

# تحلیل پایداری دینامیکی یک تیر دو سر آزاد تحت نیروی تعقیب کننده ناپایستار

محمد رضا الهامی<sup>۱</sup> و مهدی زینلی<sup>۲</sup>

دانشکده فنی و مهندسی - گروه مهندسی مکانیک

دانشگاه جامع امام حسین (ع)

(تاریخ دریافت: ۸۸/۰۹/۳۰؛ تاریخ پذیرش: ۹۰/۰۴/۱۸)

## چکیده

در این مقاله پایداری دینامیکی یک تیر دو سر آزاد تحت نیروی ناپایستار محوری مورد بررسی قرار گرفته است. ابتدا، با استفاده از تحلیل مودال و روش المان محدود ارتعاشات عرضی تیر در حالت آزاد (بدون نیروی انتهایی) مورد بررسی قرار گرفته و شکل مودها و فرکانس‌های طبیعی آن با استفاده از روش المان محدود به دست آمده است. در مرحله بعد، با استفاده از شکل مودها و فرکانس‌ها و تعامد مودهای ارتعاشی نسبت به جرم و سختی، معادله حاکم بر مسئله با روش گالرکین حل شده است. نتایج حاصل نشان می‌دهد که در تیر یکنواخت دو سر آزاد با افزایش نیروی محوری فرکانس ارتعاشات عرضی تیر همواره کاهش می‌یابد و پدیده فلاتر در نیروهای چندین برابر نیروی کماتش تیر مشاهده می‌شود. در حالی که برای تیر غیریکنواخت دو سر آزاد هر دو پدیده فلاتر و واگرایی ممکن است در تیر اتفاق افتد. دیگر اینکه، اثر فلاتر در سازه تیر به دلیل کوچک بودن نسبت نیروی تراست به وزن نسبتاً ناچیز بوده، ولی اثر اتصال مفصلی به مقدار قابل توجهی نیروی بحرانی فلاتر را کاهش می‌دهد. لذا، می‌توان به این نتیجه رسید که بررسی پایداری سازه برای پرنده‌های هدایت شونده به دلیل تأثیر ارتعاشات سازه تیر روی سیستم هدایت و کنترل آن بسیار مهم می‌باشد.

**واژه‌های کلیدی:** پایداری دینامیکی، فلاتر، روش گالرکین، نیروی پیشران ناپایستار

## Dynamic Stability Analysis of a Two Free-end Beam Subject to a Non-conservative Following Force

M.R. Elhami and M. Zeinali

Faculty of Engineering, Dept. of Mechanical Engineering

Imam Hussein University

(Received: Dec. 21, 2009; Accepted: July 9, 2011)

### ABSTRACT

In this paper, dynamic stability of two free-end beam subject to a non-conservative following force has been investigated. In the first step, transverse vibration of beam structure in free-free mode with/without end force by modal analysis and FEM was analyzed and mode shapes and natural frequencies were obtained. Then, dynamic equations of the vibration with using the Galerkin method were solved. It can be seen that with increasing the axial force frequency of transverse the vibration of the beam decreased. Also, flutter phenomenon in the states of axial force much higher than buckling force is observed. Furthermore, in case of non-uniform beam, in free-free mode both flutter and divergence are occurred. It can be concluded that, due to low thrust weight ratio in nowadays flying objects, the effect of flutter on dynamic stability of structure itself is not significant. However, the effect of joint in beam significantly reduces the critical force of flutter.

**Keywords:** Dynamic Stability, Flutter, Galerkin Method, Non-conservative, Thrust Force

۱- استادیار (نویسنده پاسخگو): melhami@ihu.ac.ir

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد

## ۱- مقدمه

در پرواز موشک‌ها و پرتابه‌ها موضوعات پایداری استاتیکی، دینامیکی و آیروالاستیک با تراست یا بدون تراست بررسی می‌شود. در سال‌های اخیر، مکانیک پرواز پرتابه‌های الاستیک مورد توجه قرار گرفته است. امروزه شاتل‌ها و موشک‌های مدرنی که در صنایع هوافضا استفاده می‌شوند، دارای نسبت بالایی از تراست به جرم هستند. از آنجایی که هر وزن اضافه در این وسایل باعث کاهش برد پروازی می‌شود، بنابراین سعی می‌شود تا حد ممکن از وزن سازه کاسته شده تا وزن بهینه و همچنین پیش بار کم حاصل گردد. در نتیجه این فرآیند، سازه بدنه بسیار انعطاف‌پذیر می‌شود. از آنجایی که نیروی تراست نیرویی ناپایستار است که جهت این نیرو مطابق با شکل سازه تغییر می‌کند، بنابراین بررسی پایداری دینامیکی سازه موشک تحت نیروی تراست دارای اهمیت ویژه‌ای است.

تیر دو سر آزاد به‌عنوان ساده‌ترین الگو برای بیان رفتار الاستیک سازه موشک و راکت استفاده می‌شود. همچنین بوسترهای کنترل تراست می‌توانند به‌عنوان جرم متمرکزی به این الگو اضافه شوند. پایداری تیر دو سر آزاد تحت نیروی ثابت در مقالات زیادی مطالعه شده است. نتایج حاصل از این مقالات شامل پایداری تیر تحت نیروی تعقیب کننده، اثر اینرسی دورانی، نیروی برشی و ... است. اولین بار بیل [۱] در سال ۱۹۶۵ پایداری دینامیکی سازه دو سر آزاد انعطاف‌پذیر را تحت نیروی تعقیب کننده‌ای شامل دو قسمت ثابت و ضربه‌ای بررسی کرد. در این تحلیل، از فرضیه تیر اوپلر-برنولی و از روش گالرکین برای حل استفاده شد. سپس پیتر<sup>۲</sup> و وو<sup>۳</sup> پایداری عرضی تیر دو سر آزادی را تحت تراست محوری با کنترل جهت بررسی کردند. وو [۳] رابطه بین نیروی بحرانی و منحنی ویژه را به‌وسیله استفاده از روش المان محدود بررسی کرد. لایفولز<sup>۴</sup> و پیچ<sup>۵</sup> اثر خود وزنی و نیروی تعقیب کننده را روی پایداری میله الاستیک مطالعه کردند، آن‌ها در این مطالعه از روش گالرکین با دو جمله استفاده کردند و مسئله را در شرایط میله دو سر لولا، میله

گیردار-آزاد و آزاد-آزاد بررسی نمودند. پارک<sup>۶</sup> و موته<sup>۷</sup> تیر اوپلر-برنولی آزاد-آزاد را که جرم متمرکز با اینرسی چرخشی و عرضی را حمل می‌کند، تحت تراست انتهایی بررسی نمودند. پارک [۶] پایداری تیر تیموشنکوی دو سر آزاد تحت نیروی تعقیب کننده کنترل شده ثابت را مطالعه نمود.

به‌دلیل دشواری در شبیه‌سازی تجربی نیروی تعقیب-کننده برای یافتن محدوده فلاتر به‌صورت آزمایشگاهی، فعالیت‌های زیادی انجام نگرفته است. هیگوچی<sup>۸</sup> [۷] تیر دو سر آزاد را با تراست انتهایی به‌صورت تجربی بررسی نمود؛ و شوگی‌یاما<sup>۹</sup> و همکارانش [۸] پایداری دینامیکی ستون یک سر درگیری را تحت رانش راکت بررسی کردند. همچنین شوگی‌یاما و همکارانش [۹] تأثیر میرایی داخلی را روی پایداری تیر دو سر آزاد تحت تراست انتهایی بررسی کردند. کری لاو<sup>۱۰</sup> و سرنین<sup>۱۱</sup> [۱۰] روی جرم توزیعی بهینه و سختی برای تیر متحرک در فضا تحت نیروی مماسی انتهایی مطالعه نمودند. کیم<sup>۱۲</sup> و چو<sup>۱۳</sup> [۱۱] پایداری دینامیکی تیر تیموشنکو دوسرآزاد با جرم متمرکز انتهایی تحت نیروی تعقیب کننده  $p_0 + p_1 \cos(\Omega t)$  را به‌وسیله روش المان محدود بررسی نمودند. کار<sup>۱۴</sup> و سوچتا<sup>۱۵</sup> [۱۲] پایداری دینامیکی تیر چرخان یک سر درگیر با جرم انتهایی تحت تحریک عرضی تعقیب کننده را بررسی کردند. کیم و یون<sup>۱۶</sup> [۱۳] پایداری دینامیکی تیر چرخان دو سر آزاد را تحت نیروی تعقیب کننده ضربه‌ای بررسی نمودند. ملادناو<sup>۱۷</sup> و شوگی‌یاما [۱۴] اثر اتصال دو بیم ویسکو الاستیک دو سر آزاد را تحت نیروی تعقیب کننده بررسی نمودند. کیم و کیم [۱۵] تأثیر ترک را روی پایداری دینامیکی تیر دو سر آزاد تحت نیروی تعقیب کننده ثابت و ضربه‌ای بررسی نمودند.

6- Park  
7- Mote  
8- Higuchi  
9- Sugiyama  
10- Kirillov  
11- Seyranian  
12- Kim  
13- Choo  
14- Kar  
15- Sujata  
16- Yoon  
17- Mladenov

1- Beal  
2- Peters  
3- Wu  
4- Leipholz  
5- Piche

آزمایشگاه نسبتاً مشکل است. به عنوان مثال، استفاده از سیالی که با سرعت زیاد از نازلی در انتهای تیر خارج شود. در این قسمت، ارتعاشات عرضی و مسائل پایداری تیر با مقطع متغیر اوپلر- برنولی تحت نیروی تعقیب‌کننده، مطالعه می‌شود. فرض می‌شود جابه‌جایی عرضی تیر در هر نقطه آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$w(x, t) = w(x) e^{i\omega t}, \quad (1)$$

که در آن،  $w(x)$  جابه‌جایی مستقل از زمان عرضی تیر است. معادله جابه‌جایی بیان شده باید معادله حرکت تیر را ارضا کند. اگر مقدار پارامتر  $\omega$  عددی حقیقی باشد، تیر مورد نظر ارتعاش هارمونیک با فرکانس  $\omega$  دارد و اگر  $\omega$  عددی موهومی باشد:

$$\omega = \alpha + i\beta, \quad (2)$$

$$w(x, t) = w(x) e^{(i\alpha - \beta)t},$$

که در آن، اگر  $\beta < 0$ ،  $w(x, t)$  یک عبارت افزایشنده نپری خواهد بود که بیانگر آن است که مقدار جابه‌جایی عرضی تیر با گذشت زمان به شکل نمایی بزرگ می‌شود و ناپایداری (فلاتر) اتفاق می‌افتد.

### ۳- معادله حاکم بر ارتعاشات عرضی تیر دو سر آزاد تحت نیروی محوری در غیاب نیروهای آیرودینامیک

در این قسمت، ارتعاشات عرضی تیر دو سر آزاد تحت نیروی ناپایستار محوری بررسی می‌شود. به همین منظور در شکل ۱ ساختار راکت یک مرحله‌ای با جرم کل  $M_0$  و طول کلی  $L_0$ ، سختی خمشی توزیعی  $EI(x)$ ، جرم توزیع شده  $\rho A(x)$  و تحت تراست انتهایی  $T$  نشان داده شده است. نیروی اینرسی توزیع شده در طول محور راکت، با مقدار  $p(x)$  که بزرگی نیروی محوری فشاری در موقعیت  $x$  در طول راکت می‌باشد، مشخص شده است. همان‌طور که می‌دانیم این توزیع نیرو با توجه به اصل دالامبر به مقدار شتاب و جرم توزیع شده  $\rho A(x)$  وابسته است.

در این مقاله، ابتدا به بحث پایداری دینامیکی در سازه پرداخته و سپس با استفاده از تحلیل مودال و روش المان محدود ارتعاشات عرضی سازه در حالت آزاد بدون نیروی انتهایی مورد بررسی قرار گرفته است. روش اجزای محدود در حقیقت برای به دست آوردن شکل مودهای آزاد بدون نیروی محوری در نرم‌افزار ABAQUS صورت گرفته است و کد برنامه‌نویسی MATLAB در این زمینه تنها برای تیر یکنواخت نوشته شده است. در ادامه، بحث پدیده فلتر برای تیر یکنواخت و غیر یکنواخت دو سر آزاد بدون نیروی محوری و با نیروی محوری تعقیب‌کننده و نیز نیروی پیشران ناپایستار مورد بررسی قرار گرفته است. لازم به ذکر است برای تیر غیریکنواخت بدون نیروی محوری، با استفاده از المان بیم<sup>۱</sup> در روش اجزای محدود، شکل مودها با استفاده از نرم‌افزار ABAQUS به دست آمده است.

### ۲- مبانی پایداری دینامیکی

با توجه به مباحث پایداری می‌دانیم که، ناپایداری در سازه‌ها به دو صورت استاتیکی و دینامیکی روی می‌دهد. در ناپایداری استاتیکی، فرکانس صفر بوده و در ناپایداری دینامیکی، دو فرکانس سازه تحت نیروی تعقیب‌کننده به یکدیگر نزدیک شده و در حالتی خاص سیستم به صورت دینامیکی ناپایدار می‌گردد.

بارهای هیدرو دینامیکی و آیرودینامیکی و نیروهای اعمالی روی قسمت‌ها و اتصالات یک سیستم مکانیکی در بیشتر موارد ناپایستار هستند. ارتعاشات عرضی تیر تحت نیروهای انتهایی موضوع کاملاً شناخته شده‌ای است. همان‌طور که می‌دانیم نیروهای انتهایی که به صورت محوری و یا تعقیب‌کننده به تیر اعمال می‌شود روی فرکانس ارتعاشات عرضی تیر تأثیر می‌گذارد. هنگامی که نیروی انتهایی به صورت محوری به تیر اعمال شود این نیرو ممکن است باعث کماتش تیر شود ولی اگر همین نیرو به صورت تعقیب‌کننده باشد، پدیده دیگری در آن اتفاق می‌افتد که اصطلاحاً فلتر نامیده می‌شود. پدیده کماتش را می‌توان به سادگی با گذاشتن بار مرده روی تیر به صورت آزمایشگاهی مطالعه نمود، درحالی‌که شبیه‌سازی نیروهای تعقیب‌کننده در

می‌گردد. در مرحله بعد با استفاده از این شکل مودها و با استفاده از روش گالرکین معادله فوق حل می‌شود. بنابراین:

$$w = \sum \varphi_i(x) \eta_i(t). \quad (5)$$

در معادله بالا،  $\varphi_i$ ها مودهای ارتعاشی تیر مورد نظر در غیاب نیروی تعقیب‌کننده هستند که شرایط مرزی ارائه شده در معادله (۴) را ارضا می‌کنند. با جایگذاری معادله (۵) در (۳) و استفاده از روش گالرکین روابط زیر به دست می‌آید:

$$R = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI(x) \frac{\partial^2 \sum \varphi_i(x) \eta_j(t)}{\partial x^2}) + \frac{\partial}{\partial x} (P \frac{\partial \sum \varphi_i(x) \eta_j(t)}{\partial x}) + \rho A(x) \frac{\partial^2 \sum \varphi_i(x) \eta_j(t)}{\partial t^2} - Q_d, \quad (6)$$

$$\int_0^L \varphi_j R dx = 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (7)$$

$$\int_0^L \varphi_j \frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI(x) \frac{\partial^2 \sum \varphi_i(x) \eta_j(t)}{\partial x^2}) dx + \int_0^L P \varphi_j \frac{\partial^2 \sum \varphi_i(x) \eta_j(t)}{\partial x^2} dx + \int_0^L \rho A(x) \varphi_j \frac{\partial^2 \sum \varphi_i(x) \eta_j(t)}{\partial t^2} dx = \int_0^L \varphi_j Q_d dx. \quad (8)$$

هر یک از عبارتهای انتگرالی معادله (۸) را می‌توان با استفاده از انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء به صورت ساده‌تر نوشت. لذا عبارت نخست در معادله فوق با دو بار انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء و اعمال شرایط مرزی انتهای آزاد یعنی گشتاور و برش صفر در انتهای آزاد به صورت زیر ساده می‌شود:

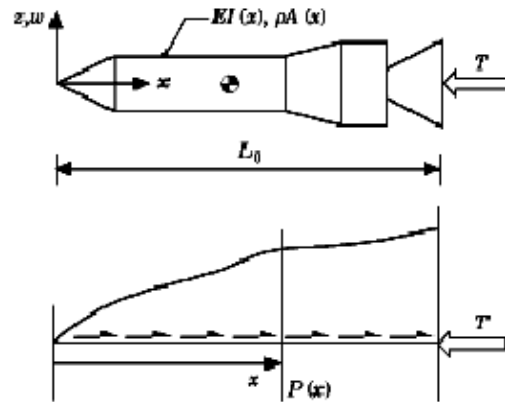
$$\int_0^L \varphi_j \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI(x) \frac{\partial^2 \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) \eta_i(t)}{\partial x^2} \right) dx = \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^n \left[ \int_0^L EI(x) \varphi_j'' \varphi_i'' dx \right] \eta_i(t) = \sum_{i=1}^n K_{ij} \eta_i(t).$$

عبارات انتگرالی دوم و سوم را نیز می‌توان با انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء به صورت ساده زیر نوشت:

$$\int_0^L \varphi_j \frac{\partial}{\partial x} \left( P(x) \frac{\partial \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) \eta_i(t)}{\partial x} \right) dx = \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^n \left[ \int_0^L [P \varphi_j \varphi_i'] \Big|_{x=0}^{x=L} - \int_0^L P \varphi_j' \varphi_i' dx \right] \eta_i(t) = \sum_{i=1}^n A_{ij} \eta_i(t),$$



شکل (۱): سازه تحت نیروی پیش‌ران ناپایستار.

برای بررسی هر سیستم دینامیکی، ابتدا باید مدل فیزیکی مناسبی برای آن در نظر گرفت تا بتوان با استفاده از این مدل به تحلیل و نتیجه‌گیری پرداخت. مدل تیر دو سر آزاد به عنوان الگوی ساده‌ای برای بیان رفتار سازه موشک و راکت استفاده می‌شود. در این قسمت پایداری تیر دو سر آزاد غیر یکنواخت، تحت نیروی تراست انتهایی بررسی می‌شود. با استفاده از تئوری تیر اویلر-برنولی معادله حاکم بر ارتعاشات عرضی الاستیک تیر غیر یکنواخت باریک تحت نیروی محوری توزیع شده به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}) + \frac{\partial}{\partial x} (P(x) \frac{\partial w(x,t)}{\partial x}) + \rho A(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = Q_d. \quad (3)$$

در معادله بالا،  $w(x,t)$  جابجایی عرضی تیر،  $EI(x)$  استحکام خمشی،  $P(x)$  نیروی محوری توزیع شده در راستای تیر که ناشی از نیروی تعقیب‌کننده در انتهای آن می‌باشد،  $\rho$  چگالی و  $A(x)$  سطح مقطع عرضی تیر است.  $Q_d$  نیروی اغتشاشی مشخص بر حسب زمان و غیر وابسته به تغییر شکل‌های سازه است و شرایط مرزی برای تیر مورد نظر به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3} \Big|_{x=l} = 0 \quad \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=l} = 0, \quad (4)$$

که شرایط مرزی فوق به ترتیب ناشی از گشتاور و نیروی برشی صفر در انتهای آزاد تیر می‌باشند.

برای حل این مسئله، ابتدا با استفاده از تحلیل مودال، ارتعاشات عرضی تیر را در حالت آزاد بدون نیروی انتهایی بررسی نموده و مودهای ارتعاشی عرضی آن استخراج

باشند، ماتریس همانی خواهد بود. در نهایت معادله (۸) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\sum_{i=1}^n K_{ij} \eta_i(t) + \sum_{i=1}^n A_{ij} \dot{\eta}_i(t) + \sum_{i=1}^n M_{ij} \ddot{\eta}_i(t) = F_j, \quad (15)$$

و با ساده‌سازی، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sum_{i=1}^n \left( (K_{ij} + A_{ij}) \eta_i(t) + M_{ij} \ddot{\eta}_i(t) \right) = F_j. \quad (16)$$

در این معادله، ماتریس سختی  $K_{ij}$  و ماتریس جرم  $M_{ij}$  ماتریس‌های متقارن هستند ولی ماتریس  $A_{ij}$  که ناشی از اپراتور نیروی محوری است، ماتریسی نامتقارن است. بنابراین معادلات حاصل از معادله (۱۶) به صورت هم‌گیر باقی می‌مانند. برای جداسازی این معادلات می‌توان از روش قطری کردن ماتریس‌ها استفاده کرد. در این روش با استفاده از ماتریس تبدیلی که از بردارهای ویژه ماتریس نامتقارن تشکیل شده است، به صورت زیر استفاده می‌شود:

$$T = \begin{bmatrix} \xi_1^{(1)} & \dots & \xi_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_n^{(1)} & \dots & \xi_n^{(n)} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

که، ستون‌های این ماتریس، بردارهای ویژه ماتریس  $(K_{ij} + A_{ij})$  هستند. تابع تبدیل به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\eta_i = T \gamma_j. \quad (18)$$

که با اعمال این تابع در معادله فوق، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sum_{i=1}^n \left( (K_{ij} + A_{ij}) T \gamma_j(t) + M_{ij} T \ddot{\gamma}_j(t) \right) = F_j. \quad (19)$$

حال، با ضرب طرفین معادله در معکوس ماتریس تبدیل می‌توان نوشت:

$$\sum_{i=1}^n \left( T^{-1} (K_{ij} + A_{ij}) T \gamma_i(t) + T^{-1} M_{ij} T \ddot{\gamma}_i(t) \right) = T^{-1} F_j. \quad (20)$$

با توجه به این که ماتریس تبدیل  $T$  شامل بردارهای ویژه ماتریس  $(K_{ij} + A_{ij})$  است، عبارت اول در معادله ۲۰ ماتریسی قطری است، که عناصر قطری آن همان مقادیر ویژه ماتریس  $(K_{ij} + A_{ij})$  هستند. بنابراین:

$$[T]^{-1} [(K_{ij}) + [A_{ij}]] [T] = [D_{ij}] = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_n \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$\int_0^L \varphi_j \rho A(x) \left( \frac{\partial^2 \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) \eta_i(t)}{\partial t^2} \right) dx = \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^n \left( \int_0^L \rho A(x) \varphi_j \varphi_i dx \right) \ddot{\eta}_i(t) = \sum_{i=1}^n (M_{ij}) \ddot{\eta}_i(t).$$

علاوه بر آن، در خصوص طرف دوم معادله نیز می‌توان چنین نوشت:

$$\int_0^L \varphi_j Q_d dx = F_j, \quad (12)$$

که در آن، پارامتر  $F_j$  نیروی تعمیم یافته وارد شده به سیستم خواهد بود.

با توجه به اینکه در معادله فوق از مودهای ارتعاش آزاد در عبارت‌های بسط استفاده شده است، می‌توان از خاصیت تعامد مودهای ارتعاشات آزاد نسبت به ماتریس سختی و جرم استفاده کرد. این خاصیت سبب می‌شود که انتگرال حاصل ضرب دو مود ارتعاشی نسبت به جرم و یا سختی سیستم صفر شود و تنها در حالتی مقدار غیر صفر داشته باشد که دو مود مورد نظر یکسان باشند. بدین ترتیب با استفاده از خواص تعامد مودهای ارتعاشات آزاد سیستم، روابط زیر به دست خواهد آمد:

$$\int_0^L \varphi_i(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} \right] dx = \quad (13)$$

$$\int_0^L \varphi_i''(x) \varphi_j''(x) EI(x) dx = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ m_i \omega_i^2 & i = j \end{cases}$$

$$\int_0^L \varphi_i(x) m(x) \varphi_j(x) dx = \begin{cases} = 0 & i \neq j \\ = m_i & i = j \end{cases}$$

که چنانچه مودهای ارتعاشی نسبت به جرم نرمال شده باشند، عبارات انتگرالی (۹) و (۱۱) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$K_{ij} = \int_0^L \varphi_i''(x) \varphi_j''(x) EI(x) dx = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \omega_i^2 & i = j \end{cases}, \quad (14)$$

$$M_{ij} = \int_0^L \varphi_i(x) m(x) \varphi_j(x) dx = \begin{cases} = 0 & i \neq j \\ = 1 & i = j \end{cases}$$

بنابراین، ماتریس سختی  $K_{ij}$  ماتریس قطری است که عبارت‌های قطر اصلی آن همان فرکانس‌های ارتعاشات آزاد سیستم هستند. همچنین ماتریس جرم  $M_{ij}$  نیز ماتریسی متقارن و قطری است که اگر مودها نسبت به جرم نرمال شده

مختلف را می‌توان به راحتی از روش تحلیلی محاسبه نمود. مقادیر محاسبه شده فرکانس و شکل مودهای تیر یکنواخت در مراجع مختلف به صورت زیر داده شده است:

$$\varphi_i = \cosh\left(\frac{\lambda_i x}{l}\right) - \cos\left(\frac{\lambda_i x}{l}\right) - \quad (25)$$

$$\left( \frac{\cosh(\lambda_i) - \cos(\lambda_i)}{\sinh(\lambda_i) - \sin(\lambda_i)} \right) \left( \sinh\left(\frac{\lambda_i x}{l}\right) + \sin\left(\frac{\lambda_i x}{l}\right) \right),$$

$$\lambda_i = (2i+1) \frac{\pi}{2} \quad i=1,2,3,\dots,$$

$$\omega_i = \frac{\lambda_i^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}.$$

از آنجایی که نیروی محوری ناشی از شتاب‌های طولی تیر می‌باشد، با استفاده از اصل دالامبر و تعادل نیرویی می‌توان نیروی محوری را در هر مقطع تیر به دست آورد. این نیرو در هر مقطع معادل می‌شود با حاصل ضرب شتاب کلی جسم در مقدار جرم تیر، که در جلو مقطع مورد نظر قرار دارد. لذا توزیع نیروی محوری را می‌توان با استفاده از انتگرال زیر به دست آورد:

$$p(x) = \frac{F}{M_{total}} \int_0^x m(\xi) d\xi \quad (26)$$

با توجه به اینکه جرم در طول تیر یکنواخت توزیع شده است، پارامتر  $m(x)$  در طول تیر مقدار ثابتی می‌باشد و برابر  $\frac{M}{L}$ ، به صورت زیر می‌باشد:

$$m(\xi) = \frac{M}{L}, \quad (27)$$

$$p(x) = \frac{F}{M} \int_0^x \frac{M}{L} d\xi = \frac{F}{L} x. \quad (28)$$

حال با در اختیار داشتن توزیع نیروی محوری و مودهای ارتعاش آزاد، می‌توان تیر دو سر آزاد مورد نظر را تحت نیروی تعقیب کننده با استفاده از معادله (۲۴)، که در قسمت قبل به دست آمد، مورد بررسی قرار داد. با توجه به اینکه سطح مقطع تیر ثابت بوده، سختی تیر مقدار ثابتی می‌باشد. با قرار دادن این مقادیر ثابت در معادلات فوق و انتگرال گیری جزء به جزء و استفاده از تعامد مودهای ارتعاشی و اعمال شرایط مرزی، این معادلات به صورت زیر ساده می‌شوند:

$$M_{ij} = \int_0^l \rho A(x) \varphi_j \varphi_i dx = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ m_i = \frac{M}{L} & i = j \end{cases}, \quad (29)$$

همچنین، ماتریس  $M_{ij}$  ماتریسی همانی است، بنابراین:

$$[T]^{-1} [M_{ij}] [T] = \delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

حال با استفاده از نتیجه روابط فوق معادله حاکم به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\sum_{i=1}^n ([D_{ij}] [\gamma_i(t)] + [\delta_{ij}] [\dot{\gamma}_i(t)]) = [T]^{-1} [F_j], \quad (23)$$

که شامل معادلات ناهم‌گیر حاکم است. چنان‌چه بررسی پایداری دینامیکی مد نظر باشد، تنها بایستی طرف دوم معادله را صفر قرار داد و بدین ترتیب مشخصه‌های دترمینان معادلات فوق را در رابطه با پایداری سیستم به دست آورد. با در نظر گرفتن تابع  $\gamma_j(t)$  به صورت تابع نمایی، می‌توان جواب معادله را به دست آورد، بنابراین:

$$\gamma_i(t) = e^{p_i t}, \quad (24)$$

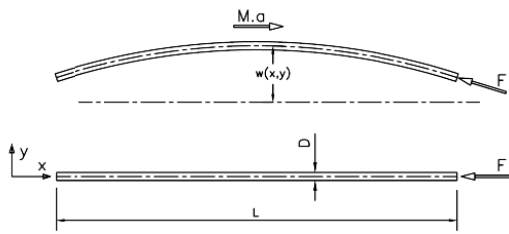
$$\sum_{i=1}^n ([D_{ij}] + p_i^2 [\delta_{ij}]) e^{p_i t} = 0 \longrightarrow p_i^2 = -\beta_i.$$

از این معادله فرکانس‌های تیر تحت نیروی محوری تعقیب کننده به دست می‌آید. همان‌طور که دیده می‌شود، این فرکانس‌ها، همان مقادیر ویژه ماتریس  $(K_{ij} + A_{ij})$  هستند. از آنجایی که  $p_i$  عددی مختلط است، با توجه به مباحث پایداری در صورتی که مقدار حقیقی آن صفر و یا کوچک‌تر از صفر باشد سیستم پایدار و در غیر این صورت ناپایدار خواهد بود. بنابراین برای به دست آوردن فرکانس‌های تیر تحت نیروی محوری تعقیب کننده، باید ماتریس‌های  $K_{ij}$  و  $A_{ij}$  مشخص شوند، که عبارت‌های تشکیل دهنده این ماتریس‌ها به راحتی با انتگرال گیری عددی قابل محاسبه است. همچنین مودهای طبیعی تیر در حالت آزاد و بدون بارگذاری، با روش‌های تحلیلی برای تیرهای ساده و یا المان محدود برای تیرها با پیچیدگی بیشتر قابل محاسبه هستند.

#### ۴- بررسی پایداری تیر یکنواخت

در این قسمت با توجه به مطالب ارائه شده در بخش قبل، پایداری تیر یکنواخت دو سر آزاد بررسی می‌شود. همان‌طور که می‌دانیم ارتعاشات عرضی تیر یکنواخت با شرایط مرزی

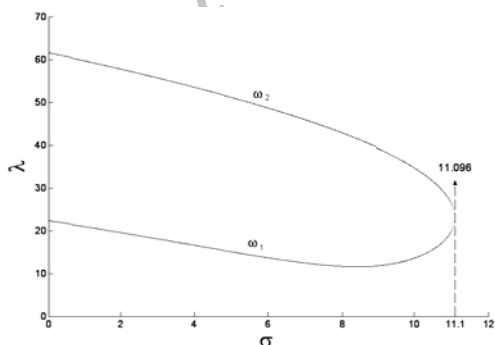
اول برای تحلیل استفاده شده و نیز روش سیمپسون برای انتگرال گیری به کار برده شده است.



شکل (۲): تیر یکنواخت دو سر آزاد تحت نیروی محوری

$$E = 2.1e11 \text{ Mpa}, \rho = 7800 \text{ kg/m}^3, \\ D = 0.01, L = 1 \text{ m}$$

در شکل ۳ نمودار تغییرات فرکانس اول و دوم ارتعاشات عرضی تیر دو سر آزاد یکنواخت نسبت به تغییرات نیروی تعقیب کننده نشان داده شده است. در این نمودار محور افقی مقدار نیروی تعقیب کننده را ( $\sigma = p_j / P_{cr}$ ) که نسبت به نیروی کمانش تیر بی بعد شده است، نشان می دهد و محور عمودی، مقدار فرکانس ارتعاشات عرضی تیر را نشان می دهد. این مقدار نیز نسبت به پارامتر  $\tilde{\omega} = \sqrt{EI / mL^4}$  بی بعد شده است. همان طور که دیده می شود با افزایش نیروی تعقیب کننده فرکانس اول و دوم ارتعاشات تیر کاهش می یابد و با افزایش نیرو به مقدار ۱۱/۰۹۶ برابر نیروی بحرانی کمانش، پدیده فلاتر اتفاق می افتد. در جدول ۱ مشخصات پایداری تیر یکنواخت مورد نظر ارائه شده است. توضیح اینکه، با استفاده از تعداد مدهای بیشتر در محاسبات می توان به نتایج دقیق تری دست یافت.



شکل (۳): فرکانس ارتعاشات اول و دوم تیر یکنواخت

نسبت به تغییرات نیروی تعقیب کننده.

$$\begin{cases} K_{ij} = EI \int_0^L \phi_j'' \phi_i'' dx = 0 & i \neq j, \\ m_i \omega_i^2 = \left(\frac{EI}{L^4}\right) \lambda_i^4 = \left(\frac{EI}{L^4}\right) \left((2i+1)\frac{\pi}{2}\right)^4 & i = j, \end{cases} \quad (30)$$

$$A_{ij} = F \phi_j(L) \phi_i'(L) - \int_0^L \frac{F}{L} x \phi_j' \phi_i' dx. \quad (31)$$

ماتریس های سختی و جرم را به صورت زیر می توان نشان داد:

$$M_{ij} = \left(\frac{M}{L}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (32)$$

$$K_{ij} = \left(\frac{EI}{L^4}\right) \begin{bmatrix} \lambda_1^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i^4 = \left((2i+1)\frac{\pi}{2}\right)^4 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

با مشتق گیری از مدهای ارتعاش آزاد تیر دو سر آزاد که در معادله (۲۵) ارائه شده، مقدار  $\phi_i'$  را به راحتی می توان به دست آورد. لذا با استفاده از معادله (۲۵) عبارتهای ماتریس  $A_{ij}$  به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} \phi_i' &= \left(\frac{\lambda_i}{L}\right) \left(\sinh\left(\frac{\lambda_i x}{L}\right) + \sin\left(\frac{\lambda_i x}{L}\right) - \right. \\ &\left. \left(\frac{\cosh(\lambda_i) - \cos(\lambda_i)}{\sinh(\lambda_i) - \sin(\lambda_i)}\right) \left(\cosh\left(\frac{\lambda_i x}{L}\right) + \cos\left(\frac{\lambda_i x}{L}\right)\right)\right), \end{aligned} \quad (34)$$

$$\lambda_i = (2i+1)\frac{\pi}{2} \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

$$A_{ij} = F \phi_j(L) \phi_i'(L) - \int_0^L \frac{F}{L} x \phi_j' \phi_i' dx.$$

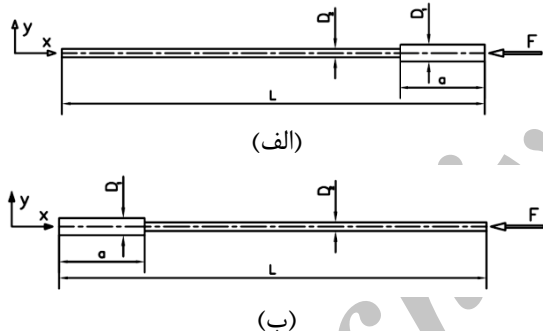
همان طور که دیده می شود، به دست آوردن عبارتهای ماتریس  $A_{ij}$  از روش انتگرال گیری مستقیم، نسبتاً پیچیده است، لذا می توان این مقادیر را از روش انتگرال گیری عددی محاسبه نمود. با در اختیار داشتن ماتریس جرم، سختی و ماتریس  $A_{ij}$ ، با توجه به معادله (۲۴)، می توان پایداری دینامیکی تیر مورد نظر را تحت نیروی محوری ناپایستار بررسی کرد.

در ادامه، نتایج این تحلیل، برای تیر نمونه شکل ۲ آورده شده است. لازم به ذکر است که در اینجا از شش مود شیب

### ۵- بررسی پایداری تیر دو تکه تحت نیروی محوری و

#### مطالعه اثر نیروی پایداری آن

در این قسمت پایداری تیر دو تکه تحت نیروی محوری مورد بررسی قرار گرفته است. برای این منظور، سیستم ناپیوسته مورد نظر در نرم افزار ABAQUS با استفاده از المان بیم مدل شده است و نیز اتصالات مفصلی به صورت فنر پیچشی با سختی مشخص در این نرم افزار مدل سازی شده است و در ادامه مودهای طبیعی آزاد تیر از این نرم افزار استخراج شده است، که در مرحله بعد، از این مودها برای تحلیل حرکت اجباری ارتعاشات تیر تحت نیروی انتهایی استفاده شده است. همان طور که در شکل ۵ دیده می شود تیر از دو قسمت با مقاطع متفاوت تشکیل شده است. برای بررسی اثر نیروی محوری روی پایداری تیر در شکل ۵-الف، نیروی محوری در سمت ضخیم تیر و در شکل ۵-ب در سمت باریک تیر اعمال شده است.



شکل (۵): تیر دو تکه دو سر آزاد تحت نیروی محوری تعقیب

کننده (الف). نیرو در قسمت ضخیم تیر اعمال شده است

(ب). نیرو در قسمت باریک تیر اعمال شده است،

$$E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Mpa}, L = 1 \text{ m}, a = 0.8 \text{ m}, D_1 = 0.04, D_2 = 0.02$$

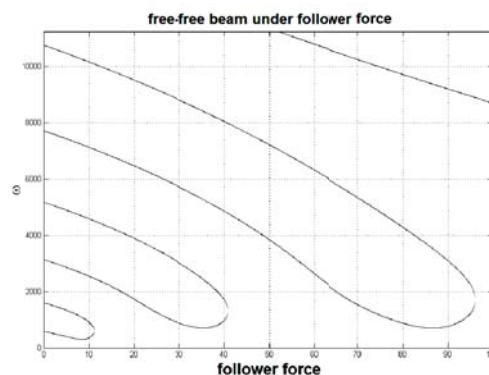
در شکل ۶ نمودار فرکانس ارتعاشات عرضی تیر شکل ۵-الف نسبت به تغییرات نیروی محوری تعقیب کننده نشان داده شده است.

با توجه به شکل دیده می شود که در تیر مورد نظر با افزایش نیروی محوری هر دو پدیده ناپایداری، فلاتر و واگرایی در تیر اتفاق می افتد. ما شاهد پدیده فلاتر در مودهای اول و دوم، چهارم و پنجم، ششم و هفتم می باشیم. پدیده واگرایی

### جدول (۱): مشخصات پایداری تیر یکنواخت شکل ۱.

توضیحات	روش حاضر
نیروی بحرانی فلاتر اول ( $P_f$ )	$1/8062 \text{ e}+5 \text{ (N)}$
بار بحرانی کمانش ( $P_{cr}$ )	$1/6278 \text{ e}+4 \text{ (N)}$
فرکانس فلاتر اول ( $\omega_f$ )	$598/5 \text{ (rad/s)}$
$\sigma = P_f / p_{cr}$	۱۱/۰۹۶
$\lambda = \omega_f / \tilde{\omega}$	۲۳/۱

از مزایای روش ارائه شده، قابلیت محاسبه شرایط فلاتر مودهای بالاتر است. با استفاده از تعداد مودهای بیشتر در محاسبات، می توان نیروهای بحرانی و فرکانسهای فلاتر بالاتر را به دست آورد. البته این شرایط ارزش مهندسی خاصی نداشته و تنها از دیدگاه فیزیکی مسئله جالب هستند. همچنین، با توجه به فرضیات تئوری تیر اوپلر-برنولی (صرف نظر کردن از نیروی برشی و اینرسی دورانی تیر)، مودهای بالاتر ارتعاشات آزاد تیر که از تئوری تیر اوپلر-برنولی حاصل می شوند، از دقت کمتری برخوردار هستند. لذا مقادیر فرکانس فلاتر و نیروی بحرانی برای مودهای سوم و چهارم و بالاتر دقت کمتری خواهند داشت. نمودار شکل ۴ تغییرات فرکانسهای طبیعی تیر را نسبت به تغییرات مقدار نیروی تعقیب کننده نشان می دهد. همان طور که دیده می شود با افزایش نیروی محوری فرکانس ارتعاش عرضی سوم و چهارم و... کاهش می یابد و شاهد پدیده فلاتر در مودهای بالاتر هستیم.

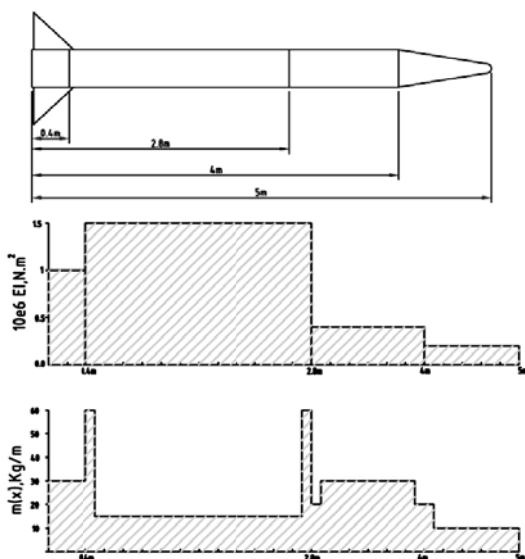


شکل (۴): نمودار شش فرکانس ارتعاشی اول تیر یکنواخت

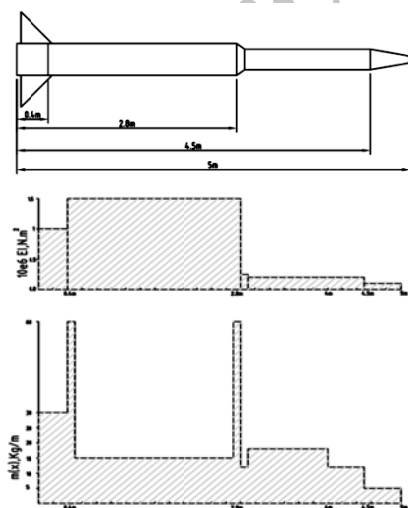
دو سر آزاد نسبت به تغییرات نیروی تعقیب کننده.



۹-۸) با استفاده از تئوری تیر اویلر-برنولی در نظر گرفته شده است. ابتدا با استفاده از روش المان محدود، مود شیپ‌های سازه دو سر آزاد مورد نظر در حالت آزاد بدون نیروی تراست را بدست آورده و سپس، مود شیپ‌های همان سازه تحت نیروی محوری تعقیب‌کننده به دست می‌آید. همچنین برای بررسی اثر اتصال روی پایداری سازه از فنرهای پیچشی در نقاط اتصال استفاده شده (شکل ۱۰) که مقادیر سختی و محل اتصال در جدول ۲ ارائه شده است و با روش ارائه شده پایداری سازه تحت نیروی ناپایستار محوری بررسی شده است.

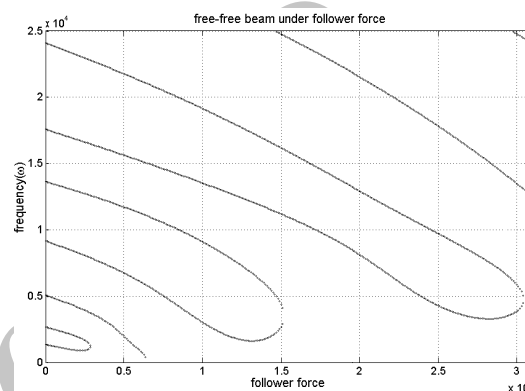


شکل ۸: مشخصات سازه ای نمونه A.



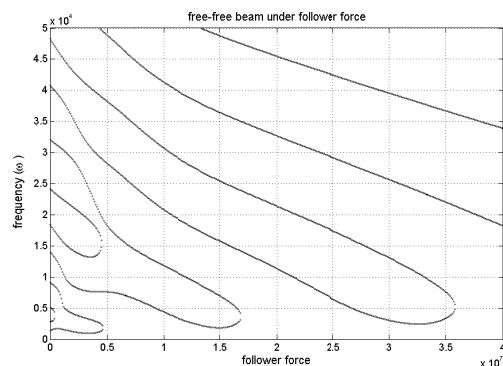
شکل ۹: مشخصات سازه‌ای نمونه B.

در مود سوم اتفاق می‌افتد. این در حالی است که در مورد تیر شکل ۵-ب که نمودار فرکانس ارتعاشات آن نسبت به تغییرات نیروی محوری تعقیب‌کننده در نمودار شکل ۷ نشان داده شده، تنها پدیده فلاتر در تیر اتفاق می‌افتد. دیده می‌شود که فلاتر در مودهای اول و چهارم، دوم و سوم و ... اتفاق می‌افتد. با توجه به بحث ارائه شده می‌توان نتیجه گرفت که مقدار نیروی اینرسی مقاطع مختلف تیر روی پایداری آن تأثیر می‌گذارند.



شکل ۶: نمودار تغییرات هفت فرکانس اول ارتعاشات

عرضی تیر شکل ۵-الف نسبت به تغییرات نیروی محوری.



شکل ۷: نمودار تغییرات ده فرکانس اول ارتعاشات

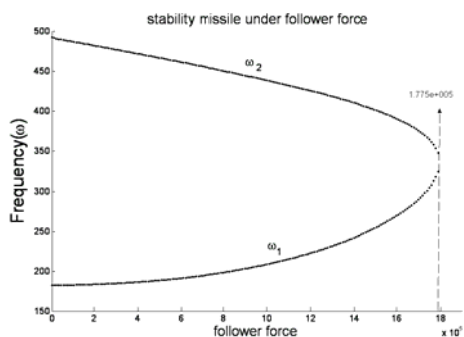
عرضی تیر شکل ۵-ب نسبت به تغییرات نیروی محوری.

## ۶- بررسی پایداری تیر دو سر آزاد تحت نیروی پیشرانه ناپایستار

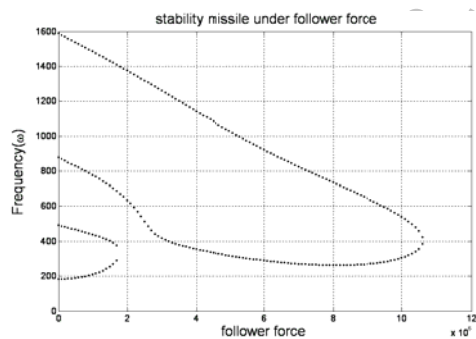
در این قسمت، پایداری تیر دو سر آزاد را تحت نیروی تراست انتهایی بررسی می‌کنیم. به همین منظور دو نوع سازه با پارامترهای هندسی و مشخصات سازه‌ای ارائه شده (شکل‌های

وجود اتصال در سازه های مورد نظر، باعث کاهش نیروی بحرانی پدیدآورنده فلاتر می گردد.

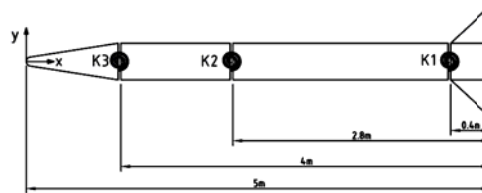
نتایج ارائه شده در شکل های ۱۱-۱۵ نشان می دهد که فرکانس ارتعاش در اثر نیروی محوری تعقیب کننده کاهش می یابد. البته مقدار کاهش فرکانس ناچیز می باشد. با توجه به اینکه نیروی تراست در سازه های موجود چندان بزرگ نیست، لذا فرکانس های طبیعی ارتعاش سازه خیلی نزدیک به فرکانس ارتعاشات آزاد آن می باشد.



شکل (۱۱): نمودار تغییرات دو فرکانس اول ارتعاشات عرضی سازه نمونه A نسبت به تغییرات نیروی محوری.



شکل (۱۲): نمودار تغییرات چهار فرکانس ارتعاشی اول سازه نمونه A نسبت به تغییرات نیروی تعقیب کننده.



شکل (۱۰): سازه نمونه A با در نظر گرفتن اثر اتصال.

جدول (۲): مقادیر خاص برای سازه نمونه A.

محل اعمال (m)	سختی فنر پیچشی (N.m/rad)
۰/۴	$0.16e+0.5$
۲/۸	$0.16e+0.5$
۴	$0.16e+0.5$

در جدول ۳ مقادیر نیروی فلاتر اول و دوم مربوط به دو نوع سازه ارائه شده است. با توجه به این نتایج دیده می شود که اثر اتصال به مقدار قابل توجهی نیروی بحرانی پدید آورنده فلاتر را کاهش می دهد. با این وجود مقدار این نیرو نسبت به وزن سازه خیلی زیاد می باشد. در حقیقت این مقدار همان نسبت نیروی تراست سازه به وزن آن می باشد.

جدول (۳): مشخصات پایداری سازه الاستیک تحت نیروی پیشرانده ناپایستار.

توضیحات	فلاتر اول		فلاتر دوم		وزن سازه w(kg)	p/w
	نیرو p(N)	فرکانس (rad/s)	نیرو (N)	فرکانس (rad/s)		
سازه A	۱/۷۷۵e۶	۳۳۵	۱/۰۴۴e۷	۴۰۵	۱۰۲	۱۷۴۰
سازه A با اثر اتصال	۱/۰۳۲e۶	۲۳۲	۰/۵۰۹e۷	۲۱۸	۱۰۲	۱۰۱۲
سازه B	۱/۳۴e۶	۳۸۲	-	-	۸۶	۱۵۵۸

با توجه به اینکه در سازه های موجود مقدار نیروی تراست نسبت به وزن سازه کوچک می باشد، لذا می توان به این نتیجه رسید که اثر فلاتر در اینگونه سازه ها اتفاق نمی افتد. ولی

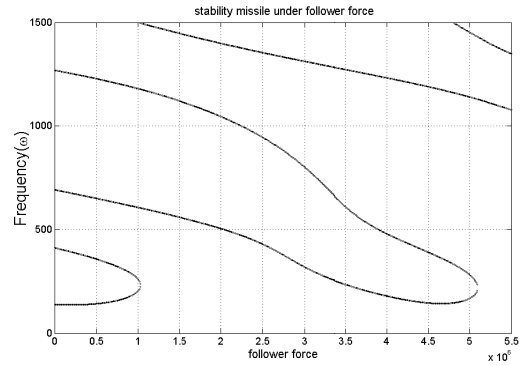
### ۷- نتیجه‌گیری

نتایج ارائه شده نشان می‌دهد که برای تیر یکنواخت دو سر آزاد با افزایش نیروی محوری، فرکانس ارتعاشات عرضی تیر همواره کاهش می‌یابد و در نیروهای چندین برابر نیروی کمانش تیر، شاهد پدیده فلاتر هستیم. در حالی که برای تیر غیر یکنواخت دو سر آزاد، هر دو پدیده فلاتر و واگرایی ممکن است در تیر اتفاق افتد. علاوه بر این، نیروی محوری برای این نوع تیر همواره باعث کاهش فرکانس نمی‌شود، بلکه ممکن است در مواردی باعث افزایش فرکانس ارتعاش شود. این مطلب برای فرکانس اول سازه نمونه A نشان داده شده است. با توجه به بحث ارائه شده می‌توان نتیجه گرفت که مقدار نیروی اینرسی مقاطع مختلف تیر، روی پایداری آن تأثیر می‌گذارد.

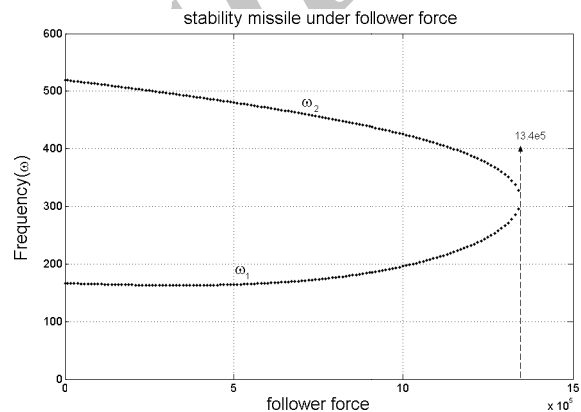
در مورد پایداری سازه نمونه ارائه شده، دیده می‌شود که تغییرات فرکانس اول ارتعاش برای مقادیر کوچک نیروی محوری خیلی نزدیک به فرکانس ارتعاشات آزاد سازه می‌باشد. ولی برای فرکانس‌های بالاتر، این تغییرات شدیدتر می‌باشد، با توجه به اینکه نیروی تراست در سازه‌های موجود چندان بزرگ نیست، لذا فرکانس ارتعاشات سازه تحت نیروی تراست خیلی نزدیک به فرکانس ارتعاشات آزاد تیر دو سر آزاد می‌باشد.

به‌طور کلی، برای سازه نمونه دیده می‌شود که فرکانس ارتعاش برای مودهای بالا با افزایش نیروی محوری همواره کاهش می‌یابد، البته این روند در مورد فرکانس اول ارتعاش صادق نیست. لذا مقدار فرکانس اول ارتعاش با افزایش نیروی محوری ممکن است افزایش یا کاهش یابد.

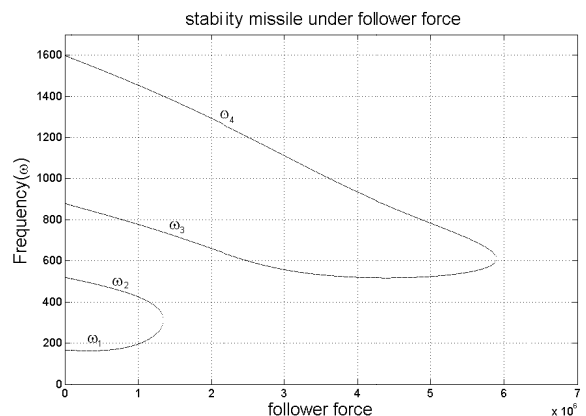
با توجه به این نتایج دیده می‌شود که اثر اتصال به مقدار قابل توجهی، نیروی بحرانی فلاتر را کاهش می‌دهد. با این وجود، مقدار این نیرو نسبت به وزن سازه خیلی زیاد می‌باشد. در حقیقت این مقدار همان نسبت نیروی تراست به وزن آن سازه می‌باشد. با توجه به اینکه، در سازه‌های موجود، مقدار نیروی تراست نسبت به وزن کوچک می‌باشد. لذا می‌توان به این نتیجه رسید که پدیده فلاتر در این گونه سازه‌ها اتفاق نمی‌افتد، با وجود این بررسی پایداری برای پرتابه‌های هدایت‌شونده به دلیل تأثیر ارتعاشات بر روی سیستم هدایت و کنترل آنها بسیار مهم می‌باشد.



شکل (۱۳): نمودار تغییرات چهار فرکانس ارتعاشی اول سازه نمونه A با در نظر گرفتن اثر اتصال نسبت به تغییرات نیروی تعقیب کننده.



شکل (۱۴): نمودار تغییرات دو فرکانس اول ارتعاشات عرضی سازه نمونه B نسبت به تغییرات نیروی محوری.



شکل (۱۵): نمودار تغییرات چهار فرکانس ارتعاشی اول سازه نمونه B.

15. Kim, K.H. and Kim, J.H., "Effect of Crack on the Dynamic Stability of a Free-Free Beam Subjected to a Follower Force," J. Sound and Vibration, Vol. 233, No.1, 119-135, 2000.

#### ۸- مراجع

1. Beal, T.R., "Dynamic Stability of a Flexible Missile under Constant and Pulsating Thrusts", AIAA J., Vol. 3, No. 3, pp. 486-494, 1965.
2. Peters, D.A. and Wu, J.J., "Asymptotic Solutions to a Stability Problem", J. Sound and Vibration, Vol. 59, No. 4, pp. 591-610, 1978.
3. Wu, J.J., "Missile Stability Using Finite Elements – an Unconstrained Variation Approach", AIAA J., Vol. 14, No. 3, pp. 313-319, 1976.
4. Leipholz, H.H.E. and Piche, R., "Stability of Follower-Force Rods with Weight", J. Eng. Mech., Vol. 110, No. 3, pp. 367-379, 1984.
5. Park, Y.P. and Mote, Jr., "The Maximum Controlled Follower Force on a Free-Free Beam Carrying a Concentrated Mass", J. Sound and Vibration, Vol. 98, No. 2, pp. 247 – 256, 1985.
6. Park, Y.P., "Dynamic Stability of a Free Timoshenko Beam under a Controlled Follower Force", J. Sound and Vibration, Vol. 113, No. 3, pp. 407 – 415, 1987.
7. Higuchi, K., "An Experimental Model of a Flexible Free-Free Column in Dynamic Instability Due to an End Thrust", AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Conf., pp. 2402-2408, 1994.
8. Sugiyama, Y., Katayama, K., and Kinoi, S., "Flutter of Cantilevered Column under Rocket Thrust," J. Aerospace Eng., Vol. 8, No. 1, pp. 9-15, 1995.
9. Sugiyama, Y., Katayama, T., Fukuda, H., and Kar, C., "Effect of Internal Damping on the Stability of Free-Free Beams under an End Thrust", Transactions of Japan Society of Mech. Eng., Vol. 55, No. 88, pp. 243-247, 1989.
10. Kirillov, O.N. and Seyranian, A.P., "Optimization of Stability of a Flexible Missile under Follower Thrust", The 7th AIAA on Multidisciplinary Analysis and Optimization, AIAA-98-4969, pp.2063-2073, 1998.
11. Kim, J.H. and Choo, Y.S., "Dynamic Stability of a Free-Free Timoshenko Beam Subjected to a Pulsating Follower Force", J. Sound and Vibration, Vol. 216, No. 4, pp. 623 – 636, 1998.
12. Kar, R.C. and Sujata, T., "Stability Boundaries of a Rotating Cantilever Beam with End Mass under a Transverse Follower Excitation", J. Sound and vibration Vol. 154, No. 1, pp. 81-93, 1992.
13. Yoon, S.J. and Kim, J.H., "A Concentrated Mass on the Spinning Unconstrained Beam Subjected to a Thrust," J. Sound and Vibration, Vol. 254, No. 4, pp. 621-634, 2002.
14. Mladenov, K.A. and Sugiyama, Y., "Stability of Jointed Free-Free Beam under End Rocket Thrust" J. Sound and Vibration, Vol.199, No.1, pp. 1-15, 1997.