# تحلیل خمشی صفحات چهار گوش کامپوزیتی با لایههای پیزوالکتریک بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی دهرمش کانتر مورج توسعه دافته

بەروش كانتروويچ توسعه يافته

سیدمحمدمهدی نجفیزاده<sup>۱</sup> شیما آذری<sup>۲</sup> و فؤاد سلماسی<sup>۳</sup> دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه آزاد اسلامی- واحد اراک ( تاریخ دریافت: ۸۸/۱۰/۲۸ ؛ تاریخ پذیرش: ۸۹/۷/۱۱)

چکیدہ

در این مقاله، به بررسی و تحلیل خمش ورق مستطیل شکل کامپوزیتی بههمراه لایههای پیزوالکتریک پرداخته میشود. ورق میانی یک بار ایزوتروپ و بار دیگر ارتوتروپ در نظر گرفته شده و خمش ورق تحت اثر بارگذاریهای یکنواخت و سینوسی و در حضور خاصیت پیزوالکتریک به کمک روش کانتروویچ توسعه یافته بررسی شده است. تحلیل بر اساس فرضیات تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی صورت گرفته و فقط به حل مکانیزم پیزوالکتریک از نوع الحاقی محدود شده است. با استفاده از روش گالرکین و به کمک روش کانتروویچ، معادلات حرکت ورق که به صورت دستگاه معادلات دیفرانسیل وابسته غیرخطی می باشند، به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی کوپل شده تبدیل شدهاند. این معادلات به کمک روش اپراتور، غیرکوپل و سپس حل شدهاند. درستی نتایج حاصل، برای ورق کامپوزیت تحت شرایط تکیهگاهی متفاوت، با نتایج حاصل از حل ANSYS و همچنین تحلیل بر مبنای فرضیات تئوری کلاسیک صفحات مقایسه و تأیید شده است. نتایج نشان می دهد

**واژههای کلیدی**:روش کانتروویچ توسعه یافته، روش گالرکین، تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی، روش اپراتور، پیزوالکتریک

# Bending Analysis of Rectangular Composite Plates with Piezoelectric Layers, Based on the First Order Shear Deformation Theory, Using the Extended Kantorovich Method

M.M. Najafizadeh Mech. Eng. Dep't. Islamic Azad Univ., Arak Branch (Received: 18 Jan. 2010, Accepted: 3 Oct. 2010)

## ABSTRACT

This paper presents a theoretical bending analysis of rectangular composite plates with piezoelectric layers. The host plate has been chosen orthotropic and isotropic, respectively and has been analyzed under uniform and sinusoidal loads with piezoelectric property, using the extended Kantorovich iterative procedure. The solution has been developed, based on the first order shear deformation theory, and it is limited only for the solution of extension type piezoelectric mechanism. With the iterative procedure and using Galerkin method, the dependent non-linear system of differential equations of the plate have been changed to the couple linear differential equations, which is decoupled and solved by the operator method. The Result of the present analytical method for composite plate, under different boundary conditions, have been verified by comparing with classical plate theory results and with finite element and ANSYS result. The results show high accuracy, while the iterative process converges very rapidly.

Keywords: Extended Kantorovich Method, Galerkin Method, First Order Shear Deformation Theory, Operator Method, Piezoelectric

۳- مربی

nohammadnajafizadeh@yahoo.com :- دانشيار( نويسنده پاسخگو): ۱-

۲- مربی

### ۱– مقدمه

استفادههای نخستین از مواد پیزوالکتریک به سال ۱۸۸۰، زمانی که برادران کوری اثر مستقیم مواد پیزوالکتریک را کشف کردند. از آن زمان تا چند دهه پیش، استفاده از مواد پیزوالکتریک به استفادههای گوناگون در ترانسدیوسرها محدود شده بود، اما استفاده از آنها به عنوان محرکها در سالهای ۱۹۸۰آغازگردید. همچنین توسعه و گسترش مواد کامپوزیتی هوشمند برای استفاده در سازههای هوا و فضا مورد توجه قرار گرفت[۱]. از انواع سرامیکها که میتوانند خواص پیزوالکتریکی داشته باشند میتوان به سرب تیتانیت زیرکونیت <sup>۱</sup> اشاره کرد. نوع دیگری از این پیزوسرامیکها شامل سرب زیرکونیت <sup>۲</sup> و سرب تیتانیت آمیباشد و همچنین میتوان به باریم - تیتانیت <sup>۲</sup> نیز اشاره کرد.

اغلب آنالیزهای دوبعدی اجزاء محدود برای صفحات و پوستههایی که در سازههای هوشمند به کار میروند، بر پایه تئوری کلاسیک صفحات یا تئوری لایهای صفحات میباشد که در آن میدان جابهجایی در طول ضخامت، خطی در نظر گرفته شده است[۲].

کارگر نوین و نجفی زاده، ارتعاشات ورق FGM با لایههای محرک و سنسور را مورد بررسی قرار دادهاند. معادلات دیفرانسیل حرکت ورق را بر اساس تئوری کلاسیک صفحات بهدست آورده و معادله حرکت حاصل، با استفاده از FGM سریهای فوریه حل شده و تأثیر افزایش حجم ماده

روی تغییرات فرکانس مورد بررسی قرار گرفته است [۳]. میــشل و ردی<sup>۵</sup> معـادلات حرکـت ورق کـامپوزیتی بـا لایههای پیزوالکتریک را مورد بررسی قرار دادهانـد. معـادلات حرکت بر اساس روش انرژی بهدست آمـده و محاسـبات بـر مبنای کوپلینگ بین تغییر شـکلهـای مکـانیکی و تغییـرات شارژ الکتریکی صورت گرفته است[۴].روش کانتروویچ توسط کـر<sup>2</sup> [۵] در سـال ۱۹۶۸ بـرای حـل مـسئله پـیچش میلـه منشوری با مقطع مستطیل شکل مورد استفاده قـرار گرفت.

7- Kim

10- Dalei

8- buckling loads

9- Abouhamze

نتایج این آنالیزها تطابق زیادی با حلهای شناخته شدهای که در دسترس میباشد دارد. پس از آن این روش، برای حل مسائل گوناگون در الاستیسیته دوبعدی از جمله مسئله خمش ورق نازک مستطیل شکل ایزوتروپ [۶]، حل مسئله مقدار ویژه در سال ۱۹۶۹ توسط کر [۷]، ارتعاشات آزاد [۸]، کمانش [۱۱–۹] و آنالیز کرنش [۱۲]توسط کیم<sup>۷</sup> مورد توجه قرار گرفت.

اقدم [۱۳] پاسخی را برای خمش در ورق مستطیلی از نوع رایزنر و ایزوتروپیک گیردار بهدست آورده است. پس از آن اقدم و فلاحتگر[۱۴]، این مدل را برای رسیدن به رفتار خمشی در ورقهای مستطیلی ضخیم گسترش دادند.

در مرجع [۱۵]، با معرفی روشهای کانتروویچ کلاسـیک و توسعه یافته، نیروهای کمانش<sup>^</sup> محاسبه شده است.

همچنین صحت روش کانتروویچ در مختصاتی غیر از مختصات کارتزین توسط اقدم در سال ۲۰۰۷ برای آنالیز تنش قطاع[۱۶]و خمش ورق قطاع نازک ارتوتروپ [۱۷]، و ابوحمزه<sup>۹</sup>[۱۸] در سال ۲۰۰۷ برای پنال استوانهای کامپوزیتی مورد بررسی قرار گرفته است.

کر و دالایی <sup>۱۰</sup>[۱۹]، ورق لایهای مستطیلی مبتنی بر تئوری کلاسیک را بررسی کرده و دریافتند که هم گرایی در جواب روشی که مبتنی بر روش کانتروویچ توسعه یافته است بسیار سریع بوده و شکل نهایی پاسخ بهدست آمده، مستقل از نخستین انتخاب است.

کر و الکساندر<sup>۱۱</sup> [۲۰]، نشان دادند که روش تکرار شونده به سرعت هم گرا بوده و شکل نهایی معادله بهدست آمده، مستقل از انتخاب اولیه (y) <sub>n</sub> g است. بهعلاوه هر چند روش کانتروویچ توسعه یافته مبتنی بر اصل تغییرات است، تابع آزمون اولیه لازم نیست هیچکدام از شرایط مرزی هندسی و طبیعی را ارضاء کند. روش تکرار شونده پاسخهایی میدهد که سرانجام تمام شرایط مرزی را ارضاء میکند[۲۱].

با مروری بر تحقیقات صورت گرفته مشخص میشود که تنها تعداد کمی از تحقیقات، پاسخ خمشی ورق را با استفاده

<sup>1-</sup> Lead-Zirconate Titanate

<sup>2-</sup> Lead-Zirconate(PbZrO<sub>3</sub>)

<sup>3-</sup> Lead-Titanate(PbTiO<sub>2</sub>)

<sup>4-</sup> Barium-Titanate (BaTiO<sub>3</sub>)

<sup>5-</sup> Mitchell & Reddy 6- Kerr

<sup>11-</sup> Alexander

www.SID.ir

از روش کانتروویچ بهدست آورده و تا کنون تمامی آنها به حالتی که تمام لبههای ورق گیردار باشد محدود شدهاند. در این مقاله، از روش کانتروویچ توسعه یافته و با استفاده از روش گالرکین و به کمک روش اپراتور، معادلات دیفرانسیل تعادل ورق مستطیل شکل کامپوزیتی به همراه لایههای پیزوالکتریک تحلیل شده است. سپس نتایج حاصل برای ورق، تحت شرایط تکیه گاهی متفاوت و تحت اثر بارگذاریهای یکنواخت و سینوسی و در حضور خاصیت پیزوالکتریک، با نتایج حاصل از حل ANSYS و همچنین حل بر اساس فرضیات تئوری کلاسیک صفحات مقایسه شده است.

# ۲ - روش کانتروویچ

برای حل معادله دیفرانسیل به کمک روش کانتروویچ، تابع مورد نظر به صورت حاصل ضرب توابعی از متغیرهای موجود در معادله دیفرانسیل مطابق رابطه زیر در نظر گرفته میشود:  $W(x.y) = K \cdot \Phi(x) \cdot \Psi(y)$ , (۱) که در آن، ضریب K برای بیبعد کردن توابع (۲۱]. میباشد[۲۱].

در معادله (۱) یکی از توابع  $\Phi(x)$  و یا  $\Psi(y)$ را معلوم فرض نموده و با قرار دادن معادله (۱) در معادله دیفرانسیل خمش ورق و با استفاده از یکی از روشهای باقیمانده وزنی<sup>۱</sup>، معادله دیفرانسیل دیگری که به صورت معادله دیفرانسیل کامل میباشد، بهدست خواهد آمد. در مرحله بعد، جواب بهدست آمده را معلوم فرض نموده و به کمک رابطه (۱) و معادله دیفرانسیل مسئله، تابع دیگر بهدست میآید. این عمل تکرار شده تا جوابها به مقدار خاص هم گرا شوند[۲۱].

در روش کـانتروویچ کلاسـیک فـرض مـیشـود کـه جابهجایی ورق به صورت زیر است:

$$w_{m}(x, y) = \sum_{n=1}^{m} f_{n}(x) \cdot g_{n-1}(y), \qquad (\Upsilon)$$
So a contract of the second state of the seco

رابطه (۲) در معادله حرکت ورق جایگزین شده و سـپس با اعمال روش گالرکین و با استفاده از قضیه اساسی حـساب

1- Weighted Residual Method

تغییرات، m معادله دیفرانسیل معمولی برای تعیین m تابع مجهول  $f_n(x)$  بهدست خواهد آمد. این معادلات دیفرانسیل توسط شرایط مرزی متناظر حل می شوند. سپس توابع  $f_n(x)$  بهوجود آمده دوباره در معادله (۲) جایگزین می شود[۲۱].

در روش کانتروویچ توسعه یافته، عملیات تکرار ادامه مییابد تا پاسخ به درجه دقت مطلوب هم گرا شود. برای ایـن حالت فرض می شود خیز ورق به شکل زیر است[۲۱]:

$$w_m(x, y) = \sum_{n=1}^m f_n(x) \cdot g_n(y).$$
 (\*)

که در آن،  $f_n(x)$  توابع به دست آمده از مرحله قبل (کانتروویچ کلاسیک) بوده و  $g_n(y)$  مجهول است.  $g_n(y)$  ها از m معادله خطی به دست می آیند. عملیات تکرار با جایگزینی مجدد  $(y)_n g_n(x)$  در معادله (۲) و به دست آوردن مجهول  $f_n(x)$ ادامه می یابد [۲۱].

۳- استخراج معادلات حرکت ورق بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی<sup>2</sup> (FSDT)
 در تئوری مرتبه اول، همانند تئوری کلاسیک، دو فرض زیر معتبر است:
 ۱)خطوط مستقیم عمود بر صفحه میانی قبل از تغییر شکل، بعد از تغییر شکل هم مستقیم باقی میمانند و
 ۲) خطوط مستقیم عمود بر صفحه میانی، تغییر طول
 ۲) خطوط مستقیم عمود بر صفحه میانی، تغییر طول نمی دهند.

اما، در تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی، بر خلاف فرضیات تئوری کلاسیک، صفحات عمود بر سطح میانی، بعد از تغییر شکل دیگر بر سطح میانی عمود باقی نمی مانند (شکل ۱). در نتیجه با در نظر گرفتن این تئوری، مؤلفه های کرنش نرمال  $\mathcal{F}_{xx}$ ,  $\mathcal{F}_{yz}$ ,  $\mathcal{F}_{xz}$ ,  $\mathcal{F}_{xz}$ ,  $\mathcal{F}_{yz}$ ,  $\mathcal{F}_{zz}$ ,  $\mathcal{F}_{zz$ 

<sup>2-</sup> First Order Shear Deformation Theory

بوده و با توجه بـه فرضـیات FSDT بـا رابطـه زیـر تعریـف میشود[۲۲]:

$$\delta U = \int_{\Omega_0} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xx} \,\delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \,\delta \varepsilon_{yy} + 2\sigma_{xy} \,\delta \varepsilon_{xy} + 2\sigma_{xz} \,\delta \varepsilon_{xz} + 2\sigma_{yz} \,\delta \varepsilon_{yz}) dz dx dy .$$
(A)

در رابطه فوق  $\Omega_0$  معرف محدوده سطح ورق قبل از تغییر شکل است. با انتگرال گیری از رابطه فوق در راستای ضخامت خواهیم داشت:

$$\delta U = \int_{\Omega_0} (N_{xx} \,\delta \varepsilon_{xx}^0 + M_{xx} \,\delta \varepsilon_{xx}^1 + N_{yy} \,\delta \varepsilon_{yy}^0 + M_{yy} \,\delta \varepsilon_{yy}^1 + N_{xy} \,\delta \gamma_{xy}^0 + M_{xy} \,\delta \gamma_{xy}^1 + Q_x \,\delta \gamma_{xz}^0 + Q_y \,\delta \gamma_{yz}^0) dx dy , \qquad (9)$$

Q نیروهای درون صفحهای،  $M_{ij}$  ممانها و  $N_{ij}$  ممانها و  $i_{j}$  نیروهای برشی در واحد طول میباشند و به صورت زیر تعریف می شوند [۲۲]:

$$\{N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}\} = \int_{h/2}^{h/2} \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}\} \cdot dz, \qquad (1 \cdot )$$

$$\left\{M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}\right\} = \int_{h/2}^{h/2} \left\{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}\right\} \cdot z \cdot dz \quad , \qquad (11)$$

$$\left\{Q_x, Q_y\right\} = K_s \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{\sigma_{yz}, \sigma_{xz}\right\} dz .$$
 (17)

در رابطه فوق،  $K_s$  ضریب تصحیح برش<sup>'</sup> بوده و مقدار آن باتوجه به شکل مقطع <math>2/8 میباشد. در صورتی که q بار خارجی وارد بر ورق باشد، مقدار انرژی پتانسیل از رابطه زیر بهدست می آید[۲۲]:</sup>

$$\partial V = -\int_{\Omega_0} q \, \delta w_0 \cdot dx dy \quad . \tag{17}$$

همچنین انرژی جنبشی عبارتست از:

$$\delta K = \int_{\Omega_0} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \rho_0(\dot{u}\,\delta \ddot{u} + \delta \ddot{v} + \dot{w}\,\delta \dot{w})dzdxdy, \qquad (14)$$

$$\delta K = \int_{\Omega_0} [H_0(\dot{u}_0 \dot{\alpha} \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0 - H_1(\dot{\varphi}_x \delta \dot{u}_0 + \delta \dot{\varphi}_x \dot{u}_0 + \dot{\varphi}_y \delta \dot{v}_0 + \delta \dot{\varphi}_y \dot{v}_0) - I_2(\dot{\varphi}_x \delta \dot{\varphi}_x + \dot{\varphi}_y \delta \dot{\varphi}_y)] dx dy.$$
(12)

$$\{I_0, I_1, I_2\} = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{2}{h}} \{1, z, z^2\} \rho dz$$

$$= \rho \left\{h, 0, \frac{h^3}{12}\right\}.$$
(17)

1- Shear Correction Factor

$$u(x, y, z, t) = u_{\circ}(x, y, t) - z \varphi_{x}(x, y, t) ,$$
  

$$v(x, y, z, t) = v_{\circ}(x, y, t) - z \varphi_{y}(x, y, t) ,$$
  

$$w(x, y, z, t) = w_{\circ}(x, y, t) .$$
(\*)

 $u_0(x, y, t), v_0(x, y, t), w_0(x, y, t)$ ، (۴)، در رابط در رابط  $\phi_x(x, y, t)$ ، مؤلف ههای جاب هجایی صفحه میانی  $\phi_x(x, y, t)$  و  $\phi_y(x, y, t)$  چرخش عمود بر صفحه میانی به ترتیب حول محورهای x و x میاشند.



**شکل(۱):** نمودار خیز ورق با فرضیات تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی.

همچنین مؤلفههای کرنش در هر نقطه از ورق مطابق رابط ه زیر تعریف می شود[۲۲]:

$$\left\{ \boldsymbol{\varepsilon} \right\} = \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}^{0} \right\} + (\boldsymbol{z}) \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}^{1} \right\} . \tag{(a)}$$

انجام شده توسط نیروی خارجی،  $\delta K$ انرژی جنبشی مجازی

# ۴- تحلیل خمـش ورق پیـزو- ارتـوتروپ بـا تئـوری FSDT به کمک روش کانتروویچ توسعه یافته

از آنجا که مدل ورق مورد بحث دارای سه لایه بوده که شامل دو تکه ورق پیزوالکتریک و یک ورق از جنس ارتوتروپ است، مقادیر  $N_{xx}$ ,  $N_{yy}$ ,  $M_{xx}$ ,  $M_{yy}$  و  $N_{xx}$ ,  $M_{yy}$ ,  $N_{xx}$ ,  $N_{yy}$  )، برابر است با:

$$\begin{cases} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{cases} = \int_{z_2}^{z_1} \begin{cases} \sigma_{xx}^h \\ \sigma_{yy}^h \\ \sigma_{xy}^h \end{cases} dz + \int_{z_1}^{z_2} \begin{cases} \sigma_{xx}^a \\ \sigma_{yy}^a \\ \sigma_{xy}^a \end{cases} Rdz + \int_{z_2}^{z_3} \begin{cases} \sigma_{xx}^s \\ \sigma_{yy}^s \\ \sigma_{xy}^s \end{cases} Rdz, \quad (\Upsilon )$$

$$\begin{vmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{vmatrix} = \int_{z_2}^{z_1} \left\{ \sigma_{yy}^h \\ \sigma_{yy}^h \\ \sigma_{xy}^h \right\} z dz + \int_{z_0}^{z_1} \left\{ \sigma_{yy}^a \\ \sigma$$

که در آنها، نماد h مربوط به صفحهٔ میانی e a مربوط به صفحهٔ محرک f و s مربوط به صفحهٔ سنسور f و مقدار R در رابطه بالا همان معادلهٔ باکس کار میباشد که به صورت زیر رابطه میشود:  $R(x,y) = [H(x-a) - H(x+a)] \cdot [H(y-a) - H(y+a)] =$  $\begin{cases} 1 & -a < x < a \\ 0 & \text{for other points.} \end{cases}$ در حالت کلی، و در جایی که سازوکار عمل کرد

پیزوالکتریک از نوع الحاقی باشد، صرفنظر از مؤلف ههای کشش صفحه میانی ( ( ( x, y ) و ( x, y ) )، می توان مقادیر منتجه های نیرو و ممان برای ورق کامپوزیتی با لایه های پیزوالکتریک را بر اساس روابط (۱۲–۱۱) به صورت زیر نوشت[۲1]:

$$\begin{cases} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{cases} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{bmatrix} + \begin{cases} F_x(x,y) \\ F_y(x,y) \\ 0 \end{bmatrix}.$$
(77)

با جایگذاری مقادیر انـرژی جنبـشی و پتانـسیل و کـار مجازی ناشی از نیروی خارجی در رابطـه (۷) و سـادهسـازی نتیجه میشود[۲۲]:

$$\int_{0} \left\{ \int_{\Omega_{0}} \left[ -(N_{xx,x} + N_{xy,y} - I_{d}\ddot{u}_{0} - I_{i}\ddot{\phi}_{x})\delta u_{0} -(N_{xy,x} + N_{yy,y} - I_{d}\ddot{v}_{0} - I_{i}\ddot{\phi}_{y})\delta v_{0} -(M_{xx,x} + M_{xy,y} - Q_{x} - I_{2}\ddot{\phi}_{x} - I_{\mu}\ddot{u}_{0})\delta \phi_{x} -(M_{xy,x} + M_{yy,y} - Q_{y} - I_{2}\ddot{\phi}_{y} - I_{\mu}\ddot{v}_{0})\delta \phi_{y} -(Q_{x,x} + Q_{y,y} + \alpha(u_{0},v_{0},w_{0}) + q - I_{d}\ddot{v}_{0})\delta v_{0}] dx dy dt = 0,$$

$$\alpha(u_0, v_0, w_0) = \frac{\partial}{\partial x} (N_{xx} \frac{\partial w_0}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y} (N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial w_0}{\partial y}).$$
(1A)

$$\begin{split} & \cdot \delta \varphi_{y}, \delta \varphi_{x}, \delta w_{0}, \delta v_{0}, \delta u_{0} \quad \text{intermediation} \\ & \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_{0} \frac{\partial^{2} u_{0}}{\partial t^{2}} + I_{1} \frac{\partial^{2} \varphi_{x}}{\partial t^{2}} , \\ & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = I_{0} \frac{\partial^{2} v_{0}}{\partial t^{2}} + I_{1} \frac{\partial^{2} \varphi_{y}}{\partial t^{2}} , \\ & \frac{\partial Q_{x}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{y}}{\partial y} + \alpha(u_{0}, v_{0}, w_{0}) + q = I_{0} \frac{\partial^{2} w_{0}}{\partial t^{2}} , \\ & \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_{x} = I_{1} \frac{\partial^{2} u_{0}}{\partial t^{2}} + I_{2} \frac{\partial^{2} \varphi_{x}}{\partial t^{2}} , \\ & \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - Q_{y} = I_{1} \frac{\partial^{2} v_{0}}{\partial t^{2}} + I_{2} \frac{\partial^{2} \varphi_{y}}{\partial t^{2}} . \end{split}$$

در بهایت، با صرف طر از نرم زمان، معادلات نعادل ورق بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی (FSDT)، به صورت زیر تعیین می شود [۲۲]:

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 ,$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = 0\sqrt{a^2 + b^2} ,$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial w}{\partial y^2} + q = 0 , \qquad (\Upsilon \cdot )$$

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 ,$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - Q_y = 0 .$$

<sup>1-</sup> Host

<sup>2-</sup> Actuator

<sup>3-</sup> Sensor

<sup>4-</sup> Box Car Function

با قرار دادن مقادیر رابطه (۲۸) در دستگاه (۲۷)، دستگاه سـه

$$K_{s}A_{55}(k\frac{\partial W(x)}{\partial x^{2}} \cdot W(y) + \frac{\partial \varphi_{x}(x)}{\partial x} \cdot \varphi_{x}(y)) + K_{s}A_{44}(k\frac{\partial W(y)}{\partial y^{2}} \cdot W(x) + \frac{\partial \varphi_{y}(y)}{\partial y} \cdot \varphi_{y}(x)) = -q.$$

$$D_{11}\frac{\partial^{2}\varphi_{x}(x)}{\partial x^{2}} \cdot \varphi_{x}(y) + D_{66}\frac{\partial^{2}\varphi_{y}(y)}{\partial y^{2}} \cdot \varphi_{x}(x)$$
(7.1)

$$+(D_{12}+D_{03})\frac{\partial\varphi_{y}(x)}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi_{y}(y)}{\partial y}+\frac{\partial F_{x}(x,y)}{\partial x}-K_{x}A_{33}(\varphi_{x}(x)\cdot\varphi_{x}(y))$$
(<sup>(1)</sup>)

$$+k\frac{\partial W(y)}{\partial x} \cdot W(y)) = 0.$$

$$D_{22}\frac{\partial^{2}\varphi_{y}(y)}{\partial y^{2}} \cdot \varphi_{y}(x) + D_{66}\frac{\partial^{2}\varphi_{y}(x)}{\partial x^{2}} \cdot \varphi_{y}(y)$$

$$+(D_{12} + D_{66})\frac{\partial \varphi_{x}(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_{x}(y)}{\partial y} + \frac{\partial F_{y}(x,y)}{\partial y} - K_{x}A_{44}(\varphi_{y}(x) \cdot \varphi_{y}(y) \qquad (\text{`````})$$

$$+k\frac{\partial W(y)}{\partial y} \cdot W(x)) = 0.$$

روابط (۳۲–۳۰) پس از سادهسازی، به ترتیب در ( $\psi$ ),  $\phi_x(y)$ , و ( $\psi$ ) W ضرب و از آنها روی ناحیه (0,b), (طول ورق) انتگرال گرفته می شود. با سادهسازی روابط، دستگاه معادلات دیفرانسیل را به صورت زیر می توان نوشت:

$$k (F_{1}d^{2} + c_{1}F_{7})W(x) + F_{4}d\varphi_{x}(x) + c_{1}F_{5}\varphi_{y}(x) = B_{1},$$
  

$$-kc_{3}F_{4}dW(x) + (F_{2}d^{2} + c_{6})\varphi_{x}(x) + c_{4}F_{6}d\varphi_{y}(x) = B_{2}, \qquad (\Upsilon\Upsilon)$$
  

$$-kc_{1}c_{3}F_{10}W(x) + c_{4}F_{11}d\varphi_{x}(x) + (c_{5}F_{3}d^{2} + c_{7})\varphi_{y}(x) = B_{3}.$$

در مجموعه معادلات فوق : 
$$\frac{d^2}{dy}$$
,  $d^2 = \frac{d^2}{dy^2}$  و همچنين

$$\begin{cases} Q_{y} \\ Q_{x} \end{cases} = K_{s} \begin{bmatrix} A_{44} & 0 \\ 0 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial y} + \phi_{y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \phi_{x} \end{cases} .$$
 (74)

 $D_{ij}$  که در آن،  $A_{ij}$  مؤلفههای ماتریس سختی کششی و  $D_{ij}$  مؤلفههای ماتریس سختی خمشی میاشند و عبارتند از [۲۴]:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \int_{k=1}^{k} \left(\overline{Q}_{ij}\right)_{k} dz ,$$
  

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \int_{k=1}^{k} \left(\overline{Q}_{ij}\right)_{k} .(z)^{2} dz .$$
(YA)

$$F_{y}(x,y), F_{x}(x,y)$$
 ممانهای تحریک  $F_{y}(x,y), F_{x}(x,y)$ 

$$F_{ii} = \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{Q_{i3} e_{33}}{Q_{33}} - e_{i3} \right) \cdot E_3 \cdot z \, dz \quad . \tag{79}$$

 $Q_{ij}$  در رابطه (۲۶)،  $E_3$  مؤلفه میدان الکتریکی عمود بر ورق،  $E_3$  ثابت های ثابت الاستیسیته ورق پیزو الکتریک و  $e_{ij}$  ثابتهای پیزوالکتریک میباشد[۲۵]. با توجه به اینکه دو معادله اول (۲۰) مستقل از W میباشند، لذا برای تحلیل فقط سه معادله آخر (۲۰) را مد نظر قرار داده و با جای گذاری روابط (۲۰–۲۱) در این سه معادله خواهیم داشت:

$$\begin{split} K_{s}A_{ss}(\frac{\partial w}{\partial x^{2}} + \frac{\partial \phi_{x}}{\partial x}) + K_{s}A_{44}(\frac{\partial w}{\partial y^{2}} + \frac{\partial \phi_{y}}{\partial y}) = -q , \\ D_{11}\frac{\partial^{2}\phi_{x}}{\partial x^{2}} + D_{12}\frac{\partial^{2}\phi_{y}}{\partial x\partial y} + D_{66}(\frac{\partial^{2}\phi_{x}}{\partial y^{2}} + \frac{\partial^{2}\phi_{y}}{\partial x\partial y}) + \frac{\partial F_{x}(x,y)}{\partial x} \\ -K_{s}A_{ss}(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi_{x}) = 0 , \quad (\Upsilon Y) \\ D_{22}\frac{\partial^{2}\phi_{y}}{\partial y^{2}} + D_{12}\frac{\partial^{2}\phi_{x}}{\partial x\partial y} + D_{66}(\frac{\partial^{2}\phi_{y}}{\partial y^{2}} + \frac{\partial^{2}\phi_{x}}{\partial x\partial y}) + \frac{\partial F_{y}(x,y)}{\partial y} \\ -K_{s}A_{44}(\frac{\partial w}{\partial y} + \phi_{y}) = 0 . \\ C_{s}J_{44}(\frac{\partial w}{\partial y} + \phi_{y}) = 0 . \\ Z_{2}\psi L \quad linz \quad Z_{2} \quad Linz \quad Linz$$

درباره روش کانتروویچ توضیح داده شد، توابع جابهجایی و چرخش به صورت زیر در نظر گرفته میشوند :

<sup>1-</sup> Extensional Stiffness Matrix

<sup>2-</sup> Bending Stiffness Matrix

$$\Delta_{W(x)} = \begin{vmatrix} B_1 & F_4 d & c_1 F \\ B_2 & F_2 d^2 + c_6 & c_4 F_6 d \\ B_3 & c_4 F_{11} d & c_5 F_3 d^2 + c_7 \end{vmatrix},$$
  
$$\Delta_{\varphi_x(x)} = \begin{vmatrix} k (F_1 d^2 + c_1 F_7) & B_1 & c_1 F \\ -k c_3 F_4 d & B_2 & c_4 F_6 d \\ -k c_1 c_3 F_{10} & B_3 & c_5 F_3 d^2 + c_7 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{\varphi_{y}(x)} = \begin{vmatrix} \kappa (F_{1}d + C_{1}F_{7}) & F_{4}d & B_{1} \\ -kc_{3}F_{4}d & F_{2}d^{2} + c_{6} & B_{2} \\ -kc_{1}c_{3}F_{10} & c_{4}F_{11}d & B_{3} \end{vmatrix}.$$

در این روش، توابع ( $\phi_{x}(x), \phi_{x}(x), \psi_{x}(x)$  با عبارات زیر تعریف می شوند:

$$\begin{split} W(x) &= \frac{\Delta_{W(x)}}{\Delta}, \\ \varphi_x(x) &= \frac{\Delta_{\varphi_x(x)}}{\Delta}, \\ \varphi_y(x) &= \frac{\Delta_{\varphi_y(x)}}{\Delta}. \end{split} \tag{$\%$}$$

با جای گذاری روابط (۳۵) در (۳۶) و با سادهسازی داریم:  

$$W(x) = S_1 \times \sin(k_x \cdot x) + T_1 ,$$

$$\varphi_x(x) = S_2 \times \cos(k_x \cdot x) + T_2 ,$$
(۳۹)  

$$\varphi_y(x) = S_3 \times \sin(k_x \cdot x) + T_3 .$$

در این روابط ضرایب 
$$S_i$$
 عبارتند از:

$$\begin{split} S_{1} &= \frac{fk_{y}}{D_{11}} m_{3} \sin(k_{x}x)(c_{f_{0}}F_{5} - k_{x}^{2}c_{1}F_{2}F_{5} - k_{x}^{2}c_{4}F_{4}F_{6}) + \\ \frac{fk_{x}^{2}}{D_{11}} m_{2} \sin(k_{x}x)(k_{x}^{2}c_{5}F_{3}F_{4} - c_{f_{4}}F_{3}F_{6} + c_{7}F_{4}) , \\ S_{2} &= \frac{fk_{x}k_{y}}{D_{11}} m_{3} \cos(k_{x}x)(kcc_{4}F_{6}F_{7} + kcc_{3}F_{4}F_{5} - k_{x}^{2}c_{4}F_{7}F_{6}) + \\ \frac{kfk_{x}}{D_{11}} m_{2} \cos(k_{x}x)(k_{x}^{2}c_{f_{5}}F_{3}F_{7} + k_{x}^{2}c_{7}F_{1} \\ -k_{x}^{4}c_{5}F_{3}F_{1} + c_{1}^{2}c_{3}F_{5}^{2} - cc_{7}F_{7}) , \\ S_{3} &= \frac{k_{f}k_{y}}{D_{11}} m_{3} \sin(k_{x}x)(k_{x}^{2}c_{3}F_{4}^{2} + k_{x}^{2}c_{6}F_{1} + k_{x}^{2}c_{1}F_{2}F_{7} - cc_{6}F_{7}) + \\ \frac{k_{f}k_{x}^{2}}{D_{11}} m_{2} \sin(k_{x}x)(c_{f_{4}}F_{6}F_{7} + cc_{3}F_{4}F_{5} - k_{x}^{2}c_{4}F_{1}F_{6}) . \\ \end{array}$$

$$T_{1} = \frac{-q_{0}}{K_{s} \cdot A_{55}} \times c_{6} c_{7} m_{1},$$
  

$$T_{2} = 0,$$
((f))

$$T_{3} = \frac{-q_{0}}{K_{s} A_{55}} \times k \ c_{1} c_{3} c_{6} F_{5} m_{1}.$$

$$c_{1} = \frac{A_{44}}{A_{55}}, c_{2} = \frac{D_{22}}{D_{11}}, c_{3} = K_{s} \frac{A_{55}}{D_{11}}, c_{4} = \frac{D_{12} + D_{66}}{D_{11}},$$

$$c_{5} = \frac{D_{66}}{D_{11}}, c_{6} = c_{5}F_{8} - c_{3}F_{2}, c_{7} = c_{2}F_{9} - c_{1}c_{3}F_{3}.$$
(7%)

$$F_{1} = \int_{0}^{b} W(y)^{2} dy \quad , \qquad F_{2} = \int_{0}^{b} \varphi_{x}(y)^{2} dy \quad ,$$

$$F_{3} = \int_{0}^{b} \varphi_{y}(y)^{2} dy \quad , \qquad F_{4} = \int_{0}^{b} W(y) \varphi_{x}(y) dy \quad ,$$

$$F_{5} = \int_{0}^{b} W(y) \frac{\partial \varphi_{y}(y)}{\partial y} dy \quad , \qquad F_{6} = \int_{0}^{b} \varphi_{x}(y) \frac{\partial \varphi_{y}(y)}{\partial y} dy \quad ,$$

$$F_{7} = \int_{0}^{b} W(y) \cdot \frac{\partial W(y)}{\partial y^{2}} dy \quad , \qquad F_{8} = \int_{0}^{b} \varphi_{x}(y) \frac{\partial^{2} \varphi_{x}(y)}{\partial y^{2}} dy \quad ,$$

$$F_{9} = \int_{0}^{b} \varphi_{y}(y) \frac{\partial^{2} \varphi_{y}(y)}{\partial y^{2}} dy \quad , \qquad F_{10} = \int_{0}^{b} \varphi_{y}(y) \frac{\partial W(y)}{\partial y} dy \quad ,$$

$$F_{11} = \int_{0}^{b} \varphi_{y}(y) \frac{\partial \varphi_{x}(y)}{\partial y} dy \quad .$$

$$:$$

$$B_{1} = \frac{-q_{0}}{K_{x}A_{55}} \int_{0}^{b} W(y) dy ,$$
  

$$B_{2} = \frac{-k_{x} \cdot f}{D_{11}} \cos(k_{x} \cdot x) \times \int_{0}^{b} \varphi_{x}(y) \sin(k_{y} \cdot y) dy , \qquad (\Upsilon \mathcal{P})$$
  

$$B_{3} = \frac{-k_{y} \cdot f}{D_{11}} \sin(k_{x} \cdot x) \times \int_{0}^{b} \varphi_{y}(y) \cos(k_{y} \cdot y) dy .$$

دستگاه معادلات (۳۳)، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی کوپل است که برای حل آن از روش اپراتور استفاده می شود.

$$\Delta = \frac{\Delta}{Q} \frac{2}{Q} \frac{2}{Q}$$

معرف جوابهای خصوصی مسئله بوده و SP<sub>i</sub> نیز به صورت زیر تعریف می شود:  $SP_i = \frac{S_i}{-k_x^6 A_1 + k_x^4 A_2 - k_x^2 A_3 + A_4}$ , i = 1, 2, 3.با توجه به نوع شرایط مرزی که در هریک از لبههای ورق وجود دارد، می توان مقادیر اولیه توابع ( $\phi_{x}(x), \phi_{x}(x)$  و را بهدست آورد. به عنوان مثال، برای ورق با شرایط W(x)مرزی گیردار در لبههای x=0,*a* [۲۶] داریم: W(0) = W(a) = 0,  $\frac{dW(x)}{dx}\Big|_{x=0} = \frac{dW(x)}{dx}\Big|_{x=a} = 0$ , (47)  $\phi_{y}(0) = \phi_{y}(a) = 0,$ و یا اگر تکیهگاهها به صورت مفصلی باشند، داریم: W(0) = W(a) = 0,  $\frac{d^2 W(x)}{dx^2} = \frac{d^2 W(x)}{dx^2} = 0$ (۴۸)  $\varphi_{r}(0) = \varphi_{r}(a) = 0$ در ادامه، با مشخص شدن توابع ( $\phi_x(y), \phi_x(y)$  و (y)، مجدداً همین روند حل برای تعیین توابع  $(x), \phi_x(x), \phi_y(x)$  و W(x) به کار برده می شود. در این حالت دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی به صورت زیر  $\phi_{y}(x), \phi_{x}(x)$  بهدست می آید، که با حل آن مقادیر توابع و W(x) به صورت زیر تعیین می شوند:  $k(G_7 + c_1G_d^2)W(y) + G_5\varphi_r(y) + c_1G_d\varphi_v(y) = V_1$ ,  $-kc_{3}G_{10}W(y) + (J_{1} + c_{5}G_{2}d^{2})\varphi_{x}(y) + c_{4}G_{6}d\varphi_{y}(y) = V_{2} ,$ (49)  $-kc_1c_3G_4dW(y)+c_4G_{11}d\varphi_x(y)+(c_2G_3d^2+J_2)\varphi_y(y)=V_3$ 

در این حالت نیز مقادیر هر یک از ضرایب با روش های حل عددی نظیر آنچه که در مرحله قبل گفته شد محاسبه می شود. با تکرار این روش، پس از حداقل سه بار تکرار، پاسخها به دقت و هم گرایی مناسبی می رسند.

## ۶ – نتایج عددی

برنامه محاسباتی برای روش تکرارشونده کانتروویچ توسط نرمافزار MAPLE نوشته شده و نتایج بهدست آمده با نتایج حاصل از روشهای حل دیگر برای ورق مشابه مقایسه شده است. ورق مربعی، به ابعاد۱۰۰۳×۱۰ و ضخامت ۸/۸mm از جنس آلومینیوم و گرافیت اپوکسی انتخاب شده است. بهعنوان اولین مثال، مسئله خمش ورق مربعی شکل

در روابط (۴۱–۴۰) مقادیر 
$$m_1, m_2, m_3$$
 به صورت زیر تعریف شدهاند:

در این رابطه مقادیر  $\lambda_i$  عبارت است از شش ریشه معادله ( $T_i/A_4$ ) (i = 1, 2, 3) و عبارات ( $T_i/A_4$ ) (i = 1, 2, 3)

آلومینیوم (ایزوتروپ )، با خواص مطرح شده یکبار برای حالتی که ورق به تنهایی تحت بارگذاری یکنواخت و سینوسی قرار دارد، و بار دیگر برای حالتی که دو لایه پیزوالکتریک هر یک به ضخامت mm //۰ به بالا و پایین ورق چسبانده شده، به کمک روابط به دست آمده در تئوری FSDT، مورد بررسی قرار گرفته است. در ادامه و در جدول ا نتایج به دست آمده با حل ANSYS و نتایج به دست آمده از همین روش بر اساس فرضیات تئوریTT] و ا میینید می شود. پاسخهای تیموشنکو (فقط برای ورق همچنین توسط تیموشنکو<sup>(</sup> [۲۶] مقایسه شده و صحت ایزوتروپیک مربعی) به فرم خلاصه D/4ایزوتروپیک مربعی) به فرم خلاصه مرزی ورق، p بار ایزوتروپیک مربعی) به فرم خلاصه مرزی ورق، p بار توزیع شده عرضی روی ورق، a ابعاد ورق و D سختی خمشی آن می باشد. در این حالت برای ورق آلومینیوم، Top=12.2774 [Nm<sup>2</sup>/m]

 $q_0=1$  در کلیه حالات، برای هر دو نوع بارگذاری،  $q_0=1$   $N/m^2$ ] در نظر گرفته شده است. همچنین شرایط مرزی در نظر گرفته شده برای تکیهگاههای مورد بحث در این مقاله به صورت زیر تعریف شده است [۲۶]:

 $w_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \phi_x = 0$ Simply supported edge:  $w_x = \frac{\partial w}{\partial x} = \phi_y = 0$ Clamped edge: و خواص موادی که مسئله برای آنها حل شده است به شرح زير است[٢۶]: آلومينيوم : E=69 Gpa, v=0.32, G=26.13 Gpa, گرافیت ایوکسی :  $E_{11}=9.8 \times 1010 \ [N/m^2], E_{22}=0.79 \times 1010 \ [N/m^2],$  $G12=0.56 \times 1010 [N/m^2]$ ,  $v_{12}=0.28$ . ييزو الكتريك :  $E_{11}=8.84 \times 1010 [N/m^2], E_{22}=7.6 \times 1010 [N/m^2],$  $G_{12}=2.1\times 1010 [N/m^2], v_{12}=0.37,$  $e_{31}$ =-7.209 [C/m<sup>2</sup>],  $e_{33}$ =15.118 [C/m<sup>2</sup>]. در مرحله بعد، مسئله خمش ورق، برای ورق گرافیت ايوكسي دولايه ([٩٠/٠]) و گرافيت ايوكسي چهار لايه ([۰/۹۰]) ، در دو حالت بارگذاری یکنواخت مورد بررسی

```
    SSSS: چهار طرف ورق با تکیه گاه ساده
```

- ۲- CCCC: چهار طرف ورق با تکیه گاه گیردار
  - SCSC ۳: دو لبه مفصلی، دولبه گیردار
  - +- SSSC: سه لبه مفصلی، یک لبه گیردار

1-Timoshenko

www.SID.ir

۶۵	COD		
Arcntve	oj SID		

قرار گرفته است. مقایسه نتایج بهدست آمده برای خیز ورق در غیاب لایههای ییزوالکتریک، با نتایج حاصل از تئوریCLPT و حسل ANSYS در شیکل هیای ۳-۳ و همچنین، در ادامه در جدول ۲ آمده است. المانهای مورد استفاده در نرمافزار ANSYS برای ورق المان SOLSH190 و برای ورق گرافیت ایوکسی SOLID46 می باشد. همچنین، سایز المان در صفحه x-y در هر دو ورق مشخص ۲/۵ איז א در این شکلها مشخص ۲/۵ איז א מחט א מה א מוט א מחט א מחט א מש است بیشترین مقدار خیز برای ورق با چهار طرف تکیه گاه ساده و کمترین مقدار خیز برای ورق با چهار طرف تکیه گاه گیردار میباشد. همچنین استفاده از تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی (FSDT) جوابهای دقیقتری در مقایسه با تئوري كلاسيك صفحات ارائه ميكند. هم چنين از مقايسه شکلهای ۲ و ۳ مشخص است که روش (CLPT) در قیاس با حل اجزاء محدود (ANSYS) به علت در نظر نگرفتن اثرات برشی، جوابهای بالاتری ارائه می کند.

جدول (۱): مقايسه پاسخ روش كانتروويچ توسعه يافته با نتايج ANSYS و پاسخ تيموشنكو براى ورق آلومينيوم.

شرط	مقدار خيز (W[m]e-7 )				
مرزى				Timoshenko	
0,,,	ANSYS	CLPT	FSDT	[26]	
<sup>2</sup> SSSS	1/1414	1/8084	1/51980	1/1428	
<sup>3</sup> CCCC	·/٣٨١٧۵	•/٣۶٩٧٧	•/٣٧٣۶٧	•/32022	
<sup>4</sup> SCSC	•/۵٧٩٩٢	•/۵۵۹۹۸	·/0971V	·/0/17V	
<sup>5</sup> SSSC	•///6646	•/٨١۵٢١	•///7900	•/8418	



شکل(۳): مقایسه پاسخ روش کانتروویچ توسعه یافته با نتایج ANSYS برای ورق گرافیت اپوکسی تک لایه با شرایط مرزی متفاوت.



یافته با	توسعه	ئانتروويچ	روش ک	پاسخ	مقايسه	ل(۲):	جدوا
•.	اپوكسى	گرافیت ا	ى ورق	AI برا	NSYS	نتايج	

	شہ ط	مقدار خيز (W[m]e-7)			
تعداد لايه		ANSYS			
	مررى	SOLID46	CLPT	FSDT	
گرافیت اپوکسی چهار لایه	SSSS	2/2602	7/9.970	2/22269	
	CCCC	•/99818	•/990.V	·/&XIIV	
	SCSC	1/7799	1/19936	1/8888	
	SSSC	1/1004	2/2621.	1/81.89	
گرافیت اپو کسی دولایه [۰،۰۶]	SSSS	2/1620	2/91930	2/10262	
	CCCC	•/94•1	۰ <i>/۶</i> ۷۹۰۸	•/90794	
	SCSC	1/.01	1/02009	1/09204	
	SSSC	1/8944	1/1977.	1/14091	

همچنین، شکل ۴ نتایج تحلیل به کمک ANSYS را برای ورق گرافیت اپوکسی، با شرایط مرزی مختلف نشان میدهد. همان طور که مشخص است در این حالت بیشترین مقدار خیز برای ورق با چهار طرف تکیه گاه ساده و کمترین مقدار خیز برای ورق با چهار طرف تکیه گاه گیردار میباشد. مقدار خیز برای ورق با چهار طرف تکیه گاه گیردار میباشد. در شکل ۵ مسئله خمش ورق، برای ورق گرافیت اپوکسی چهار لایه ([۹۰/۰]) به همراه لایه های پیزوالکتریک، در دو حالت بارگذاری یکنواخت و سینوسی مورد بررسی قرار گرفته است. در هر دو حالت بارگذاری بیشترین مقدار خیز برای ورق با چهار طرف تکیه گاه ساده و کمترین مقدار خیز برای ورق با چهار طرف تکیه گاه ساده و کمترین مقدار خیز پرای ورق با چهار طرف تکیه گاه ساده و کمترین مقدار خیز تیز ماکزیمم برای دو حالت چهار طرف تکیه گاه ساده و یا تیز ماکزیمم برای دو حالت چهار طرف تکیه گاه ساده و یا

نتایج هم گرایی برای ورق با شرایط مرزی متفاوت در شکل ۶ نشان داده شده است. همان طور که مشخص است، تنها تعداد کمی تکرار برای حل بهروش تکرار شونده برای هر ورق لازم است تا نتایج به هم گرایی مطلوب برسد. این نشان میدهد که نتایج در این روش مستقل از توابع آزمون اولیه بوده و به سرعت هم گرا می شوند.



۴ لایه با شرایط مرزیSSSC،CCCC،SSSS وSSSC.

بهدست میآیند، که در این مقاله، به کمک روش کـانتروویچ این دستگاه به دستگاه معادلات دیفرانسیل خطے مستقل تبدیل شده است. همچنین اعتبار روش حل ارائه شده، با مقایسهی جوابهای دقیق موجود، تأیید شده است. نتایج نشان میدهد که با افزایش ضخامت ورق، نتایج حاصل از روش کانتروویچ بر مبنای فرضیات تئوری FSDT، از دقت بیشتری نسبت به نتایج بهدست آمده از تئوری CLPT برخوردار است. همچنین اثر تغییر شکل برشی در ضخامتهای زیاد، افـزایش یافتـه و صـرفنظـر از آن سـبب کاهش دقت در تحلیل می شود. به علاوه نـشان داده شـد کـه روش تکرار شونده (کانتروویچ) بهسرعت هم گراست و دقت نسبتاً خوبی نسبت به نتایج ارائه شده بر اساس روشهای تحلیلی دیگر دارد. همچنین شکل نهایی معادله بهدست آمده برای خیـز ورق و در نتیجـه پاسـخهـای نهـایی، کـاملاً مستقل از انتخاب جواب اولیه است. به این ترتیب نشان داده شد که تابع آزمون اولیه لازم نیست هیچیک از شرایط مرزی هندسی و طبیعی را ارضا کند. زیرا جـوابهـای حـل تکـرار شونده، سرانجام هر مدل آرایش شرایط مرزی را ارضا خواهد کرد.

مراجع

- 1. Lee H.J., "Finite Element Analysis of Active and Sensory Thermopiezoelectric Composite Materials", Glenn Research Center, Ohio, 2001.
- Gopinathan, S.V., "Modeling of Piezoelectric Smart Structures for Active Vibration and Noise Control Applications", Pennsylvania State Univ., Dep't. Eng. Sci. Mech., August, 2001.
- Kargarnovin, M.H., Najafizadeh, M.M., and Viliani, N.S., "Vibration Control of FGM Plate Patched with Piezoelectric Actuators and Sensors under a Constant Electric Charge", Smart Mater. Struct., Vol. 16, No. 4, pp. 1252-1259, 2007.
- Mitchell, J.A. and Reddy, J.N., "A Refined Hybrid Plate Theory for Composite Laminated with Piezoelectric Laminas", Int. J. Solid Struct., Vol. 32, No. 16, pp. 2345-2367, 1995.
- Kerr, A.D., "An Extension of the Kantorovich Method", Quart, Appl. Math., Vol. 26, pp. 219– 229, 1968.





**شکل(۶):** هم گرایی پاسخها در روش کانتروویچ توسعه یافته برای ورق پیزو-گرافیت اپوکسی <sub>s</sub> [۰/۹۰] تحت بار گذاری یکنواخت .

## ۷ - نتیجهگیری

در این مقاله، رفتار خمشی در ورقهای کامپوزیتی مستطیل شکل، مورد بررسی قرار گرفته و حل تحلیلی بر مبنای روش کانتروویچ ارائه گردیده است. معادلات دیفرانسیل بهدست آمده بر پایه روش گالرکین و بر مبنای تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی بهدست آمدهاند. با توجه به فرضیات تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی، معادلات تعادل ورق بهصورت دستگاه معادلات دیفرانسیل غیر خطی کوپل،

The IC. on Modeling and Optimization of Struct., Processes and Systems, ICMOSPS/07, Durban, South Africa, 2007.

- Abouhamze, M., Aghdam, M.M., and Alijani, F., "Bending Analysis of Symmetrically Laminated Cylindrical Panels, Using the Extended Kantorovich Method", Mech. Adv. Mat. Struct., Vol. 14, No. 7, pp. 523–530, 2007.
- Dalei, M. and Kerr, A.D., "Analysis of Clamped Rectangular Orthotropic Plates Subjected to Uniform Lateral Load", Mech. Sci., Vol. 37, No. 5, pp. 527–535, 1995.
- Kerr, A.D. and Alexander, H., "An Application of the Extended Kantorovich Method to the Stress Analysis of Clamped Rectangular Plate", Acta Mech., Vol. 6, No's. 2-3, pp. 180–196, 1968.

۲۱. نجفیزاده، م.م.، علوی، م.، سلماسی، ف. و آذری، ش.، " تحلیل خیز صفحات چهارگوش FGM براساس تئوری کلاسیک صفحات به روش کانتروویچ توسعهیافته"، فصلنامه علمی تخصصی مهندسی مکانیک جامدات، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی شهر، شماره سوم، پاییز ۸۷.

- 22. Reddy, J.N., "Theory and Analysis of Elastic Plates", Taylor & Francis, Philadelphia, PA, 1999.
- 23. Wang, C.M., Wang, C.Y., and Reddy, J.N.," Exact Solutions for Buckling of Structural Members", CRC Press, Boca Raton, FL, 2005.
- 24. Jones, Robert M., "Mechanics of Composite Materials", McGraw-Hill, New York, 1975.
- ۲۵- نجفیزاده، م.م.، علوی، م.، سلماسی، ف. و آذری، ش.، " تحلیل خیز صفحات چهار گوش کامپوزیت براساس تئوری سطح خنثی به روش کانتروویچ توسعهیافته"، فصلنامه علمی پژوهشی تحقیقات مکانیک کاربردی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تاکستان، شماره چهارم، بهار ۸۸.
- Edery-Azulay, L. and Abramovich, H., "Piezolaminated Plates–Highly Accurate Solutions Based on the Extended Kantorovich Method", Compos. Struct., Vol. 84, No. 3, pp. 241-247, 2007.
- 27. Weinstock, R.," Calculus of Variations with Applications to Physics and Engineering", Dover, New York, 1974.

- 6. Fariborz, S.J. and Pourbohloul, A., "Application of the Extended Kantorovich Method to the Bending of Variable Thickness Plates", Comp. Struct., Vol. 31, No. 6, pp. 957–965, 1989.
- Kerr, A.D., "An Extended Kantorovich Method for the Solution of Eigen Value Problems", Solids and Struct., Vol. 5, No. 6, pp. 559–572, 1969.
- Jones, R. and Milne, B.J., "Application of Extended Kantorovich Method to the Vibration of Clamped Rectangular Plates", Sounds and Vib., Vol. 45, No. 3, pp. 309–316, 1976.
- 9. Yuan, S. and Jin, Y., "Computation of Elastic Buckling Loads of Rectangular Thin Plates, Using the Extended Kantorovich Method", Comp. Struct., Vol. 66, No. 6, pp. 861–867, 1998.
- Ungbhakorn, V. and Singhatanadgid, P., "Buckling Analysis of Symmetrically Laminated Composite Plates by the Extended Kantorovich Method", Compos. Struct., Vol. 73, No. 1, pp. 120–128, 2006.
- Jana, P. and Bhaskar, K., "Stability Analysis of Simply-Supported Rectangular Plates under Non-Uniform Uniaxial Compression, Using Rigorous and Approximate Plane Stress Solutions", Thin-Walled Struct., Vol. 44, No. 5, pp. 507–516, 2006.
- Kim, H.S., Cho, M., and Kim, G.I., "Free-Edge Strength Analysis in Composite Laminates by the Extended Kantorovich Method", Compos. Struct., Vol. 49, No. 2, pp. 229–235, 2000.
- Aghdam, M.M., Shakeri, M., and Fariborz, S.J., "Solution to the Reissner Plate with Clamped Edges", ASCE J. Eng. Mech., Vol. 122, No. 7, pp. 679–682, 1996.
- Aghdam, M.M. and Falahatgar, S.R., "Bending Analysis of Thick Laminated Plates Using Extended Kantorovich Method", Compos. Struct., Vol. 62, No. 3-4, pp. 279–283, 2003.
- Liew, K.M., Xiang, Y., and Kitipornchai, S., "Analytical Buckling Solution for Mindlin Plates Involving Free Edges", Mech. Sci., Vol. 38, No. 10, pp. 1127–1138, 1996.
- Aghdam, M.M., Mohammadi, M., and Erfanian, V., "Bending Analysis of Thin Annular Sector Plates, Using Extended Kantorovich Method", Thin-Walled Struct., Vol. 45, No. 12, pp. 983– 990, 2007.
- 17. Aghdam, M.M. and Mohammadi, M., "Extended Kantorovich Method for Static Analysis of Thick Orthotropic Sector Plates",