بررسی پارامترهای مؤثر بر نیروی کمانش دهنه استوانه‌ای FML با استفاده از تئوری FSDT

علی مظفری [۱] و حسن جعفری [۲]

دانشکده مهندسی هوافضا

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

(تاریخ دریافت: ۸۹/۳/۳ تاریخ پذیرش: ۸۹/۱۰/۱۵)

چکیده

در این مقاله، با استفاده از روش تئوری تغییر شکل برشی درجه اول (FSDT) و با توجه به حل عددی ردی (Reddy)، به بررسی کمانش پوسته‌های استوانه‌ای از جنس FML پرداخته شده است. با توجه به گستردگی کاربرد FML و گسترش موارد استفاده از آن، دهنه استوانه‌ای از نوع گلر(GLARE)، تحت بار محوری با تکیه‌گاه‌های ساده در نظر گرفته شده و اثر پارامترهای مختلف FML، از جمله کسر حجمی فلز (MVF)، زاویه الیاف، لایه‌چینی‌های متفاوت و ابعاد هندسی روی نیرو و مدهای کمانش بررسی شده و بر روی نتایج به‌دست آمده بحث شده است. با کاهش تعداد لایه فلز در MVF ثابت افزایش نیروی کمانش را موجب می‌شود. نتایج حاصل از این تحلیل به خوبی با نتایج سایر مراجع ذکر شده مطابقت دارد.

واژه‌های کلیدی: فلز الیاف، چندلایه، کمانش، کسر حجمی، مواد مرکب

Investigation of the Effective Parameters on Buckling Load of FML Cylindrical Panel Using FSDT Shells Theory

A. Mozaffari and H. Jafari

Aerospace Eng. Dep’t.

K.N. Toosi Univ. of Tech.

(Received: 24 May 2010, Accepted: 5 Jan. 2011)

ABSTRACT

In this paper, the buckling load and buckling modes of FML panel, using first order shear deformation theory, has been studied, based on the Reddy's numerical solution. Because of various applications of FML shells, GLARE panel was considered. The effects of geometry, lay-up, and MVF were determined. Boundary conditions were simply supported and the panel was axially loaded. The results for Glare panel are presented and discussed. Reducing the number of metal layers at a constant MVF increases the Buckling load. The results from the finite element model were found to be in general agreements with the other references.

Keywords: Fiber Metal, Laminate, Buckling, MVF, Composite Materials

۱- استادیار (نویسنده پاسخگو): mozaffari@kntu.ac.ir
۲- دانشجوی کارشناسی ارشد: ha_jafari@yahoo.com

۱- مقدمه

چندلایه‌های ساخته شده از ورق‌های مختلف آلومینیوم و لایه‌های پلاستیک تقویت شده (FRP)[1] را اغلب به نام FML[2] می‌شناسند. اساساً گسترش آن‌ها در دانشگاه لاهه[3] صورت پذیرفته است. FMLها مواد کامپوزیتی پیشرفته‌ای هستند که از ترکیب لایه‌های فلز با پریپرگ[4] تشکیل گردیده‌اند. این مواد، خواص خوب مواد فلزی نظیر چکش‌خواری، ضربه‌پذیری و محدوده خرابی بالا را با مزایای مواد کامپوزیتی فیبری نظیر مقاومت ویژه بالا، سختی ویژه بالا، خوردگی مناسب و تحمل خستگی بالا را با هم ترکیب می‌سازد. پیچیدگی طراحی سازه‌های هواپیما باعث گردیده که توجه ویژه‌ای به استفاده از کامپوزیت‌های پیشرفته‌تر صورت گیرد. پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی FML به‌دلیل قابلیت‌های سازه‌ای ویژه، جهت استفاده در صنایع مختلف نظیر اتومبیل‌سازی، هواپیماسازی و سیستم‌های فضایی بسیار مورد توجه‌اند. انواع مختلف FMLها شامل ARALL[5]، GLARE[6]، CARE[7]، Titanium CARE[8]، HTCL[9]، TiGr[10] می‌باشند[۱-۲].

۲- تئوری پوسته‌ها

تئوری پوسته‌ها به صورت کلی به سه دسته تقسیم‌بندی می‌شود که عبارت است از تئوری کلاسیک، تئوری تغییر شکل برشی درجه اول و تئوری‌های درجات بالاتر. برای هر یک از این تئوری‌ها، گونه‌های تغییر شکل یافته متفاوتی وجود دارد که برای هدف و منظور خاصی ابداع گردیده‌اند.

تئوری FSDT[11]، تئوری گسترش یافته CST[12] است و در آن اثرات کرنش‌های عرضی که در CST حذف گردیده بودند را در نظر می‌گیرد. همچنین همانند CST اثر کرنش‌های عرضی را در نظر نمی‌گیرد ولی کرنش‌های برشی عرضی را با امکان چرخش به نرمال عرضی، لحاظ می‌کند. الگوریتم FSDT اجرایی‌تر از الگوریتم CST است. به‌خاطر اینکه میدان جابه‌جایی، شامل مشتق نیست و از این‌رو مدل[13] $C^0-Continous$ به شمار می‌رود. مدل FSDT به‌خاطر داشتن فرضیاتی که در CST لحاظ نشده‌اند، نتایج بهتری را به همراه دارد. اگرچه این روش نیاز به ضریب تصحیح[۱۴] دارد[۳]. در ادامه به حل تحلیلی دهنه با توجه به تئوری FSDT ردی[15] پرداخته می‌شود[۴].

۳- روابط تنش- کرنش

به صورت خلاصه کرنش‌ها بر اساس فرضیات تئوری FSDT به‌صورت زیر درخواهند آمد:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_1^0=\frac{\partial u_0}{\partial x}, && \varepsilon_2^0=\frac{\partial v}{R\,\partial\theta}+\frac{w}{R}, && \varepsilon_1^1=\frac{\partial\phi_1}{\partial x},\\
&\varepsilon_2^1=\frac{\partial\phi_2}{R\,\partial\theta}, && \varepsilon_6^0=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial\theta}, &&\\
&\varepsilon_4=\frac{\partial w}{R\partial\theta}+\varphi_2-\frac{v}{R}, && \varepsilon_6^1=\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta}, && (۱)\\
&\varepsilon_5=\frac{\partial w}{\partial x}+\varphi_1, && \varepsilon_1=(\varepsilon_1^0+\zeta\varepsilon_1^1), &&\\
&\varepsilon_2=\left(\varepsilon_2^0+\zeta\varepsilon_2^1\right), && \varepsilon_6=(\varepsilon_6^0+\zeta\varepsilon_6^1). &&
\end{aligned}
$$

که در آن، (u_0, υ_0, w_0) جابه‌جایی‌ها در نقطه $(\xi_1, \xi_2, 0)$ بر روی سطح میانی پوسته و (φ_1, φ_2) چرخش‌های عمود بر سطح صفحه میانی هستند.

روابط تنش-کرنش لایه kام چندلایه، به‌صورت زیر می‌باشند[۵]:

$$
\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_4\\ \sigma_5\\ \sigma_6\end{Bmatrix}^{(k)}
=\begin{bmatrix}
\overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & 0 & 0 & \overline{Q}_{16}\\
\overline{Q}_{21} & \overline{Q}_{22} & 0 & 0 & \overline{Q}_{26}\\
0 & 0 & \overline{Q}_{44} & \overline{Q}_{45} & 0\\
0 & 0 & \overline{Q}_{45} & \overline{Q}_{55} & 0\\
\overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & 0 & 0 & \overline{Q}_{66}
\end{bmatrix}^{(k)}
\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_4\\ \varepsilon_5\\ \varepsilon_6\end{Bmatrix}. \qquad (۲)
$$

1- Fiber Reinforced Plastic
2 -Fiber Metal Laminate
3 -Delft University
4 -Prepreg
5 -Arral Reinforced Aluminum Laminate
6 -Glass Reinforced Aluminum Laminate
7 -Carbon Reinforced Aluminum Laminate
8 -Titanium Carbon Reinforced Aluminum Laminate
9 -Hybrid Titanium Composite Laminate
10 -Titanium Graphite Hybrid Laminate
11 -First-order Shear Deformation Theory
12 -Classic Shell Theory

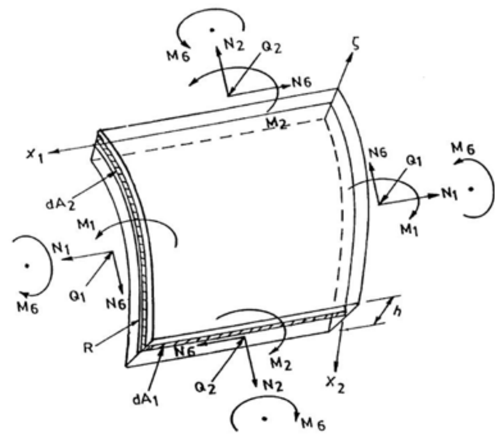
۱۳- میدان جابجایی شامل مشتقات جابجایی نمی باشد.
14 - Shear Correction Factor
15 -Reddy

۴- نیروهای وارد بر المان

شکل **۱** نیروهای وارده بر المان دهنه[1] را نشان می‌دهد.

این نیروها به صورت زیر خواهند بود:

$$\begin{bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_6 \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} d\zeta, \qquad \begin{bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_6 \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \zeta d\zeta. \tag{۳}$$



شکل (۱): نیروهای وارد بر المان دهنه.

نیروهای برشی Q_1 و Q_2 از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = K_S \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_5 (1+\frac{\zeta}{R_2}) \\ \sigma_4 (1+\frac{\zeta}{R_1}) \end{Bmatrix} d\zeta. \tag{۴}$$

به جهت اینکه نیروی برشی محاسبه شده از روش FSDT با نیروی برشی به‌دست آمده از روابط تعادل تنش که تنش‌های برشی در آن لحاظ شده برابر باشد از ضریب تصحیح برش استفاده می‌گردد[۶]. K_s ضریب تصحیح برش می‌باشد که مقدار آن برابر $\frac{\pi^2}{12}$ در نظر گرفته می‌شود[۷].

۵- روابط سازگاری

روابط سازگاری لایه به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^0\} \\ \{\kappa\} \end{Bmatrix}^M, \qquad \begin{Bmatrix} Q_2 \\ Q_1 \end{Bmatrix} = Ks \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_4^0 \\ \varepsilon_5^0 \end{Bmatrix}. \tag{۵}$$

که در آن، ضرایب سختی[2] (A_{ij} ،B_{ij} ،D_{ij}) به‌صورت زیر تعریف می‌شوند و در آن K_s ضریب تصحیح برش می‌باشد[۷].

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^{N} \overline{Q}_{ij}^{(k)} (\zeta_{k+1} - \zeta_k), && i,j = 1,2,6, \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \overline{Q}_{ij}^{(k)} (\zeta_{k+1}^2 - \zeta_k^2), && i,j = 1,2,6, \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N} \overline{Q}_{ij}^{(k)} (\zeta_{k+1}^3 - \zeta_k^3), && i,j = 1,2,6, \\ A_{ij} &= \sum_{k=1}^{N} \overline{Q}_{ij}^{(k)} (\zeta_{k+1} - \zeta_k). && i,j = 4,5. \end{aligned} \tag{۶}$$

۶- معادلات حاکم در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول (FSDT)

با استفاده از اصل کار مجازی می‌توان به معادلات حاکم تئوری لایه‌های اورتوتروپیک[3] پوسته‌ها با استفاده از رابطه زیر دست یافت:

$$(\delta U - \delta V) = 0. \tag{۷}$$

که در آن، δUانرژی کرنشی مجازی،δVانرژی پتانسیل مجازی به‌خاطر بارهای اعمال شده می‌باشند. جهت نوشتن عبارت‌هایی برای انرژی‌های مجازی، سطح میانی را با علامت Ω و مرز آن را با Γ نمایش می‌دهیم که در آن $\Gamma_{1\alpha}$ نمایانگر سطح عمود بر مختصات ε_αاست (علامت دایره بر روی انتگرال نشانگر آن است که شامل تمامی مرزهای پوسته می‌شود) با این توضیح روابط زیر برقرار است[۶]:

$$\begin{aligned} SU &= \int_{v} \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} dv = \int_{v} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} A_1 A_2 d\xi_1 d\xi_2 d\zeta \\ &= \int_{\Omega} \big[N_{11} \delta\varepsilon_1^0 + M_{11} \delta\varepsilon_1^1 + N_{22} \delta\varepsilon_2^0 + M_{22} \delta\varepsilon_2^1 + N_{12} \delta\varepsilon_1^0 + \\ & M_{12} \delta\omega_1^1 + N_{12} \delta\omega_2^0 + M_{12} \delta\omega_2^1 + Q_2 \delta\varepsilon_4^0 + \\ & Q_1 \delta\varepsilon_5^0 \big] a_1 a_2 d\xi_1 d\xi_2 , \end{aligned} \tag{۸}$$

1 -Panel

2-Stiffness Matrix
3-Orthotropic

$$\delta V=\int_{\Omega}\Big[\hat{N}_{11}\frac{\partial w_0}{\partial \xi_1}\frac{\partial Sw_0}{\partial \xi_1}d\xi_1 d\xi_2+$$
$$\oint_{\Gamma 2}(\hat{N}_{11}Su_0+\hat{M}_{11}S\varphi_1+\hat{N}_{12}\delta v_0+\hat{M}_{12}\delta\varphi_2+\hat{Q}_1\delta w_0)a_2\,d\xi_2+$$
$$\oint_{\Gamma 1}(\hat{N}_{22}Sv_0+\hat{M}_{22}S\varphi_2+\hat{N}_{21}\delta u_0+\hat{M}_{21}\delta\varphi_1+\hat{Q}_2\delta w_0)a_1\,d\xi_1 .$$

که در آن، $(M_{\alpha\beta},N_{\alpha\beta},Q_{\alpha})$ برآیند تعریف شده در معادله‌های (۳) و (۴) می‌باشند. علامت (^) روی برآیندها نمایانگر مقادیر مشخص شده از قبل می‌باشد. جهت به‌دست آوردن معادلات تعادل، مقادیر به‌دست آمده برای توابع جابه‌جایی $\{u_0,v_0,w_0,\varphi_1,\varphi_2\}$ در کرنش‌ها قرار داده شده پس از جای‌گذاری معادلات تعادل استوانه به‌دست می‌آید.

۷- معادلات تعادل ساده شده استوانه [۴]

معادلات تعادل ساده شده استوانه با توجه به فرض‌های ذکر شده در تئوری تغییر شکل برشی درجه اول به شکل زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial}{R\partial\theta}(N_{x\theta}+\frac{-1}{2R}M_{X\theta})=0,\\
&\frac{\partial}{\partial x}(N_{x\theta}+\frac{1}{2R}M_{x\theta})+\frac{\partial N_\theta}{R\partial\theta}+\frac{Q_\theta}{R}=0,\\
&\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_{x\theta}}{R\partial\theta}-\frac{N_\theta}{R}-\hat{N}\frac{\partial^2 w_\theta}{\partial x^2}=0,\\
&\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{\theta x}}{R\partial\theta}-Q_x=0,\\
&\frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x}+\frac{\partial M_\theta}{R\partial\theta}-Q_\theta=0.
\end{aligned}\qquad (۹)$$

۸- حل تحلیلی دهنه

معادلات به‌دست آمده حاصل از جای‌گذاری تنش‌ها و گشتاورها در معادله (۹) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\{L\}\{\Delta\}=\{0\}.\qquad (۱۰)$$

در معادله فوق، ماتریس جابه‌جایی $\{\Delta\}$ برابر است با:

$$\{\Delta\}=\{u_0\ v_0\ w_0\ \phi_1\ \phi_0\}^T .\qquad (۱۱)$$

و ضرایب خطی اپراتور L ماتریس مشتقات (اپراتور) نسبت به بردار جابه‌جایی $\{\Delta\}$ برای تئوری $FSDT$ به صورت زیر است:

$$L_{11}=A_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+A_{16}\times\frac{2}{R}\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}+\frac{1}{R^2}A_{66}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+$$

$$\frac{-1}{2R^2}\left[B_{16}\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}+B_{66}\frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right],$$

$$L_{12}=A_{16}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\left[\frac{A_{66}}{R}+\frac{A_{12}}{R}\right]\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}+\frac{A_{26}}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+$$

$$\frac{-1}{2R^2}\left[\frac{B_{26}}{R}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+B_{66}\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}\right],$$

$$L_{13}=B_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{2}{R}B_{16}\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}+\frac{B_{66}}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+$$

$$\frac{-1}{2R^2}\left[D_{16}\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}+D_{66}\frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right],$$

$$L_{14}=B_{16}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{R}(B_{12}+B_{66})\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}+\frac{B_{26}}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+$$

$$\frac{-1}{2R^2}\left[\frac{D_{26}}{R}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+D_{66}\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}\right],$$

$$L_{15}=\frac{A_{12}}{R}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{A_{26}}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\frac{1}{2R^2}\left[B_{26}\frac{\partial}{R\partial\theta}\right],\qquad (۱۲)$$

$$L_{21}=A_{16}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{R}(A_{12}+A_{66})\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}+\frac{A_{26}}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+$$

$$+\frac{1}{2R}\left[B_{16}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+B_{66}\times\frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}\right],$$

$$L_{22}=A_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{2A_{26}}{R}\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}+\frac{A_{22}}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

$$-K_S\frac{A_{44}}{R^2}+\frac{1}{2R}\left[B_{26}\frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial x}+B_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right],$$

$$L_{23}=B_{16}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{R}(B_{12}+B_{66})\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}+\frac{B_{26}}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

$$+\frac{K_S A_{45}}{R}+\frac{1}{2R}\left[D_{16}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+D_{66}\frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}\right],$$

$$L_{24}=B_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{2B_{26}}{R}\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}+\frac{B_{22}}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

$$+\frac{K_S A_{44}}{R}+\frac{1}{2R}\left[\frac{D_{26}}{R}\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}+D_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right],$$

$$L_{25}=\frac{\partial\left(\frac{A_{26}}{R}+\frac{K_S A_{45}}{R}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\frac{A_{22}}{R^2}+\frac{K_S A_{44}}{R^2}\right)}{\partial\theta}+\frac{\left[\frac{B_{26}}{R}\frac{\partial}{\partial x}\right]}{2R},$$

$$L_{31}=B_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{2B_{16}}{R}\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}+\frac{B_{66}}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2},$$

$$L_{32}= B_{16}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{(B_{66}+B_{12})}{R}\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}+\frac{K_S A_{45}}{R}+\frac{B_{26}}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2},$$

$$L_{33}= D_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{2D_{16}}{R}\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}+\frac{D_{66}}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-K_S A_{55},$$

$$L_{34}= D_{16}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\left(\frac{D_{66}}{R}+\frac{D_{12}}{R}\right)\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}+\frac{D_{26}}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-K_S A_{45},$$

$$L_{35}=\left(\frac{B_{12}}{R}-K_S A_{55}\right)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{R}\left(\frac{B_{26}}{R}-K_S A_{45}\right)\frac{\partial}{\partial\theta},$$

$$L_{41}= B_{16}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{R}(B_{66}+B_{12})\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}+\frac{B_{26}}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2},$$

$$L_{42}= B_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{2B_{26}}{R}\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}+\frac{B_{22}}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+K_S\frac{A_{44}}{R},$$

$$L_{43}= D_{16}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{(D_{66}+D_{12})}{R}\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}+\frac{D_{26}}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-K_S A_{45},$$

$$L_{44}= D_{66}\times\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\left(\frac{2D_{26}}{R}\right)\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}-K_S A_{44}+\frac{D_{22}}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2},$$

$$L_{45}=\left(\frac{B_{26}}{R}-K_S A_{45}\right)\frac{\partial}{\partial x}+\left(\frac{B_{22}}{R^2}-\frac{K_S A_{44}}{R}\right)\frac{\partial}{\partial\theta},$$

$$L_{51}=\frac{-1}{R}A_{12}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{R^2}A_{26}\frac{\partial}{\partial\theta},$$

$$L_{52}=\left(-\frac{K_S A_{45}}{R}-\frac{A_{26}}{R}\right)\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{R^2}K_S A_{44}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{1}{R^2}A_{22}\frac{\partial}{\partial\theta},$$

$$L_{53}=\left(K_S A_{55}-\frac{B_{12}}{R}\right)\frac{\partial}{\partial x}+\left(\frac{K_S A_{45}}{R}-\frac{1}{R^2}B_{26}\right)\frac{\partial}{\partial\theta},$$

$$L_{54}=\left(K_S A_{45}-\frac{1}{R}B_{26}\right)\frac{\partial}{\partial x}+\left(\frac{K_S A_{44}}{R}-\frac{B_{22}}{R^2}\right)\frac{\partial}{\partial\theta},$$

$$L_{55}= K_S A_{55}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\hat{N}\frac{\partial}{\partial x^2}+\left(2\frac{k_s A_{45}}{R}\right)\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}+\frac{K_S A_{44}}{R^2}\frac{\partial}{\partial\theta^2}-\frac{A_{22}}{R^2}.$$

۹- شرایط مرزی دهنه با تکیه‌گاه ساده

شرایط مرزی تکیه‌گاه‌های دهنه به صورت تکیه‌گاه ساده[1] در نظر گرفته می‌شود. این شرایط با رابطه (۱۳) بیان شده است[۶].

$$u=w=N_2=M_2=\phi_1=0, \qquad (۱۳)$$

$$at \quad \theta=0\,,\alpha$$

۱۰- حل عددی

در چندلایه‌های Cross-ply که در آن $\theta=0^\circ$ یا $\theta=90^\circ$ می‌باشد برخی روابط به صورت زیر ضریب صفر دارند:

$$\Rightarrow \overline{Q}_{45}=0 \quad \Rightarrow A_{45}=\sum_{K=0}^{N}Q_{45}^{(K)}(\xi_{k+1}-\xi_k)=0,$$
$$\overline{Q}_{16}=\overline{Q}_{26}=0, \qquad (۱۴)$$
$$A_{16}=A_{26}=B_{16}=B_{26}=D_{16}=D_{26}=0.$$

از این‌رو، در حل عددی از روش ناویر[2][۴] استفاده می‌شود.

با توجه به شرایط مرزی توابع جابه‌جایی برای دهنه با تکیه‌گاه‌های ساده به‌صورت زیر خواهند بود[۸]:

$$u=\sum\sum A_{mn}\sin\frac{n\pi\theta}{\varphi}\cos\frac{m\pi x}{\ell},$$
$$v=\sum\sum B_{mn}\cos\frac{n\pi\theta}{\varphi}\sin\frac{m\pi x}{\ell},$$
$$w=\sum\sum C_{mn}\sin\frac{n\pi\theta}{\varphi}\sin\frac{m\pi x}{\ell},$$
$$\varphi_1=\sum\sum D_{mn}\sin\frac{n\pi\theta}{\varphi}\cos\frac{m\pi x}{\ell}, \qquad (۱۵)$$
$$\varphi_2=\sum\sum E_{mn}\cos\frac{n\pi\theta}{\varphi}\sin\frac{m\pi x}{\ell},$$
$$\beta=\frac{n\pi}{\varphi}, \qquad a=\frac{m\pi}{l}.$$

که در آن، φ زاویه دهنه، n تعداد نیم‌موجها در راستای محیطی، m تعداد نیم‌موجها در راستای طولی و l طول دهنه می‌باشد. ملاحظه می‌شود که توابع u، v، w، φ_1 و φ_2 در شرایط مرزی یاد شده صدق می‌کنند.

جهت حل با توجه به توابع جابه‌جایی رابطه (۱۵) و جای‌گذاری در رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$\{L\}\{\Delta\}=0. \qquad (۱۶)$$

1-Simply Support

2-Navier

معادله فوق یک معادله مقدار ویژه است که از جواب‌های غیربدیهی آن مقدار نیروی کمانش به‌دست خواهد آمد.

۱۱- مقایسه نتایج

به دو روش نتایج حل دهنه با در نظر گرفتن MVF[1] اعتبارسنجی می‌شود. در روش اول نیروی کمانش در MVF=1 (فلز) با نتایج به‌دست آمده از تحلیل تئوری FSDT مقایسه می‌شود. در روش دوم، دهنه با ابعاد معین در نرم‌افزار ABAQUS 6.8.1 مدل می‌گردد. چگونگی مدل‌سازی و مراحل آن در ادامه آمده است.

۱۱-۱- حالت MVF=1

جهت مقایسه حل تحلیلی در MVF=1 با سایر مراجع می‌توان از نتایج مرجع[۹] بهره جست. با مقایسه نتایج حل همان‌طور که در جدول **۱** مشاهده می‌شود، جواب‌های تحلیل پوسته فلزی، در محدوده قابل قبولی قرار دارند. شرایط مرزی به صورت دوسرساده بوده و سایر مشخصات به صورت زیر است:

$L = 12.70$ Cm, $\alpha = 15^\circ$, $R = 50.8$ Cm, $t = 0.2$ Cm ,

$E = 179.27$ GPa, $\nu = 0.3$.

جدول(۱): مقایسه نتایج حل دهنه با مرجع[۹] در حالت MVF=1.

روش حل	نیروی کمانش (KN/m)	مد کمانش		درصد خطا %
		n	m	
تئوری **FSDT**	858.66	1	2	2.42
روش حل مرجع [9]	880.0	--	--	--

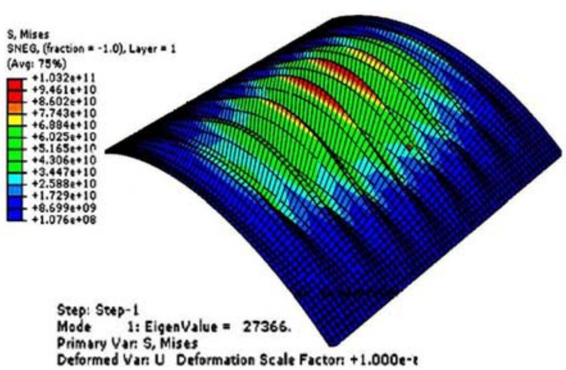
۱۱-۲- مقایسه نتایج با نتایج مدل‌سازی ABAQUS

مشخصات پوسته جهت مدل‌سازی به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

GLARE2A 2/1, 0.3/0.127/0.127/0.3 mm ,

$L=R=1$m , $\alpha=30^\circ$

نوع گلر انتخابی GLARE 2A 2/1 0.3 می‌باشد. نوع المان انتخابی با توجه به اینکه تحلیل کمانش مد نظر است و همچنین با توجه به اینکه از المان SHELL جهت تحلیل کامپوزیت استفاده شده، از المان S4R [۱۰] استفاده می‌شود. کمترین نیروی کمانش در مد n=1 و m=17 حاصل می‌شود. مقایسه نتایج تحلیل حاضر با ABAQUS (جدول **۲**) بیانگر مقدار حدود ۱٫۸۸ درصد خطاست. از مقایسه نتایج تحلیل حاضر که با استفاده از روش حل FSDT و CST به‌دست آمده‌اند، با نتایج ABAQUS می‌توان دریافت که نتایج قابل‌قبول و دقیق می‌باشد.



شکل(۲): مد کمانش اول.

جدول(۲): مقایسه نتایج تحلیل حاضر با نتایج به‌دست آمده از تحلیل ABAQUS.

روش حل	نیروی کمانش (KN/m)	مد کمانش		درصد خطا %
		n	m	
تئوری **FSDT**	27813	3	16	1.63
تحلیل ABAQUS	27366	1	17	---

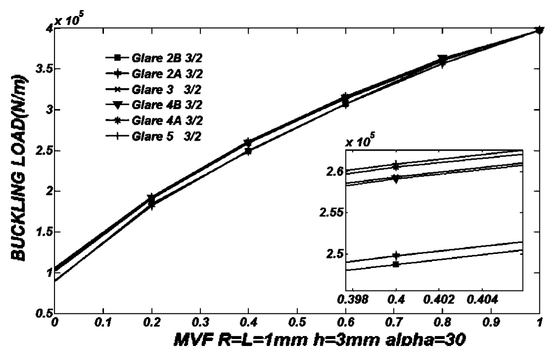
1-Metal Volume Fraction

۱۲- بررسی اثر پارامترهای مختلف FML بر نیروی کمانش دهنه

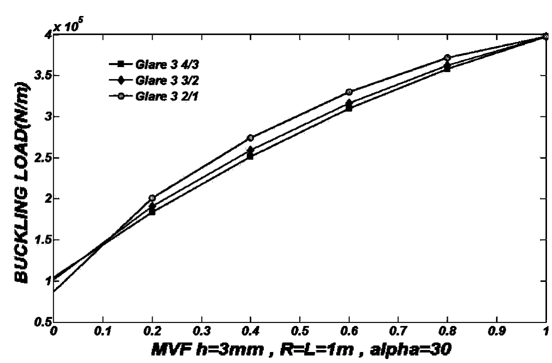
با توجه به تحلیل انجام شده جهت بررسی تغییر پارامترهای مختلف FML بر نیروی کمانش، کد نرم‌افزاری تهیه شده و با استفاده از آن به بررسی اثر پارامترهایی نظیر کسر حجمی فلز، زاویه الیاف، لایه‌چینی‌های متفاوت و ابعاد هندسی روی نیرو و مدهای کمانش پرداخته شده است.

۱۲-۱- اثر زاویه الیاف در لایه چینی خاص

نیروی کمانش GLARE 4A بیشتر از GLARE 5 است ولی در MVFهای بالاتر، نیروی کمانش GLARE 5 بیشتر می‌شود. هر چه قدر عدد MVF بیشتر شود، اختلاف بین لایه‌چینی‌های مختلف کمتر می‌شود (شکل ۳).



شکل(۳): نیروی کمانش برحسب MVF با ثابت نگاه داشتن ضخامت و تعداد لایه فلز برای لایه چینی (3/2)، α=30، R=L=1m و h=3mm .



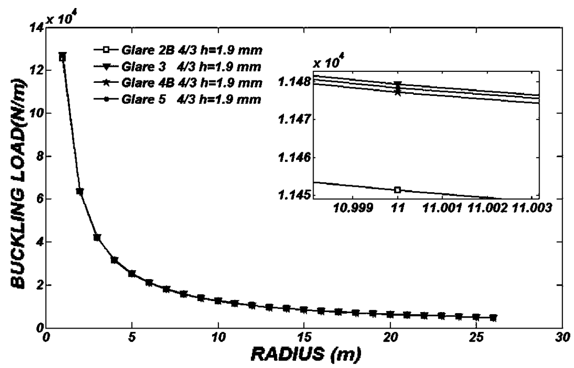
شکل (۴): نیروی کمانش برحسب MVF برای لایه‌چینی‌های مختلف GLARE 3 با ثابت نگاه داشتن ضخامت ، زاویه الیاف ، h=3mm و R=L=1m .

۱۲-۲- اثر لایه چینی[1] در زاویه الیاف خاص

به منظور بررسی اثر لایه‌چینی‌های مختلف، نیروی کمانش برای لایه‌چینی‌های متفاوت در یک نوع گلر خاص، با تغییر تعداد لایه‌های آن بررسی می‌شود. در MVF بیشتر از 0.1، لایه‌چینی 2/1 بهتر از 3/2 و4/3 قابلیت تحمل نیروی کمانش را داشته و در MVFهای کمتر، عکس این حالت وجود دارد. در MVF=1 همه چیدمان‌ها، به یک عدد هم‌گرا می‌شود. در Glare 2A وGlare 2B در MVF=0 نیز به یک عدد خاص هم‌گرا می‌شود (شکل ۴).

۱۲-۳- اثر شعاع دهنه برروی نیروی کمانش

با افزایش شعاع، نیروی کمانش به صورت معکوس کاهش یافته و در شعاع‌های بالاتر، نیروی کمانش تأثیرپذیری کمتری از شعاع دارد (شکل ۵).



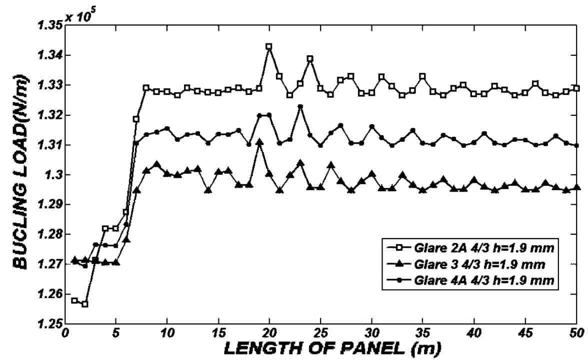
شکل(۵): نیروی کمانش بر حسب شعاع برای لایه‌چینی‌های مختلف با ثابت نگاه داشتن ضخامت ، طول ، h=1.9mm و L=1m .

۱۲-۴- اثر طول دهنه برروی نیروی کمانش

اثر تغییر طول‌های مختلف در ضخامت ثابت و MVF ثابت بررسی می‌شود. با بررسی بیشتر مشخص می‌گردد که هر چه طول دهنه کمتر باشد، نیروی کمانش، کمتر است (شکل ۶) در طول L=7m ،جهش ناگهانی در نمودار به‌وجود می‌آید و بعد از آن، نیروی کمانش تقریباً ثابت باقی می‌ماند. از این‌رو

1-Lay-up

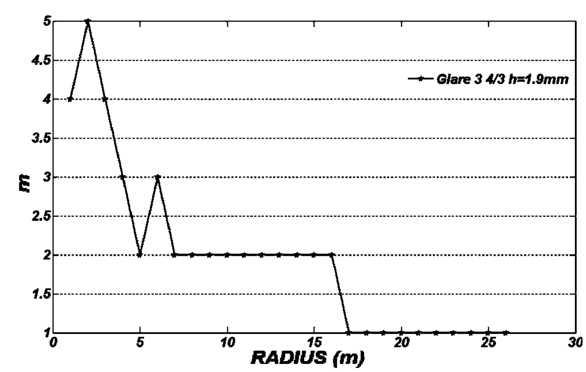
جهت طراحی در شعاع مورد نظر باید طول را به گونه‌ای انتخاب نمود که در محدوده بعد از جهش یاد شده قرار گیرد.



شکل(۶): نیروی کمانش برحسب طول برای لایه‌چینی GLARE 3 4/3 مختلف با ثابت نگاه داشتن ضخامت و طول h=3mm و L=1m .

۱۲-۵- تغییرات مد کمانش (m) با تغییر شعاع

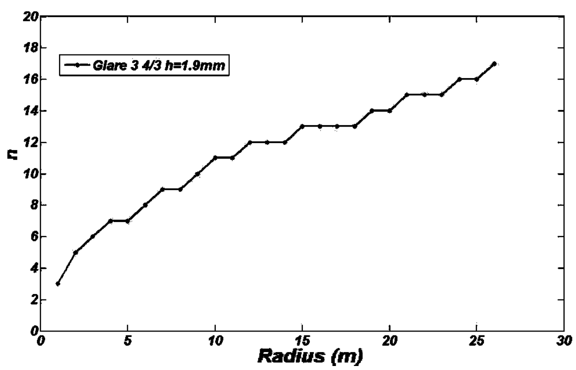
در شکل **۷** اثر شعاع، بر مد کمانش طولی برای لایه‌چینی در MVF ثابت بررسی شده است. در این نمودار در حالت کلی همواره روند کاهش تعداد نیم‌موج‌های طولی وجود دارد. در طول‌های بیشتر، تعداد نیم‌موج‌های طولی به m=1 کاهش می‌یابد (به جز در مورد Glare 2A که به m=2 می‌انجامد).



شکل(۷): مد کمانش (m) برحسب شعاع برای لایه چینی Glare 3، R=L=1، α=30° و h=1.9mm.

۱۲-۶- تغییرات مد کمانش (n) با تغییر شعاع

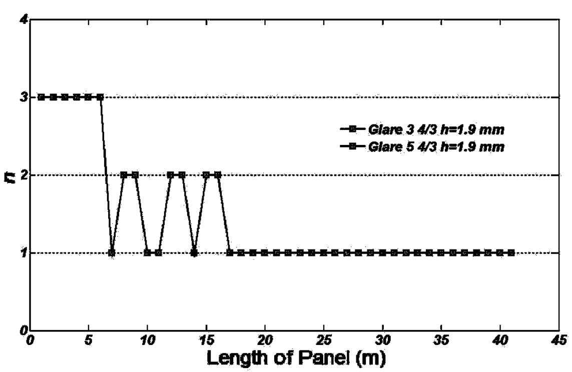
در شکل **۸** اثر شعاع بر مد کمانش محیطی برای لایه‌چینی‌های مختلف با ابعاد صورت R=L=1m و α =30° , h=1.9 mm و در MVF ثابت بررسی شده است. در این نمودار در حالت کلی همواره روند افزایش تعداد نیم‌موج‌های طولی وجود دارد.



شکل(۸): نمودار مد کمانش (n) برحسب شعاع برای لایه‌چینی Glare 3،R=L=1, α=30° و h=1.9mm.

۱۲-۷- تغییرات مد کمانش (n) با تغییر طول

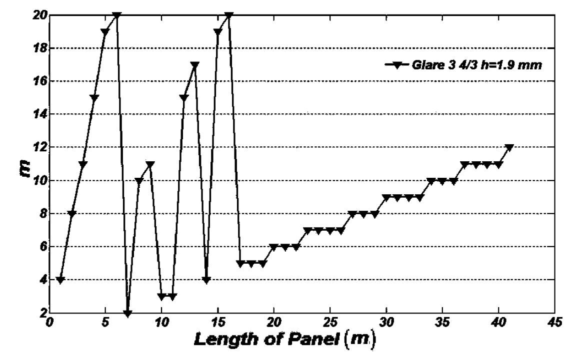
در شکل **۹** می‌توان مشاهده نمود که در L=17m در کلیه حالت‌ها بعد از روند کاهشی، تعداد نیم موج‌های محیطی به n=1 ختم می‌شود. در مورد Glare 3 و Glare 5 نتایج کاملاً یکسان است.



شکل(۹): مد کمانش (n) بر حسب طول برای لایه‌چینی Glare 5 ، Glare 3، R=L=1، α=30° و h=1.9mm.

۱۲-۸- تغییرات مد کمانش (m) با تغییر طول

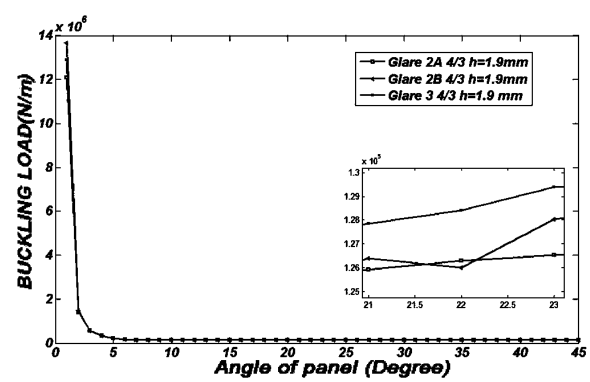
مشاهده تغییرات مد کمانش بر اساس طول پنل نشان می‌دهد که روند مد کمانش(m) با زیاد شدن طول پنل، افزایشی است. با مقایسه نمودارهای شکل‌های **۱۰-۹** مشخص است در مواقعی که تغییری در مد کمانش (n) وجود ندارد، مد کمانش (m) افزایش می‌یابد.



شکل(۱۰): مد کمانش (m) برحسب طول برای لایه‌چینی Glare 3، R=L=1، α=30° و h=1.9mm.

۱۲-۹- تغییرات نیروی کمانش با زاویه دهنه

با تغییر زاویه دهنه، در نیروی کمانش کاهش ناگهانی به‌وجود خواهد آمد. در زاویه بیشتر از 5°، تغییرات قابل ملاحظه نخواهد بود. بعد از زاویه یاد شده در برخی زوایای خاص قله‌های نیرویی وجود دارد که در آن‌ها نیروی کمانش بیشینه است (شکل **۱۱**).



شکل(۱۱): نیروی کمانش برحسب زاویه دهنه برای لایه‌چینی مختلف R=L=1 و h=1.9mm .

۱۳- نتیجه‌گیری

با توجه به نمودارهای به‌دست آمده از تحلیل نرم افزاری نتایج زیر به‌دست می‌آید:

۱- با بررسی تغییر نیروی کمانش بر حسب تعداد لایه فلز، مشخص می‌گردد که با افزایش تعداد لایه دهنه در ضخامت ثابت، MVF افزایش یافته و از طرفی نیروی کمانش نیز زیاد می‌شود،

۲- در MVF ثابت و در یک ضخامت ثابت، GLARE 5 از GLARE 4A و GLARE 3 قابلیت تحمل نیروی کمانش بهتری دارد،

۳- در MVF=1 و در یک ضخامت ثابت، کلیه نمودارهای دهنه و استوانه به یک عدد ختم می‌شوند،

۴- در دهنه در MVF ثابت و در ضخامت ثابت، هرچه تعداد لایه فلز کمتر باشد، تحمل نیروی کمانش آن بهتر است،

۵- با افزایش شعاع دهنه، نیروی کمانش شبیه به حالت استوانه کاهش یافته و با افزایش طول‌دهنه نیروی کمانش ابتدا افزایش یافته سپس بدون تغییر، باقی می‌ماند،

۶- با افزایش شعاع دهنه، مد کمانش محیطی افزایش و مد کمانش طولی کاهش می‌یابد. با افزایش طول دهنه، مد کمانش محیطی کاهش می‌یابد و

۷- افزایش زاویه دهنه، کاهش ناگهانی نیروی کمانش را به همراه داشته و بعد از آن، تغییرات نیرو با طول، به صورت سینوسی خواهد بود.

مراجع:

1. Klenner J. and Keller K., "New Material and Processes for Commercial Aircraft", ECNDT European Conf. on None-destructive Testing, Spain, 2002.
2. Vlot A. and Gunnink J.W., "Fiber Metal Laminates", Kluwer Academic Publishers, Boston, 2001.
3. Jensen, L. R., Rauhe, J. C., and Stegmann, J., "Finite Elements for Geometric Non-linear Analysis of Composite Laminates and Sandwich Structures", M.Sc. Thesis, Revised Ed., Institute of Mech. Eng. Aalborg Uni., 2002.

4. Reddy J.N., “Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis”, CRC PRESS, 2004.

۵- جعفری، ع.ا و فخاری گلپایگانی، ا. "بررسی کمانش و ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه، تحت بار محوری و شعاعی" ، ششمین کنفرانس سراسری انجمن هوافضای ایران، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، اسفند ۱۳۸۵.

6. Reddy, J.N. “Energy Principal and Variation Methods in Applied Mechanics”, John Wiley and Sons, 2002.

7. Civalek, O., “Free Vibration Analysis of Symmetrically Laminated Composite Plates with First–order Shear Deformation Theory by Discrete Singular Convolution Method”, Finite Elements in Analysis and Design J., Vol. 44, No. , pp.725–731, 2008.

8. Singh, B.N., Yadav, D., and Iyengar, N.G.R., “Initial Buckling of Composite Cylindrical Panel with Random Material Properties”, Composite and Structure, Vol. 53, No. , pp.55-64, 2001.

9. Kassegne, S.K. “Layer Wise Theory for Discretely Stiffened Laminated Cylindrical Shells”, Virginia Univ. Pub., Blacksburg, 1992.

10. ABAQUS Theory Manual, Version 6.8.