تحلیل خمشی صفحات چهارگوش کامپوزیتی با لایه‌های پیزوالکتریک بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی به‌روش کانترورویچ توسعه یافته

سیدمحمدمهدی نجفی‌زاده[1]
دانشکده فنی و مهندسی
دانشگاه آزاد اسلامی- واحد اراک

شیما آذری[2] و فؤاد سلماسی[3]
دانشکده فنی و مهندسی
دانشگاه آزاد اسلامی- واحد تفرش

(تاریخ دریافت: ۸۸/۱۰/۲۸ ؛ تاریخ پذیرش: ۸۹/۷/۱۱)

چکیده

در این مقاله، به بررسی و تحلیل خمش ورق مستطیل شکل کامپوزیتی به‌همراه لایه‌های پیزوالکتریک پرداخته می‌شود. ورق میانی یک بار ایزوتروپ و بار دیگر ارتوتروپ در نظر گرفته شده و خمش ورق تحت اثر بارگذاری‌های یکنواخت و سینوسی و در حضور خاصیت پیزوالکتریک به کمک روش کانترورویچ توسعه یافته بررسی شده است. تحلیل بر اساس فرضیات تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی صورت گرفته و فقط به حل مکانیزم پیزوالکتریک از نوع الحاقی محدود شده است. با استفاده از روش گالرکین و به کمک روش کانترورویچ، معادلات حرکت ورق که به صورت دستگاه معادلات دیفرانسیل وابسته غیرخطی می‌باشند، به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی کوپل شده تبدیل شده‌اند. این معادلات به کمک روش اپراتور، غیرکوپل و سپس حل شده‌اند. درستی نتایج حاصل، برای ورق کامپوزیت تحت شرایط تکیه‌گاهی متفاوت، با نتایج حاصل از حل ANSYS و همچنین تحلیل بر مبنای فرضیات تئوری کلاسیک صفحات مقایسه و تأیید شده است. نتایج نشان می‌دهد که روش کانترورویچ، روش دقیقی برای حل معادلات مربوطه بوده و پاسخ‌ها به سرعت هم‌گرا می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: روش کانترورویچ توسعه یافته، روش گالرکین، تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی، روش اپراتور، پیزوالکتریک

Bending Analysis of Rectangular Composite Plates with Piezoelectric Layers, Based on the First Order Shear Deformation Theory, Using the Extended Kantorovich Method

M.M. Najafizadeh
Mech. Eng. Dep’t.
Islamic Azad Univ., Arak Branch

Sh. Azari and F. Salmasi
Mech. Eng. Dep’t.
Islamic Azad Univ., Tafresh Branch

(Received: 18 Jan. 2010, Accepted: 3 Oct. 2010)

ABSTRACT

This paper presents a theoretical bending analysis of rectangular composite plates with piezoelectric layers. The host plate has been chosen orthotropic and isotropic, respectively and has been analyzed under uniform and sinusoidal loads with piezoelectric property, using the extended Kantorovich iterative procedure. The solution has been developed, based on the first order shear deformation theory, and it is limited only for the solution of extension type piezoelectric mechanism. With the iterative procedure and using Galerkin method, the dependent non-linear system of differential equations of the plate have been changed to the couple linear differential equations, which is decoupled and solved by the operator method. The Result of the present analytical method for composite plate, under different boundary conditions, have been verified by comparing with classical plate theory results and with finite element and ANSYS result. The results show high accuracy, while the iterative process converges very rapidly.

Keywords: Extended Kantorovich Method, Galerkin Method, First Order Shear Deformation Theory, Operator Method, Piezoelectric

۱- دانشیار(نویسنده پاسخگو): mohammadnajafizadeh@yahoo.com
۲- مربی
۳- مربی

۱- مقدمه

استفاده‌های نخستین از مواد پیزوالکتریک به سال ۱۸۸۰، زمانی که برادران کوری اثر مستقیم مواد پیزوالکتریک را کشف کردند. از آن زمان تا چند دهه پیش، استفاده از مواد پیزوالکتریک به استفاده‌های گوناگون در ترانسدیوسرها محدود شده بود، اما استفاده از آنها به عنوان محرک‌ها در سال‌های ۱۹۸۰آغازگردید. همچنین توسعه و گسترش مواد کامپوزیتی هوشمند برای استفاده در سازه‌های هوا و فضا مورد توجه قرار گرفت[۱]. از انواع سرامیک‌ها که می‌توانند خواص پیزوالکتریکی داشته باشند می‌توان به سرب-تیتانیت- زیرکونیت[1] اشاره کرد. نوع دیگری از این پیزوسرامیک‌ها شامل سرب-زیرکونیت[2] و سرب-تیتانیت[3]می‌باشد و همچنین می‌توان به باریم- تیتانیت[4] نیز اشاره کرد.

اغلب آنالیزهای دوبعدی اجزاء محدود برای صفحات و پوسته‌هایی که در سازه‌های هوشمند به کار می‌روند، بر پایه تئوری کلاسیک صفحات یا تئوری لایه‌ای صفحات می‌باشد که در آن میدان جابه‌جایی در طول ضخامت، خطی در نظر گرفته شده است[۲].

کارگر نوین و نجفی زاده، ارتعاشات ورق FGM با لایه‌های محرک و سنسور را مورد بررسی قرار داده‌اند. معادلات دیفرانسیل حرکت ورق را بر اساس تئوری کلاسیک صفحات به‌دست آورده و معادله حرکت حاصل، با استفاده از سری‌های فوریه حل شده و تأثیر افزایش حجم ماده FGM روی تغییرات فرکانس مورد بررسی قرار گرفته است[۳].

میشل و ردی[5] معادلات حرکت ورق کامپوزیتی با لایه‌های پیزوالکتریک را مورد بررسی قرار داده‌اند. معادلات حرکت بر اساس روش انرژی به‌دست آمده و محاسبات بر مبنای کوپلینگ بین تغییر شکل‌های مکانیکی و تغییرات شارژ الکتریکی صورت گرفته است[۴].روش کانتروویچ توسط کر[6] [۵] در سال ۱۹۶۸ برای حل مسئله پیچش میله منشوری با مقطع مستطیل شکل مورد استفاده قرار گرفت. نتایج این آنالیزها تطابق زیادی با حل‌های شناخته شده‌ای که در دسترس می‌باشد دارد. پس از آن این روش، برای حل مسائل گوناگون در الاستیسیته دوبعدی از جمله مسئله خمش ورق نازک مستطیل شکل ایزوتروپ [۶]، حل مسئله مقدار ویژه در سال ۱۹۶۹ توسط کر[۷]، ارتعاشات آزاد [۸]، کمانش [۱۱-۹] و آنالیز کرنش [۱۲]توسط کیم[7] مورد توجه قرار گرفت.

اقدم [۱۳] پاسخی را برای خمش در ورق مستطیلی از نوع رایزنر و ایزوتروپیک گیردار به‌دست آورده است. پس از آن اقدم و فلاحتگر[۱۴]، این مدل را برای رسیدن به رفتار خمشی در ورق‌های مستطیلی ضخیم گسترش دادند.

در مرجع [۱۵]، با معرفی روش‌های کانتروویچ کلاسیک و توسعه یافته، نیروهای کمانش[8] محاسبه شده است.

همچنین صحت روش کانتروویچ در مختصاتی غیر از مختصات کارتزین توسط اقدم در سال ۲۰۰۷ برای آنالیز تنش قطاع[۱۶]و خمش ورق قطاع نازک ارتوتروپ [۱۷]، و ابوحمزه[9][۱۸] در سال ۲۰۰۷ برای پنل استوانه‌ای کامپوزیتی مورد بررسی قرار گرفته است.

کر و دالایی[10][۱۹]، ورق لایه‌ای مستطیلی مبتنی بر تئوری کلاسیک را بررسی کرده و دریافتند که هم‌گرایی در جواب روشی که مبتنی بر روش کانتروویچ توسعه یافته است بسیار سریع بوده و شکل نهایی پاسخ به‌دست آمده، مستقل از نخستین انتخاب است.

کر و الکساندر[11] [۲۰]، نشان دادند که روش تکرار شونده به سرعت هم‌گرا بوده و شکل نهایی معادله به‌دست آمده، مستقل از انتخاب اولیه $g_n(y)$ است. به‌علاوه هر چند روش کانتروویچ توسعه یافته مبتنی بر اصل تغییرات است، تابع آزمون اولیه لازم نیست هیچ‌کدام از شرایط مرزی هندسی و طبیعی را ارضاء کند. روش تکرار شونده پاسخ‌هایی می‌دهد که سرانجام تمام شرایط مرزی را ارضاء می‌کند[۲۱].

با مروری بر تحقیقات صورت گرفته مشخص می‌شود که تنها تعداد کمی از تحقیقات، پاسخ خمشی ورق را با استفاده

1- Lead-Zirconate Titanate
2- Lead-Zirconate($PbZrO_3$)
3- Lead-Titanate($PbTiO_2$)
4- Barium-Titanate ($BaTiO_3$)
5- Mitchell & Reddy
6- Kerr
7- Kim
8- buckling loads
9- Abouhamze
10- Dalei
11- Alexander

از روش کانتروویچ به‌دست آورده و تا کنون تمامی آن‌ها به حالتی که تمام لبه‌های ورق گیردار باشد محدود شده‌اند.

در این مقاله، از روش کانتروویچ توسعه یافته و با استفاده از روش گالرکین و به کمک روش اپراتور، معادلات دیفرانسیل تعادل ورق مستطیل شکل کامپوزیتی به همراه لایه‌های پیزوالکتریک تحلیل شده است. سپس نتایج حاصل برای ورق، تحت شرایط تکیه‌گاهی متفاوت و تحت اثر بارگذاری‌های یکنواخت و سینوسی و در حضور خاصیت پیزوالکتریک، با نتایج حاصل از حل ANSYS و همچنین حل بر اساس فرضیات تئوری کلاسیک صفحات مقایسه شده است.

۲ - روش کانتروویچ

برای حل معادله دیفرانسیل به کمک روش کانتروویچ، تابع مورد نظر به صورت حاصل ضرب توابعی از متغیرهای موجود در معادله دیفرانسیل مطابق رابطه زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$W(x.y) = K \cdot \Phi(x) \cdot \Psi(y) , \qquad (۱)$$

که در آن، ضریب K برای بی‌بعد کردن توابع $\Phi(x), \Psi(y)$ می‌باشد[۲۱].

در معادله (۱) یکی از توابع $\Phi(x)$ و یا $\Psi(y)$ را معلوم فرض نموده و با قرار دادن معادله (۱) در معادله دیفرانسیل خمش ورق و با استفاده از یکی از روش‌های باقی‌مانده وزنی[۱]، معادله دیفرانسیل دیگری که به صورت معادله دیفرانسیل کامل می‌باشد، به‌دست خواهد آمد. در مرحله بعد، جواب به‌دست آمده را معلوم فرض نموده و به‌کمک رابطه (۱) و معادله دیفرانسیل مسئله، تابع دیگر به‌دست می‌آید. این عمل تکرار شده تا جواب‌ها به مقدار خاص هم‌گرا شوند[۲۱].

در روش کانتروویچ کلاسیک فرض می‌شود که جابه‌جایی ورق به صورت زیر است:

$$w_m(x,y) = \sum_{n=1}^{m} f_n(x) \cdot g_{n-1}(y) , \qquad (۲)$$

که در آن، $g_{n-1}(y)$ توابع انتخابی قبلی هستند[۲۱].

رابطه (۲) در معادله حرکت ورق جایگزین شده و سپس با اعمال روش گالرکین و با استفاده از قضیه اساسی حساب تغییرات، m معادله دیفرانسیل معمولی برای تعیین m تابع مجهول $f_n(x)$ به‌دست خواهد آمد. این معادلات دیفرانسیل توسط شرایط مرزی متناظر حل می‌شوند. سپس توابع $f_n(x)$ به‌وجود آمده دوباره در معادله (۲) جایگزین می‌شود[۲۱].

در روش کانتروویچ توسعه یافته، عملیات تکرار ادامه می‌یابد تا پاسخ به درجه دقت مطلوب هم‌گرا شود. برای این حالت فرض می‌شود خیز ورق به شکل زیر است[۲۱]:

$$w_m(x,y) = \sum_{n=1}^{m} f_n(x) \cdot g_n(y) . \qquad (۳)$$

که در آن، $f_n(x)$ توابع به‌دست آمده از مرحله قبل (کانتروویچ کلاسیک) بوده و $g_n(y)$ مجهول است. $g_n(y)$ ها از m معادله خطی به‌دست می‌آیند. عملیات تکرار با جایگزینی مجدد $g_n(y)$ در معادله (۲) و به‌دست آوردن مجهول $f_n(x)$ ادامه می‌یابد[۲۱].

۳- استخراج معادلات حرکت ورق بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی[2] (FSDT)

در تئوری مرتبه اول، همانند تئوری کلاسیک، دو فرض زیر معتبر است:

۱)خطوط مستقیم عمود بر صفحه میانی قبل از تغییر شکل، بعد از تغییر شکل هم مستقیم باقی می‌مانند و

۲) خطوط مستقیم عمود بر صفحه میانی، تغییر طول نمی‌دهند.

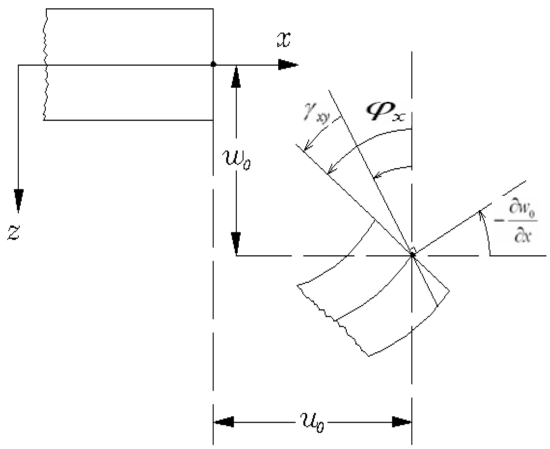
اما، در تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی، بر خلاف فرضیات تئوری کلاسیک، صفحات عمود بر سطح میانی، بعد از تغییر شکل دیگر بر سطح میانی عمود باقی نمی‌مانند (شکل **۱**). در نتیجه با در نظر گرفتن این تئوری، مؤلفه‌های کرنش نرمال $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}$ و کرنش برشی $\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xz}$، وجود داشته و تنها مؤلفه کرنش نرمال ε_{zz}، صفر می‌باشد. همچنین مؤلفه‌های جابه‌جایی در راستای x و y (یعنی u,v) به‌صورت توابعی خطی نسبت به z فرض گردیده و مؤلفه جابه‌جایی در راستای ضخامت، یعنی w مستقل از z در نظر گرفته می‌شود. با این توضیح میدان جابه‌جایی به‌صورت زیر نوشته می‌شود[۲۲]:

1- Weighted Residual Method

2- First Order Shear Deformation Theory

$$u(x,y,z,t)=u_{\circ}(x,y,t)-z\,\varphi_x(x,y,t)\,,$$
$$v(x,y,z,t)=v_{\circ}(x,y,t)-z\,\varphi_y(x,y,t)\,, \qquad (۴)$$
$$w(x,y,z,t)=w_{\circ}(x,y,t)\,.$$

در رابطه (۴)، $u_0(x,y,t), v_0(x,y,t), w_0(x,y,t)$ مؤلفه‌های جابه‌جایی صفحه میانی و $\phi_x(x,y,t)$ و $\phi_y(x,y,t)$ چرخش عمود بر صفحه میانی به ترتیب حول محورهای x و y می‌باشند.



شکل(۱): نمودار خیز ورق با فرضیات تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی.

همچنین مؤلفه‌های کرنش در هر نقطه از ورق مطابق رابطه زیر تعریف می‌شود[۲۲]:

$$\{\varepsilon\}=\{\varepsilon^0\}+(z)\{\varepsilon^1\}\,. \qquad (۵)$$

در رابطه فوق[۲۲]:

$$\{\varepsilon\}=\{\varepsilon_{xx}\quad \varepsilon_{yy}\quad \gamma_{yz}\quad \gamma_{xz}\quad \gamma_{xy}\}^T\,,$$
$$\{\varepsilon^0\}=\Big\{\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{1}{2}(\frac{\partial w_0}{\partial x})^2,\frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{1}{2}(\frac{\partial w_0}{\partial y})^2\,,$$
$$\frac{\partial w_0}{\partial y}+\varphi_y\,,\frac{\partial w_0}{\partial x}+\varphi_x\,,\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial w_0}{\partial x}\quad\Big\}^T\,, \qquad (۶)$$
$$\{\varepsilon^1\}=\Big\{\frac{\partial \varphi_x}{\partial x},\frac{\partial \varphi_y}{\partial y},0,0,\frac{\partial \varphi_x}{\partial y}+\frac{\partial \varphi_y}{\partial x}\quad\Big\}^T\,.$$

برای تعیین معادلات حاکم بر ورق از اصل همیلتون استفاده می‌شود[۲۲].

$$\int_0^T(\delta U+\delta V-\delta K)dt=0\,. \qquad (۷)$$

در این رابطه، δU انرژی کرنشی مجازی، δV کار مجازی انجام شده توسط نیروی خارجی، δK انرژی جنبشی مجازی بوده و با توجه به فرضیات FSDT با رابطه زیر تعریف می‌شود[۲۲]:

$$\delta U=\int_{\Omega_0}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(\sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx}+\sigma_{yy}\delta\varepsilon_{yy}+2\sigma_{xy}\delta\varepsilon_{xy}+2\sigma_{xz}\delta\varepsilon_{xz}$$
$$+2\sigma_{yz}\delta\varepsilon_{yz})dzdxdy\,. \qquad (۸)$$

در رابطه فوق Ω_0 معرف محدوده سطح ورق قبل از تغییر شکل است. با انتگرال‌گیری از رابطه فوق در راستای ضخامت خواهیم داشت:

$$\delta U=\int_{\Omega_0}(N_{xx}\delta\varepsilon_{xx}^0+M_{xx}\delta\varepsilon_{xx}^1+N_{yy}\delta\varepsilon_{yy}^0+M_{yy}\delta\varepsilon_{yy}^1 \qquad (۹)$$
$$+N_{xy}\delta\gamma_{xy}^0+M_{xy}\delta\gamma_{xy}^1+Q_x\delta\gamma_{xz}^0+Q_y\delta\gamma_{yz}^0)dxdy\,,$$

که در آن، N_{ij} نیروهای درون صفحه‌ای، M_{ij} ممان‌ها و Q_i نیروهای برشی در واحد طول می‌باشند و به صورت زیر تعریف می‌شوند[۲۲]:

$$\{N_{xx},N_{yy},N_{xy}\}=\int_{-h/2}^{h/2}\{\sigma_{xx},\sigma_{yy},\sigma_{xy}\}\cdot dz\,, \qquad (۱۰)$$
$$\{M_{xx},M_{yy},M_{xy}\}=\int_{-h/2}^{h/2}\{\sigma_{xx},\sigma_{yy},\sigma_{xy}\}\cdot z\cdot dz\,, \qquad (۱۱)$$
$$\{Q_x,Q_y\}=K_s\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\{\sigma_{yz},\sigma_{xz}\}dz\,. \qquad (۱۲)$$

در رابطه فوق، K_s ضریب تصحیح برش[۱] بوده و مقدار آن با توجه به شکل مقطع ۵/۶ می‌باشد. در صورتی‌که q بار خارجی وارد بر ورق باشد، مقدار انرژی پتانسیل از رابطه زیر به‌دست می آید[۲۲]:

$$\delta V=-\int_{\Omega_0}q\,\delta w_0\cdot dxdy\,. \qquad (۱۳)$$

همچنین انرژی جنبشی عبارتست از:

$$\delta K=\int_{\Omega_0}\int_{-h/2}^{h/2}\rho_0(\dot u\delta\dot u+\dot v\delta\dot v+\dot w\delta\dot w)dzdxdy, \qquad (۱۴)$$

که در آن، ρ_0 معرف چگالی است. با قرار دادن رابطه (۴) در رابطه (۱۴) نتیجه می‌شود:

$$\delta K=\int_{\Omega_0}[-I_0(\dot u_0\delta\dot u_0+\dot v_0\delta\dot v_0+\dot w_0\delta\dot w_0-I_1(\dot\varphi_x\delta\dot u_0+\delta\dot\varphi_x\dot u_0+ \qquad (۱۵)$$
$$\dot\varphi_y\delta\dot v_0+\delta\dot\varphi_y\dot v_0)-I_2(\dot\varphi_x\delta\dot\varphi_x+\dot\varphi_y\delta\dot\varphi_y)]dxdy\,.$$

در رابطه فوق، مقادیر I_0,I_1,I_2 به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\{I_0,I_1,I_2\}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\{1,z,z^2\}\rho dz$$
$$=\rho\left\{h,0,\frac{h^3}{12}\right\}. \qquad (۱۶)$$

1- Shear Correction Factor

با جای‌گذاری مقادیر انرژی جنبشی و پتانسیل و کار مجازی ناشی از نیروی خارجی در رابطه (۷) و ساده‌سازی نتیجه می‌شود[۲۲]:

$$\begin{aligned}\int_0^T\Big\{\int_{\Omega_0}&[-(N_{xx,x}+N_{xy,y}-I_0\ddot{u}_0-I_1\ddot{\phi}_x)\delta u_0\\&-(N_{xy,x}+N_{yy,y}-I_0\ddot{v}_0-I_1\ddot{\phi}_y)\delta v_0\\&-(M_{xx,x}+M_{xy,y}-Q_x-I_2\ddot{\phi}_x-I_1\ddot{u}_0)\delta\phi_x\\&-(M_{xy,x}+M_{yy,y}-Q_y-I_2\ddot{\phi}_y-I_1\ddot{v}_0)\delta\phi_y\\&-(Q_{x,x}+Q_{y,y}+\alpha(u_0,v_0,w_0)+q-I_0\ddot{w}_0)\delta w_0]\,dx\,dy\,dt=0,\end{aligned} \tag{۱۷}$$

که در آن، [۲۲]:

$$\begin{aligned}\alpha(u_0,v_0,w_0)=&\frac{\partial}{\partial x}(N_{xx}\frac{\partial w_0}{\partial x}+N_{xy}\frac{\partial w_0}{\partial y})\\&+\frac{\partial}{\partial y}(N_{xy}\frac{\partial w_0}{\partial x}+N_{yy}\frac{\partial w_0}{\partial y}).\end{aligned} \tag{۱۸}$$

با برابر صفر قرار دادن ضرایب $\delta\varphi_y,\delta\varphi_x,\delta w_0,\delta v_0,\delta u_0$، معادلات حرکت به صورت زیر تعیین می‌شوند[۲۲]:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial N_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=I_0\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}+I_1\frac{\partial^2\varphi_x}{\partial t^2},\\&\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial N_{yy}}{\partial y}=I_0\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}+I_1\frac{\partial^2\varphi_y}{\partial t^2},\\&\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+\alpha(u_0,v_0,w_0)+q=I_0\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2},\\&\frac{\partial M_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}-Q_x=I_1\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}+I_2\frac{\partial^2\varphi_x}{\partial t^2},\\&\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial M_{yy}}{\partial y}-Q_y=I_1\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}+I_2\frac{\partial^2\varphi_y}{\partial t^2}.\end{aligned} \tag{۱۹}$$

در نهایت، با صرف‌نظر از ترم زمان، معادلات تعادل ورق بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی (FSDT)، به صورت زیر تعیین می‌شود[۲۲]:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial N_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=0,\\&\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial N_{yy}}{\partial y}=0\sqrt{a^2+b^2},\\&\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+q=0,\\&\frac{\partial M_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}-Q_x=0,\\&\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial M_{yy}}{\partial y}-Q_y=0.\end{aligned} \tag{۲۰}$$

۴- تحلیل خمش ورق پیزو- ارتوتروپ با تئوری FSDT به کمک روش کانتروویچ توسعه یافته

از آنجا که مدل ورق مورد بحث دارای سه لایه بوده که شامل دو تکه ورق پیزوالکتریک و یک ورق از جنس ارتوتروپ است، مقادیر $M_{xx},M_{yy},M_{xy},N_{xx},N_{yy}$ و N_{xy} کل با توجه به رابطه (۱۱-۱۰) ، برابر است با:

$$\begin{Bmatrix}N_{xx}\\N_{yy}\\N_{xy}\end{Bmatrix}=\int_{z_2}^{z_1}\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}^h\\\sigma_{yy}^h\\\sigma_{xy}^h\end{Bmatrix}dz+\int_{z_1}^{z_\circ}\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}^a\\\sigma_{yy}^a\\\sigma_{xy}^a\end{Bmatrix}Rdz+\int_{z_2}^{z_3}\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}^s\\\sigma_{yy}^s\\\sigma_{xy}^s\end{Bmatrix}Rdz, \tag{۲۱}$$

$$\begin{Bmatrix}M_{xx}\\M_{yy}\\M_{xy}\end{Bmatrix}=\int_{z_2}^{z_1}\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}^h\\\sigma_{yy}^h\\\sigma_{xy}^h\end{Bmatrix}z\,dz+\int_{z_0}^{z_1}\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}^a\\\sigma_{yy}^a\\\sigma_{xy}^a\end{Bmatrix}R.z\,dz+\int_{z_2}^{z_3}\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}^s\\\sigma_{yy}^s\\\sigma_{xy}^s\end{Bmatrix}R.z\,dz, \tag{۲۲}$$

که در آن‌ها، نماد h مربوط به صفحهٔ میانی[1] و a مربوط به صفحهٔ محرک[2] و s مربوط به صفحهٔ سنسور[3] و مقدار R در رابطه بالا همان معادلهٔ باکس کار[4] می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R(x,y)=[H(x-a)-H(x+a)].[H(y-a)-H(y+a)]=\begin{cases}1 & -a<x<a\quad,\quad -b<y<b,\\0 & \text{for other points}.\end{cases}$$

در حالت کلی، و در جایی‌که سازوکار عمل‌کرد پیزوالکتریک از نوع الحاقی باشد، صرف‌نظر از مؤلفه‌های کشش صفحه میانی ($u_\circ(x,y)$ و $v_\circ(x,y)$)، می‌توان مقادیر منتجه‌های نیرو و ممان برای ورق کامپوزیتی با لایه‌های پیزوالکتریک را بر اساس روابط (۱۲-۱۱) به‌صورت زیر نوشت[۲۱]:

$$\begin{Bmatrix}M_{xx}\\M_{yy}\\M_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}D_{11}&D_{12}&0\\D_{12}&D_{22}&0\\0&0&D_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{\partial\phi_x}{\partial x}\\\frac{\partial\phi_y}{\partial y}\\\frac{\partial\phi_x}{\partial y}+\frac{\partial\phi_y}{\partial x}\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}F_x(x,y)\\F_y(x,y)\\0\end{Bmatrix}. \tag{۲۳}$$

و همچنین داریم[۲۳]:

1- Host
2- Actuator
3- Sensor
4- Box Car Function

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = K_s \begin{bmatrix} A_{44} & 0 \\ 0 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x \end{Bmatrix}. \qquad (۲۴)$$

که در آن، A_{ij} مؤلفه‌های ماتریس سختی کششی[1] و D_{ij} مؤلفه‌های ماتریس سختی خمشی[2] می‌باشند و عبارتند از[۲۴]:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left(\overline{Q}_{ij}\right)_k dz \ ,$$
$$D_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left(\overline{Q}_{ij}\right)_k .(z)^2 dz \ . \qquad (۲۵)$$

همچنین، $F_y(x,y), F_x(x,y)$ ممان‌های تحریک پیزوالکتریک هستند که عبارتند از[۲۵]:

$$F_{ii} = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{Q_{i3} e_{33}}{Q_{33}} - e_{i3} \right) .E_3 .z \, dz \ . \qquad (۲۶)$$

در رابطه (۲۶)، E_3مؤلفه میدان الکتریکی عمود بر ورق، Q_{ij} ثابت الاستیسیته ورق پیزو الکتریک و e_{ij} ثابت‌های پیزوالکتریک می‌باشد[۲۵]. با توجه به اینکه دو معادله اول (۲۰) مستقل از w می‌باشند، لذا برای تحلیل فقط سه معادله آخر (۲۰) را مد نظر قرار داده و با جای‌گذاری روابط (۲۱-۲۲) در این سه معادله خواهیم داشت:

$$K_s A_{55}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x}\right) + K_s A_{44}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y}\right) = -q \ ,$$
$$D_{11}\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + D_{12}\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + D_{66}\left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y}\right) + \frac{\partial F_x(x,y)}{\partial x}$$
$$-K_s A_{55}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x\right) = 0 \ , \qquad (۲۷)$$
$$D_{22}\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + D_{12}\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + D_{66}\left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y}\right) + \frac{\partial F_y(x,y)}{\partial y}$$
$$-K_s A_{44}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y\right) = 0 \ .$$

دستگاه (۲۷) یک دستگاه معادلات دیفرانسیل غیر خطی کوپل است که با روش‌های معمول به آسانی قابل حل نیست، اما می‌توان با استفاده از روش کانتروویچ آن را به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی، که به راحتی قابل حل است، تبدیل کرد. برای این منظور، و بر اساس آنچه که درباره روش کانتروویچ توضیح داده شد، توابع جابه‌جایی و چرخش به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند :

$$w(x,y) = k \cdot W_x(x) \cdot W_y(y) \ ,$$
$$\phi_x(x,y) = \varphi_x(x) \cdot \varphi_x(y) \ , \qquad (۲۸)$$
$$\phi_y(x,y) = \varphi_y(x) \cdot \varphi_y(y) \ ,$$

که در آن، $k = \sqrt{ab}$.

در حالتی کـه مکـانیزم عمـل‌کـرد پیزوالکتریـک از نـوع الحاقی باشد، مقـادیر منتجـه‌هـای ممـان ناشـی از تحریـک لایه‌های پیزوالکتریک به‌صورت زیر تعریف می‌شوند[۲۶]:

$$q(x,y) = q_0 \cdot \sin(k_x .x)\sin(k_y .y) \ ,$$
$$\begin{Bmatrix} F_x(x,y) \\ F_y(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \cdot \sin(k_x .x)\sin(k_y .y) \\ f \cdot \sin(k_x .x)\sin(k_y .y) \end{Bmatrix}, \qquad (۲۹)$$
$$k_x = \frac{m.\pi}{a}, k_y = \frac{n.\pi}{b} \ .$$

با قرار دادن مقادیر رابطه (۲۸) در دستگاه (۲۷)، دستگاه سـه معادله به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$K_s A_{55}\left(k \frac{\partial^2 W(x)}{\partial x^2} \cdot W(y) + \frac{\partial \varphi_x(x)}{\partial x} \cdot \varphi_x(y)\right)$$
$$+K_s A_{44}\left(k \frac{\partial^2 W(y)}{\partial y^2} \cdot W(x) + \frac{\partial \varphi_y(y)}{\partial y} \cdot \varphi_y(x)\right) = -q \ . \qquad (۳۰)$$

$$D_{11}\frac{\partial^2 \varphi_x(x)}{\partial x^2} \cdot \varphi_x(y) + D_{66}\frac{\partial^2 \varphi_x(y)}{\partial y^2} \cdot \varphi_x(x)$$
$$+(D_{12}+D_{66})\frac{\partial \varphi_y(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_y(y)}{\partial y} + \frac{\partial F_x(x,y)}{\partial x} - K_s A_{55}(\varphi_x(x) \cdot \varphi_x(y) \qquad (۳۱)$$
$$+k \frac{\partial W(x)}{\partial x} \cdot W(y)) = 0.$$

$$D_{22}\frac{\partial^2 \varphi_y(y)}{\partial y^2} \cdot \varphi_y(x) + D_{66}\frac{\partial^2 \varphi_y(x)}{\partial x^2} \cdot \varphi_y(y)$$
$$+(D_{12}+D_{66})\frac{\partial \varphi_x(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_x(y)}{\partial y} + \frac{\partial F_y(x,y)}{\partial y} - K_s A_{44}(\varphi_y(x) \cdot \varphi_y(y) \qquad (۳۲)$$
$$+k \frac{\partial W(y)}{\partial y} \cdot W(x)) = 0.$$

روابط (۳۲-۳۰) پس از ساده‌سازی، به ترتیب در $\phi_x(y)$, $\phi_y(y)$ و $W(y)$ ضرب و از آن‌ها روی ناحیه (0,b)، (طول ورق) انتگرال گرفته می‌شود. با ساده‌سازی روابط، دستگاه معادلات دیفرانسیل را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$k(F_1 d^2 + c_1 F_7)W(x) + F_4 d\varphi_x(x) + c_1 F_5 \varphi_y(x) = B_1 \ ,$$
$$-kc_3 F_4 dW(x) + (F_2 d^2 + c_6)\varphi_x(x) + c_4 F_6 d\varphi_y(x) = B_2 \ , \qquad (۳۳)$$
$$-kc_1 c_3 F_{10} W(x) + c_4 F_{11} d\varphi_x(x) + (c_5 F_3 d^2 + c_7)\varphi_y(x) = B_3 \ .$$

در مجموعه معادلات فوق : $d = \dfrac{d}{dy}, d^2 = \dfrac{d^2}{dy^2}$ و هم‌چنین داریم:

1- Extensional Stiffness Matrix
2- Bending Stiffness Matrix

$$c_1=\frac{A_{44}}{A_{55}}\,,\, c_2=\frac{D_{22}}{D_{11}}, c_3=K_s\frac{A_{55}}{D_{11}}, c_4=\frac{D_{12}+D_{66}}{D_{11}},$$
$$c_5=\frac{D_{66}}{D_{11}}, c_6=c_5F_8-c_3F_2, c_7=c_2F_9-c_1c_3F_3\ . \tag{۳۴}$$

و همچنین داریم:

$$F_1=\int_0^b W(y)^2dy\quad,\qquad F_2=\int_0^b \varphi_x(y)^2dy\ ,$$
$$F_3=\int_0^b \varphi_y(y)^2dy\quad,\qquad F_4=\int_0^b W(y)\varphi_x(y)dy\ ,$$
$$F_5=\int_0^b W(y)\frac{\partial\varphi_y(y)}{\partial y}dy\quad,\qquad F_6=\int_0^b \varphi_x(y)\frac{\partial\varphi_y(y)}{\partial y}dy\ ,$$
$$F_7=\int_0^b W(y)\cdot\frac{\partial^2 W(y)}{\partial y^2}dy\quad,\qquad F_8=\int_0^b \varphi_x(y)\frac{\partial^2\varphi_x(y)}{\partial y^2}dy\ , \tag{۳۵}$$
$$F_9=\int_0^b \varphi_y(y)\frac{\partial^2\varphi_y(y)}{\partial y^2}dy\quad,\qquad F_{10}=\int_0^b \varphi_y(y)\frac{\partial W(y)}{\partial y}dy\ ,$$
$$F_{11}=\int_0^b \varphi_y(y)\frac{\partial\varphi_x(y)}{\partial y}dy\ .$$

و نیز:

$$B_1=\frac{-q_0}{K_sA_{55}}\int_0^b W(y)dy\ ,$$
$$B_2=\frac{-k_x\cdot f}{D_{11}}\cos(k_x\cdot x)\times\int_0^b \varphi_x(y)\sin(k_y\cdot y)dy\ , \tag{۳۶}$$
$$B_3=\frac{-k_y\cdot f}{D_{11}}\sin(k_x\cdot x)\times\int_0^b \varphi_y(y)\cos(k_y\cdot y)dy\ .$$

دستگاه معادلات (۳۳)، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی کوپل است که برای حل آن از روش اپراتور استفاده می‌شود.

۵ – حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی تعادل ورق ارتوتروپ با روش اپراتور

روش اپراتور روشی مناسب و دقیق برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی کوپل، شبیه دستگاه معادلات (۳۳) می‌باشد. اساس این روش بر مبنای دستور کرامر است و در آن با استفاده از اپراتور مشتق یعنی $d=d/dy$ و $d^2=d^2/dy^2$ معادلات دستگاه به شکل اپراتوری مانند رابطه (۳۱) نوشته شده و سپس دستگاه حل می‌شود[۲۷]. با استفاده از دستور کرامر در ریاضیات برای دستگاه (۳۳) می‌توان نوشت:

$$\Delta=\begin{vmatrix} k(F_1d^2+c_1F_7) & F_4d & c_1F \\ -kc_3F_4d & F_2d^2+c_6 & c_4F_6d \\ -kc_1c_3F_{10} & c_4F_{11}d & c_5F_3d^2+c_7 \end{vmatrix}, \tag{۳۷}$$

$$\Delta_{W(x)}=\begin{vmatrix} B_1 & F_4d & c_1F \\ B_2 & F_2d^2+c_6 & c_4F_6d \\ B_3 & c_4F_{11}d & c_5F_3d^2+c_7 \end{vmatrix},$$
$$\Delta_{\varphi_x(x)}=\begin{vmatrix} k(F_1d^2+c_1F_7) & B_1 & c_1F \\ -kc_3F_4d & B_2 & c_4F_6d \\ -kc_1c_3F_{10} & B_3 & c_5F_3d^2+c_7 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{\varphi_y(x)}=\begin{vmatrix} k(F_1d^2+c_1F_7) & F_4d & B_1 \\ -kc_3F_4d & F_2d^2+c_6 & B_2 \\ -kc_1c_3F_{10} & c_4F_{11}d & B_3 \end{vmatrix}.$$

در این روش، توابع $\phi_y(x),\ \phi_x(x)$ و $W(x)$ با عبارات زیر تعریف می‌شوند:

$$W(x)=\frac{\Delta_{W(x)}}{\Delta}\ ,$$
$$\varphi_x(x)=\frac{\Delta_{\varphi_x(x)}}{\Delta}\ , \tag{۳۸}$$
$$\varphi_y(x)=\frac{\Delta_{\varphi_y(x)}}{\Delta}\ .$$

با جای‌گذاری روابط (۳۵) در (۳۶) و با ساده‌سازی داریم:

$$W(x)=S_1\times\sin(k_x\cdot x)+T_1\ ,$$
$$\varphi_x(x)=S_2\times\cos(k_x\cdot x)+T_2\ , \tag{۳۹}$$
$$\varphi_y(x)=S_3\times\sin(k_x\cdot x)+T_3\ .$$

در این روابط ضرایب S_i عبارتند از:

$$S_1=\frac{fk_y}{D_{11}}m_3\sin(k_xx)(c_1c_6F_5-k_x{}^2c_1F_2F_5-k_x{}^2c_4F_4F_6)+$$
$$\frac{fk_x{}^2}{D_{11}}m_2\sin(k_xx)(k_x{}^2c_5F_3F_4-c_1c_4F_5F_6+c_7F_4)\ ,$$
$$S_2=\frac{fk_xk_y}{D_{11}}m_3\cos(k_xx)(kc_1c_4F_6F_7+kc_1c_3F_4F_5-k_x{}^2c_4F_1F_6)+$$
$$\frac{k.fk_x}{D_{11}}m_2\cos(k_xx)(k_x{}^2c_1c_5F_3F_7+k_x{}^2c_7F_1 \tag{۴۰}$$
$$-k_x{}^4c_5F_3F_1+c_1^2c_3F_5^2-c_1c_7F_7)\ ,$$
$$S_3=\frac{k.fk_y}{D_{11}}m_3\sin(k_xx)(k_x{}^2c_3F_4^2+k_x{}^2c_6F_1+k_x{}^2c_1F_2F_7-c_1c_6F_7)+$$
$$\frac{k.fk_x{}^2}{D_{11}}m_2\sin(k_xx)(c_1c_4F_6F_7+c_1c_3F_4F_5-k_x{}^2c_4F_1F_6)\ .$$

همچنین، داریم:

$$T_1=\frac{-q_0}{K_s.A_{55}}\times c_6c_7m_1,$$
$$T_2=0, \tag{۴۱}$$
$$T_3=\frac{-q_0}{K_s.A_{55}}\times k\ c_1c_3c_6F_5m_1.$$

در روابط (۴۱-۴۰) مقادیر m_1, m_2, m_3 به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$m_1 = \int_0^b W(y)dy \ ,\quad m_2 = \int_0^b \varphi_x(y)\sin(k_y \cdot y)dy \ ,\quad m_3 = \int_0^b \varphi_y(y)\cos(k_y \cdot y)dy \ . \tag{۴۲}$$

با توجه به روابط (۳۸) و مقدارگذاری از روابط (۴۲-۳۹) در آن، دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی کوپل (۳۳)، به یک دستگاه خطی مستقل به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}
&A_1\times\frac{d^6W(x)}{dx^6}+A_2\times\frac{d^4W(x)}{dx^4}+A_3\times\frac{d^2W(x)}{dx^2}+A_4\times W(x)=S_1\sin(k_x x)+T_1 ,\\
&A_1\times\frac{d^6\varphi_x(x)}{dx^6}+A_2\times\frac{d^4\varphi_x(x)}{dx^4}+A_3\times\frac{d^2\varphi_x(x)}{dx^2}+A_4\times\varphi_x(x)=S_2\sin(k_x x)+T_2 ,\\
&A_1\times\frac{d^6\varphi_y(x)}{dx^6}+A_2\times\frac{d^4\varphi_y(x)}{dx^4}+A_3\times\frac{d^2\varphi_y(x)}{dx^2}+A_4\times\varphi_y(x)=S_3\sin(k_x x)+T_3 \ .
\end{aligned} \tag{۴۳}$$

در معادلات فوق داریم:

$$\begin{aligned}
&A_1 = kc_5F_1F_2F_3 \ ,\\
&A_2 = kc_1c_5F_2F_3F_7 + kc_3c_5F_3F_4^2 - kc_4^2F_1F_6F_{11} + kc_7F_1F_2 + kc_5c_6F_1F_3 \ ,\\
&A_3 = kc_1^2c_3F_2F_5F_{10} + kc_6c_7F_1 - kc_1c_3c_4F_4F_6F_7 - kc_1c_4^2F_6F_7F_{11} + kc_1c_7F_2F_7 + kc_1c_5c_6F_3F_7 - kc_1c_3c_4F_4F_5F_{11} + kc_3c_7F_4^2 \ ,\\
&A_4 = kc_1c_6c_7F_7 + kc_1^2c_3c_6F_5F_{10} \ .
\end{aligned} \tag{۴۴}$$

هر یک از معادلات رابطه (۴۴)، یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه ۴ با معادله مشخصه زیر می‌باشد:

$$A_1\lambda^6 + A_2\lambda^4 + A_3\lambda^2 + A_4 = 0, \tag{۴۵}$$

که جواب آن را به‌صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}
W(x)=\sum_{i=1}^{6} p_i .\exp(\lambda_i x)+SP_1\sin(k_x x)+\dfrac{T_1}{A_4}\\
\varphi_x(x)=\sum_{i=1}^{6} q_i .\exp(\lambda_i x)+SP_2\cos(k_x x)+\dfrac{T_2}{A_4}\\
\varphi_y(x)=\sum_{i=1}^{6} r_i .\exp(\lambda_i x)+SP_3\sin(k_x x)+\dfrac{T_3}{A_4}
\end{cases} . \tag{۴۶}$$

در این رابطه مقادیر λ_i عبارت است از شش ریشه معادله مشخصه معادله (۴۵) و عبارات (T_i / A_4) $(i=1,2,3)$ معرف جواب‌های خصوصی مسئله بوده و SP_i نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$SP_i = \frac{S_i}{-k_x^6A_1 + k_x^4A_2 - k_x^2A_3 + A_4} \ ,\quad i = 1,2,3.$$

با توجه به نوع شرایط مرزی که در هریک از لبه‌های ورق وجود دارد، می‌توان مقادیر اولیه توابع $\phi_y(x), \phi_x(x)$ و $W(x)$ را به‌دست آورد. به عنوان مثال، برای ورق با شرایط مرزی گیردار در لبه‌های $x=0,a$ [۲۶] داریم:

$$W(0)=W(a)=0 \ ,\quad \left.\frac{dW(x)}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{dW(x)}{dx}\right|_{x=a} = 0 \ ,\quad \phi_y(0)=\phi_y(a)=0, \tag{۴۷}$$

و یا اگر تکیه‌گاه‌ها به صورت مفصلی باشند، داریم:

$$W(0)=W(a)=0 \ ,\quad \left.\frac{d^2W(x)}{dx^2}\right|_{x=0} = \left.\frac{d^2W(x)}{dx^2}\right|_{x=a} = 0 \quad \varphi_x(0)=\varphi_x(a)=0 \tag{۴۸}$$

در ادامه، با مشخص شدن توابع $\phi_y(y), \ \phi_x(y)$ و $W(y)$، مجدداً همین روند حل برای تعیین توابع $\phi_y(x), \phi_x(x)$ و $W(x)$ به‌کار برده می‌شود. در این حالت دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی به صورت زیر به‌دست می‌آید، که با حل آن مقادیر توابع $\phi_y(x), \ \phi_x(x)$ و $W(x)$ به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$\begin{aligned}
&k(G_7+c_1G_1d^2)W(y)+G_5\varphi_x(y)+c_1G_4d\varphi_y(y)=V_1 ,\\
&-kc_3G_{10}W(y)+(J_1+c_5G_2d^2)\varphi_x(y)+c_4G_6d\varphi_y(y)=V_2 ,\\
&-kc_1c_3G_4dW(y)+c_4G_{11}d\varphi_x(y)+(c_2G_3d^2+J_2)\varphi_y(y)=V_3
\end{aligned} \tag{۴۹}$$

در این حالت نیز مقادیر هر یک از ضرایب با روش‌های حل عددی نظیر آنچه که در مرحله قبل گفته شد محاسبه می‌شود. با تکرار این روش، پس از حداقل سه بار تکرار، پاسخ‌ها به دقت و هم‌گرایی مناسبی می‌رسند.

۶ - نتایج عددی

برنامه محاسباتی برای روش تکرارشونده کانتروویچ توسط نرم‌افزار MAPLE نوشته شده و نتایج به‌دست آمده با نتایج حاصل از روش‌های حل دیگر برای ورق مشابه مقایسه شده است. ورق مربعی، به ابعاد ۱۰×۱۰cm و ضخامت ۰/۸mm از جنس آلومینیوم و گرافیت اپوکسی انتخاب شده است. به‌عنوان اولین مثال، مسئله خمش ورق مربعی شکل

آلومینیوم (ایزوتروپ)، با خواص مطرح شده یک‌بار برای حالتی که ورق به تنهایی تحت بارگذاری یکنواخت و سینوسی قرار دارد، و بار دیگر برای حالتی که دو لایه پیزوالکتریک هر یک به ضخامت ۰/۱ mm به بالا و پایین ورق چسبانده شده، به‌کمک روابط به‌دست آمده در تئوری FSDT، مورد بررسی قرار گرفته است. در ادامه و در جدول **۱** نتایج به‌دست آمده با حل ANSYS و نتایج به‌دست آمده از همین روش بر اساس فرضیات تئوریCLPT [۲۱] و هم‌چنین توسط تیموشنکو[1] [۲۶] مقایسه شده و صحت نتایج تأیید می‌شود. پاسخ‌های تیموشنکو (فقط برای ورق ایزوتروپیک مربعی) به فرم خلاصه $w=\alpha q_0 a^4/D$ می‌باشد، که پارامتر α مربوط به شرایط مرزی ورق، q_0 بار توزیع شده عرضی روی ورق، a ابعاد ورق و D سختی خمشی آن می‌باشد. در این حالت برای ورق آلومینیوم، D=3.2774 [Nm^2/m] [۲۶].

در کلیه حالات، برای هر دو نوع بارگذاری، q0=1 [N/m^2] در نظر گرفته شده است. هم‌چنین شرایط مرزی در نظر گرفته شده برای تکیه‌گاه‌های مورد بحث در این مقاله به‌صورت زیر تعریف شده است[۲۶]:

$$\textit{Simply supported edge}:\quad w_x=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\phi_x=0$$

$$\textit{Clamped edge}:\quad w_x=\frac{\partial w}{\partial x}=\phi_y=0$$

و خواص موادی که مسئله برای آنها حل شده است به شرح زیر است[۲۶]:

آلومینیوم :

E=69 Gpa, v=0.32, G=26.13 Gpa,

گرافیت اپوکسی :

$E_{11}=9.8\times 1010$ [N/m^2], $E_{22}=0.79\times 1010$ [N/m^2], $G12=0.56\times 1010$ [N/m^2] , $v_{12}=0.28$.

پیزو الکتریک :

$E_{11}=8.84\times 1010$ [N/m^2], $E_{22}=7.6\times 1010$ [N/m^2], $G_{12}=2.1\times 1010$ [N/m^2] , $v_{12}=0.37$, $e_{31}=-7.209$ [C/m^2] , $e_{33}=15.118$ [C/m^2].

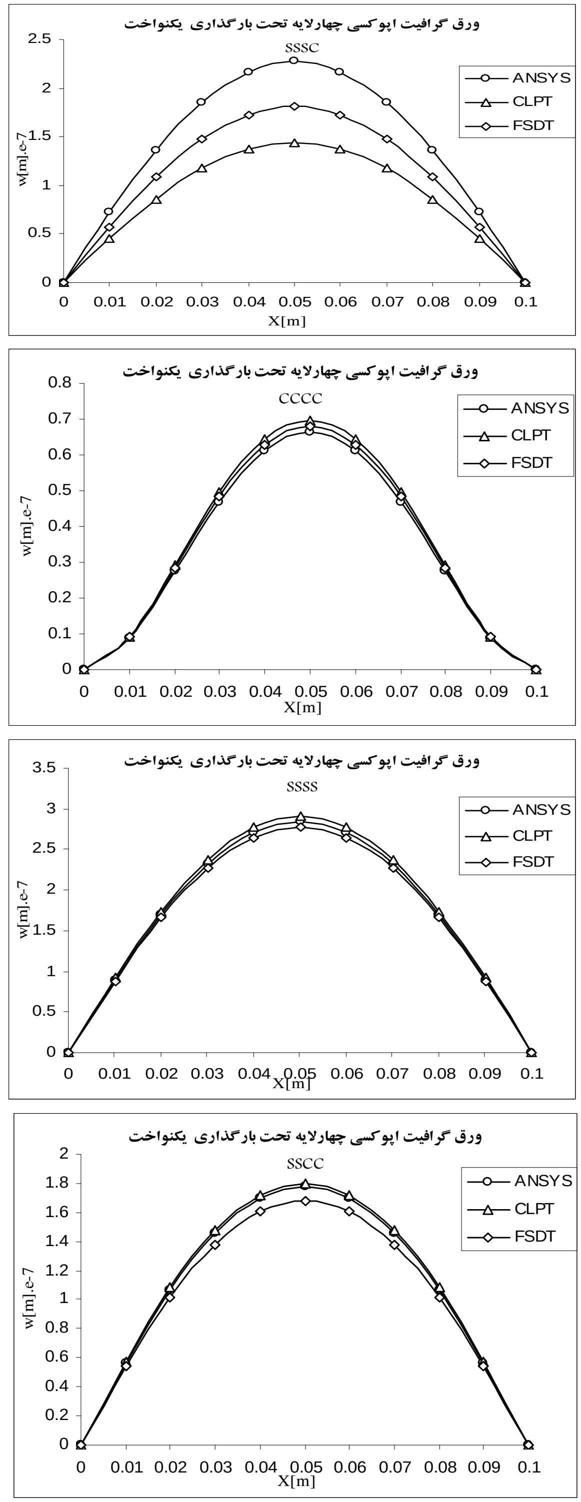
در مرحله بعد، مسئله خمش ورق، برای ورق گرافیت اپوکسی دولایه ([۹۰/۰]) و گرافیت اپوکسی چهار لایه ($[۰/۹۰]_s$) ، در دو حالت بارگذاری یکنواخت مورد بررسی قرار گرفته است. مقایسه نتایج به‌دست آمده برای خیز ورق در غیاب لایه‌های پیزوالکتریک، با نتایج حاصل از تئوریCLPT و حل ANSYS در شکل‌های **۳-۲** و همچنین، در ادامه در جدول **۲** آمده است. المانهای مورد استفاده در نرم‌افزار ANSYS برای ورق المان SOLSH190 و برای ورق گرافیت اپوکسی SOLID46 می‌باشد. همچنین، سایز المان در صفحه x-y در هر دو ورق ۲/۵×۲/۵ mm^2 است. همان‌طور که در این شکل‌ها مشخص است بیشترین مقدار خیز برای ورق با چهار طرف تکیه‌گاه ساده و کمترین مقدار خیز برای ورق با چهار طرف تکیه‌گاه گیردار می‌باشد. همچنین استفاده از تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی (FSDT) جواب‌های دقیق‌تری در مقایسه با تئوری کلاسیک صفحات ارائه می‌کند. همچنین از مقایسه شکل‌های **۲** و **۳** مشخص است که روش (CLPT) در قیاس با حل اجزاء محدود (ANSYS) به علت در نظر نگرفتن اثرات برشی، جواب‌های بالاتری ارائه می‌کند.

جدول (۱): مقایسه پاسخ روش کانتروویچ توسعه یافته با نتایج ANSYS و پاسخ تیموشنکو برای ورق آلومینیوم.

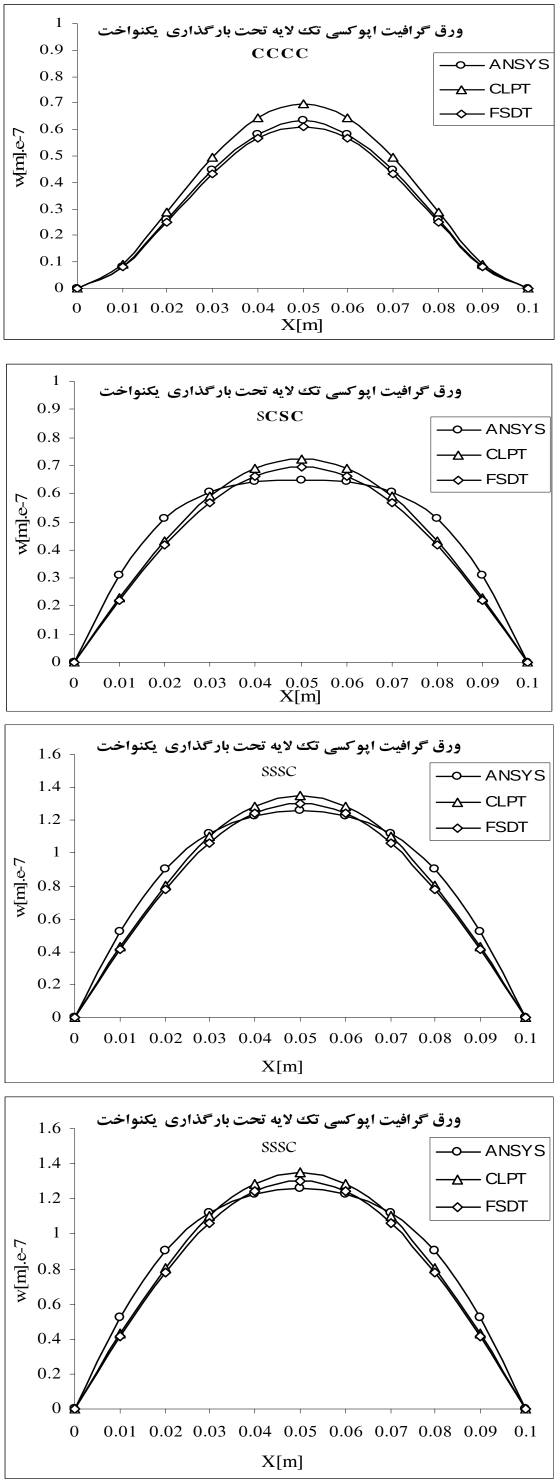
شرط مرزی	مقدار خیز (W[m]e-7)			
	ANSYS	CLPT	FSDT	Timoshenko [26]
[2]SSSS	۱/۲۴۱۳	۱/۲۰۴۷۶	۱/۲۱۶۷۵	۱/۲۳۸۸
[3]CCCC	۰/۳۸۱۷۵	۰/۳۶۹۷۷	۰/۳۷۳۶۷	۰/۳۸۵۵۸
[4]SCSC	۰/۵۷۹۹۲	۰/۵۵۹۹۸	۰/۵۶۳۸۷	۰/۵۸۳۷
[5]SSSC	۰/۸۴۶۹۶	۰/۸۱۵۲۱	۰/۸۲۶۵۷	۰/۸۴۹۱۸

1-Timoshenko

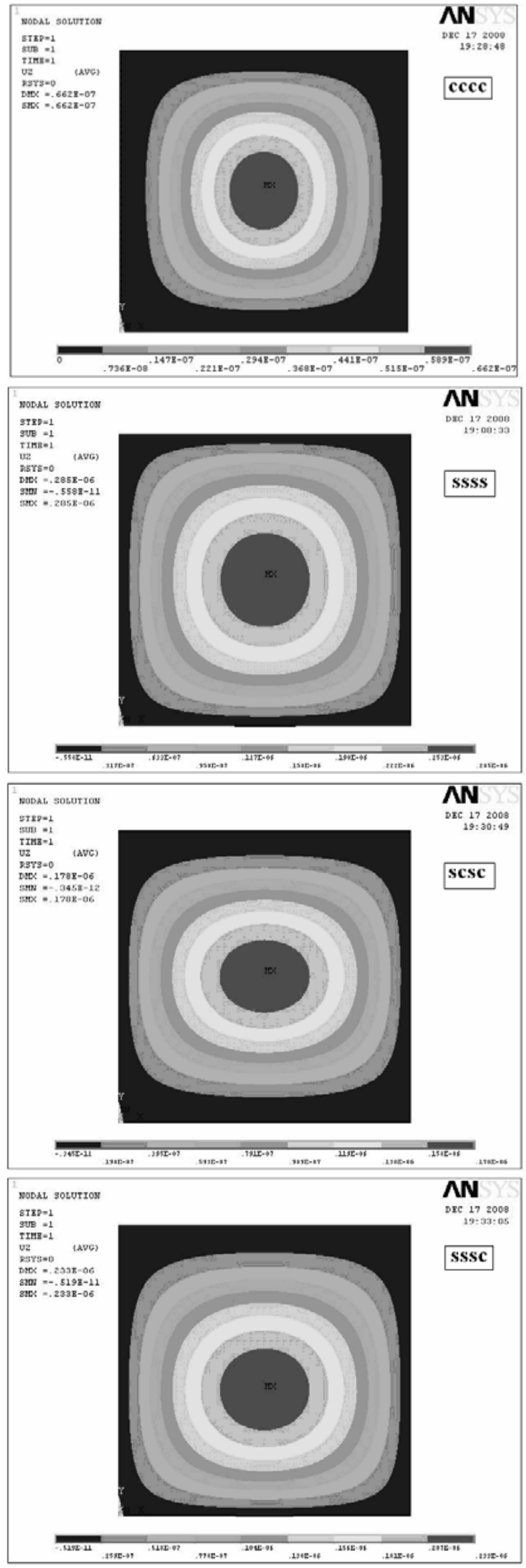
۱- SSSS: چهار طرف ورق با تکیه گاه ساده
۲- CCCC: چهار طرف ورق با تکیه گاه گیردار
۳- SCSC: دو لبه مفصلی، دولبه گیردار
۴- SSSC: سه لبه مفصلی، یک لبه گیردار



شکل(۲): مقایسه پاسخ روش کانتروویچ توسعه یافته با نتایج ANSYS برای ورق گرافیت اپوکسی۴ لایه$_s$[۰/۹۰] با شرایط مرزی متفاوت.



شکل(۳): مقایسه پاسخ روش کانتروویچ توسعه یافته با نتایج ANSYS برای ورق گرافیت اپوکسی تک لایه با شرایط مرزی متفاوت.



شکل (۴): نتایج ANSYS برای خیز ورق گرافیت اپوکسی ۴ لایه با شرایط مرزیSSSS،CCCC،SSSC وSCSC.

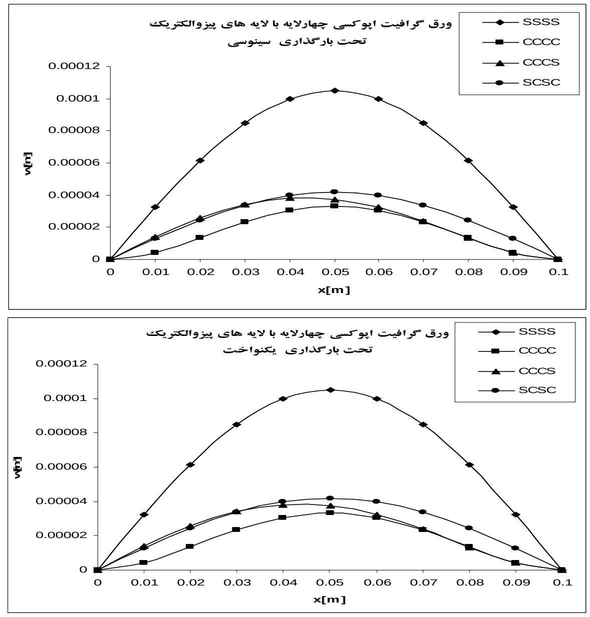
جدول(۲): مقایسه پاسخ روش کانتروویچ توسعه یافته با نتایج ANSYS برای ورق گرافیت اپوکسی.

تعداد لایه	شرط مرزی	مقدار خیز (W[m]e-7) FSDT	CLPT	ANSYS SOLID46
گرافیت اپوکسی چهار لایه	SSSS	۲/۷۷۸۴۶	۲/۹۰۶۲۷	۲/۸۴۹۷
	CCCC	۰/۶۸۱۱۷	۰/۶۹۵۰۷	۰/۶۶۲۱۸
	SCSC	۱/۶۸۳۳۷	۱/۷۹۹۳۶	۱/۷۷۹۶
	SSSC	۱/۸۱۰۶۹	۲/۲۶۸۷۰	۲/۲۷۵۳
گرافیت اپوکسی دولایه [۰/۹۰]	SSSS	۲/۸۵۶۴۳	۲/۹۱۶۳۰	۲/۸۶۳۵
	CCCC	۰/۶۵۷۶۴	۰/۶۷۹۰۸	۰/۶۴۰۸
	SCSC	۱/۰۶۷۵۴	۱/۰۸۵۳۶	۱/۰۵۸۲
	SSSC	۱/۷۴۵۶۱	۱/۷۶۳۳۰	۱/۶۹۴۳

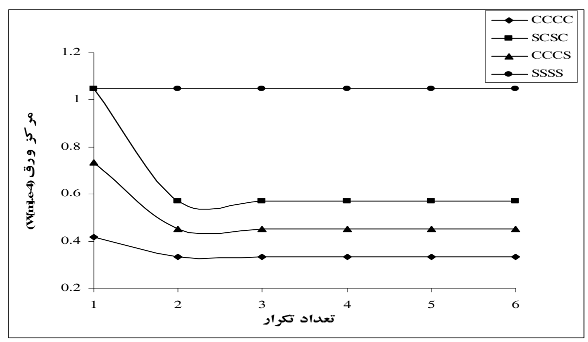
همچنین، شکل ۴ نتایج تحلیل به‌کمک ANSYS را برای ورق گرافیت اپوکسی، با شرایط مرزی مختلف نشان می‌دهد. همان‌طور که مشخص است در این حالت بیشترین مقدار خیز برای ورق با چهار طرف تکیه‌گاه ساده و کمترین مقدار خیز برای ورق با چهار طرف تکیه‌گاه گیردار می‌باشد.

در شکل ۵ مسئله خمش ورق، برای ورق گرافیت اپوکسی چهار لایه ([۹۰/۰]) به‌همراه لایه‌های پیزوالکتریک، در دو حالت بارگذاری یکنواخت و سینوسی مورد بررسی قرار گرفته است. در هر دو حالت بارگذاری بیشترین مقدار خیز برای ورق با چهار طرف تکیه گاه ساده و کمترین مقدار خیز برای ورق با چهار طرف تکیه‌گاه گیردار می‌باشد. همچنین خیز ماکزیمم برای دو حالت چهار طرف تکیه‌گاه ساده و یا چهار طرف تکیه‌گاه گیردار به علت تقارن در بارگذاری و تقارن در شرایط مرزی در نقطه وسط ورق اتفاق می‌افتد .

نتایج هم‌گرایی برای ورق با شرایط مرزی متفاوت در شکل ۶ نشان داده شده است. همان‌طور که مشخص است، تنها تعداد کمی تکرار برای حل به‌روش تکرار شونده برای هر ورق لازم است تا نتایج به هم‌گرایی مطلوب برسد. این نشان می‌دهد که نتایج در این روش مستقل از توابع آزمون اولیه بوده و به‌سرعت هم‌گرا می‌شوند.



شکل(۵): خیز ورق گرافیت اپوکسی [۹۰/۰] با لایه‌های پیزوالکتریک تحت بارگذاری سینوسی و یکنواخت بر اساس تئوری FSDT.



شکل(۶): هم‌گرایی پاسخ‌ها در روش کانتروویچ توسعه یافته برای ورق پیزو-گرافیت اپوکسی $_s$[۰/۹۰] تحت بارگذاری یکنواخت.

۷ - نتیجه‌گیری

در این مقاله، رفتار خمشی در ورق‌های کامپوزیتی مستطیل شکل، مورد بررسی قرار گرفته و حل تحلیلی بر مبنای روش کانتروویچ ارائه گردیده است. معادلات دیفرانسیل به‌دست آمده بر پایه روش گالرکین و بر مبنای تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی به‌دست آمده‌اند. با توجه به فرضیات تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی، معادلات تعادل ورق به‌صورت دستگاه معادلات دیفرانسیل غیر خطی کوپل، به‌دست می‌آیند، که در این مقاله، به کمک روش کانتروویچ این دستگاه به دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی مستقل تبدیل شده است. همچنین اعتبار روش حل ارائه شده، با مقایسه‌ی جواب‌های دقیق موجود، تأیید شده است. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش ضخامت ورق، نتایج حاصل از روش کانتروویچ بر مبنای فرضیات تئوری FSDT، از دقت بیشتری نسبت به نتایج به‌دست آمده از تئوری CLPT برخوردار است. همچنین اثر تغییر شکل برشی در ضخامت‌های زیاد، افزایش یافته و صرف‌نظر از آن سبب کاهش دقت در تحلیل می‌شود. به‌علاوه نشان داده شد که روش تکرار شونده (کانتروویچ) به‌سرعت هم‌گراست و دقت نسبتاً خوبی نسبت به نتایج ارائه شده بر اساس روش‌های تحلیلی دیگر دارد. همچنین شکل نهایی معادله به‌دست آمده برای خیز ورق و در نتیجه پاسخ‌های نهایی، کاملاً مستقل از انتخاب جواب اولیه است. به این ترتیب نشان داده شد که تابع آزمون اولیه لازم نیست هیچ‌یک از شرایط مرزی هندسی و طبیعی را ارضا کند. زیرا جواب‌های حل تکرار شونده، سرانجام هر مدل آرایش شرایط مرزی را ارضا خواهد کرد.

مراجع

1. Lee H.J., “Finite Element Analysis of Active and Sensory Thermopiezoelectric Composite Materials”, Glenn Research Center, Ohio, 2001.
2. Gopinathan, S.V., “Modeling of Piezoelectric Smart Structures for Active Vibration and Noise Control Applications”, Pennsylvania State Univ., Dep't. Eng. Sci. Mech., August, 2001.
3. Kargarnovin, M.H., Najafizadeh, M.M., and Viliani, N.S., “Vibration Control of FGM Plate Patched with Piezoelectric Actuators and Sensors under a Constant Electric Charge”, Smart Mater. Struct., Vol. 16, No. 4, pp. 1252-1259, 2007.
4. Mitchell, J.A. and Reddy, J.N., “A Refined Hybrid Plate Theory for Composite Laminated with Piezoelectric Laminas”, Int. J. Solid Struct., Vol. 32, No. 16, pp. 2345-2367, 1995.
5. Kerr, A.D., “An Extension of the Kantorovich Method”, Quart, Appl. Math., Vol. 26, pp. 219–229, 1968.

6. Fariborz, S.J. and Pourbohloul, A., “Application of the Extended Kantorovich Method to the Bending of Variable Thickness Plates”, Comp. Struct., Vol. 31, No. 6, pp. 957–965, 1989.

7. Kerr, A.D., “An Extended Kantorovich Method for the Solution of Eigen Value Problems”, Solids and Struct., Vol. 5, No. 6, pp. 559–572, 1969.

8. Jones, R. and Milne, B.J., “Application of Extended Kantorovich Method to the Vibration of Clamped Rectangular Plates”, Sounds and Vib., Vol. 45, No. 3, pp. 309–316, 1976.

9. Yuan, S. and Jin, Y., “Computation of Elastic Buckling Loads of Rectangular Thin Plates, Using the Extended Kantorovich Method”, Comp. Struct., Vol. 66, No. 6, pp. 861–867, 1998.

10. Ungbhakorn, V. and Singhatanadgid, P., “Buckling Analysis of Symmetrically Laminated Composite Plates by the Extended Kantorovich Method”,Compos. Struct., Vol. 73, No. 1, pp. 120–128, 2006.

11. Jana, P. and Bhaskar, K., “Stability Analysis of Simply-Supported Rectangular Plates under Non-Uniform Uniaxial Compression, Using Rigorous and Approximate Plane Stress Solutions”, Thin-Walled Struct., Vol. 44, No. 5, pp. 507–516, 2006.

12. Kim, H.S., Cho, M., and Kim, G.I., “Free-Edge Strength Analysis in Composite Laminates by the Extended Kantorovich Method”, Compos. Struct., Vol. 49, No. 2, pp. 229–235, 2000.

13. Aghdam, M.M., Shakeri, M., and Fariborz, S.J., “Solution to the Reissner Plate with Clamped Edges”, ASCE J. Eng. Mech., Vol. 122, No. 7, pp. 679–682, 1996.

14. Aghdam, M.M. and Falahatgar, S.R., “Bending Analysis of Thick Laminated Plates Using Extended Kantorovich Method”, Compos. Struct., Vol. 62, No. 3-4, pp. 279–283, 2003.

15. Liew, K.M., Xiang, Y., and Kitipornchai, S., “Analytical Buckling Solution for Mindlin Plates Involving Free Edges”, Mech. Sci., Vol. 38, No. 10, pp. 1127–1138, 1996.

16. Aghdam, M.M., Mohammadi, M., and Erfanian, V., “Bending Analysis of Thin Annular Sector Plates, Using Extended Kantorovich Method”, Thin-Walled Struct., Vol. 45, No. 12, pp. 983–990, 2007.

17. Aghdam, M.M. and Mohammadi, M., “Extended Kantorovich Method for Static Analysis of Thick Orthotropic Sector Plates”, The IC. on Modeling and Optimization of Struct., Processes and Systems, ICMOSPS/07, Durban, South Africa, 2007.

18. Abouhamze, M., Aghdam, M.M., and Alijani, F., “Bending Analysis of Symmetrically Laminated Cylindrical Panels, Using the Extended Kantorovich Method”, Mech. .Adv. Mat. Struct., Vol. 14, No. 7, pp. 523–530, 2007.

19. Dalei, M. and Kerr, A.D., “Analysis of Clamped Rectangular Orthotropic Plates Subjected to Uniform Lateral Load”, Mech. Sci., Vol. 37, No. 5, pp. 527–535, 1995.

20. Kerr, A.D. and Alexander, H., “An Application of the Extended Kantorovich Method to the Stress Analysis of Clamped Rectangular Plate” , Acta Mech., Vol. 6, No's. 2-3, pp. 180–196, 1968.

۲۱. نجفـی‌زاده، م.م.، علـوی، م.، سلماسـی، ف. و آذری، ش.، " تحلیل خیز صفحات چهارگوش FGM براساس تئـوری کلاسـیک صـفحات بـه روش کـانترورویچ توسـعه‌یافتـه"، فـصل‌نامـه علمـی تخصصی مهندسی مکانیک جامدات، دانـشگاه آزاد اسـلامی واحـد خمینی‌شهر، شماره سوم، پاییز۸۷.

22. Reddy, J.N., “Theory and Analysis of Elastic Plates”, Taylor & Francis, Philadelphia, PA, 1999.

23. Wang, C.M., Wang, C.Y., and Reddy, J.N.,“ Exact Solutions for Buckling of Structural Members”, CRC Press, Boca Raton, FL, 2005.

24. Jones, Robert M., “Mechanics of Composite Materials”, McGraw-Hill, New York, 1975.

۲۵- نجفی‌زاده، م.م.، علوی، م.، سلماسی، ف. و آذری، ش.، " تحلیل خیز صفحات چهار گوش کامپوزیت براساس تئوری سطح خنثی به روش کانترووبچ توسعه‌یافته"، فصل‌نامه علمی پژوهشی تحقیقات مکانیک کاربردی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تاکستان، شماره چهارم، بهار ۸۸.

26. Edery-Azulay, L. and Abramovich, H., “Piezolaminated Plates–Highly Accurate Solutions Based on the Extended Kantorovich Method”, Compos. Struct., Vol. 84, No. 3, pp. 241-247, 2007.

27. Weinstock, R.,” Calculus of Variations with Applications to Physics and Engineering”, Dover, New York, 1974.