

تحلیل کمانش مکانیکی یک ورق دایروی FGM با لایه‌های پیزوالکتریک محرک-محرک بر اساس محل تار خنثی و با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالای صفحات

سید محمد مهدی نجفی‌زاده^۱ و علی عنوانی^۲

دانشکده فنی و مهندسی

دانشگاه آزاد اسلامی - واحد اراک

(تاریخ دریافت: ۸۸/۱۰/۲۸؛ تاریخ پذیرش: ۸۹/۸/۲۴)

چکیده

در این مقاله، بار بحرانی کمانش مکانیکی برای یک ورق دایروی FGM با لایه‌های پیزوالکتریک محرک-محرک بر اساس محل تار خنثی و با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالای صفحات به‌دست آمده است. شرایط مرزی ورق هم گیردار و هم ساده است. در ابتدا، معادلات تعادل و پایداری با استفاده از معادلات اویلر استخراج شده و در ادامه با استفاده از تئوری غشایی نیروهای پیش‌کمانش محاسبه شده‌اند. سپس، بار بحرانی برای ورق مذکور به‌دست آمده و در نهایت نمودارها و جداول مربوط به نتایج حاصل ارائه و با نتایج تئوریک مقالات موجود مقایسه شده‌اند. نتایج نشان می‌دهد که برای ضخامت پیزو ثابت، بار بحرانی با افزایش نسبت h/a افزایش و با افزایش نسبت حجمی (n) کاهش می‌یابد. همچنین، برای ضخامت FGM ثابت نیز با افزایش نسبت h_p/h ، بار بحرانی افزایش و با افزایش نسبت حجمی کاهش می‌یابد.

واژه‌های کلیدی: ورق دایروی، کمانش، لایه پیزوالکتریک، تار خنثی، تئوری غشایی

Mechanical Buckling Analysis of a FGM Circular Plate with Actuator-Actuator Piezoelectric Layers, Based on Neutral-Axis' Position and Using Higher-Order Shear Deformation Plate Theory

M.M. Najafizadeh and A. Onvani

Mech. Eng. Dep't.

Islamic Azad Univ., Arak Branch

(Received: 18 Jan. 2010, Accepted: 15 Nov. 2010)

ABSTRACT

In this research, the critical buckling load of a FGM circular plate with actuator-actuator piezoelectric layers is calculated based on neutral-axis and using higher-order shear deformation plate theory. The plate is clamped and simply supported. Equilibrium and stability equations are derived using the Euler equations, while pre-buckling forces are obtained using the membrane theory. Then, the critical buckling loads are derived and the graphs and tables are presented and compared with other available theoretical data. The results show that for constant thickness of piezoelectric layer, critical buckling load is increased by increasing the aspect ratio (h/a) and is decreased by increasing volume fraction exponent. Also, for FGM thickness constant, critical buckling load is increased by increasing the aspect ratio (h_p/h), while decreased by increasing volume fraction exponent.

Keywords: Circular Plate, Buckling, Piezoelectric Layer, Neutral Axis, Membrane Theory

۱-دانشیار(نویسنده پاسخگو): mohammadnajafizadeh@yahoo.com

۲-دانشجوی کارشناسی ارشد: ali.onvani@yahoo.com

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر مطالعات زیادی توسط دانشمندان بر روی ورق‌ها و رفتار آنان نسبت به بارگذاری‌ها و شرایط مرزی مختلف انجام شده است. ورق‌ها سازه‌هایی هستند که در صنعت نقش بسیار مهمی را ایفا می‌کنند. رفتار ورق‌ها بسته به نوع ماده تشکیل‌دهنده آنها متفاوت است، بعضی از ورق‌ها در کل ماده خواص یکسانی دارند که آنها را ورق همگن یا همسان‌گرد می‌نامند. همچنین ورق‌های مرکب نیز از مواد غیرهمگن و غیرهمسان‌گرد تشکیل شده‌اند. از ورق‌ها در صنایع خودروسازی، هواپیماسازی، کشتی‌سازی، صنایع فضایی، ساخت مخازن و غیره استفاده می‌شود. یکی از پدیده‌های بسیار مهم در ورق‌ها که موجب شکست آنها می‌شود کماتش ورق می‌باشد. لذا دانشمندان همواره در پی ساختن موادی هستند که در مقابل این پدیده مقاومت خوبی داشته باشند. مواد تابعی^۱، موادی کامپوزیت^۲ با ریزساختارهای غیرهمگن می‌باشند که از یک لایه فلز و یک لایه سرامیک خالص تشکیل شده و بین این لایه‌ها از موادی که ترکیبی از سرامیک و فلز می‌باشد پر شده است. همچنین خواص مکانیکی آنها به آرامی و به‌طور پیوسته از یک سطح به سطح دیگر تغییر می‌کند. این مواد به خاطر مقاومت گرمایی بالایی که دارند در ساخت صنایع مختلف همچون راکتورهای هسته‌ای، توربین‌ها و غیره استفاده می‌شوند [۱]. این مواد نوظهور برای اولین بار توسط گروهی از دانشمندان در منطقه‌ای به نام سندای در کشور ژاپن تولید [۲] و به سرعت توسط دانشمندان دیگر توسعه یافتند. در پی تولید این مواد با توجه به ویژگی‌ها و رفتار آنها در بارگذاری و شرایط مرزی مختلف، تحقیقات و بررسی‌های گوناگونی انجام گرفته است [۳]. با توجه به نتایج به‌دست آمده معادلات تعادل غیرخطی و معادلات پایداری خطی حاکم بر کماتش تیرها، ورق‌ها و پوسته‌ها توسط المروت و براش^۳ در سال ۱۹۷۵ به‌دست آمده است [۴]. با گسترش کاربرد مواد مرکب در صنایع مهمی همچون صنایع نظامی و هوایی اهمیت شناخت

و رفتار این مواد افزایش یافت. تحقیقات انجام گرفته نشان می‌دهد که دانشمندان روی تحلیل کماتش مکانیکی و حرارتی ورق‌های مرکب تحت بارگذاری‌ها و شرایط مرزی مختلف کار کرده و با استفاده از تئوری‌های مختلف بار بحرانی کماتش و همچنین دمای بحرانی کماتش برای این ورق‌ها را محاسبه کرده‌اند. لیزا^۴ [۵] کماتش ورق‌های مرکب لایه‌ای را مورد بررسی قرار داده است. همچنین تاچرت^۵ [۶] نیز روی کماتش و ارتعاشات ورق‌های مرکب مطالعات و تحقیقات گسترده‌ای انجام داده است. کماتش ورق‌ها و پوسته‌های مرکب تحت بارگذاری‌های حرارتی مختلف توسط برت و بیرمن^۶ [۷] انجام گرفته و نجفی‌زاده و اسلامی^۸ [۸] پایداری ترموالاستیکی ورق‌های دایروی ارتوتروپیک را مورد بررسی قرار داده‌اند.

کوماتش ورق‌های دایروی تحت توزیع دمای متقارن با استفاده از روش ریتز توسط کلوسنر^۷ و همکارش [۹] مطالعه شده است. همچنین تحلیل کماتش ورق‌های دایروی FGM بر اساس تئوری‌های مختلف توسط نجفی‌زاده و اسلامی [۱۱]- [۱۰] انجام گرفته است. نودا^۸ [۱۲] تنش‌های حرارتی در ورق‌های ساخته شده از مواد تابعی را بررسی نموده است. کماتش ترموالاستیکی ورق‌های مرکب لایه‌ای ارتوتروپیک بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا توسط اسلامی و همکارش [۱۳] بررسی شده است. نجفی‌زاده و هدایتی تحلیل کماتش مکانیکی و حرارتی ورق‌های دایروی ساخته شده از مواد تابعی بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول [۱۴] و نجفی‌زاده و حیدری تحلیل کماتش مکانیکی و حرارتی ورق‌های دایروی ساخته شده از مواد تابعی بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا [۱۵] را انجام داده‌اند. تحلیل کماتش مکانیکی و حرارتی ورق مستطیلی ساخته شده از مواد تابعی بر اساس تئوری‌های کلاسیک و تغییر شکل برشی مرتبه بالا صفحات توسط جواهری و اسلامی [۱۷]- [۱۶] انجام شده است.

4-Leissa
 5-Tauchert
 6-Birman
 7-Klossner
 8-Noda

1-FGM (Functionally Graded Material)
 2-Composite
 3-Almrouth, Brush

$$z_0 = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} zE(z)dz}{\int_{-h/2}^{h/2} E(z)dz}, \quad (1)$$

که از رابطه فوق می‌توان نتیجه گرفت:

$$\int_{-h/2}^{h/2} (z - z_0)E(z)dz = 0. \quad (2)$$

۳- مواد تابعی و مواد پیزوالکتریک

مواد تابعی کامپوزیت‌هایی هستند که لایه‌های آن‌ها از سرامیک و فلز خالص تشکیل شده و بین این لایه‌ها از ترکیبی از فلز و سرامیک پر شده است که خواص مکانیکی آن‌ها به‌طور ملایم و پیوسته از یک سطح به سطح دیگر تغییر می‌کند. خواص مواد تابعی به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۲۳]:

$$P(z) = P_c V_c + P_m V_m, \quad (3)$$

که در آن، V_c و V_m به ترتیب نسبت حجمی فلز و سرامیک بوده و که هر کدام به‌صورت زیر می‌باشند [۲۳]:

$$V_c = \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^n, \quad (4)$$

$$V_m = 1 - V_c.$$

با جای‌گذاری رابطه (۴) در (۳) داریم:

$$P(z) = (P_c - P_m)\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^n + P_m, \quad (5)$$

که در آن، P_c و P_m خواص سرامیک و فلز می‌باشد. پس مدول الاستیسیته برای مواد تابعی عبارت است از:

$$E(z) = (E_c - E_m)\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^n + E_m. \quad (6)$$

ضریب پواسون نیز ثابت در نظر گرفته می‌شود:

$$\nu(z) = \nu \quad (7)$$

اثر پیزوالکتریک توانایی متبلور شدن برخی مواد برای تولید کردن بار الکتریکی متناسب با نیروی خارجی است. این اثر کاربرد زیادی در طراحی مبدل‌ها دارد. مطابق با خاصیت معکوس پیزوالکتریک، میدان الکتریکی باعث ایجاد تغییر شکل در مواد پیزوالکتریک می‌شود. این خاصیت معکوس پیزوالکتریک در طراحی محرک‌ها کاربرد فراوان دارد. در رابطه با این موضوع دو نوع ماده پیزوالکتریک سرامیک و پلیمر برای کنترل ارتعاش به کار می‌رود. بهترین پیزوسرامیک شناخته شده، لیدزیرکونیوم تیتانیوم است که این ماده پس از

ونگ^۱ و همکارش [۱۸] کمانش و خمش غیرخطی ورق دایروی ساخته شده از مواد تابعی تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی را مورد مطالعه و بررسی قرار داده‌اند.

در سال ۱۸۱۷ یک معدن‌شناس فرانسوی به اثر پیزوالکتریک^۲ پی برد که این اثر در سال ۱۸۸۰ توسط پیر و ژاکور^۳ به اثبات رسید [۱۹] و بعدها این تحقیقات توسط دانشمندان دیگر کامل‌تر گردید. معادلات حاکم بر ورق‌های پیزوالکتریک با استفاده از تئوری‌های کلاسیک، تغییر شکل برشی مرتبه اول و مرتبه بالا توسط ردی و فان^۴ [۲۰] محاسبه شده و تیرستن^۵ [۲۱] معادلات حاکم بر ارتعاشات ورق‌های پیزوالکتریک و مبانی الکترومکانیکی این مواد را مورد بررسی و مطالعه قرار داده است. میرز^۶ و همکارش [۲۲] کمانش و پیش‌کمانش حرارتی ورق‌های مرکب لایه‌ای متقارن محوری را تحلیل کرده‌اند.

در این مقاله تحلیل کمانش مکانیکی ورق دایروی ساخته شده از مواد تابعی با لایه‌های پیزوالکتریک-محرک-محرک بر اساس محل تار خنثی و با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا صفحات انجام گرفته است. ابتدا معادلات تعادل و پایداری با استفاده از معادلات اویلر استخراج شده و سپس با حل غشایی معادلات تعادل، نیروهای پیش‌کمانش به‌دست آمده است. با حل معادلات پایداری نیروی بحرانی کمانش محاسبه شده و نتایج در قالب جداول و نمودارها ارائه و با نتایج تئوری‌ها و مقالات دیگر مقایسه شده است.

۲- تار خنثی

در این مقاله، معادلات بر حسب تار خنثی نوشته و ساده‌سازی شده است. تار خنثی عبارت است از گشتاور اول ممان خمشی، نسبت به سطح مرجع و رابطه آن به‌صورت زیر است:

-
- 1-Wang
 - 2-Piezoelectric
 - 3-Piere, Jaqure
 - 4-Reddy, Phan
 - 5-Tieresten
 - 6-Meyers

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rz} &= u_{,z} + w_{,r} + w_{,r}w_{,z}, \\ \varepsilon_{\theta z} &= v_{,z} + \frac{1}{r}w_{,\theta} + \frac{1}{r}w_{,\theta}w_{,z}. \end{aligned} \quad (9)$$

شرایط مرزی کرنش عبارت است از:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rz} \Big|_{z=\pm \frac{h}{2}} &= 0, \\ \varepsilon_{\theta z} \Big|_{z=\pm \frac{h}{2}} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

حال با جای‌گذاری روابط (۸) در (۹) و اثر دادن شرط مرزی (۱۰) در روابط حاصل، با صرف‌نظر کردن از ترم‌های شامل z_0 مؤلفه‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} u_2 &= v_2 = 0, \\ u_3 &= -\frac{4}{3h^2}(u_0 + w_{,r}), \\ v_3 &= -\frac{4}{3h^2}(v_0 + \frac{1}{r}w_{0,\theta}). \end{aligned} \quad (11)$$

با جای‌گذاری معادلات (۱۱) در (۸)، مؤلفه‌های جابه‌جایی به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} u(r, \theta, z) &= u_0 + (z - z_0)u_1 - \frac{4}{3h^2}(z - z_0)^3(u_0 + w_{0,r}), \\ v(r, \theta, z) &= v_0 + (z - z_0)v_1 - \frac{4}{3h^2}(z - z_0)^3(v_0 + \frac{1}{r}w_{0,\theta}), \\ w(r, \theta) &= w_0. \end{aligned} \quad (12)$$

حال با جای‌گذاری مؤلفه‌های جابه‌جایی (۱۲) در روابط (۹) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_{r\theta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \varepsilon_r^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \varepsilon_{r\theta}^0 \end{pmatrix} + (z - z_0) \begin{pmatrix} k_r \\ k_\theta \\ k_{r\theta} \end{pmatrix} + (z - z_0)^3 \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{\theta z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \varepsilon_{rz}^0 \\ \varepsilon_{\theta z}^0 \end{pmatrix} + (z - z_0)^2 \begin{pmatrix} k_{rz} \\ k_{\theta z} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (13)$$

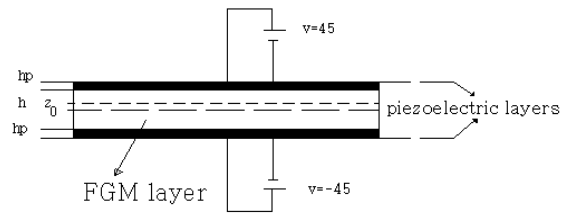
با ضرایب:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \varepsilon_r^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \varepsilon_{r\theta}^0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u_{0,r} + \frac{1}{2}(w_{0,r})^2 \\ \frac{u_0}{r} + \frac{v_{0,\theta}}{r} + \frac{1}{2}(\frac{1}{r}w_{0,\theta})^2 \\ \frac{u_{0,\theta}}{r} + v_{0,r} - \frac{v_0}{r} + \frac{1}{r}w_{0,r}w_{0,\theta} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{4}{3h^2}(u_{1,r} + w_{0,rr}) \\ -\frac{4}{3h^2}(\frac{u_1}{r} + \frac{w_{0,r}}{r} + \frac{v_{1,\theta}}{r} + \frac{1}{r^2}w_{0,\theta\theta}) \\ -\frac{4}{3h^2}(\frac{u_{1,\theta}}{r} + \frac{2}{r}w_{0,r\theta} + v_{1,r} - \frac{2}{r^2}w_{0,\theta} - \frac{v_1}{r}) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (14)$$

ایجاد کرنش، قابلیت بازگشت به حالت اولیه خود را داشته و در اکثر محرک‌ها و سنسورها برای گسترش محدوده فرکانس و کاربردهای فراصوتی به‌کار می‌رود.

۴- معادلات تعادل و پایداری

در این مقاله، ورق دایروی مورد نظر از جنس مواد تابعی به شعاع a و ضخامت h با لایه‌های پیزوالکتریک محرک-محرک با ضخامت h_p می‌باشد که نمای جانبی آن در شکل ۱ نشان داده شده است. ورق، تحت بارگذاری مکانیکی و همچنین میدان الکتریکی می‌باشد.



شکل (۱): نمای جانبی ورق دایروی FGM با لایه‌های پیزوالکتریک محرک-محرک.

تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالای صفحات ردی [۲۳] براساس محل تارخشی عبارت است از:

$$\begin{aligned} u(r, \theta, z) &= u_0(r, \theta) + (z - z_0)u_1(r, \theta) + (z - z_0)^2u_2(r, \theta) \\ &\quad + (z - z_0)^3u_3(r, \theta), \\ v(r, \theta, z) &= v_0(r, \theta) + (z - z_0)v_1(r, \theta) + (z - z_0)^2v_2(r, \theta) \\ &\quad + (z - z_0)^3u_3(r, \theta), \\ w(r, \theta) &= w_0(r, \theta), \end{aligned} \quad (8)$$

که در آنها، u, v, w به‌ترتیب مؤلفه‌های جابه‌جایی در جهت r, θ, z می‌باشند. روابط کرنش-جابه‌جایی به‌صورت زیر است [۴]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= u_{,r} + \frac{1}{2}(w_{,r})^2, \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r} + \frac{1}{r}v_{,\theta} + \frac{1}{2}(\frac{1}{r}w_{,\theta})^2, \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{r}u_{,\theta} + v_{,r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r}w_{,r}w_{,\theta}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} (1, (z-z_0), (z-z_0)^3) \sigma_i^p dz \quad i=r, \theta, r\theta, \\ (Q_i, R_i) = \int_{\frac{h}{2}-h_p}^{\frac{h}{2}} (1, (z-z_0)^2) \sigma_{iz}^p dz + \\ \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, (z-z_0)^2) \sigma_{iz} dz + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} (1, (z-z_0)^2) \sigma_{iz}^p dz \\ i = r, \theta. \quad (18)$$

$$\begin{pmatrix} k_r \\ k_\theta \\ k_{r\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1,r} \\ \frac{u_1 + v_{1,\theta}}{r} \\ \frac{u_{1,\theta} + v_{1,r} - v_1}{r} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_{rz}^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + w_{0,r} \\ v_1 + \frac{1}{r} w_{0,\theta} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} k_{rz} \\ k_{\theta z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{h^2} (u_1 + w_{0,r}) \\ -\frac{4}{h^2} (v_1 + \frac{1}{r} w_{0,\theta}) \end{pmatrix}.$$

حال با جای‌گذاری روابط (۱۳) و (۱۵-۱۷) در روابط (۱۸) نتیجه نیروها به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$(N_r, M_r, P_r) = (I_1, I_8, I_{15}) \varepsilon_r^0 + (I_2, I_9, I_{16}) \varepsilon_\theta^0 + \\ (I_3, I_{10}, I_{17}) k_r + (I_4, I_{11}, I_{18}) k_\theta + (I_5, I_{12}, I_{19}) k_1 + \\ (I_6, I_{13}, I_{20}) k_2 + (I_7, I_{14}, I_{21}), \\ (N_\theta, M_\theta, P_\theta) = (I_2, I_9, I_{16}) \varepsilon_r^0 + (I_1, I_8, I_{15}) \varepsilon_\theta^0 + \\ (I_4, I_{11}, I_{18}) k_r + (I_3, I_{10}, I_{17}) k_\theta + (I_6, I_{13}, I_{20}) k_1 + \\ (I_5, I_{12}, I_{19}) k_2 + (I_7, I_{14}, I_{21}), \\ (N_{r\theta}, M_{r\theta}, P_{r\theta}) = (X_1, X_4, X_7) \varepsilon_{r\theta}^0 + \\ (X_2, X_5, X_8) k_{r\theta} + (X_3, X_6, X_9) k_3, \\ (Q_r, R_r) = (I_{22}, I_{24}) \varepsilon_{rz}^0 + (I_{23}, I_{25}) k_{rz}, \\ (Q_\theta, R_\theta) = (I_{22}, I_{24}) \varepsilon_{\theta z}^0 + (I_{23}, I_{25}) k_{\theta z}, \quad (19)$$

که در آن‌ها،

$$(I_1, I_2) = 2h_p (\bar{C}_{11}, \bar{C}_{12}) + (1, \nu) A', \\ (I_3, I_4) = (I_8, I_9) = (\bar{C}_{11}, \bar{C}_{12}) (B_1 + B_2), \\ I_5 = I_{15} = \bar{C}_{11} (D_1 + D_2) + D', \\ I_6 = I_{16} = \bar{C}_{12} (D_1 + D_2) + D' \nu, \\ I_7 = -\bar{e}_{31} (V^H - V^L), \\ (I_{10}, I_{11}) = (\bar{C}_{11}, \bar{C}_{12}) (C_1 + C_2) + (1, \nu) C', \\ I_{12} = I_{17} = \bar{C}_{11} (F_1 + F_2) + F', \\ I_{13} = I_{18} = \bar{C}_{12} (F_1 + F_2) + F' \nu, \\ I_{14} = -\frac{\bar{e}_{31}}{h_p} (B_2 V^H - B_1 V^L), \\ (I_{19}, I_{20}) = (\bar{C}_{11} + \bar{C}_{12}) (G_1 + G_2) + (1, \nu) G', \\ I_{21} = -\frac{\bar{e}_{31}}{h_p} (D_2 V^H - D_1 V^L), \\ I_{22} = 2h_p C_{55} + \frac{(1-\nu)}{2} A', \\ I_{23} = I_{24} = C_{55} (C_1 + C_2) + \frac{(1-\nu)}{2} C', \\ I_{25} = C_{55} (F_1 + F_2) + \frac{(1-\nu)}{2} F', \\ (X_1, X_2, X_3) = (\frac{I_1 - I_2}{2}, \frac{I_3 - I_4}{2}, \frac{I_5 - I_6}{2}), \quad (20)$$

روابط ساختاری برای مواد تابعی طبق قانون هوک عبارتند از:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta), \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_r), \\ \sigma_{r\theta} = \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{r\theta}, \quad \sigma_{rz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{rz}, \quad (15) \\ \sigma_{\theta z} = \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{\theta z}.$$

در روابط فوق، ν و E ضریب پواسون و مدول الاستیسیته بوده و از روابط (۶-۷) به دست می‌آیند.

روابط ساختاری مواد پیزوالکتریک با استفاده از ماتریس‌های تیرستن [۲۳] و با توجه به اینکه میدان فقط در جهت ضخامت می‌باشد، عبارتند از:

$$\sigma_r^p = \bar{C}_{11} \varepsilon_r + \bar{C}_{12} \varepsilon_\theta - \bar{e}_{31} E_z, \\ \sigma_\theta^p = \bar{C}_{12} \varepsilon_r + \bar{C}_{11} \varepsilon_\theta - \bar{e}_{31} E_z, \\ \sigma_{r\theta}^p = \frac{\bar{C}_{11} - \bar{C}_{12}}{2} \varepsilon_{r\theta}, \quad (16) \\ \sigma_{rz}^p = C_{55} \varepsilon_{rz}, \\ \sigma_{\theta z}^p = C_{55} \varepsilon_{\theta z}.$$

در روابط بالا، \bar{C}_{ij} و \bar{e}_{ij} به ترتیب، میدان الکتریکی، ضریب کرنش پیزوالکتریک و مدول الاستیسیته می‌باشند. همچنین، E_z^L و E_z^H میدان در لایه‌های بالا و پایینی به صورت زیر می‌باشند:

$$E_z^H = \frac{V^H}{h_p}, \quad E_z^L = -\frac{V^L}{h_p}, \quad (17)$$

که در آن‌ها، V^H و V^L منبع تغذیه در لایه‌های بالا و پایینی پیزوالکتریک می‌باشند. شکل کلی نتیجه نیروها عبارتست از:

$$(N_i, M_i, P_i) = \int_{\frac{h}{2}-h_p}^{\frac{h}{2}} (1, (z-z_0), (z-z_0)^3) \sigma_i^p dz + \\ \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, (z-z_0), (z-z_0)^3) \sigma_i dz +$$

با جای‌گذاری روابط تنش-کرنش در انرژی پتانسیل کل (۲۲) و انتگرال‌گیری در جهت ضخامت و با اعمال معادلات اوپلر [۱] بر تابع انرژی، پنج معادله تعادل زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} N_{r,r} + \frac{1}{r} N_{r\theta,\theta} + \frac{1}{r} (N_r - N_\theta) + p_r &= 0, \\ N_{r\theta,r} + \frac{1}{r} N_{\theta,\theta} + \frac{2}{r} N_{r\theta} &= 0, \\ M_\theta - \frac{4}{3h^2} P_\theta + rQ_{rr} - (rM_r - \frac{4}{3h^2} rP_r)_{,r} - \\ \frac{4}{3h^2} rR - (M_{r\theta} - \frac{4}{3h^2} P_{r\theta})_{,\theta} &= 0, \\ rQ_\theta - M_{r\theta} - \frac{4}{3h^2} rR_\theta - (rM_r - \frac{4}{3h^2} rP_r)_{,r} + \\ \frac{4}{3h^2} P_{r\theta} - (M_{r\theta} - \frac{4}{3h^2} P_{r\theta})_{,\theta} &= 0, \\ (rQ_r)_{,r} + Q_{\theta,\theta} + \frac{4}{3h^2} ((rP_r)_{,r} + 2P_{r\theta,r} + \frac{1}{r} P_{\theta,\theta}) + \\ \frac{4}{3h^2} (\frac{2}{r} P_{r\theta,\theta} - P_{\theta,r}) + (rN_r w_{0,r} + N_{r\theta} w_{0,\theta}) - \\ \frac{4}{h^2} (R_{\theta,\theta} + (rR_r)_{,r}) + (\frac{1}{r} N_\theta w_{0,\theta} + N_{r\theta} w_{0,r})_{,\theta} &= 0, \end{aligned} \quad (24)$$

معادلات پایداری ورق‌ها به وسیله روش تغییرات به دست می‌آید. بسط تیلور انرژی پتانسیل کل عبارت است از:

$$\Delta V = \delta V + \frac{1}{2} \delta^2 V + \frac{1}{6} \delta^3 V + \dots \quad (25)$$

که در آن، δV تغییرات اول انرژی پتانسیل و مربوط به حالت تعادل بوده و $\delta^2 V$ تغییرات دوم انرژی پتانسیل و پایداری در همسایگی تعادل می‌باشد. این بدین مفهوم است که اگر $\delta^2 V > 0$ باشد، ورق برای کلیه تغییر مکان‌های مجازی، در حالت تعادل پایدار است و اگر $\delta^2 V < 0$ باشد، در حالت تعادل ناپایدار است. در صورتی که $\delta^2 V = 0$ باشد، معادلات پایداری ورق دایروی به دست می‌آیند. در واقع بار بحرانی، مقدار نیرویی است که باعث برهم خوردن پایداری در تعادل مجموعه می‌شود یا به عبارت دیگر بار بحرانی کمترین نیرویی است که به ازای آن $\delta^2 V > 0$ است. بنابراین با مساوی صفر قرار دادن $\delta^2 V$ می‌توان بار بحرانی را برای یک سازه محاسبه کرد که این بار می‌تواند حاصل یک نیروی خارجی باشد. این اصل توسط ترفتن^۱ به اثبات رسیده است. برای معادلات

$$(X_4, X_5, X_6) = (\frac{I_8 - I_9}{2}, \frac{I_{10} - I_{11}}{2}, \frac{I_{12} - I_{13}}{2}),$$

$$(X_7, X_8, X_9) = (\frac{I_{15} - I_{16}}{2}, \frac{I_{17} - I_{18}}{2}, \frac{I_{19} - I_{20}}{2}),$$

با ضرایب:

$$\begin{aligned} (A, B, C, D, F, G) &= \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, (z - z_0), (z - z_0)^2 \\ & (z - z_0)^3, (z - z_0)^4, (z - z_0)^6) E(z) dz, \\ (B_1, C_1, D_1, F_1, G_1) &= \int_{\frac{h}{2} - h_p}^{\frac{h}{2}} ((z - z_0), (z - z_0)^2 \\ & (z - z_0)^3, (z - z_0)^4, (z - z_0)^6) dz, \end{aligned} \quad (21)$$

$$(B_2, C_2, D_2, F_2, G_2) = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2} + h_p} ((z - z_0), (z - z_0)^2 \\ (z - z_0)^3, (z - z_0)^4, (z - z_0)^6) dz,$$

$$A' = \frac{A}{1 - \nu^2}, \quad B' = \frac{B}{1 - \nu^2}, \quad C' = \frac{C}{1 - \nu^2},$$

$$D' = \frac{D}{1 - \nu^2}, \quad F' = \frac{F}{1 - \nu^2}, \quad G' = \frac{G}{1 - \nu^2},$$

$$B' = 0 \quad \text{که طبق رابطه تار خنثی (۲):}$$

در حالت کلی معادله انرژی پتانسیل کل برای ورق دایروی ساخته شده از مواد تابعی با لایه‌های پیرو تحت بارگذاری مکانیکی عبارت است از:

$$V = U + \Omega, \quad (22)$$

که در آن،

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \iint \left\{ \int_{\frac{h}{2} - h_p}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{ij}^{pL} \varepsilon_{ij} - \bar{e}_{31} E_z^L \varepsilon_i) dz + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}) dz + \right. \\ & \left. \int_{\frac{h}{2} - h_p}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{ij}^{pL} - \bar{e}_{31} E_z^L \varepsilon_i) dz \right\} r dr d\theta, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\Omega = - \iint [p, u] r dr d\theta,$$

که در آن، U انرژی کرنشی غشایی ورق و Ω انرژی پتانسیل بارهای کاربردی است.

1-Treffitz

$$\begin{aligned} N_{r_0} &= -p_r - \bar{e}_{31}(V^H - V^L), \\ N_{\theta_0} &= -p_r - \bar{e}_{31}(V^H - V^L), \\ N_{r\theta_0} &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

با جای گذاری روابط (۱۲)، (۱۵) و (۱۶) در نتیجه نیروهای (۱۸) و با اعمال شرط تقارن محوری خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} (N_{r_1}, M_{r_1}, P_{r_1}) &= (I_1, I_8, I_{15}) \frac{du'_0}{dr} + (I_2, I_9, I_{16}) \frac{u'_0}{r} + \\ & (I_3, I_{10}, I_{17}) \frac{du'_1}{dr} + (I_4, I_{11}, I_{18}) \frac{u'_1}{r} + \\ & (I_5, I_{12}, I_{19}) \left(-\frac{4}{3h^2} \left(\frac{du'_1}{dr} + \frac{d^2 w'_0}{dr^2} \right) \right) + \\ & (I_6, I_{13}, I_{20}) \left(-\frac{4}{3h^2} \left(\frac{u'_1}{r} + \frac{1}{r} \frac{dw'_0}{dr} \right) \right), \\ (N_{\theta_1}, M_{\theta_1}, P_{\theta_1}) &= (I_2, I_9, I_{16}) \frac{du'_0}{dr} + (I_1, I_8, I_{15}) \frac{u'_0}{r} + \\ & (I_4, I_{11}, I_{18}) \frac{du'_1}{dr} + (I_3, I_{10}, I_{17}) \frac{u'_1}{r} + \\ & (I_6, I_{13}, I_{20}) \left(-\frac{4}{3h^2} \left(\frac{du'_1}{dr} + \frac{d^2 w'_0}{dr^2} \right) \right) + \\ & (I_5, I_{12}, I_{19}) \left(-\frac{4}{3h^2} \left(\frac{u'_1}{r} + \frac{1}{r} \frac{dw'_0}{dr} \right) \right), \\ (Q_{r_1}, R_{r_1}) &= (I_{22}, I_{24}) \left(u'_1 + \frac{dw'_0}{dr} \right) + \\ & (I_{23}, I_{25}) \left(-\frac{4}{h^2} \left(u'_1 + \frac{dw'_0}{dr} \right) \right) \\ (N_{r\theta_1}, M_{r\theta_1}, P_{r\theta_1}, Q_{\theta_1}, R_{\theta_1}) &= 0. \end{aligned} \quad (29)$$

معادلات پایداری (۲۷) بر اساس شرط تقارن محوری عبارتند از:

$$\begin{aligned} \frac{dN_{r_1}}{dr} + \frac{N_{r_1} - N_{\theta_1}}{r} &= 0, \\ M_{\theta_1} + rQ_{r_1} - \frac{4}{3h^2} P_{\theta_1} - \frac{4}{h^2} rR_{r_1} - \\ \frac{d}{dr} \left(rM_{r_1} - \frac{4}{3h^2} rP_{r_1} \right) &= 0, \\ \frac{d}{dr} \left(rQ_{r_1} \right) - \frac{4}{3h^2} \frac{dP_{\theta_1}}{dr} + \frac{4}{3h^2} \frac{d^2}{dr^2} \left(rP_{r_1} \right) - \\ \frac{4}{h^2} \frac{d}{dr} \left(rR_{r_1} \right) + \frac{d}{dr} \left(rN_{r_0} \frac{dw'_0}{dr} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (30)$$

با جای گذاری نتیجه نیروهای به دست آمده (۲۹) در (۳۰) معادلات به صورت زیر خواهند شد:

پایداری مؤلفه‌های تغییر مکان مجازی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \bar{u}_0 &= u_0 + u'_0, \quad \bar{v}_0 = v_0 + v'_0, \quad \bar{w}_0 = w_0 + w'_0, \\ \bar{u}_1 &= u_1 + u'_1, \quad \bar{v}_1 = v_1 + v'_1, \end{aligned} \quad (26)$$

که در آن، u_i مؤلفه‌های تغییر مکان و u'_i مؤلفه‌های تغییر مکان‌های مجازی در همسایگی نقطه تعادل است. با جای گذاری روابط (۱۳)، (۱۵) و (۱۶) در معادله انرژی پتانسیل (۲۲) و اعمال معادلات اولر [۱]، معادلات پایداری ورق دایروی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} N_{r_1,r} + \frac{1}{r} N_{r\theta_1,\theta} + \frac{1}{r} (N_{r_1} - N_{\theta_1}) &= 0, \\ N_{r\theta_1,r} + \frac{1}{r} N_{\theta_1,\theta} + \frac{2}{r} N_{r\theta_1} &= 0, \\ M_{\theta_1} - \frac{4}{3h^2} P_{\theta_1} + rQ_{r_1} - \left(rM_{r_1} - \frac{4}{3h^2} rP_{r_1} \right),r - \\ \frac{4}{3h^2} rR_{r_1} - \left(M_{r\theta_1} - \frac{4}{3h^2} P_{r\theta_1} \right),\theta &= 0, \\ rQ_{\theta_1} - M_{r\theta_1} - \frac{4}{3h^2} rR_{\theta_1} - \left(rM_{r_1} - \frac{4}{3h^2} rP_{r_1} \right),r + \\ \frac{4}{3h^2} P_{r\theta_1} - \left(M_{r\theta_1} - \frac{4}{3h^2} P_{r\theta_1} \right),\theta &= 0, \\ (rQ_{r_1}),r + Q_{\theta_1,\theta} + \frac{4}{3h^2} \left((rP_{r_1}),r + 2P_{r\theta_1,r} + \frac{1}{r} P_{\theta_1,\theta} \right) + \\ \frac{4}{3h^2} \left(\frac{2}{r} P_{r\theta_1,\theta} - P_{\theta_1,r} \right) + (rN_{\theta_1} w'_{0,r} + N_{r\theta_1} w'_{0,\theta}),r - \\ - \frac{4}{h^2} \left(R_{\theta_1,\theta} + (rR_{r_1}),r \right) + \left(\frac{1}{r} N_{\theta_1} w'_{0,\theta} + N_{r\theta_1} w'_{0,r} \right),\theta &= 0. \end{aligned} \quad (27)$$

در این معادلات اندیس ۱ مربوط به حالت پایداری و N_{r_0} ، N_{θ_0} و $N_{r\theta_0}$ نیروهای پیش کمانش می‌باشند.

۵- تحلیل کمانش مکانیکی

بار شعاعی داخلی وارده به ورق برابر صفر، اما بار شعاعی خارجی وارد شده به ورق مقدار p_r می‌باشد. برای تحلیل کمانش مکانیکی ابتدا نیروهای پیش کمانش طبق معیار میرز [۱۸] و با استفاده از تئوری غشایی از حل معادلات تعادل (۲۴) به صورت زیر به دست می‌آید:

همچنین، دو معادله (۳۳) را نیز می‌توان با جای‌گذاری اولین معادله (۳۳) در دومین معادله آن به یک معادله به‌صورت زیر تبدیل کرد:

$$L_1 \left(\frac{d^3 y}{dr^3} + \frac{2}{r} \frac{d^2 y}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dy}{dr} + \frac{y}{r^3} \right) + \quad (35)$$

$$L_2 \left(\frac{dy}{dr} + \frac{y}{r} \right) = \left(\frac{du'_1}{dr} + \frac{u'_1}{r} \right),$$

که در آن:

$$L_1 = \frac{K_1 K_3 - K_2^2}{H_2 (K_2 - K_1)}, \quad L_2 = \frac{K_1 N_0}{H_2 (K_2 - K_1)} - 1. \quad (36)$$

حال تغییر متغیرهای زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{u} = \frac{du'_1}{dr} + \frac{u'_1}{r}, \quad \hat{y} = \frac{dy}{dr} + \frac{y}{r}. \quad (37)$$

با اثر دادن تغییر متغیرهای (۳۷) در معادله (۳۵) داریم:

$$L_1 \left(\frac{d^2 \hat{y}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\hat{y}}{dr} \right) + L_2 \hat{y} = \hat{u}. \quad (38)$$

از قرار دادن معادله (۳۸) در اولین معادله (۳۳) داریم:

$$\nabla^4 \hat{y} + S_1 \left(\frac{d^2 \hat{y}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\hat{y}}{dr} \right) + S_2 \hat{y} = 0. \quad (39)$$

که در آن،

$$S_1 = \frac{L_2}{L_1} + \frac{K_2}{K_1 L_1} + \frac{H_2}{K_1}, \quad S_2 = \frac{H_2}{K_1 L_1} (L_2 + 1). \quad (40)$$

از حل معادله بسل^۱ (۳۹) به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \hat{y} = & c_1 Y_0(S_3 r) + c_2 J_0(S_3 r) + c_3 r Y_0(S_3 r) \\ & [Y_0(S_3 r) J_1(S_3 r) - Y_1(S_3 r) J_0(S_3 r)] + \\ & c_4 r J_0(S_3 r) [Y_0(S_3 r) J_1(S_3 r) - Y_1(S_3 r) J_0(S_3 r)], \end{aligned} \quad (41)$$

که در آن، Y_0 و J_0 توابع بسل مرتبه صفرم و Y_1 و J_1 توابع بسل مرتبه یکم می‌باشند. همچنین داریم:

$$S_3 = \frac{1}{2} \sqrt{2S_1 - 2\sqrt{S_1^2 - 4S_2}}. \quad (42)$$

برای ساده‌تر کردن معادله (۴۱)، باید شرط مرزی تعریف شود. از جای‌گذاری (۳۴) در (۳۷) خواهیم داشت:

$$\hat{y} = \frac{d^2 w'_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw'_0}{dr}. \quad (43)$$

همچنین، ممان برای یک ورق دایروی عبارت است از:

$$M = \frac{d^2 w'_0}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw'_0}{dr}. \quad (44)$$

پس می‌توان \hat{y} را عاملی از ممان دانست، یعنی:

$$I_1 \left(\frac{d^2 u'_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du'_0}{dr} - \frac{u'_0}{r^2} \right) + (I_3 + I'_5)$$

$$\left(\frac{d^2 u'_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du'_1}{dr} - \frac{u'_1}{r^2} \right) +$$

$$I'_5 \left(\frac{d^3 w'_0}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w'_0}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw'_0}{dr} \right) = 0,$$

$$- (I_8 + I'_{15}) \left(\frac{d^2 u'_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du'_0}{dr} - \frac{u'_0}{r^2} \right) -$$

$$H_1 \left(\frac{d^2 u'_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du'_1}{dr} - \frac{u'_1}{r^2} \right) + (I'_{12} + I''_{19})$$

(۳۱)

$$\left(\frac{d^3 w'_0}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w'_0}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw'_0}{dr} \right) + H_2 \left(u'_1 + \frac{dw'_0}{dr} \right) = 0,$$

$$I''_{19} \left(\frac{d^4 w'_0}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w'_0}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w'_0}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw'_0}{dr} \right) -$$

$$I'_{15} \left(\frac{d^3 u'_0}{dr^3} + \frac{2}{r} \frac{d^2 u'_0}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{du'_0}{dr} + \frac{u'_0}{r^3} \right) +$$

$$(I'_5 + I''_{19}) \left(\frac{d^3 u'_1}{dr^3} + \frac{2}{r} \frac{d^2 u'_1}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{du'_1}{dr} + \frac{u'_1}{r^3} \right) +$$

$$H_2 \left(\frac{du'_1}{dr} + \frac{u'_1}{r} \right) + (H_2 + N_{r_0}) \left(\frac{d^2 w'_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw'_0}{dr} \right) = 0.$$

که در آن،

$$I'_5 = -\frac{4}{3h^2} I_5, \quad I'_{12} = \frac{4}{3h^2} I_{12}, \quad I'_{15} = -\frac{4}{3h^2} I_{15}$$

$$I''_{19} = -\frac{4}{3h^2} I_{19}, \quad I''_{19} = \frac{4}{3h^2} I'_{19}, \quad I'_{23} = \frac{4}{h^2} I_{23}$$

(۳۲)

$$I'_{25} = -\frac{16}{h^4} I_{25}, \quad I_3 = I_8, \quad I'_5 = I'_{15},$$

$$H_1 = I_{10} - 2I'_{12} - I''_{19}, \quad H_2 = I_{22} - 2I'_{23} + I'_{25}.$$

سه معادله (۳۱) را می‌توان به دو معادله زیر کاهش داد:

$$K_1 \left(\frac{d^2 u'_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du'_1}{dr} - \frac{u'_1}{r^2} \right)$$

$$+ H_2 \left(u'_1 + \frac{dw'_0}{dr} \right)$$

$$+ K_2 \left(\frac{d^3 w'_0}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w'_0}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw'_0}{dr} \right) = 0$$

(۳۳)

$$K_2 \left(\frac{d^3 u'_1}{dr^3} + \frac{2}{r} \frac{d^2 u'_1}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{du'_1}{dr} + \frac{u'_1}{r^3} \right) +$$

$$K_3 \left(\frac{d^3 y}{dr^3} + \frac{2}{r} \frac{d^2 y}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dy}{dr} + \frac{y}{r^3} \right) +$$

$$H_2 \left(\frac{du'_1}{dr} + \frac{u'_1}{r} \right) + (H_2 + N_{r_0}) \left(\frac{dy}{dr} + \frac{y}{r} \right) = 0$$

که در آن،

$$K_1 = \frac{(I_3 + I'_5)^2}{I_1} - H_1, \quad \gamma(r) = \frac{dw'_0}{dr}$$

(۳۴)

$$K_2 = I'_{12} + I''_{19} + \frac{I'_5 (I_3 + I'_5)}{I_1}, \quad K_3 = I''_{19} + \frac{I'_5}{I_1}.$$

$$\alpha(\bar{h}) = 2822004(K_1 K_3 - K_2^2) - 67.172$$

$$(K_1 - 2K_2 + K_3) - 4(4H_2 - 16.793) \times \bar{e}_{31}(V^H - V^L), \quad (56)$$

$$\beta(\bar{h}) = 67.172(4H_2 - 16.793K_1).$$

۶- جداول و نمودارها

در این مقاله، ورق دایروی از جنس FGM با ترکیبی از آلومینیوم - آلومین با لایه‌های پیزوالکتریک محرک - محرک PZT-5H استفاده شده است که خواص این مواد به صورت زیر تعریف می‌گردد:

FGM: $h = 0.005m, \quad \nu = 0.3,$
 Aluminum (Metal constituent): $E_m = 70GPa,$
 Alumina (Ceramic constituent): $E_c = 380GPa,$
 PZT - 5H: $E = 65GPa, \quad \nu = 0.3,$
 $C_{11} = 126 \times 10^9, \quad C_{12} = 79 \times 10^9,$
 $C_{13} = 84.1 \times 10^9, \quad C_{33} = 126 \times 10^9,$
 $C_{55} = 23 \times 10^9, \quad V^H = 45, \quad V^L = -45,$

در جداول و نمودارهای مربوطه از یک سری مخفف‌ها استفاده شده است که عبارتند از:

FPN: FGM - Piezoelectric - Neutral Axis,
 FP: FGM - Piezoelectric, F: FGM,
 CS: Clamped Supported,
 SS: Simply Supported.

در جدول ۱ برای ورق دایروی FGM با لایه‌های پیزوالکتریک محرک- محرک بر اساس تار خنثی و با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا نیروی بحرانی کمانش مکانیکی در حالت شرط مرزی گیردار (CS) و شرط مرزی ساده (SS) مقایسه شده و همچنین $hp/h=0.01$ ثابت فرض شده تغییرات h/a لحاظ شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود به‌طور مثال برای یک n و h/a ثابت، نیروی بحرانی کمانش برای CS بیشتر از SS است. همچنین برای هر دو با افزایش h/a نیروی بحرانی کمانش نیز افزایش می‌یابد. در جدول ۲ نیز نیروی بحرانی کمانش مکانیکی با فرضیات جدول ۱ به‌دست آمده با این تفاوت که $h/a=0.01$ ثابت فرض شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود برای یک n و h/a ثابت، نیروی بحرانی کمانش برای (CS) بیشتر از (SS) است. همچنین برای هر دو با افزایش h/a نیروی بحرانی کمانش نیز افزایش می‌یابد. در جدول ۳ نیز نیروی

$$at \quad r=0 \quad \Rightarrow \quad y(0) = finite. \quad (45)$$

اگر شرط (۴۵) را در معادله (۴۱) اثر داده شود، ثوابت به‌صورت زیر خواهند شد:

$$c_1 = c_2 = c_4 = 0. \quad (46)$$

با قرار دادن ثوابت (۴۶) در معادله (۴۱) خواهیم داشت:

$$\hat{y} = c_2 J_0(S_3 r). \quad (47)$$

همان‌طور که در قبل گفته شد \hat{y} تابعی از y است. پس از حل معادله (۴۷) خواهیم داشت:

$$\hat{y} = \int \left(\frac{c_2}{S_3} J_1(S_3 r) + \frac{c_5}{r} \right) dr + c_6. \quad (48)$$

شرط مرزی برای ورق دایروی گیردار عبارت است از:

$$at \quad r=0 \quad y(0) = \frac{dw'_0(0)}{dr} = 0, \quad (49)$$

$$at \quad r=a \quad y(a) = \frac{dw'_0(a)}{dr} = w'_0(a) = 0.$$

با اعمال شرط مرزی گیردار در معادله (۴۸) داریم:

$$c_2 \neq 0, \quad c_5 = 0, \quad J_1(S_3 a) = 0. \quad (50)$$

اولین ریشه تابع بسل مرتبه یک رابطه سوم (۵۰) عبارت است از:

$$S_3 a = 3.831. \quad (51)$$

با جای‌گذاری روابط (۳۴)، (۳۶)، (۴۰) و (۴۲) در رابطه (۵۱)

و فرض $\bar{h} = \frac{h}{a}$ داریم:

$$P_r = \frac{58.706\alpha(\bar{h})}{\beta(\bar{h})}, \quad (52)$$

که در آن،

$$\alpha(\bar{h}) = 3446.394(K_1 K_3 - K_2^2) - 234.824$$

$$(K_1 - 2K_2 + K_3) - 4(4H_2 - 58.706)$$

$$\times \bar{e}_{31}(V^H - V^L), \quad (53)$$

$$\beta(\bar{h}) = 234.824(4H_2 - 58.706K_1).$$

همچنین، شرط مرزی برای ورق ساده عبارت است از:

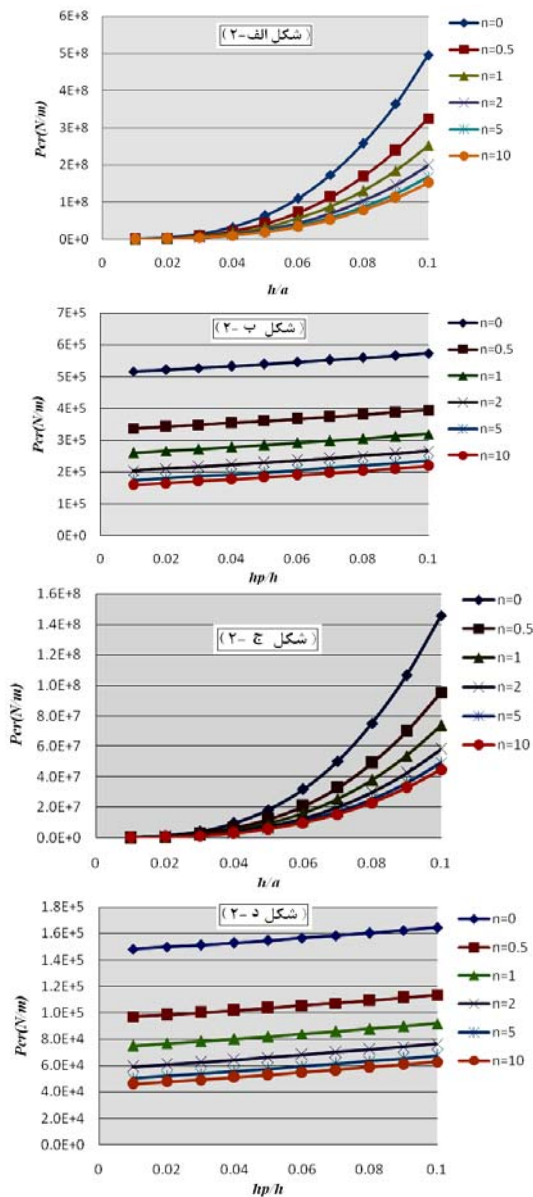
$$at \quad r=0 \quad \frac{d^2 w'_0(0)}{dr} = 0, \quad (54)$$

$$at \quad r=a \quad \frac{d^2 w'_0(a)}{dr} = w'_0(a) = 0,$$

که با محاسباتی مشابه، بار بحرانی کمانش برای ورق دایروی، با شرط مرزی ساده، عبارت است از:

$$P_r = \frac{16.793\alpha(\bar{h})}{\beta(\bar{h})}, \quad (55)$$

می‌شود، برای n ثابت با افزایش نسبت h/a ، بار بحرانی صعودی است.



شکل ۲(۲): نتایج بار بحرانی کمانش ورق دایروی FGM با لایه‌های پیزوالکتریک محرک - محرک براساس محل تار خنثی و با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا با شرایط مرزی مختلف،

(الف): شرط مرزی گیردار و $hp/h=0.01$.

(ب): شرط مرزی گیردار و $h/a=0.01$.

(ج): شرط مرزی ساده و $hp/h=0.01$.

(د): شرط مرزی ساده و $h/a=0.01$.

بحرانی کمانش مکانیکی با فرضیات جدول ۱ به دست آمده با این تفاوت که شرط مرزی در این حالت برای هر سه به صورت گیردار و $hp/h=0.01$ ثابت در نظر گرفته شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود به طور مثال برای $n=2$ و یک h/a نیروی بحرانی کمانش برای (FPN) بیشتر از (FP) و برای (FP) بیشتر از (F) است اما با این تفاوت که تار خنثی باعث ایجاد تفاوت کمی میان مقادیر نیروی بحرانی کمانش اما لایه‌های پیزو باعث اختلاف زیادتری نسبت به تار خنثی گردیده است. همچنین در هر سه برای یک n ثابت با افزایش h/a مقدار نیروی بحرانی کمانش افزایش می‌یابد. در جدول ۴ نیز نیروی بحرانی کمانش مکانیکی با فرضیات جدول ۱ نشان داده شده با این تفاوت که شرط مرزی در این حالت برای هر سه به صورت ساده و $hp/h=0.01$ ثابت در نظر گرفته شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود به طور مثال برای $n=2$ و یک h/a نیروی بحرانی کمانش برای (FPN) بیشتر از (FP) و برای (FP) بیشتر از (F) است اما با این تفاوت که تار خنثی باعث ایجاد تفاوت کمی میان مقادیر نیروی بحرانی کمانش اما لایه‌های پیزو باعث اختلاف زیادتری نسبت به تار خنثی گردیده است. همچنین در هر سه برای یک n ثابت با افزایش h/a مقدار نیروی بحرانی کمانش افزایش می‌یابد.

در شکل ۲-الف، نمودار تغییرات نیروی بحرانی کمانش FPN بر حسب نسبت h/a در شرط مرزی گیردار و $hp/h=0.01$ نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، برای n ثابت با افزایش نسبت h/a ، بار بحرانی صعودی است. در شکل ۲-ب، نمودار تغییرات نیروی بحرانی کمانش FPN بر حسب نسبت hp/h در شرط مرزی گیردار و $h/a=0.01$ نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، برای n ثابت با افزایش نسبت h/a ، بار بحرانی صعودی است. در شکل ۲-ج، نمودار تغییرات نیروی بحرانی کمانش FPN بر حسب نسبت h/a در شرط مرزی گیردار و $hp/h=0.01$ نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، برای n ثابت با افزایش نسبت h/a ، بار بحرانی صعودی است. در شکل ۲-د، نمودار تغییرات نیروی بحرانی کمانش FPN بر حسب نسبت hp/h در شرط مرزی ساده و $h/a=0.01$ نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده

جدول (۱): مقایسه بار بحرانی کمانش FPN در دو حالت شرط مرزی گیردار (CS) و ساده (SS) و فرض $hp/h = 0.01$.

h/a	CS(n=0)	SS(n=0)	CS(n=2)	SS(n=2)	CS(n=5)	SS(n=5)
۰/۰۱	۵۱۶۳۱۸	۱۴۸۱۵۶	۲۰۴۸۵۰	۵۹۰۲۷	۱۷۴۲۰۵	۵۹۰۲۷
۰/۰۲	۴۱۲۱۲۳۴	۱۱۸۰۷۲۷	۱۶۳۳۳۲۰	۴۶۸۰۱۰	۱۳۸۸۰۷۹	۴۶۸۰۱۰
۰/۰۳	۱۳۸۷۸۵۳۸	۳۹۸۱۱۶۳	۵۵۰۳۲۷۶	۱۵۷۷۵۰۸	۴۶۷۵۱۲۳	۱۵۷۷۵۰۸
۰/۰۴	۳۲۷۹۹۹۳۷	۹۴۲۸۰۷۱	۱۳۰۱۸۲۴۴	۳۷۳۶۳۵۹	۱۱۰۵۳۶۹۷	۳۷۳۶۳۵۹
۰/۰۵	۶۳۸۲۱۰۳۸	۱۸۳۹۳۶۹۷	۲۵۳۶۱۳۲۱	۷۲۹۱۷۰۵	۲۱۵۲۰۶۰۲	۷۲۹۱۷۰۵
۰/۰۶	۱۰۹۷۷۸۰۷۸	۳۱۷۴۱۸۵۳	۴۳۶۸۸۷۶۰	۱۲۵۸۸۴۳۹	۳۷۰۴۴۴۰۵	۱۲۵۸۸۴۳۹
۰/۰۷	۱۷۳۳۸۶۳۶۴	۵۰۳۲۵۸۹۹	۶۹۱۲۳۸۷۱	۱۹۹۶۸۶۴۹	۵۸۵۵۹۱۹۱	۱۹۹۶۸۶۴۹
۰/۰۸	۲۵۷۲۲۰۷۶۵	۷۴۹۸۶۷۶۰	۱۰۲۷۵۱۳۲۱	۲۹۷۷۱۰۸۸	۸۶۹۵۸۸۱۷	۲۹۷۷۱۰۸۸
۰/۰۹	۳۶۳۶۹۸۵۲۶	۱۰۶۵۵۱۰۱۷	۱۴۵۶۱۱۸۷۸	۴۲۳۳۰۶۴۳	۱۲۳۰۹۱۷۴۴	۴۲۳۳۰۶۴۳
۰/۱	۴۹۵۰۶۴۶۰۱	۱۴۵۸۲۹۰۶۸	۱۹۸۶۹۷۶۶۳	۵۷۹۷۷۸۲۱	۱۶۷۷۵۶۵۱۲	۵۷۹۷۷۸۲۱

جدول (۲): مقایسه بار بحرانی کمانش FPN در دو حالت شرط مرزی گیردار (CS) و ساده (SS) و فرض $h/a = 0.01$.

hp/h	CS(n=0)	SS(n=0)	CS(n=2)	SS(n=2)	CS(n=5)	SS(n=5)
۰/۰۱	۵۱۶۳۱۸	۱۴۸۱۵۶	۲۰۴۸۵۰	۵۹۰۲۷	۱۷۴۲۰۵	۵۰۲۶۲
۰/۰۲	۵۲۱۷۵۳	۱۴۹۷۱۱	۲۱۰۷۳۳	۶۰۷۱۰	۱۸۰۱۰۰	۵۱۹۴۸
۰/۰۳	۵۲۷۴۰۲	۱۵۱۳۲۸	۲۱۶۸۲۳	۶۲۴۵۳	۱۸۶۱۹۸	۵۳۶۹۳
۰/۰۴	۵۳۳۲۶۸	۱۵۳۰۰۷	۲۲۳۱۲۴	۶۴۲۵۶	۱۹۲۵۰۴	۵۵۴۹۸
۰/۰۵	۵۳۹۳۵۶	۱۵۴۷۴۹	۲۲۹۶۴۰	۶۶۱۲۰	۱۹۹۰۲۴	۵۷۳۶۳
۰/۰۶	۵۴۵۶۶۹	۱۵۶۵۵۶	۲۳۶۶۷۶	۶۸۰۴۷	۲۰۵۷۶۰	۵۹۲۹۱
۰/۰۷	۵۵۲۲۱۲	۱۵۸۴۲۸	۲۴۳۳۳۶	۷۰۰۳۹	۲۱۲۷۱۸	۶۱۲۸۱
۰/۰۸	۵۵۸۹۸۸	۱۶۰۳۶۷	۲۵۰۵۲۴	۷۲۰۹۵	۲۱۹۹۰۲	۶۳۳۳۷
۰/۰۹	۵۶۶۰۰۳	۱۶۲۳۷۵	۲۵۷۹۴۴	۷۴۲۱۸	۲۲۷۳۱۶	۶۵۴۵۸
۰/۱	۵۷۳۲۵۹	۱۶۴۴۵۱	۲۶۶۱۸۶	۷۶۳۸۰	۲۳۴۹۶۵	۶۷۶۴۷

جدول (۳): مقایسه بار بحرانی کمانش FPN و FP و $F[15]$ با شرط مرزی گیردار و فرض $hp/h = 0.01$.

h/a	FPN(n=2)	FP(n=2)	F(n=2)	FPN(n=5)	FP(n=5)	F(n=5)
۰/۰۱	۲۰۴۸۵۰	۲۰۴۸۲۹	۱۹۸۵۶۶	۱۷۴۲۰۵	۱۷۴۱۷۵	۱۶۷۸۹۸
۰/۰۲	۱۶۳۳۳۲۰	۱۶۳۲۶۴۶	۱۵۸۶۷۲۶	۱۳۸۸۰۷۹	۱۳۸۷۱۰۱	۱۳۴۱۱۰۹
۰/۰۳	۵۵۰۳۲۷۶	۵۴۹۸۱۷۴	۵۴۳۵۰۸۴	۴۶۷۵۱۲۳	۴۶۶۷۷۲۶	۴۵۱۴۵۸۲
۰/۰۴	۱۳۰۱۸۲۴۴	۱۲۹۹۶۸۴۳	۱۲۶۳۶۴۰۵	۱۱۰۵۳۶۹۷	۱۱۰۲۲۷۱۵	۱۰۶۶۲۷۷۱
۰/۰۵	۲۵۳۶۱۳۲۱	۲۵۲۹۶۳۹۴	۲۴۵۹۷۰۵۶	۲۱۵۲۰۶۰۲	۲۱۴۲۶۷۸۷	۲۰۷۲۹۹۴۳
۰/۰۶	۴۳۶۸۸۷۶۰	۴۳۵۲۸۳۶۱	۴۲۳۲۸۸۶۳	۳۷۰۴۴۴۰۵	۳۶۸۱۳۱۷۷	۳۵۶۲۱۱۳۷
۰/۰۷	۶۹۱۲۳۸۷۱	۶۸۷۸۰۱۱۳	۶۶۸۹۱۵۰۴	۵۸۵۵۹۱۹۱	۵۸۰۶۴۹۷۶	۵۶۱۹۳۹۳۹
۰/۰۸	۱۰۲۷۵۱۳۲۱	۱۰۲۰۸۷۶۰۲	۹۹۲۹۵۵۵۴	۸۶۹۵۸۸۱۷	۸۶۰۰۷۵۴۲	۸۳۲۵۱۲۴۴
۰/۰۹	۱۴۵۶۱۱۸۷۸	۱۴۴۴۲۸۸۸۴	۱۴۰۴۹۶۲۶۳	۱۲۳۰۹۱۷۴۴	۱۲۱۴۰۲۰۶۶	۱۱۷۵۳۵۰۹۲
۰/۱	۱۹۸۶۹۷۶۶۳	۱۹۶۷۱۸۵۱۳	۱۹۱۳۸۸۱۴۴	۱۶۷۷۵۶۵۱۲	۱۶۴۹۴۰۴۱۰	۱۵۹۷۲۱۶۸۵

جدول (۴): مقایسه بار بحرانی کماتش FPN و FP و F [۱۵] با شرط مرزی ساده و فرض $hp/h = 0.01$.

h/a	FPN(n=2)	FP(n=2)	F(n=2)	FPN(n=5)	FP(n=5)	F(n=5)
۰/۰۱	۵۹۰۲۷	۵۹۰۲۵	۵۶۸۱۷	۵۰۲۶۲	۵۰۲۵۹	۴۸۰۴۷
۰/۰۲	۴۶۸۰۱۰	۴۶۷۹۵۵	۵۴۵۳۹۳	۳۹۷۸۸۲	۳۹۷۸۰۱	۳۸۴۲۰۶
۰/۰۳	۱۵۷۷۵۰۸	۱۵۷۷۰۸۹	۱۵۳۲۷۴۵	۱۳۴۰۷۸۵	۱۳۴۰۱۷۶	۱۲۹۵۷۳۹
۰/۰۴	۳۷۳۶۳۵۹	۳۷۳۴۵۹۴	۳۶۳۰۴۲۰	۳۱۷۵۱۰۹	۳۱۷۲۵۴۸	۳۰۶۸۲۰۵
۰/۰۵	۷۲۹۱۷۰۵	۷۲۸۶۳۳۰	۷۰۸۳۷۶۱	۶۱۹۵۱۹۵	۶۱۸۷۳۹۸	۵۹۸۴۶۳۰
۰/۰۶	۱۲۵۸۸۴۳۹	۱۲۵۷۵۰۹۰	۱۲۲۲۶۱۹۱	۱۰۶۹۳۰۰۳	۱۰۶۷۳۶۵۴	۱۰۳۲۴۶۸۳
۰/۰۷	۱۹۹۶۹۶۴۹	۱۹۹۳۹۸۶۸	۱۹۳۸۷۵۰۷	۱۶۸۵۱۴۲۱	۱۶۹۱۵۸۴۶	۱۶۳۶۳۸۷۷
۰/۰۸	۲۹۷۷۱۰۸۸	۲۹۷۱۵۱۳۳	۲۸۸۹۳۱۹۶	۲۵۲۷۴۲۵۲	۲۵۱۹۳۲۸۷	۲۴۳۷۲۷۹۷
۰/۰۹	۴۲۲۳۰۶۴۳	۴۲۲۳۰۱۳۲	۴۱۰۶۳۷۵۷	۳۵۹۲۴۵۷۶	۳۵۷۷۹۲۹۰	۳۴۶۱۶۳۵۴
۰/۱	۵۷۹۷۷۸۲۱	۵۷۸۰۸۲۱۰	۵۶۲۱۴۰۶۵	۴۹۱۸۵۳۰۶	۴۸۹۴۰۴۲۰	۴۷۳۵۳۰۷۶

۷- نتایج و بحث

حالتی که ضخامت لایه FGM ثابت ($h/a=0.01$) است با افزایش نسبت hp/h افزایش و با افزایش n کاهش می‌یابد. در جدول ۱ بار بحرانی کماتش برای ورق دایروی FGM با لایه‌های پیزوالکتریک محرک- محرک بر اساس محل تار خنثی و با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا با شرط مرزی گیردار (CS) بیشتر از حالت شرط مرزی ساده (SS) است.

(۵) از مقایسه بار بحرانی کماتش ورق دایروی FGM با لایه‌های پیزوالکتریک محرک- محرک بر اساس محل تار خنثی و با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا (FPN) و ورق دایروی FGM با لایه‌های پیزوالکتریک محرک- محرک با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا (FP) و ورق دایروی FGM با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا (F) [۱۵] با شرط مرزی گیردار و ساده بر اساس جدول ۴ استنباط می‌شود که لایه‌های پیزوالکتریک در بار بحرانی کماتش اختلاف بیشتری نسبت به تار خنثی ایجاد می‌کند.

(۶) طبق محاسبات انجام شده مشخص است که در همه تئوری‌های ذکر شده (FPN, FP, F) برای حالتی که $n=0$ (یعنی ورق سرامیک خالص است) بار بحرانی کماتش بیشترین مقدار را داراست.

(۷) در شکل ۲ (الف-د) تغییرات نیروی بحرانی کماتش FPN بر حسب نسبت h/a و hp/h در شرط مرزی گیردار و شرط مرزی ساده $hp/h=0.01$ و $h/a=0.01$ نشان داده

پس از به دست آوردن معادلات و ساده‌سازی آن‌ها و محاسبه بار بحرانی کماتش، با استفاده از ثوابتی که در این مقاله آورده شده، بار بحرانی کماتش برای دو حالت تکیه‌گاه ساده و گیردار محاسبه شده است. به دلیل مشابه بودن محاسبات در حالت تکیه‌گاه ساده، از نوشتن محاسبات خودداری و نتایج زیر حاصل شده‌اند:

(۱) معادلات تعادل و پایداری به دست آمده برای ورق دایروی FGM با لایه‌های پیزوالکتریک محرک - محرک بر اساس محل تار خنثی و با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا (FPN) با معادلات تعادل و پایداری به دست آمده برای ورق دایروی FGM بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا (F) [۱۵] یکسان بوده با این اختلاف که منتهی نیروها در دو حالت ذکر شده متفاوت هستند.

(۲) طبق جدول ۲ بار بحرانی کماتش برای ورق دایروی FGM با لایه‌های پیزوالکتریک محرک- محرک بر اساس محل تار خنثی و با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا در دو حالت شرط مرزی گیردار و ساده در حالتی که ضخامت لایه پیزوالکتریک ثابت ($hp/h=0.01$) است با افزایش نسبت h/a ، افزایش و با افزایش n ، کاهش می‌یابد.

(۳) بر اساس جدول ۳ بار بحرانی کماتش برای ورق دایروی FGM با لایه‌های پیزوالکتریک محرک- محرک بر اساس محل تار خنثی و با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا در دو حالت شرط مرزی گیردار و ساده در

7. Birman, V. and Bert, C.W., "Buckling of Composite Plates and Shells, Subjected to Elevated Temperature", J. Applied Mech., Vol. 60, pp. 514-519, 1993.
8. Najafizadeh, M.M. and Eslami, M.R., "Thermoelastic Stability of Orthotropic Circular Plates", J. Thermal Stresses, Vol. 25, No. 10, pp. 985-1005, 2002.
9. Klossner, L.M. and Forry, M.J., "Buckling of Simply Supported Plates under Arbitrary Symmetrical Temperature Distributions", J. Aerospace Sci., Vol. 25, No. 3, pp. 181-184, 1985.
10. Najafizadeh, M.M. and Eslami, M.R., "Buckling Analysis of Circular Plates of Functionally Graded Materials under Uniform Radial Compression", Int. J. Mech. Sci., Vol. 44, No. 12, pp. 2479-2493, 2002.
11. Najafizadeh, M.M. and Eslami, M.R., "First Order Theory Based Thermoelastic Stability of Functionally Graded Material Circular Plates", AIAA J., Vol. 40, No. 7, pp. 1444-1450, 2002.
12. Noda, N., "Thermal Stresses in Functionally Graded Materials", The 3rd Int. Cong. on Thermal Stresses, Cracow, Poland, pp. 33-38, 1999.
13. Eslami, M.R., Mossavarali, A., and Salehi, GP. "Thermoelastic Buckling of Isotropic and Orthotropic Plates with Imperfections", J. Thermal Stresses, Vol. 23, No. 9, pp. 853-872, 2000.
14. Najafizadeh, M.M. and Hedayati, B., "Refined Theory for Thermoelastic Stability of Functionally Graded Circular Plates", J. Thermal Stresses, Vol. 27, No. 9, pp. 857-880, 2004.
15. Najafizadeh, M.M. and Heydari, H.R., "An Exact Solution for Buckling of Functionally Graded Circular Plates, Based on Higher Order Shear Deformation Plates Theory under Uniform Radial Compression", Int. J. Mech. Sci., Vol. 50, No. 3, pp. 603-612, 2007.
16. Javaheri, R. and Eslami, M.R., "Thermal Buckling of Functionally Graded Plates, Based on Higher Order Theory", J. Thermal Stresses, Vol. 25, No. 7, pp. 603-625, 2002.

شده است و برای n ثابت با افزایش نسبت h/a ، بار بحرانی صعودی است.

۸- نتیجه گیری

در این مقاله، بار بحرانی کمانش مکانیکی برای یک ورق دایروی FGM با لایه‌های پیزوالکتریک محرک-محرک بر اساس محل تار خنثی و با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالای صفحات به دست آمده است که نتایج به شرح زیر قابل بررسی است.

۱- وجود لایه‌های پیزوالکتریک محرک-محرک در ساختار مواد تابعی، باعث بار بحرانی کمانش بیشتری نسبت به مواد تابعی خواهد شد و این مقدار در حالتی که شرط مرزی گیردار انتخاب می‌شود بیشتر از حالت شرط مرزی ساده است و

۲- تار خنثی نیز در دو حالت شرط مرزی ذکر شده باعث اختلاف بیشتر بار بحرانی کمانش نسبت به مواد تابعی می‌گردد که مقدار آن از حالتی که لایه‌های پیزوالکتریک وجود دارد کمتر است.

مراجع

1. Yamanouchi, M., and Koizumi, M., "Functionally Gradient Materials" First Int. Symp. on Functionally Graded Materials, Sendai, Japan, 1991.
2. Kuizomi, M., "FGM Activities in Japan", J. Composite: Part B, Vol. 28, No's. 1-2, pp. 1-4, 1997.
3. Kouizomi, M. and Niino, M., "Overview of FGM Research in Japan", MRS Bulletin, Vol. 20, No. 1, pp. 19-21, 1995.
4. Brush, D.O. and Almrouth, B.O., "Buckling of Bars, Plates and Shells", McGraw Hill, New York, 1975.
5. Leissa, A.W., "Review of Recent Developments in Laminated Composite Plate Buckling Analysis", Compos. Mat. Tech., Vol. 45, pp. 1-7, 1992.
6. Tauchert, T.R., "Thermally Induced Flexure, Buckling and Vibration of Plates", Applied Mech. Review, Vol. 44, No. 8, 1991.

17. Javaheri. R. and Eslami, M.R., "Buckling of Functionally Graded Plates under In-Plane Compressive Loading", ZAMM, Vol. 82, No. 4, pp. 277-283, 2002.
18. Ma, L.S. and Wang, T.J., " Non-linear Bending and Post Buckling of a Functionally Graded Circular Plate under Mechanical and Thermal Loading", Int. J. Solid and Struct., Vol. 40, No. 13-14, pp. 3311-3330, 2003.
19. Senthil, V., "Modeling of Piezoelectric Smart Structures for Active Vibration and Noise Control Applications", Ph.D Dissertation, Dep't. Eng. Sci. Mech., Pennsylvania State Univ., August , 2001.
20. Reddy, J.N. and Phan, N.D., "Stability and Vibration of Isotropic, Orthotropic and Laminated Plates According to a Higher-Order Shear Deformation Plate Theory", J. Sounds and Vibrations, Vol. 98, No. 2, pp. 157-170, 1985.
21. Tiersten, H.F., "Linear Piezoelectric Plate Vibration", Plenum Press, New York, 1969.
22. Meyers, C.A. and Hyer, M.W., "Thermal Buckling and PostBuckling of Symmetrically Laminated Composite Plates", J. Thermal Stresses, Vol. 14, pp. 519-540, 1999.
23. Praveen, G.N. and Reddy, J.N., "Non-linear Transient Thermoelastic Analysis of Functionally Graded Ceramic-Metal Plates", Int. J. Solids and Struct, Vol. 35, No.33, pp. 4457-4476, 1998.