilde{\Psi}_2$ یا همان اختلاف تنش نرمال دوم، صرف نظر شده است. با این فرض و با استفاده از روابط (۱ و ۸) صورت بی بعد معادله متشکله سیال مرتبه دو به شکل زیر خواهد بود:

$$\tau = \gamma - We\frac{\Im\gamma}{\Im t}. \qquad (۱۱)$$

به دلیل طولانی بودن مؤلفه های میدان تنش سیال مرتبه دو (رابطه فوق) در دستگاه مختصات ترویدال، از ذکر آن‌ها در این بخش خودداری شده و این مؤلفه‌ها در ضمیمه A مقاله آمده است.

۵- حل به روش حساب اختلالات

در این بخش، با استفاده از حساب اختلالات پاسخ تحلیلی برای میدان جریان سیال مرتبه دو در یک لوله خمیده ارائه شده است. بطور کلی می توان پارامترهای میدان جریان را بصورت یک سری از نسبت های انحناء (δ که در رابطه (۱) تعریف شده) معرفی نمود:

$$w = \sum_{n=0}^{2} \delta^n w^{(n)}(r,\phi),$$
$$\psi = \sum_{n=1}^{2} \delta^n \psi^{(n)}(r,\phi), \qquad (۱۲)$$
$$\tau = \sum_{n=0}^{2} \delta^n \tau^{(n)}(r,\phi).$$

www.SID.ir

به عبارت دیگر، در رابطه (۱۲) δ معرف پارامتر اختلال است. با توجه به اینکه میدان جریان در لوله مستقیم فاقد جریان ثانویه است و با عنایت به این مسأله که در لوله مستقیم اثر انحنای مسیر (δ) وجود ندارد، لذا نتیجه می شود که بر خلاف سرعت محوری و میدان تنش، جمله مرتبه صفر تابع جریان مربوط به جریان های ثانویه برابر صفر است ($\psi^{(0)} = 0$).

۵-۱- حل مرتبه δ^0

برای یافتن جمله مرتبه صفر سرعت محوری بایستی سری های مربوط به سرعت محوری و میدان تنش سیال مرتبه دو را از رابطه (۱۲) در رابطه (۲-الف) قرار داد و نتیجه حاصله را بر حسب δ^0 مرتب نمود. به این ترتیب معادله زیر برای جملات مرتبه صفر حاصل می شود:

$$\frac{\partial \tau_{rs}^{(0)}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\phi s}^{(0)}}{\partial \phi} + \frac{\tau_{rs}^{(0)}}{r} = -4. \qquad (۱۳)$$

مؤلفه های تنش τ_{rs} و $\tau_{\phi s}$ سیال مرتبه دو از روابط بخش ضمیمه A بدست می آیند. بنابراین با محاسبه جمله مرتبه صفر این دو مؤلفه تنش بر حسب سرعت محوری و قرار دادن نتیجه آن در رابطه (۱۳)، معادله مربوط به جمله مرتبه صفر سرعت محوری به صورت زیر حاصل می شود:

$$\nabla^2 w^{(0)} = -4. \qquad (۱۴)$$

با اعمال شرط عدم لغزش بر روی جداره لوله، رابطه زیر برای سرعت محوری مرتبه صفر بدست می آید:

$$w^{(0)} = 1 - r^2. \qquad (۱۵)$$

توزیع سرعت بدست آمده در رابطه (۱۵) همان توزیع سرعت سیال نیوتنی در لوله مستقیم است. به عبارت دیگر، از آنجا که جملات مرتبه صفر مستقل از انحناء هستند پاسخ میدان جریان به سمت رابطه جریان در لوله مستقیم همگرا شده است. شایان ذکر است که پاسخ سرعت محوری برای جریان سیالات مرتبه دو و فوق همرفتی ماکسول در لوله مستقیم مشابه سیال نیوتنی است [۳].

Archive of SID

۵-۲- حل مرتبه δ^1

با قرار دادن رابطه (۱۲) در معادله (۲-ب) و مرتب نمودن نتیجه تا مرتبه δ^1 ، معادله مربوط به $\psi^{(1)}$ بدست می آید. پاسخ این معادله به شکل زیر است.

$$\psi^{(1)} = g_1(r)\sin(\phi)\cdot \qquad (۱۶)$$

در نهایت پس از اعمال شرط مرزی عدم لغزش (رابطه (۴))، رابطه زیر برای $g_1(r)$ حاصل می شود:

$$g_1(r) = \frac{1}{288} r\, w^{(0)^2} \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(r^2-4) \\ -24\,We \end{pmatrix}\cdot \qquad (۱۷)$$

به همین ترتیب معادله (۲-ب) را نیز بر حسب δ^1 مرتب کرده و با حل معادله حاصل، پاسخ زیر برای $w^{(1)}$ بدست می آید:

$$w^{(1)} = f_1(r)\cos(\phi)\cdot \qquad (۱۸)$$

پس از اعمال شرایط مرزی، تابع $f_1(r)$ بصورت زیر خواهد بود:

$$f_1(r) = -\frac{1}{11520} r\, w^{(0)} \begin{pmatrix} 8640 + \mathrm{Re}^2(r^6 - \\ 9r^4 + 21r^2 - 19) + \\ 1920(r^2-1)We^2 \\ +\mathrm{Re}(-120r^4 + \\ 520r^2 - 440)We \end{pmatrix}\cdot \qquad (۱۹)$$

شایان ذکر است که روابط مربوط به جملات مرتبه اول میدان سرعت جریان سیال مرتبه دو در لوله خمیده (روابط ۱۹-۱۶) نخستین بار توسط جیتچوت و رابرتسون [۲۱] ارائه شده است. محاسبه جملات مرتبه اول تنها برای آشکار نمودن جریان‌های ثانویه در مجاری خمیده مناسب است و این حل منجر به محاسبه دقیق میدان سرعت نمی‌شود. واضح است که انتگرال رابطه (۱۸) در سطح مقطع لوله برابر صفر است و بنابراین محاسبه میزان تغییرات دبی جریان در لوله خمیده نسبت به لوله مستقیم از محاسبه جمله مرتبه یک برای سرعت محوری امکان‌پذیر نبوده و نیازمند محاسبه جملات مرتبه بالاتر است. همچنین با محاسبه جملات مرتبه بالا پاسخ‌های دقیق‌تری برای جریان‌های ثانویه و سرعت محوری و همچنین پدیده متمایل شدن توزیع سرعت محوری به سمت دیواره سمت انحنای خارجی مجرا حاصل می‌شود که با فیزیک جریان در مجاری خمیده سازگار است. از این رو برخلاف تحقیق جیتچوت و رابرتسون [۲۱]، تحقیق اخیر در مرتبه اول تحلیل متوقف نشده و جملات مرتبه دوم نیز محاسبه شده است. شایان ذکر است که محاسبه این جملات دشوارتر بوده و به پاسخ‌های پیچیده‌تری منجر می‌شود.

www.SID.ir

۵-۳- حل مرتبه δ^2

روند تعیین معادلات و محاسبه جملات مرتبه دو کاملاً مشابه محاسبه جملات مرتبه اول است با این تفاوت که جهت بدست آوردن معادلات مربوطه لازم است که روابط (۱۲) در معادلات حاکم قرار داده شوند و جملات آن‌ها بر حسب δ^2 مرتب شوند. به این ترتیب با حل معادلات دیفرانسیل حاصله و اعمال شرایط مرزی نتایج زیر برای سرعت محوری و جریان های ثانویه بدست می آید:

$$\psi^{(2)} = g_2(r)\sin(2\phi), \qquad (۲۰\text{-الف})$$

$$w^{(2)} = f_{20}(r) + f_{22}(r)\cos(2\phi)\cdot \qquad (۲۰\text{-ب})$$

به دلیل صورت پیچیده و طولانی توابع $g_2(r)$، $f_{20}(r)$ و $f_{22}(r)$، از ذکر آن ها در اینجا صرفنظر شده و نتایج مربوطه در ضمیمه B این مقاله آمده است. شایان ذکر است که روابط (۲۰) و همچنین روابط بخش ضمیمه B برای نخستین بار در تحقیق اخیر گزارش شده است. با توجه به رابطه (۲۰-ب) می‌توان دریافت که انتگرال این رابطه در سطح مقطع جریان صفر نبوده و بر خلاف جمله مرتبه اول (رابطه (۱۸)) به محاسبه تغییرات دبی جریان در لوله خمیده منجر می شود.

۶- تعیین دبی جریان

دبی جریان را می‌توان به سادگی از انتگرال گیری توزیع سرعت محوری تا مرتبه دو بدست آورد:

$$Q = \int_0^{2\pi}\int_0^1 w\, r\, dr\, d\phi\cdot \qquad (۲۱)$$

Archive of SID

با استفاده از پاسخ بدست آمده در بخش ۵ برای جملات سرعت محوری، می‌توان مقدار مناسبی از w را از طریق رابطه زیر تا مرتبه δ^2 بدست آورد:

$$w = w^{(0)}(r) + \delta f_1(r)\cos\phi + \delta^2\left(f_{20}(r) + f_{22}(r)\cos 2\phi\right). \quad (۲۲)$$

با قرار دادن توزیع سرعت محوری بدست آمده از روابط (۲۲) و همچنین، (۱۵)، (۱۹)، B2 و B3 در رابطه (۲۱) و محاسبه انتگرال مربوطه، می‌توان رابطه بی بعد دبی جریان را برای سیال مرتبه دو در یک لوله خمیده بدست آورد:

$$Q_c = Q_s\left(1+\delta^2\left(\begin{array}{l}\frac{1}{48}-\frac{11}{17280}\mathrm{Re}^2-\\ \frac{1541}{4180377600}\mathrm{Re}^4+\\ \left(\frac{1}{1290240}\mathrm{Re}^3+\frac{1}{240}\mathrm{Re}\right)We+\\ \left(\frac{1}{18}+\frac{691}{2903040}\mathrm{Re}^2\right)We^2+\\ \left(\frac{11}{4320}\mathrm{Re}\right)We^3+\left(\frac{1}{135}\right)We^4\end{array}\right)\right). \quad (۲۳)$$

شایان ذکر است که در انتگرال گیری از رابطه (۲۲) در سطح مقطع کانال، تنها اثر انتگرال جملات $w^{(0)}(r)$ و $f_{20}(r)$ غیر صفر است و میزان تغییرات دبی نسبت به جریان در لوله مستقیم نیز از انتگرال جمله $f_{20}(r)$ حاصل می شود. در رابطه بالا، Q_s دبی بی بعد جریان سیال نیوتنی در لوله مستقیم در گرادیان فشاری مشابه می‌باشد که برابر $\pi/2$ است. همچنین مقدار بعددار آن به شکل زیر است:

$$\tilde{Q}_s = \frac{\pi r_o^2}{8\eta}G. \quad (۲۴)$$

باید توجه داشت که رابطه (۲۳) برای مقادیر کوچک نسبت انحناء معتبر می‌باشد و در صورت افزایش عدد دین، این حل از پاسخ واقعی انحراف می‌یابد.

با حذف ترم الاستیک جریان و صفر قرار دادن عدد وایزنبرگ در رابطه (۲۳)، رابطه دبی جریان اینرسی سیال نیوتنی در لوله خمیده حاصل می شود که نخستین بار توسط توپک‌اوقلو [۱۰] ارائه شده است:

$$Q_c = Q_s\left(1+\delta^2\left(\begin{array}{l}\frac{1}{48}-\frac{11}{17280}\mathrm{Re}^2-\\ \frac{1541}{4180377600}\mathrm{Re}^4\end{array}\right)\right). \quad (۲۵)$$

همچنین، اگر در رابطه (۲۳) مقدار عدد رینولدز به سمت صفر میل کند، میزان تغییرات دبی جریان خزشی سیال مرتبه دو که توسط بون [۲۰] و همکاران ارائه شده بدست خواهد آمد:

$$Q_c = Q_s\left(1+\delta^2\left(\begin{array}{l}\frac{1}{48}+\frac{1}{18}We^2\\ +\frac{1}{135}We^4\end{array}\right)\right). \quad (۲۶)$$

بنابراین، مشاهده می‌شود که پاسخ بدست آمده برای جریان اینرسی سیال مرتبه دو در تحقیق اخیر (رابطه (۲۳))، پاسخ‌های مربوط به جریان خزشی سیال مرتبه دو و جریان اینرسی نیوتنی را پوشش می‌دهد.

۷- نتایج و بحث

در این بخش بر اساس نتایج بدست آمده برای سیال مرتبه دو SOF از تحقیق اخیر و نیز سیال فوق همرفتی ماکسول UCM از تحقیق رابرتسون و مولر [۱۵]، بر روی اثر خواص زمان رهایی از تغییر شکل[1] و زمان رهایی از تنش[2] سیال ویسکوالاستیک بر میدان جریان و بخصوص بر تغییرات دبی بحث شده است. از آنجا که ثابت زمانی سیال UCM، زمان رهایی از تنش و ثابت زمانی سیال مرتبه دو زمان رهایی از تغییر شکل است، بنابراین می توان در یک هندسه، ویسکوزیته و تحت گرادیان فشار یکسان ادعا نمود که عدد وایزنبرگ در سیال UCM معرف اثر زمان رهایی از تنش و در سیال مرتبه دو معرف زمان رهایی از تغییر شکل ماده ویسکوالاستیک است.

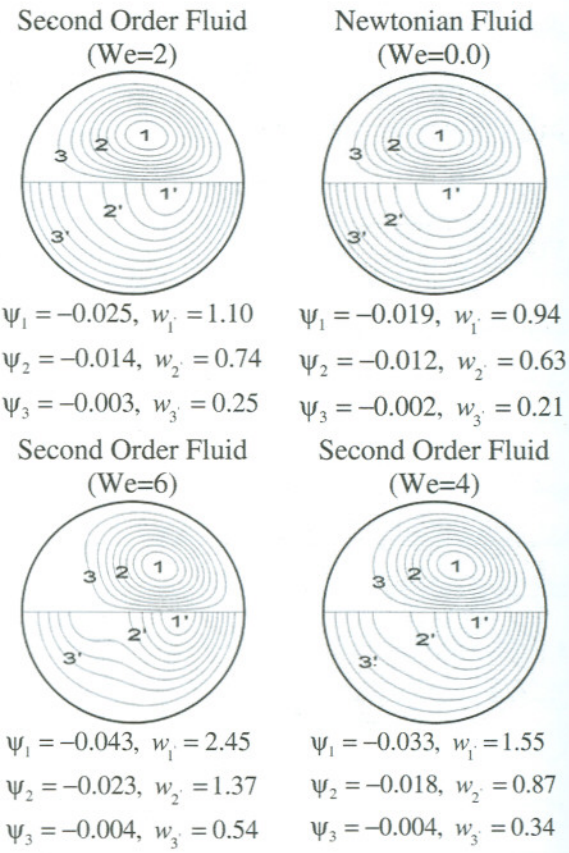
در شکل ۲ خطوط جریان های ثانویه در نیمه بالایی و توزیع سرعت محوری در نیمه پایینی مقطع کانال سیال مرتبه دو در اعداد وایزنبرگ مختلف نشان داده شده است. همچنین، $\mathrm{Re}=50$ و $\delta=0.1$ فرض شده است. در این

1- Retardation Time
2- Relaxation Time

www.SID.ir

Archive of SID

شکل، سمت راست مقطع لوله معرف سمت انحنای خارجی و سمت چپ آن معرف سمت انحنای داخلی آن است. مطابق شکل، با افزایش عدد وایزنبرگ سیال مرتبه دو، ماکزیمم سرعت محوری و نیز شدت جریان های ثانویه افزایش می‌یابد و موقعیت مرکز جریان های ثانویه و موقعیت ماکزیمم سرعت محوری به دیواره سمت انحنای خارجی مجرا متمایل می شود. مطابق تحقیق رابرتسون و مولر [۱۵]، با افزایش زمان رهایی از تنش مدل UCM نیز شدت جریان‌های ثانویه افزایش می یابد. همچنین در سیال UCM با ازدیاد زمان رهایی از تنش، موقعیت ماکزیمم سرعت محوری به دیواره سمت انحنای خارجی کانال و موقعیت

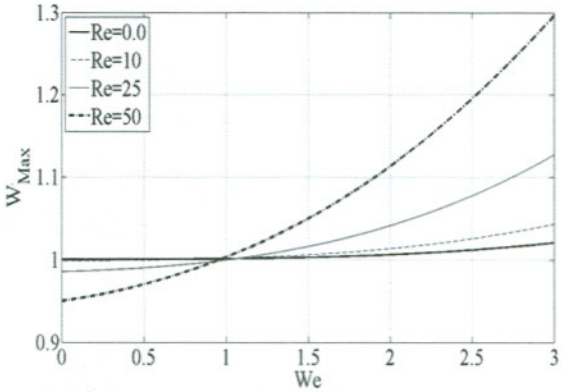


شکل(۲): توزیع تابع جریان های ثانویه (نیمه بالایی مقطع کانال با جهت چرخش پادساعت‌گرد) و سرعت محوری (نیمه پایینی مقطع کانال) جریان سیال مرتبه دو در اعداد وایزنبرگ مختلف ($Re = 50$ و $\delta = 0.1$).

www.SID.ir

مرکز جریان‌های ثانویه به سمت دیواره جانبی متمایل می‌شود. بنابراین اثر هر دو ثابت زمانی رهایی از تنش و ثابت زمانی رهایی از تغییر شکل بر شدت جریان‌های ثانویه و تغییر سرعت محوری یکسان بوده اما اثر آن‌ها بر تغییر موقعیت مرکز جریان‌های ثانویه متفاوت است.

در شکل ۳ اثر عدد وایزنبرگ بر ماکزیمم سرعت جریان اصلی سیال مرتبه دو نشان داده شده است. مطابق شکل در جریان خزشی ($Re = 0.0$) و در کلیه حالات مربوط به جریان اینرسی، افزایش عدد وایزنبرگ منجر به افزایش ماکزیمم سرعت محوری می شود. همچنین، اثر عدد وایزنبرگ بر افزایش ماکزیمم سرعت محوری در اعداد رینولدز بزرگ بیشتر است که این مربوط به وابستگی مرتبه دوم بخش الاستیک سیال مرتبه دو به نرخ برش است.

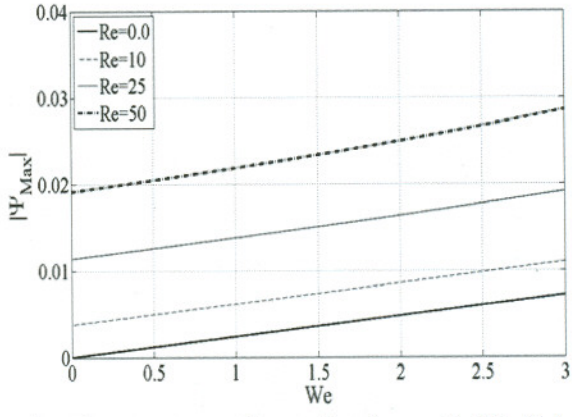


شکل(۳): اثر عدد وایزنبرگ بر ماکزیمم سرعت محوری جریان سیال مرتبه دو در اعداد رینولدز مختلف و $\delta = 0.1$.

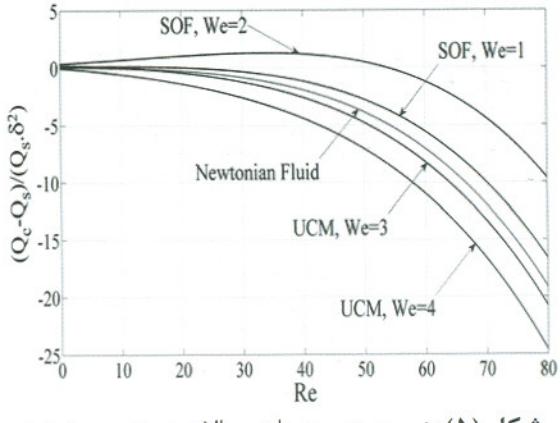
در شکل ۴ اثر عدد وایزنبرگ بر ماکزیمم تابع جریان های ثانویه سیال مرتبه دو نشان داده شده است. مطابق شکل، با افزایش عدد وایزنبرگ شدت جریان های ثانویه زیاد می شود. چنین رفتاری در جریان اینرسی نیز مشاهده می شود. در ادامه به اثر ثابت های زمانی بر تغییرات دبی جریان پرداخته می شود. مطابق تحقیق رابرتسون و مولر [۱۵]، رابطه دبی در جریان سیال فوق همرفتی ماکسول (UCM) بصورت زیر است:

Archive of SID

$$Q_c = Q_s \left\{ 1 + \frac{\delta^2}{48} \left[\begin{array}{l} 1 - \mathrm{Re}^2 \left(\frac{11}{360} + \mathrm{Re}^2 \frac{1541}{87091200} \right) \\ + \frac{8}{3} We^2 \left(1 - \frac{1}{15} We^2 \right) + \\ \frac{1}{26880} We \,\mathrm{Re} \left(\mathrm{Re}^2 + 5376 \right) - \\ \frac{101}{60480} We^2 \,\mathrm{Re}^2 - \frac{2}{45} We^3 \,\mathrm{Re} \end{array} \right] \right\}. \qquad (۲۷)$$



شکل(۴): اثرعدد وایزنبرگ بر ماکزیمم شدت جریان های ثانویه سیال مرتبه دو در اعداد رینولدز مختلف و $\delta = 0.1$.



شکل (۵): نسبت دبی جریان سیالات نیوتنی، مرتبه دو (SOF) و فوق همرفتی ماکسول (UCM) نسبت به عدد رینولدز و در اعداد وایزنبرگ مختلف.

www.SID.ir

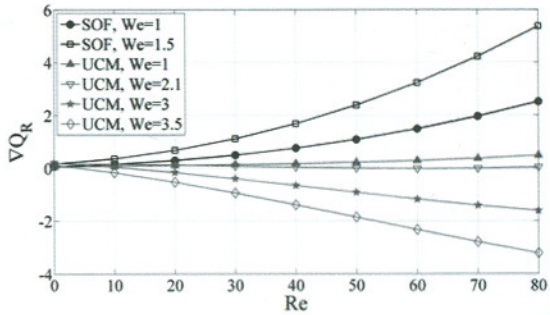
در شکل **۵** تغییرات دبی برای جریان سیال نیوتنی (رابطه ۲۵)، سیال مرتبه دو (بدست آمده از رابطه (۲۳) تحقیق اخیر) و سیال UCM (بدست آمده از رابطه فوق از تحقیق رابرتسون و مولر [۱۵]) بر حسب عدد رینولدز و در اعداد وایزنبرگ مختلف نشان داده شده است. نتیجه جالب توجه آنکه مطابق حل به روش حساب اختلالات، تغییر دبی برای هر سه نوع سیال، تابع درجه دومی از نسبت انحناء است. مطابق شکل، با افزایش عدد رینولدز، نسبت دبی در جریان سیال نیوتنی دچار افت می شود. همچنین برای سیال UCM در اعداد وایزنبرگ بزرگ، نسبت دبی جریان نسبت به سیال نیوتنی کمتر است اما با افزایش عدد وایزنبرگ برای جریان سیال مرتبه دو، نسبت دبی سیال افزایش می یابد. جهت مطالعه تغییر دبی جریان سیال ویسکوالاستیک نسبت به سیال نیوتنی می توان پارامتر تغییرات نسبت دبی را تعریف نمود:

$$\nabla Q_R = \left. \frac{Q_c - Q_s}{Q_s \delta^2} \right|_{Vicsoelastic} - \left. \frac{Q_c - Q_s}{Q_s \delta^2} \right|_{Newtonian} . \qquad (۲۸)$$

واضح است که مقادیر مثبت و منفی ∇Q_R به ترتیب نشان‌دهنده رفتار کاهش و افزایش مقاومت لوله خمیده در برابر جریان است.

در شکل **۶**، اثر عدد وایزنبرگ بر تغییرات نسبت دبی جریان سیال UCM و مرتبه دو نشان داده شده است. مطابق شکل، برای سیال مرتبه دو با افزایش عدد وایزنبرگ (زمان رهایی از تغییر شکل) دبی جریان افزایش یافته و جریان از خود رفتار کاهش مقاومت نشان می دهد. همچنین در سیال UCM در اعداد وایزنبرگ (زمان رهایی از تنش) کوچک، رفتار جریان بصورت کاهش مقاومت است؛ اما در اعداد وایزنبرگ بزرگتر از ۲/۱ از خود رفتار افزایش مقاومت نشان می دهد. شایان ذکر است که بون و همکاران [۲۰] نیز اثر مشابهی را برای تغییرات مقاومت لوله‌های خمیده در برابر جریان خزشی سیالات UCM و مرتبه دو مشاهده نموده‌اند

Archive of SID



شکل (۶): تغییرات نسبت دبی جریان سیالات نیوتنی، مرتبه دو (SOF) و فوق همرفتی ماکسول (UCM) نسبت به عدد رینولدز و در اعداد وایزنبرگ مختلف.

اما در تحقیق اخیر این اثر برای جریان اینرسی این دو سیال بصورت تحلیلی به اثبات رسیده است. در ادامه، مکانیزم اثر خاصیت الاستیک بر شدت جریان های ثانویه و دبی سیال مرتبه دو مورد بررسی قرار می گیرد.

در ناحیه هسته جریان (ناحیه حول مرکز مقطع لوله و دور از دیواره)، مرتبه سرعت محوری از مرتبه سرعت جریان های ثانویه بزرگتر است. فن و همکاران [۳] با استفاده از این خاصیت و با صرفنظر کردن از اثر اختلاف تنش نرمال دوم، رابطه زیر را برای بالانس نیروها در ناحیه هسته جریان سیال ویسکوالاستیک بدست آوردند:

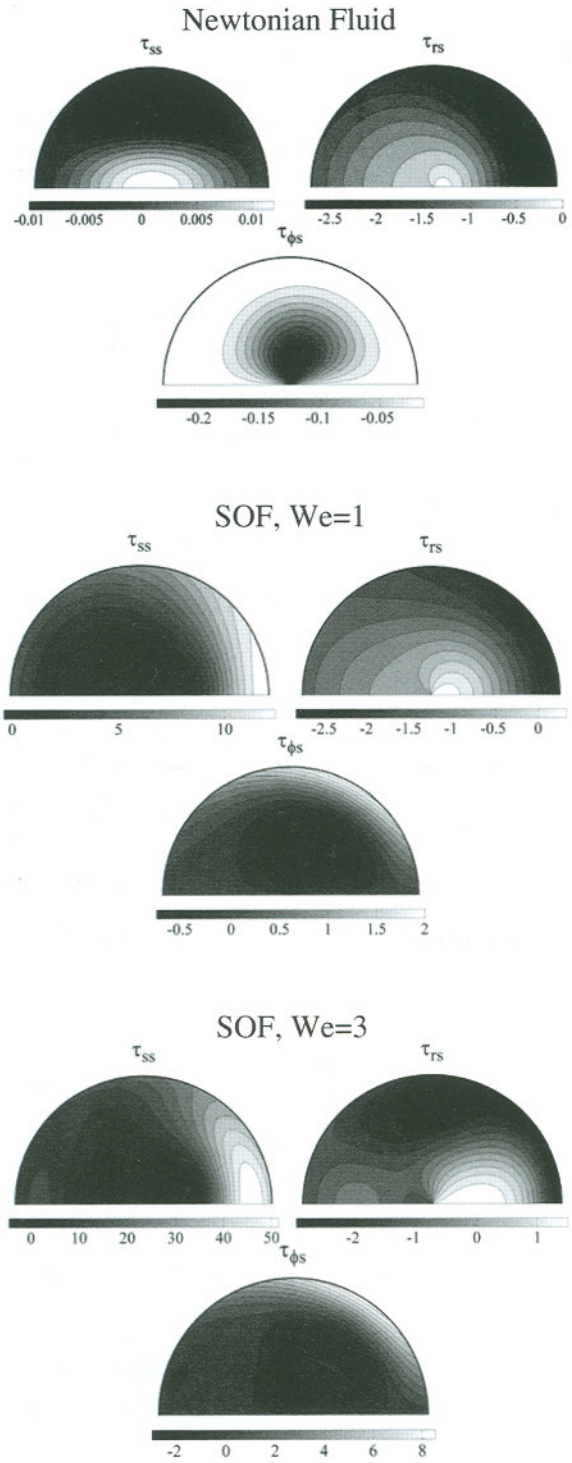
$$\mathrm{Re}\frac{w^2}{B} \approx \frac{\partial P}{\partial n} + \frac{\tau_{ss}}{B}. \qquad (۲۹)$$

مطابق رابطه فوق، اثر نیروی گریز از مرکز با اثر گرادیان فشار در جهت شعاع انحناء و اثر تنش نرمال محوری (τ_{ss}) در ناحیه هسته جریان بالانس شده است.

در شکل **۷** تنش نرمال محوری(τ_{ss}) برای جریان سیال نیوتنی و سیال مرتبه دو در دو عدد وایزنبرگ ۱ و ۳ نشان داده شده است. در اینجا نسبت انحناء برابر ۰/۱ و عدد رینولدز جریان برابر ۵۰ در نظر گرفته شده است. ماشالکار و دواراجان[1] [۲۴] نشان دادند که در ناحیه هسته جریان اینرسی سیال نیوتنی در لوله های خمیده، گرادیان فشار در جهت شعاع انحناء تنها با اثر نیروی گریز از مرکز بالانس می‌شود. به عبارت دیگر در جریان سیال نیوتنی، تنش نرمال

www.SID.ir

1- Mashelkar and Devarajan



شکل (۷): توزیع تنش نرمال محوری (τ_{ss}) و مؤلفه‌های تنش τ_{rs} و $\tau_{\varphi s}$ در $\mathrm{Re}=50$ و $\delta=0.1$.

www.SID.ir

محوری نقشی در تشکیل جریان‌های ثانویه ندارد. مطابق شکل ۷، مقدار این تنش درجریان سیال نیوتنی بسیار کوچک است اما در سیال مرتبه دو با ازدیاد عدد وایزنبرگ مقدار تنش نرمال محوری به طور چشمگیری افزایش پیدا می کند. این پدیده با آنالیز مرتبه بزرگی فن و همکاران [۳] نیز تطابق دارد. مطابق مطالعه آن ها، تنش نرمال محوری نسبت به خواص ویسکوز از مرتبه ε و بسیار کوچک است اما مقدار آن نسبت به خواص الاستیک قابل توجه است. در نزدیکی دیواره خارجی، مقدار سرعت محوری و در نتیجه اثر نیروی گریز از مرکز اندک است در حالیکه برای جریان سیال مرتبه دو مقدار تنش نرمال محوری در این ناحیه بسیار بزرگ است. لذا رابطه تعادلی (۲۹) در این ناحیه برقرار نبوده و جهت حفظ تعادل مکانیزم مومنتوم وارد عمل می شود و جریان های ثانویه ای هم جهت با گردابه های تیلور-گورتلر بوجود می آید و برآیند شدت جریان های ثانویه افزایش پیدا می کند. همچنین در شکل ۷ مؤلفه های تنش τ_{rs} و $\tau_{\varphi s}$ جریان سیال مرتبه دو نشان داده شده است. این دو مؤلفه تنش در معادله مربوط به جریان محوری موثرند و بر اساس توزیع آن‌ها می‌توان به اثر عدد وایزنبرگ در افزایش دبی جریان سیال مرتبه دو پی برد. مطابق شکل با افزایش عدد وایزنبرگ، توزیع مؤلفه تنش τ_{rs} تفاوت چندانی پیدا نمی‌کند اما مؤلفه تنش $\tau_{\varphi s}$ دچار تغییرات بسیار شدیدی می‌شود به نحوی که ماکزیمم قدر مطلق این مؤلفه تنش در حالت $We = 3$ حدود ۱۰۰ برابر از جریان سیال نیوتنی بزرگتر است. بنابراین، در جریان سیال مرتبه دو، ایجاد تغییرات عمده در مقدار $\tau_{\varphi s}$ به افزایش سرعت محوری و دبی نسبت به جریان نیوتنی منجر می شود.

۸- نتیجه گیری

در یک هندسه و گرادیان فشار مشخص، عدد وایزنبرگ جریان سیالات مرتبه دو و UCM به ترتیب معیاری از زمان های رهایی از تنش و تغییر شکل است. لذا با مقایسه نتایج این تحقیق برای جریان سیال مرتبه دو با مطالعه پیشین برای جریان سیال UCM، می توان اثر این دو ثابت زمانی بر جریان ویسکوالاستیک در لوله خمیده را بررسی نمود. مهم‌ترین نتایج این تحقیق عبارتند از:

- افزایش زمان رهایی از تغییر شکل و زمان رهایی از تنش منجر به افزایش شدت جریان های ثانویه می‌شود. افزایش زمان رهایی از تغییر شکل سبب متمایل شدن مرکز گردابه های تیلور-گورتلر به سمت دیواره خارجی شده و اثر آن بر تغییر موقعیت مرکز گردابه‌ها به سمت دیواره‌های جانبی ناچیز است در حالیکه افزایش زمان رهایی از تنش سبب انتقال مرکز گردابه‌ها به سمت دیواره جانبی می شود.
- در ناحیه هسته جریان، اثر نیروی گریز از مرکز با گرادیان فشار در جهت شعاع انحناء و تنش نرمال محوری بالانس می شود. افزایش زمان رهایی از تغییر شکل سیال مرتبه دو منجر به ایجاد تنش نرمال محوری قوی در نزدیکی دیواره خارجی می شود. به دلیل کوچک بودن اثر سرعت محوری و نیروی گریز از مرکز و بزرگ بودن مقدار تنش نرمال محوری در این ناحیه، بالانس نیروها به هم خورده و مکانیزم مومنتوم جهت حفظ تعادل وارد عمل می شود و جریان های ثانویه‌ای در جهت گردابه‌های تیلور-گورتلر ایجاد می‌شود. در نتیجه برآیند شدت جریان‌های ثانویه افزایش پیدا می کند.
- افزایش زمان رهایی از تغییر شکل سیال مرتبه دو منجر به کاهش مقاومت مجرا در برابر جریان می‌شود. در حالیکه در سیال UCM و در مقادیر کوچک زمان رهایی از تنش سیال، جریان از خود رفتار کاهش مقاومت و در مقادیر بزرگ این ثابت زمانی ($We > 2.1$)، از خود رفتار افزایش مقاومت نشان می دهد.

بنابراین، نتیجه‌گیری می شود که اثر این دو ثابت زمانی بر پارامترهای میدان جریان متفاوت و بر دبی/ افت فشار جریان در اعداد وایزنبرگ بزرگ کاملاً برعکس است. شایان ذکر است که تحقیق حاضر نخستین تحقیقی به شمار می‌آید که در آن اثر متضاد دو ثابت زمانی رهایی از تنش و تاخیر سیال ویسکوالاستیک بر جریان اینرسی آن در کانال‌های خمیده گزارش می‌شود.

Archive of SID

Archive of SID

مراجع

1. Zhang, M.K., Shen, X.R., Ma, J.F., and Zhang, B.Z., "Galerkin Method Study on Flow of Oldroyd-B Fluids in Curved Circular Cross-Section Pipes", J. Zhejiang Univ. Sci., Vol. 7, No. 1, pp. 263-270, 2007.
2. Phan-Thien, N. and Zheng, R., "Viscoelastic Flow in Curved Duct: A Similarity Solution for the Oldroyd-B Fluid", J. Applied Math. and Phys., Vol. 41, No. 3, pp. 766-781, 1990.
3. Fan, Y., Tanner, R.I., and Phan-Thien, N., "Fully Developed Viscous and Viscoelastic Flows in Curved Pipes", J. Fluid Mech., Vol. 440, No. 2, pp. 327-357, 2001.
4. Tsang, H.Y. and James, D.F., "Reduction of Secondary Motion in Curved Tubes by Polymer Additives", J. Rheol., Vol. 24, No. 3, pp. 589-601, 1980.
5. Yanase, S., Goto, N., and Yamamoto, K., "Dual Solutions of the Flow Through a Curved Tube", Fluid Dyn. Res., Vol. 5, No. 1, pp. 191-201, 1989.
6. Jones, W.M. and Davies, O.H., "The Flow of Dilute Aqueous Solutions of Macromolecules in Various Geometries: III. Curved Pipes and Porous Materials", J. Phys. D: Appl. Phys., Vol. 9, No. 3, pp. 753-770, 1976.
7. Chen, Y., Chen, H., Zhang, J., and Zhang, B., "Viscoelastic Flow in Rotating Curved Pipes", Phys. Fluids, Vol. 18, No. 1, pp. 1-17, 2006.
8. کیهانی، م ح، حیرانی نوبری، م ر، و نوروزی، م، "بررسی عددی جریان و انتقال حرارت در یک کانال U شکل گردان"، مجله مکانیک و هوا فضا دانشگاه امام حسین (ع)، جلد ۳، شماره ۲، ص.ص. ۵۹-۷۲، ۱۳۸۶.
9. Dean, W.R., "Note on the Motion of Fluid in a Curved Pipe". Phil. Mag., Vol. 4, No. 1, pp. 208-223, 1927.
10. Dean, W.R., "The Stream-Line Motion of Fluid in a Curved Pipe", Philosophical Maga., Vol. 5, No. 3, pp. 673-695, 1928.
11. Topakoglu, H.C., "Steady Laminar Flow of an Incompressible Viscous Fluid in a Curved pipe", J. Math. Mech., Vol. 16, No. 4, pp. 1231-1237, 1967.
12. Thomas, R.H. and Walters, K., "On the Flow of an Elastico-Viscous Liquid in a Curved Pipe Under a Pressure Gradient", J. Fluid Mech., Vol. 16, No. 1, pp. 228-242, 1963.
13. Sarin, V.B., "Flow of an Elastico-Viscous Liquid in a Curved Pipe of Slowly Varying Curvature", Int. J. Biomed. Comp., Vol. 32, No. 1, pp. 135-149, 1993.
14. Sarin, V.B., "The Steady Laminar Flow of an Elastico-Viscous Liquid in a Curved Pipe of Varying Elliptic Cross Section", Math. Comput. Modelling., Vol. 26, No. 1, pp. 109-121, 1997.
15. Robertson, A.M. and Muller, S.J., "Flow of Oldroyd-B Fluids in Curved Pipes of Circular and Annular Cross-Section", Int. J. Non-linear Mech., Vol. 31, No. 1, pp. 3-20, 1996.
16. Iemoto, Y., Nagata, M., and Yamamoto, F., "Steady Laminar Flow of a Power-Law Fluid in a Curved Pipe of Circular Cross-Section with Varying Curvature", J. Non-Newton Fluid, Vol. 19, No. 1, pp. 161-183, 1985.
17. Iemoto, Y., Nagata, M., and Yamamoto, F., "Steady Laminar Flow of Viscoelastic Fluid in a Curved Pipe of Circular Cross-Section with Varying Curvature", J. Non-Newton Fluid, Vol. 22, No. 1, pp. 101-114, 1986.
18. Das, B., "Flow of Bingham Fluid in a Slightly Curved Tube", Int. J. Eng. Sci., Vol. 30, No. 3, pp. 1193-1207, 1992.
19. Sharma, H.G. and Prakash, A., "Flow of a Second Order Fluid in a Curved Pipe", Indian J. Pure Appl. Math., Vol. 8, No. 2, pp. 546-557, 1997.
20. Bowen, P.J., Davies, A.R., and Walters, K., "On Viscoelastic Effects in Swirling Flows", J. Non-Newton Fluid, Vol. 38, No. 1, pp. 113-126, 1991.
21. Jitchote, W. and Robertson, A.M., "Flow of Second Order Fluids in Curved Pipes", J. Non-Newton Fluid, Vol. 90, No. 1, pp. 91-116, 2000.
22. Bird, R.B. and Wiest, J.M., "Constitutive Equations for Polymeric Liquids", Annual Rev. of Fluid Mech., Vol. 27, No. 1, pp. 169-193, 1995.
23. Bird, R.B., Armstrong, R.C., and Hassager, O., "Dynamics of Polymer Liquids", Second Ed., Vol. 1, John Wiley & Sons, Toronto, Canada, 1987.
24. Phan-Thien, N., "Understanding Viscoelasticity", First Ed., Springer, New York, 2002.
25. Mashelkar, R.A. and Devarajan, G.V., "Secondary Flows of Non-Newtonian Fluids: Part I-Laminar Boundary Layer Flow of a Generalized Non-Newtonian Fluid in a Coiled Tube, Part II - Frictional Losses in Laminar Flow of Purely Viscous and Viscoelastic Fluids Through Coiled Tubes", Trans. Inst. Chem. Engrs., Vol. 54, No. 1, pp. 100-114, 1976.

www.SID.ir

Archive of SID

ضمیمه A- مؤلفه های تانسور تنش سیال مرتبه دو

تانسور تنش بی بعد سیال مرتبه دو به صورت $\tau=\gamma-We\frac{\Im\gamma}{\Im t}$ بوده که مؤلفه‌های آن از قرار زیر هستند:

$$\gamma_{rr}=2\frac{\partial u}{\partial r}\ ,\ \gamma_{r\phi}=\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial \phi}-v\right)\ ,\ \gamma_{\phi\phi}=\frac{2}{r}\left(u+\frac{\partial v}{\partial \phi}\right)\ ,\ \gamma_{rs}=\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{\delta}{B}w\cos\phi,$$
$$\gamma_{\phi s}=\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \phi}+\frac{\delta}{B}w\sin\phi\ ,\ \gamma_{ss}=\frac{2\delta}{B}(u\cos\phi-v\sin\phi). \tag{A1}$$

و همچنین:

$$\begin{aligned}
\frac{\Im\gamma_{rr}}{\Im t}&=u\frac{\partial\gamma_{rr}}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial\gamma_{rr}}{\partial\phi}-2\frac{\partial u}{\partial r}\gamma_{rr}-\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial\phi}\gamma_{r\phi},\\
\frac{\Im\gamma_{r\phi}}{\Im t}&=u\frac{\partial\gamma_{r\phi}}{\partial r}+\frac{v}{r}\left(\frac{\partial\gamma_{r\phi}}{\partial\phi}+\gamma_{rr}\right)-\frac{\partial u}{\partial r}\gamma_{r\phi}-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\phi}\gamma_{\phi\phi}-\frac{\partial v}{\partial r}\gamma_{rr}-\frac{1}{r}\left(u+\frac{\partial v}{\partial\phi}\right)\gamma_{r\phi},\\
\frac{\Im\gamma_{rs}}{\Im t}&=u\frac{\partial\gamma_{rs}}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial\gamma_{rs}}{\partial\phi}-\frac{\partial u}{\partial r}\gamma_{rs}-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\phi}\gamma_{\phi s}-\frac{\partial w}{\partial r}\gamma_{rr}-\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\phi}\gamma_{r\phi}+\frac{\delta}{B}(-u\cos\phi+v\sin\phi)\gamma_{rs}+w\gamma_{rr}\cos\phi-w\gamma_{r\phi}\sin\phi,\\
\frac{\Im\gamma_{\phi\phi}}{\Im t}&=u\frac{\partial\gamma_{\phi\phi}}{\partial r}+\frac{v}{r}\left(\frac{\partial\gamma_{\phi\phi}}{\partial\phi}+2\gamma_{r\phi}\right)-2\frac{\partial v}{\partial r}\gamma_{r\phi}-\frac{2}{r}\left(u+\frac{\partial v}{\partial\phi}\right)\gamma_{\phi\phi},\\
\frac{\Im\gamma_{\phi s}}{\Im t}&=u\frac{\partial\gamma_{\phi s}}{\partial r}+\frac{v}{r}\left(\gamma_{rs}+\frac{\partial\gamma_{\phi s}}{\partial\phi}\right)-\frac{\partial v}{\partial r}\gamma_{rs}-\frac{1}{r}\left(u+\frac{\partial v}{\partial\phi}\right)\gamma_{\phi s}-\frac{\partial w}{\partial r}\gamma_{r\phi}-\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\phi}\gamma_{\phi\phi}+\frac{\delta}{B}(-u\cos\phi+v\sin\phi)\gamma_{\phi s}\\
&\quad+w\gamma_{r\phi}\cos\phi-w\gamma_{\phi\phi}\sin\phi,\\
\frac{\Im\gamma_{ss}}{\Im t}&=u\frac{\partial\gamma_{ss}}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial\gamma_{ss}}{\partial\phi}-2\frac{\partial w}{\partial\phi}\gamma_{\phi s}+2\frac{\delta}{B}(-u\cos\phi+v\sin\phi)\gamma_{ss}+w\gamma_{rs}\cos\phi-w\gamma_{\phi s}\sin\phi.
\end{aligned} \tag{A2}$$

ضمیمه B- پاسخ جملات مرتبه دوم میدان سرعت و تابع جریان های ثانویه

روابط حاصله برای جملات مرتبه دو جریان های ثانویه و سرعت محوری شامل توابع $g_2(r)$ ، $f_{20}(r)$ و $f_{22}(r)$ (روابط (۲۰) را ببینید) بوده و به شرح زیر می باشند:

$$g_2(r)=-\frac{1}{464486400}r^2\,w^{(0)^2}\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(564480r^2-1290240)+\mathrm{Re}^3(5r^8-134r^6+777r^4-2792r^2+4979)\\+\left(5160960-1935360r^2\right)We^3+\mathrm{Re}\left(248640r^4-1330560r^2+1659840\right)We^2\\+\left(\mathrm{Re}^2\left(-4224r^6+39712r^4-124672r^2+172944\right)-26611200\right)We\end{pmatrix}, \tag{B1}$$

$$f_{20}(r)=w^{(0)}\begin{pmatrix}-\frac{3}{32}+\frac{11}{32}r^2+\mathrm{Re}^2(\frac{7}{230400}r^8-\frac{17}{57600}r^6+\frac{11}{19200}r^4-\frac{43}{230400}r^2-\frac{37}{57600})+\mathrm{Re}^4(\frac{1}{106168320}r^{14}\\-\frac{121}{743178240}r^{12}+\frac{803}{743178240}r^{10}-\frac{4523}{1238630400}r^8+\frac{26261}{3715891200}r^6-\frac{29179}{3715891200}r^4+\frac{17161}{3715891200}r^2\\-\frac{1373}{1238630400})+\left(\frac{1}{36}r^6+\frac{1}{108}(-5r^4+r^2+1)\right)We^4+\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(-\frac{11}{2880}r^8+\frac{3}{160}r^6-\frac{13}{540}r^4+\frac{109}{17280}r^2\\+\frac{49}{17280})\end{pmatrix}We^3\\+\begin{pmatrix}\frac{1}{4}r^4-\frac{19}{48}r^2+\frac{7}{48}\\+\mathrm{Re}^2\begin{pmatrix}\frac{71}{414720}r^{10}-\frac{577}{414720}r^8+\frac{3211}{829440}r^6-\frac{401}{92160}r^4\\+\frac{431}{276480}r^2+\frac{13}{92160}\end{pmatrix}\end{pmatrix}We^2\\+\begin{pmatrix}\mathrm{Re}^3\begin{pmatrix}-\frac{13}{5806080}r^{12}+\frac{979}{34836480}r^{10}-\frac{11129}{87091200}r^8\\+\frac{194993}{696729600}r^6-\frac{218147}{696729600}r^4+\frac{107563}{696729600}r^2\\-\frac{13397}{696729600}\end{pmatrix}\\+\mathrm{Re}\left(-\frac{83}{4608}r^6+\frac{341}{4608}r^4-\frac{367}{4608}r^2+\frac{31}{1536}\right)\end{pmatrix}We\end{pmatrix}, \tag{B2}$$

www.SID.ir

Archive of SID

$$f_{22}(r)=\frac{r^2 w^{(0)}}{117050572800}\left(\begin{array}{l}\left(\begin{array}{l}36578304000+\mathrm{Re}^4\,(160r^{12}-2801r^{10}+19123r^8-70547r^6+174649r^4\\-240206r^2+145690)+\mathrm{Re}^2\,(1693440r^6-125314560r^4+259519680r^2\\-196015680)\end{array}\right)\\+\left(5202247680r^4-11054776320r^2+5419008000\right)We^4\\+\mathrm{Re}\left(-392878080r^6+2343720960r^4-3894912000r^2+1835688960\right)We^3\\+\left(\begin{array}{l}39016857600r^2-32514048000\\+\mathrm{Re}^2\left(\begin{array}{l}9918720r^8-92534400r^6+303730560r^4-441806400r^2\\+218796480\end{array}\right)\end{array}\right)We^2\\+\left(\begin{array}{l}\mathrm{Re}^3\left(\begin{array}{l}-71316r^{10}+960876r^8-4772124r^6+12373956r^4\\-17566164r^2+10024812\end{array}\right)\\+\mathrm{Re}\left(-1280240640r^4+5222568960r^2-3434296320\right)\end{array}\right)We\end{array}\right). \qquad \text{(B3)}$$

www.SID.ir