

طراحی قانون هدایت تناسبی-انتگرالی با همگرایی زمان محدود

ایمان محمدزمان^۱ و حمیدرضا مؤمنی^۲

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

دانشگاه تربیت مدرس

(تاریخ دریافت: ۸۹/۰۶/۲۳؛ تاریخ پذیرش: ۹۰/۰۲/۱۲)

چکیده

در این مقاله، یک قانون هدایت تناسبی-انتگرالی با همگرایی زمان محدود با استفاده از ایده ناوبری موازی و به منظور صفر کردن نرخ چرخش خط دید در زمان محدود ارائه شده است. در قانون جدید، نرخ چرخش خط دید پیش از پایان زمان محدود هدایت فاز نهایی به سمت صفر و یا همسایگی کوچکی از صفر میل می‌کند. همچنین، قانون هدایت تناسبی-انتگرالی مذکور برای حالت دینامیک مرتبه اول رهگیر و به منظور برقراری پایداری حلقه هدایت و همگرایی زمان محدود نرخ چرخش خط دید توسعه داده شده است. در این حالت، از مشتقات مرتبه بالاتر نرخ چرخش خط دید برای جبران اثر دینامیک رهگیر استفاده شده است. نتایج شبیه‌سازی نشان‌دهنده آن است که قانون هدایت جدید نسبت به قانون هدایت تناسبی با همگرایی زمان محدود و هدایت تناسبی حقیقی دارای قوام بیشتری نسبت به مانور هدف بوده و عملکرد بهتری از خود نشان می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: هدایت تناسبی-انتگرالی، همگرایی زمان محدود، دینامیک رهگیر، ناوبری موازی

PI Guidance Law Design with Finite Time Convergence

I. Mohammadzaman and H.R. Momeni

Elec. & Comp. Eng. Dep't.

Tarbiat Modares Univ.

(Received: Sept. 14, 2010; Accepted: May 2, 2011)

ABSTRACT

In this paper, a PI guidance law with finite time convergence is proposed to nullify the LOS rate in finite time. With the new guidance law, the line-of-sight angular rate will converge to zero or a small neighborhood of zero before the final time of the guidance process. Furthermore, the proposed PI guidance law is extended to the first order pursuit dynamics which can guarantee the stability of the guidance loop and finite time convergence of the LOS rate. In this case, high derivatives of the LOS rate are appeared in the guidance law. Simulation results show the effectiveness and robustness of the proposed guidance law against maneuvering target as compared with finite time PN and true proportional navigation guidance law.

Keywords: PI Guidance, Finite Time Convergence, Pursuit Dynamics, Parallel Navigation

۱- دانشجوی دکتری: mohammadzaman@modares.ac.ir

۲- دانشیار (نویسنده پاسخگو): momeni_h@modares.ac.ir

۱- مقدمه

هدایت تناسبی و انواع روش‌های بهبودیافته آن بیش از چهار دهه است که در هدایت بسیاری از رهگیرها به کار گرفته می‌شود [۱-۳]. علت عمده استفاده از آن، سادگی، عملکرد خوب و پیاده‌سازی آسان آن است. لذا بهبود این روش همواره مد نظر طراحان مختلف بوده است. قوانین هدایت توسعه داده شده بر اساس ایده ناوبری موازی و هدایت تناسبی، سعی در صفر کردن نرخ چرخش خط دید به منظور تضمین برخورد رهگیر و هدف را دارند. اکثر این قوانین بر اساس تئوری‌های پایداری لیاپانوف و پایداری مجانبی و یا نمایی طراحی شده‌اند. این قوانین نرخ چرخش خط دید را با گذشت زمان به سمت بی‌نهایت به صفر و یا همسایگی کوچکی از صفر همگرا می‌کنند. این یافته‌ها با مشاهدات عملی در تناقض بوده و در بسیاری از کاربردها، زمان هدایت نهایی رهگیرها بسیار کوتاه بوده و قانون هدایت بایستی قادر به تضمین همگرایی زمان محدود نرخ چرخش خط دید باشد.

در مرجع [۴-۷] کلاس جدیدی از قوانین هدایت تناسبی با استفاده از روش لیاپانوف و حل مسئله پایداری با فرض ایده‌آل بودن دینامیک رهگیر به دست آمده است. قوانین هدایت اشاره شده در این مراجع بر اساس تئوری لیاپانوف طراحی شده و تابع لیاپانوف در این حالت، مربع نرخ چرخش خط دید در نظر گرفته شده و تضمینی بر پایداری زمان محدود برای این قوانین وجود ندارد.

دسته‌ای دیگر از روش‌ها از مفاهیم هدایت مقاوم برای برخورد با اهداف امروزی استفاده می‌نمایند. در مرجع [۸] از روش H_∞ برای طراحی قانون هدایت و پیدا کردن پاسخ تحلیلی نامساوی دیفرانسیلی مسئله هدایت استفاده شده است. لذا این قانون هدایت، سعی در کوچک نگه داشتن بهره L_2 سیستم از مقدار مشخصی داشته و از آن‌جا که بهره L_2 شاخصی است که در بازه زمانی صفر تا بی‌نهایت تعریف می‌شود، قانون هدایت H_∞ یک قانون هدایت با همگرایی زمان محدود نمی‌باشد. در مرجع [۹] یک قانون هدایت با استفاده از ایده هدایت تناسبی و کنترل مد لغزشی پیشنهاد شده است. سطح لغزش متناسب با نرخ چرخش خط دید انتخاب شده و مانور هدف به صورت نامعینی محدود، در نظر گرفته شده است. در مرجع [۱۰] از کنترل مد لغزشی برای

طراحی قانون هدایت با در نظر گرفتن دینامیک رهگیر استفاده شده است. قوانین هدایت موجود بر اساس مد لغزشی مرتبه اول نیز همگی بر اساس تئوری لیاپانوف و پایداری مجانبی و یا نمایی طراحی شده و تضمینی برای همگرایی زمان محدود آن‌ها وجود ندارد. به عبارت دیگر، نتایج تئوری تنها نشان می‌دهد که با این قوانین نرخ چرخش خط دید با گذشت زمان به سمت بی‌نهایت به سمت صفر و یا همسایگی صفر همگرا می‌شوند.

در مرجع [۱۱-۱۲] با استفاده از روش پایداری زمان کوتاه به تحلیل پایداری حلقه هدایت در حوزه زمان با در نظر گرفتن دینامیک رهگیر پرداخته شده است. همچنین در مرجع [۱۳] تحلیل پایداری حلقه هدایت در حوزه فرکانس با در نظر گرفتن قانون هدایت تناسبی-انتگرالی انجام شده است. اگرچه این مراجع به تحلیل پایداری حلقه هدایت در زمان محدود پرواز پرداخته و ابزار مناسب‌تری نسبت به تئوری لیاپانوف برای بررسی پایداری حلقه هدایت می‌باشند ولیکن تضمینی بر روی همگرایی نرخ چرخش خط دید در زمان محدود وجود ندارد.

در سال‌های اخیر پایداری زمان محدود سیستم کنترل که حالت‌های سیستم به سمت نقاط تعادل خود در زمان محدود همگرا شده و در آن باقی بمانند، مورد توجه محققین قرار گرفته است [۱۴-۱۹]. ایده کنترل زمان محدود که مربوط به پایداری زمان محدود می‌باشد برای اولین بار در مرجع [۱۶] مطرح شد. در مرجع [۱۷-۱۸] از کنترل مد لغزشی مرتبه بالا برای طراحی قانون هدایت با در نظر گرفتن دینامیک رهگیر استفاده شده و این قانون، همگرایی زمان محدود سیستم حلقه بسته را تضمین می‌نماید. ولیکن قوانین هدایت با همگرایی زمان محدود بر اساس مد لغزشی مرتبه دوم دارای ساختار نسبتاً پیچیده‌ای هستند. در مرجع [۱۹] با ارائه رویکرد جدیدی از پایداری زمان محدود، یک قانون هدایت تناسبی با همگرایی زمان محدود بر اساس نامساوی دیفرانسیلی لیاپانوف ارائه شده است. این قانون در حالت‌های خاص مشابه قانون هدایت مد لغزشی بوده و شرط پایداری زمان محدود را نیز ارضا می‌کند. این قانون برای حالت دینامیک ایده‌آل رهگیر که در آن تأخیری بین اندازه‌گیری نرخ چرخش خط دید و شتاب اعمالی به رهگیر وجود ندارد،

صورت مبسوط استخراج شده است و به راحتی می توان آن را به دینامیک های مرتبه بالاتر رهگیر تعمیم داد.

۲- روابط ریاضی و تعاریف اولیه مسئله

با توجه به شکل ۱، سینماتیک نسبی بین رهگیر و هدف در مختصات دو بعدی را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\ddot{R} = r^2 R + a_{t_r} - a_{m_r}, \quad (1)$$

$$\dot{r} = -2 \frac{\dot{R}}{R} r + \frac{1}{R} (a_{t_\theta} - a_{m_\theta}), \quad (2)$$

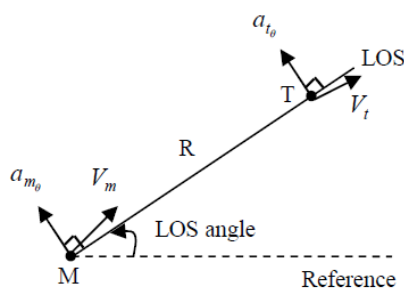
که در آن، R فاصله نسبی هدف و رهگیر، \dot{R} و \ddot{R} مشتق اول و دوم فاصله نسبی هدف و رهگیر نسبت به زمان، r نرخ چرخش خط دید، a_{t_r} و a_{m_r} به ترتیب شتاب هدف و رهگیر در راستای خط دید و a_{t_θ} و a_{m_θ} به ترتیب شتاب هدف و رهگیر در راستای عمود بر خط دید می باشند. با تعریف تبدیل می گردد:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (3)$$

$$\dot{x}_2 = x_4^2 x_1 + a_{t_r} - a_{m_r},$$

$$\dot{x}_3 = x_4,$$

$$\dot{x}_4 = -2 \frac{x_2}{x_1} x_4 + \frac{1}{x_1} (a_{t_\theta} - a_{m_\theta}).$$



شکل (۱): سینماتیک نسبی رهگیر و هدف در مختصات دو بعدی.

با توجه به ایده ناوبری موازی، اگر جهت خط دید نسبت به فضای اینرسی ثابت نگه داشته شود یا به عبارت دیگر خط دید در هر لحظه موازی خط دید اولیه نگه داشته شود و

عملکرد مناسبی داشته و منجر به برخورد نقطه ای بین رهگیر و هدف بدون مانور می گردد. ولیکن در حالت واقعی با در نظر گرفتن دینامیک رهگیر، در انتهای مسیر برخورد، نرخ چرخش خط دید به سمت واگرایی میل کرده و لذا شتاب رهگیر نیز افزایش می یابد و حلقه هدایت به سمت ناپایداری حرکت می کند. این واگرایی تأثیر زیادی در فاصله از دست دهی^۱ گذاشته و عملکرد حلقه هدایت را کاهش می دهد

در این مقاله، قانون هدایت تناسبی-انتگرالی با همگرایی زمان محدود بر اساس نامساوی دیفرانسیلی اسکالر لیاپانوف پیشنهاد شده است. این قانون بدون اضافه کردن سنسور جدید به سیستم، از نرخ چرخش خط دید و زاویه خط دید (انتگرال نرخ چرخش خط دید) برای محاسبه قانون هدایت استفاده نموده و مشکلات پیاده سازی نیز در آن وجود ندارد. برای تضمین همگرایی زمان محدود نرخ چرخش خط دید، قانون هدایت پیشنهاد شده دارای تابع غیر هموار علامت می باشد. یک راه حل برای کاهش اثر مانور هدف بدون استفاده از تخمین گر آن است که قانون هدایت بتواند نرخ چرخش خط دید را به سرعت صفر نموده تا سرعت نزدیک شونده گی رهگیر و هدف، حداکثر فاصله را تا صفر شدن داشته باشد و لذا با وارد شدن مانور هدف، قانون هدایت فاصله بیشتری تا ناپایداری داشته و لذا فرصت بیشتری برای برخورد بین رهگیر و هدف وجود دارد. لذا استفاده از قانون هدایت با همگرایی زمان محدود نرخ چرخش خط دید، می تواند قوام بیشتری نسبت به مانور هدف داشته باشد.

همچنین، در این مقاله، قانون هدایت تناسبی-انتگرالی مناسب برای صفر کردن نرخ چرخش خط دید در زمان محدود و تضمین پایداری حلقه هدایت با در نظر گرفتن دینامیک رهگیر توسعه داده شده است. با استفاده از قانون به-دست آمده می توان بهره های قانون هدایت تناسبی-انتگرالی را طوری تنظیم نمود که نرخ چرخش خط دید را در مدت زمان محدود به صفر همگرا نمود و پایداری حلقه هدایت تضمین شود. در این حالت مشتقات مرتبه بالای نرخ چرخش خط دید برای جبران اثر دینامیک رهگیر در قانون هدایت ظاهر می شود. این قانون جدید، برای یک سیستم مرتبه اول به

1- Miss Distance

آن‌گاه مبدأ نقطه تعادل پایدار زمان محدود سیستم (۴) است. همچنین زمان نشست T به صورت زیر می‌باشد:

$$T \leq \frac{V(x)^{1-\alpha}}{k(1-\alpha)} \quad (۸)$$

۳- طراحی قانون هدایت با همگرایی زمان محدود

با استفاده از تعاریف و تئوری پایداری زمان محدود که در قسمت قبل بیان شد، در این قسمت به طراحی قانون هدایت با همگرایی زمان محدود پرداخته می‌شود. قانون جدید علاوه بر استفاده از نرخ چرخش خط دید، از زاویه خط دید نیز استفاده می‌نماید. نرخ چرخش خط دید بین رهگیر و هدف توسط جستجوگر محاسبه می‌شود. برای استفاده از زاویه خط دید نیاز به اضافه شدن هیچ سنسور جدید به سیستم نبوده و از انتگرال نرخ چرخش خط دید استفاده می‌شود.

لم ۲: در سیستم (۳) اگر سیگنال کنترل a_{m_0} وجود داشته باشد به طوری که:

$$x_4 \left[\dot{x}_4 + \frac{(\beta - N_2 x_2 |x_3|)}{x_1} |x_4|^\eta \operatorname{sgn}(x_4) \right] \leq 0, \quad \forall t \geq \quad (۹)$$

که در آن، $N_2, \beta > 0$ و $-1 < \eta < 1$ است، آن‌گاه نرخ چرخش خط دید x_4 در زمان محدود به صفر همگرا می‌شود و زمان همگرایی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$t_r \leq \frac{|x_4(0)|^{1-\eta} x_1(0)}{(\beta + N_2 \gamma)(1-\eta)}, \quad (۱۰)$$

که در آن:

$$0 \leq \gamma = \min(-x_2 |x_3|). \quad (۱۱)$$

اثبات: تابع مثبت معین V_1 که در همسایگی مبدأ مشتق پذیر پیوسته است را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$V = \frac{1}{2} x_4^2. \quad (۱۲)$$

با توجه به روابط (۹) و (۱۲) می‌توان نوشت:

$$\dot{V} \leq -\frac{\beta - N_2 x_2 |x_3|}{x_1} V^{\frac{1+\eta}{2}}. \quad (۱۳)$$

همچنین، با توجه به مفهوم ناوبری موازی، در طول هدایت رهگیر به سمت هدف می‌توان گفت:

$$x_2 < 0, \quad 0 < x_1(t) < x_1(0), \quad \forall t > 0. \quad (۱۴)$$

فاصله هدف و رهگیر نیز در حال کم شدن باشد ($\dot{R} < 0$)، رهگیر در مسیر برخورد قرار داشته و برخورد بین رهگیر و هدف حتمی خواهد بود [۲]. به عبارت دیگر بایستی نرخ چرخش خط دید صفر گردد. در قانون هدایت تناسبی، از نرخ چرخش خط دید برای تعقیب بین رهگیر و هدف استفاده می‌شود.

به منظور طراحی قانون هدایت با همگرایی زمان محدود، از قضایای موجود در پایداری زمان محدود در سیستم‌های غیرخطی استفاده می‌گردد. لذا در ادامه به ارائه تعاریف پایه‌ای موجود در زمینه پایداری زمان محدود و همچنین لم مربوط به نامساوی دیفرانسیلی لیاپانوف پرداخته می‌شود.

تعریف ۱: سیستم غیرخطی زیر را در نظر بگیرید [۲۲-۲۰]:

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0, \quad x \in R^n, \quad x(0) = x_0, \quad (۴)$$

که در آن، $f: U_o \rightarrow R^n$ در یک همسایگی باز U_o از مبدأ پیوسته می‌باشد. نقطه تعادل $x=0$ پایدار زمان محدود محلی است اگر:

(الف) در همسایگی باز $U \subseteq U_o$ از مبدأ پایدار مجانی باشد.

(ب) در U همگرایی زمان محدود باشد بدین معنا که برای هر حالت اولیه $x_0 \in U \setminus \{0\}$ یک زمان نشست $T > 0$ وجود داشته باشد به طوری که هر پاسخ سیستم (۴) که با $x(t, x_0) \in U \setminus \{0\}$ نشان داده می‌شود دارای شرایط زیر باشد:

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow T} x(t, x_0) = 0, & t \in [0, T], \\ x(t, x_0) = 0, & t \geq T. \end{cases} \quad (۵)$$

تعریف ۲: سیستم کنترلی زیر را در نظر بگیرید [۲۲]:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad x \in R^n, \quad u \in R^m, \quad (۶)$$

که در آن، $f(0) = 0$ و $g(0) \neq 0$ می‌باشد. سیستم مذکور با فیدبک حالت پیوسته غیر متغیر با زمان، پایدار پذیر زمان محدود است اگر $u = \mu(x)$ وجود داشته باشد به طوری که $x=0$ در سیستم حلقه بسته $\dot{x} = f(x) + g(x)\mu(x)$ یک نقطه تعادل پایدار زمان محدود محلی باشد.

لم ۱: اگر تابع مشتق پذیر پیوسته $V: D \rightarrow R$ ، عدد حقیقی $\alpha \in (0, 1)$ ، $k > 0$ و همسایگی $U \in D$ از مبدأ وجود داشته باشد، به طوری که به ازای V معین مثبت رابطه زیر در U برقرار باشد [۲۲]:

$$\dot{V} + kV^\alpha \leq 0. \quad (۷)$$

۴- اثر مانور هدف در قانون هدایت

در این قسمت به بررسی اثر مانور هدف در همگرایی نرخ چرخش خط دید به سمت صفر پرداخته می‌شود. مطابق قضیه (۱) قانون هدایت (۱۷) نرخ چرخش خط دید را برای هدف بدون مانور به سمت صفر همگرا می‌کند. مانور هدف در این رابطه به صورت یک اغتشاش می‌باشد. در کاربردهای عملی مقدار مانور هدف مشخص نبوده و تخمین آن نیز کار مشکلی می‌باشد. ولیکن می‌توان حد بالای آن را تخمین زد و لذا می‌توان نوشت:

$$|a_{t_0}| \leq \omega, \quad \forall t > 0, \quad (20)$$

که در آن، $\omega > 0$ می‌باشد. از آنجا که اثر مانور هدف با گذشت زمان و همگرایی نرخ چرخش خط دید، به سمت صفر همگرا نمی‌شود، این اغتشاش به صورت اغتشاش غیرمحموشونده^۱ بوده و لذا باعث ایجاد یک باند نهایی^۲ در اطراف متغیر حالت x_4 می‌شود. بنابراین، نرخ چرخش خط دید با وجود مانور هدف به سمت صفر میل نکرده و به سمت یک باند مشخص در اطراف مبدأ همگرا می‌شود.

با استفاده از لم ۱ به منظور برقراری پایداری زمان محدود و با استفاده از معادله (۷) بایستی رابطه زیر برقرار باشد:

$$\dot{V} \leq -\frac{\beta}{x_1} V^{\frac{1+\eta}{2}}, \quad -1 < \eta < 1, \quad (21)$$

با استفاده از روابط (۹)، (۱۸)، (۲۱-۲۰) می‌توان نوشت:

$$\frac{(N_1-2)x_2}{x_1} x_4^2 + \frac{(-\beta + N_2 x_2 |x_3|) |x_4|^{1+\eta}}{x_1} + \frac{a_{t_0}}{x_1} x_4 + \frac{\beta}{x_1} V^{\frac{1+\eta}{2}} \quad (22)$$

$$\leq \frac{(N_1-2)x_2}{x_1} x_4^2 + \frac{N_2 x_2 |x_3| |x_4|}{x_1} + \frac{\omega |x_4|}{x_1} \\ = \frac{|x_4|}{x_1} ((N_1-2)x_2 |x_4| + N_2 x_2 |x_3| + \omega) \leq 0.$$

به منظور برقراری رابطه (۲۲) بایستی رابطه زیر برقرار باشد:

$$|x_4| \geq \frac{\omega}{-(N_1-2)x_2 - N_2 x_2 |x_3|}, \quad \forall t > 0, \quad (23)$$

بنابراین، اثر مانور هدف در روابط حاکم بر سیستم حلقه بسته و با وجود قانون هدایت، آن است که نرخ چرخش خط دید به سمت نقطه تعادل صفر همگرا نشده و به سمت یک باند متغیر با زمان در اطراف مبدأ میل می‌کند. این اثر در تمام سیستم‌هایی که اغتشاش غیرمحموشونده دارند رخ می‌دهد.

با توجه به روابط (۱۴-۱۳) می‌توان گفت:

$$\dot{V} \leq -\frac{\beta - N_2 x_2 |x_3|}{x_1(0)} V^{\frac{1+\eta}{2}}. \quad (15)$$

با توجه به اینکه $-1 < \eta < 1$ می‌باشد، لذا $0 < (1+\eta)/2 < 1$ بوده و با توجه به لم ۱، نرخ چرخش خط دید در زمان محدود به سمت صفر میل می‌کند. با استفاده از رابطه (۱۱) و (۱۵) می‌توان نوشت:

$$V^{-\frac{(1+\eta)}{2}} dV \leq -\frac{\beta - N_2 x_2 |x_3|}{x_1(0)} dt \leq -\frac{\beta + N_2 \gamma}{x_1(0)} dt. \quad (16)$$

با انتگرال‌گیری از طرفین در مدت زمان $t \in [0, t_r]$ ، زمان همگرایی محدود مطابق رابطه (۱۰) بدست می‌آید.

قضیه ۱: قانون هدایت تناسبی-انتگرالی زیر نرخ چرخش خط دید بین رهگیر ایده‌آل و هدف بدون مانور ($a_{t_0} = 0$) را در زمان محدود به صفر همگرا می‌کند:

$$a_{m_0} = -N_1 x_2 x_4 + (\beta - N_2 x_2 |x_3|) |x_4|^{\eta} \operatorname{sgn} x_4. \quad (17)$$

اگر $N_1 > 2$ ، $\beta, N_2 > 0$ و $-1 < \eta < 1$ باشد و حد بالای زمان همگرایی t_r از رابطه (۱۰) بدست می‌آید.

اثبات: با جایگزینی رابطه (۱۷) در عبارت چهارم رابطه (۳) می‌توان نوشت:

$$\dot{x}_4 = \frac{(N_1-2)x_2}{x_1} x_4 + \frac{(-\beta + N_2 x_2 |x_3|) |x_4|^{\eta} \operatorname{sgn} x_4}{x_1} + \frac{a_{t_0}}{x_1}. \quad (18)$$

با جایگذاری رابطه (۱۸) در رابطه (۹) می‌توان نوشت:

$$\frac{(N_1-2)x_2}{x_1} x_4^2 + \frac{(-\beta + N_2 x_2 |x_3|) |x_4|^{1+\eta}}{x_1} + \frac{a_{t_0}}{x_1} x_4 \leq 0. \quad (19)$$

با توجه به رابطه (۱۴) و با فرض هدف بدون مانور ($a_{t_0} = 0$) می‌توان گفت که نامساوی بالا همیشه صادق است و لذا با توجه به لم ۲، نرخ چرخش خط دید در مدت زمان محدود t_r به سمت صفر همگرا می‌شود.

قانون هدایت ارائه شده در رابطه (۱۸) در حالت خاص $N_2 = 0$ تبدیل به یک قانون هدایت تناسبی با همگرایی زمان محدود شده که در مرجع [۱۹] به آن اشاره شده است.

$$\dot{x}_2 = x_4^2 x_1 + a_{t_r} - a_{m_r}, \quad (25)$$

$$\dot{x}_3 = x_4,$$

$$\dot{x}_4 = -2 \frac{x_2}{x_1} x_4 - \frac{1}{x_1} x_5 + \frac{1}{x_1} a_{t_\theta},$$

$$\dot{x}_5 = -\frac{1}{\tau_1} x_5 + \frac{1}{\tau_1} a_{m_\theta}.$$

در این حالت، مرتبه سیستم مطابق رابطه (۲۵) افزایش یافته و فرمان شتاب ایجاد شده توسط قانون هدایت رابطه (۱۷)، به صورت صریح به متغیر حالت x_5 یا به عبارت دیگر به تابع تبدیل دینامیک رهگیر اعمال می‌شود. لذا در این حالت با توجه به قضیه ۱، تضمینی برای پایداری زمان محدود نرخ چرخش خط دید وجود ندارد. قضیه زیر، قانون هدایت مورد نیاز برای برقراری پایداری زمان محدود نرخ چرخش خط دید با توجه به دینامیک مرتبه اول رهگیر را بیان می‌کند.

قضیه ۲: دینامیک رهگیر را به صورت یک سیستم مرتبه اول مطابق رابطه (۲۴) در نظر بگیرید. قانون هدایت تناسبی-انتگرالی مرتبه اول زیر نرخ چرخش خط دید بین رهگیر و هدف بدون مانور ($a_{t_\theta} = 0$) را در زمان محدود به صفر همگرا می‌کند:

$$a_{m_\theta} = -N_1 x_2 x_4 - N_1 \tau_1 x_1 x_4^3 + (\beta - N_2 x_2 |x_3|) |x_4|^n \operatorname{sgn} x_4 \quad (26)$$

$$+ \tau_1 [-N_1 x_2 + (\beta - N_2 x_2 |x_3|) \eta] |x_4|^{n-1} \dot{x}_4$$

$$- N_2 \tau_1 |x_4|^{n+\eta} (x_1 |x_3| |x_4| \operatorname{sgn} x_4 + x_2 \operatorname{sgn} x_3).$$

اگر $N_1 > 2$ و $\beta, N_2 > 0$ و $-1 < \eta < 1$ باشد، حد بالای زمان همگرایی t_r از رابطه (۱۰) بدست می‌آید.

اثبات: با توجه به قضیه ۱ و رابطه (۲۵) می‌توان گفت به منظور برقراری پایداری زمان محدود نرخ چرخش خط دید بایستی رابطه زیر برقرار باشد:

$$x_5 = -N_1 x_2 x_4 + (\beta - N_2 x_2 |x_3|) |x_4|^n \operatorname{sgn} x_4. \quad (27)$$

با توجه به رابطه (۲۵-۲۴) می‌توان نوشت:

$$a_{m_\theta} = x_5 + \tau_1 \dot{x}_5. \quad (28)$$

لذا، با جایگذاری رابطه (۲۷) در (۲۸) و ساده‌سازی آن با استفاده از رابطه (۲۵)، عبارت (۲۶) بدست می‌آید.

در این حالت، مشتق مرتبه اول نرخ چرخش خط دید نیز در قانون هدایت (۲۶) به منظور جبران اثر دینامیک سیستم مرتبه اول ظاهر شده است. لذا می‌توان نتیجه گرفت برای همگرایی زمان محدود نرخ چرخش خط دید، بایستی با توجه

ولیکن نکته حایز اهمیت آن است که اگر نرخ چرخش خط دید از صفر فاصله بگیرد، باعث آن می‌شود که سرعت نزدیک‌شوندگی رهگیر به هدف به سمت صفر میل کرده و لذا یکی از شرایط پایداری قانون هدایت در ایده ناوبری موازی نقض می‌شود. در عبارت دوم رابطه (۲) می‌توان مشاهده کرد که اگر اثر مانور هدف در راستای طولی تقریباً با شتاب رهگیر در این راستا با هم برابر باشند، صفر نبودن نرخ چرخش خط دید باعث ایجاد $\dot{x}_2 > 0$ شده و لذا سرعت نزدیک‌شوندگی که در ابتدای هدایت یک مقدار کمتر از صفر دارد، با گذشت زمان به سمت صفر حرکت می‌کند. لذا یکی از معیارهای مقایسه قوانین هدایت آن است که نرخ چرخش خط دید با وجود اغتشاشات مختلف در مبدأ باقی مانده و یا تا آن جا که ممکن است نزدیک به مبدأ قرار گیرد. در رابطه (۲۳) باند فرارگیری نرخ چرخش خط دید با استفاده از قانون هدایت تناسبی-انتگرالی (۱۷) نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که در سمت راست نامساوی (۲۳)، عبارت $N_2 x_2 |x_3|$ وجود دارد که با توجه به رابطه (۱۴) مقداری کوچک‌تر از صفر دارد و لذا باعث کاهش اثر مانور هدف و کوچک‌تر شدن باند نرخ چرخش خط دید می‌شود. بنابراین در قانون ارائه شده نرخ چرخش خط دید دارای باند کوچک‌تری نسبت به قانون ارائه شده در [۱۹] که از قانون هدایت تناسبی زمان محدود استفاده کرده ($N_2 = 0$) می‌باشد. لذا قانون تناسبی-انتگرالی با همگرایی زمان محدود دارای قوام بیشتری نسبت به مانور هدف بوده و ناحیه همگرایی بیشتری نسبت به قانون هدایت تناسبی با همگرایی زمان محدود دارد.

۵- طراحی قانون هدایت زمان محدود با در نظر گرفتن دینامیک رهگیر

در این قسمت به طراحی قانون هدایت زمان محدود با در نظر گرفتن دینامیک رهگیر پرداخته می‌شود. تابع تبدیل رهگیر را به صورت سیستم درجه اول زیر در نظر بگیرید:

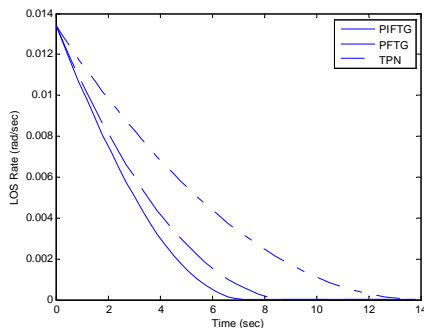
$$G(s) = \frac{1}{(\tau_1 s + 1)}. \quad (24)$$

با توجه به روابط (۳) و (۲۴)، سینماتیک نسبی رهگیر و هدف به صورت زیر بدست می‌آید:

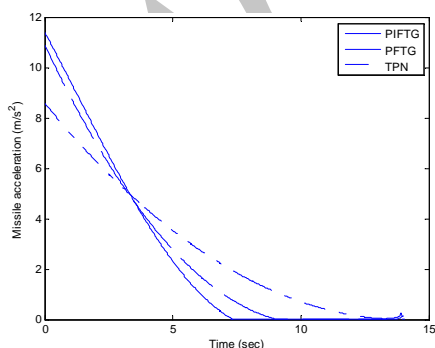
$$\dot{x}_1 = x_2,$$

صورت $N_1=4$ ، $N_2=2$ ، $\eta=0.5$ و $\beta=20$ در نظر گرفته شده است. قانون مذکور با قانون هدایت تناسبی زمان محدود ارائه شده در [۱۹] و قانون هدایت تناسبی حقیقی با ضریب ناوبری $N_1=4$ مقایسه شده است. ضرایب هدایت تناسبی زمان محدود کاملاً مشابه با ضرایب هدایت تناسبی-انتگرالی با در نظر گرفتن $N_2=0$ می‌باشد. در واقع قانون هدایت تناسبی زمان محدود در [۱۹] یک حالت خاص از قانون ارائه شده در این مقاله می‌باشد.

در شکل ۲ نرخ چرخش خط دید در سناریوی اول به ازای قوانین هدایت مختلف نمایش داده شده است. با توجه به شکل، قانون هدایت تناسبی-انتگرالی زمان محدود توانسته نرخ چرخش خط دید را در زمان محدود کوتاه‌تری نسبت به قوانین دیگر به صفر همگرا نماید.



شکل (۲): نرخ چرخش خط دید در سناریوی اول به ازای قوانین هدایت تناسبی-انتگرالی زمان محدود (PIFTG)، هدایت تناسبی زمان محدود (PFTG) و هدایت تناسبی حقیقی (TPN).



شکل (۳): شتاب رهگیر در سناریوی اول به ازای قانون هدایت تناسبی-انتگرالی زمان محدود (PIFTG)، هدایت تناسبی زمان محدود (PFTG) و هدایت تناسبی حقیقی (TPN).

به مرتبه دینامیک رهگیر، مشتقات مرتبه بالای نرخ چرخش خط دید ظاهر گردد. این نتایج درست مشابه نتایج به‌دست آمده در [۲۳-۲۴] بوده که برای تضمین فاصله از دست دهی صفر، از مشتقات مرتبه بالاتر نرخ چرخش خط دید در قانون هدایت استفاده کرده است. البته نتایج به‌دست آمده در این مراجع با فرض سینماتیک خطی رهگیر و هدف توسعه داده شده است و قانون هدایت ارائه‌شده در آن، تضمینی برای فاصله از دست‌دهی صفر در شبیه‌سازی غیرخطی را ندارد.

نتایج به‌دست آمده برای همگرایی زمان محدود نرخ چرخش خط دید با دینامیک رهگیر مرتبه اول را می‌توان به دینامیک‌های مرتبه بالاتر رهگیر نیز تعمیم داد. به عنوان مثال اگر دینامیک رهگیر به صورت یک سیستم مرتبه دوم باشد، می‌توان نوشت:

$$G(s) = \frac{1}{(s^2/\omega_n^2 + 2\xi s/\omega_n + 1)}, \quad (29)$$

و می‌توان مشابه قضیه ۲ ثابت کرد که قانون هدایت مورد نیاز برای همگرایی زمان محدود نرخ چرخش خط دید از رابطه زیر بدست می‌آید:

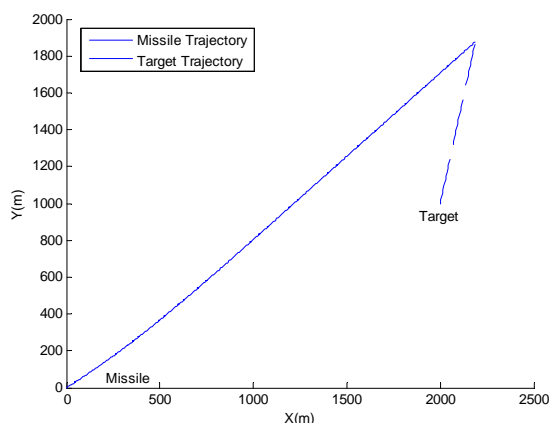
$$a_{m_0} = x_5 + \frac{2\xi}{\omega_n} \dot{x}_5 + \frac{1}{\omega_n^2} \ddot{x}_5, \quad (30)$$

که در آن، x_5 از رابطه (۲۷) بدست می‌آید.

۵- نتایج شبیه‌سازی

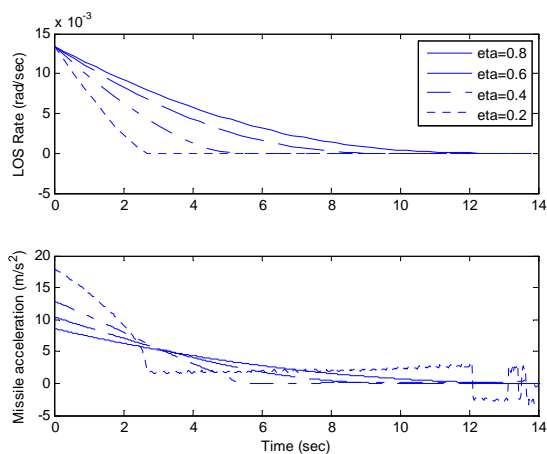
در این قسمت به شبیه‌سازی غیرخطی قانون هدایت جدید در مختصات دوبعدی برای دو سناریوی پروازی مختلف پرداخته و نتایج به‌دست آمده با قانون هدایت تناسبی با همگرایی زمان محدود و قانون هدایت تناسبی حقیقی مقایسه می‌گردد. در سناریوی اول، هدف در فاصله حدود ۲,۲۰۰ متری از رهگیر در نظر گرفته شده و مکان اولیه هدف و رهگیر در مختصات کارتزین $R_{i_0} = [2000 \ 1000]^T \text{ m}$ ، $R_{m_0} = [0 \ 0]^T \text{ m}$ ، سرعت اولیه هدف و رهگیر در مختصات کارتزین به ترتیب $v_{i_0} = [13.4 \ 62.6]^T \text{ m/s}$ و $v_{m_0} = [169.9 \ 107.3]^T \text{ m/s}$ و هدف بدون مانور می‌باشد. شرط توقف شبیه‌سازی رسیدن به فاصله از دست‌دهی صفر و یا همان برخورد بین رهگیر و هدف می‌باشد. ضرایب قانون هدایت تناسبی-انتگرالی زمان محدود ارائه‌شده در این شبیه‌سازی با استفاده از رابطه (۱۷) به

در شکل ۵ نرخ چرخش خط دید و شتاب رهگیر در قانون هدایت جدید به ازای مقادیر مختلف β نشان داده شده است. با توجه به شکل، با افزایش β نرخ چرخش خط دید در زمان کوتاه‌تری به صفر همگرا شده که مطابق با نتیجه به-دست آمده از رابطه (۱۰) نیز می‌باشد. در این حالت نیز با افزایش β دامنه شتاب رهگیر افزایش می‌یابد. در شکل ۶ مسیر برخورد رهگیر و هدف در مختصات دو بعدی در این سناریو نشان داده شده است. در سناریوی دوم مانور هدف در دستگاه قطبی به صورت $a_{r_0} = 20$ ، $a_{t_r} = 5$ می‌باشد. ضرایب قانون هدایت تناسبی-انتگرالی زمان محدود به صورت $N_1 = 4$ ، $N_2 = 6$ ، $\eta = 0.2$ و $\beta = 20$ در نظر گرفته شده است. ضرایب قانون هدایت تناسبی زمان محدود کاملاً مشابه با ضرایب قانون هدایت تناسبی-انتگرالی زمان محدود با $N_2 = 0$ و ضریب ناوبری قانون هدایت تناسبی حقیقی $N_1 = 4$ می‌باشد. در این حالت، با اعمال قانون هدایت تناسبی زمان محدود، رهگیر به هدف برخورد نکرده و در ثانیه ۲۴/۹۴ می‌گردد و منجر به از دست دادن هدف و فاصله از دست‌دهی ۱۴۹/۴ متر می‌گردد. همچنین با اعمال قانون هدایت تناسبی حقیقی نیز رهگیر به هدف برخورد نکرده و منجر به فاصله از دست‌دهی ۷۴۵/۱ متر می‌گردد. ولی با اعمال قانون هدایت پیشنهاد شده، رهگیر و هدف با یکدیگر برخورد کرده و منجر به فاصله از دست‌دهی صفر می‌گردد.

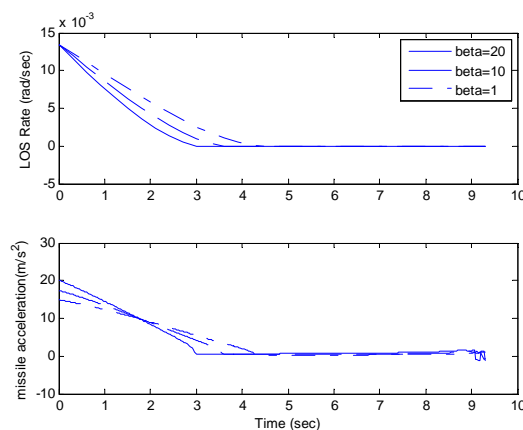


شکل (۶): مسیر برخورد رهگیر و هدف در سناریوی اول.

در شکل ۳ شتاب رهگیر در سناریوی اول به ازای قوانین هدایت مختلف نمایش داده شده است. در شکل ۴ نرخ چرخش خط دید و شتاب رهگیر در قانون هدایت جدید به ازای مقادیر مختلف η نشان داده شده است. با توجه به شکل، با کاهش η نرخ چرخش خط دید در زمان کوتاه‌تری به صفر همگرا شده که مطابق با نتیجه به‌دست آمده از رابطه (۱۰) نیز می‌باشد. همچنین، با کاهش η ، دامنه شتاب رهگیر افزایش یافته و در نهایت به سمت نوسان حرکت می‌کند.



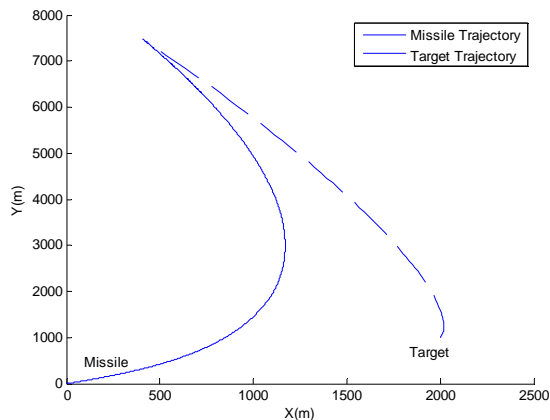
شکل (۴): نرخ چرخش خط دید و شتاب رهگیر در سناریوی اول به ازای مقادیر مختلف η در قانون هدایت تناسبی-انتگرالی زمان محدود.



شکل (۵): نرخ چرخش خط دید و شتاب رهگیر در سناریوی اول به ازای مقادیر مختلف β در قانون هدایت تناسبی-انتگرالی زمان محدود.

در شکل ۹ مسیر برخورد رهگیر و هدف در این سناریو نشان داده شده است.

مسئله صفر شدن نرخ چرخش خط دید از آنجا حایز اهمیت است که در سناریوی واقعی و شبیه‌سازی غیرخطی و متغیر با زمان پرواز، یکی از مسایل مهم در پایداری موشک سریع صفر شدن نرخ چرخش خط دید است که منجر به ثابت ماندن سرعت نزدیک‌شوندگی موشک و هدف می‌باشد. لذا سیستم قوام بیشتری در برابر مانور هدف خواهد داشت. در جدول ۱ مشخصات به دست آمده توسط هر سه قانون در سناریوی دوم نشان داده شده است. با توجه به این سناریو می‌توان مشاهده کرد که قانون هدایت جدید، ناحیه درگیری بین رهگیر و هدف را افزایش داده است.

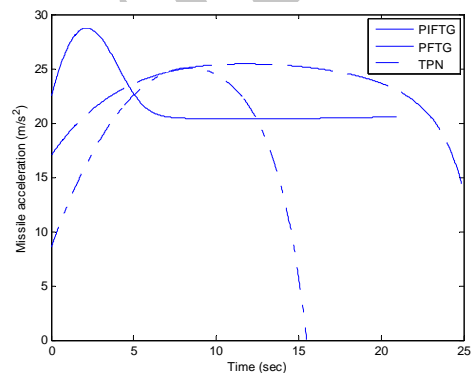


شکل (۹): مسیر برخورد رهگیر و هدف در سناریوی دوم.

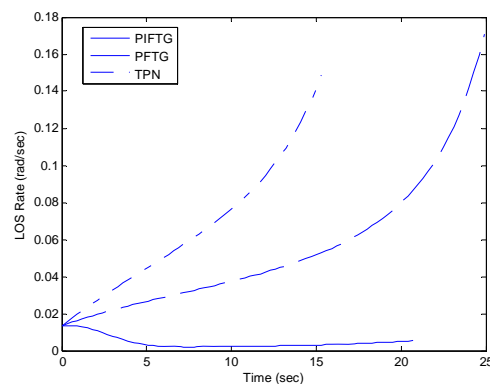
جدول (۱): مقایسه مشخصات بدست آمده توسط قانون هدایت تناسبی-انتگرالی زمان محدود (PIFTG)، هدایت تناسبی زمان محدود (PFTG) و هدایت تناسبی حقیقی (TPN) در سناریوی دوم.

	زمان اتمام شبیه‌سازی (ثانیه)	فاصله از دست‌دهی (متر)
هدایت تناسبی- انتگرالی زمان محدود	۲۰/۹۴	صفر
هدایت تناسبی زمان محدود	۲۴/۹۴	۱۴۹/۴
هدایت تناسبی حقیقی	۱۵/۴۹	۷۴۵/۱

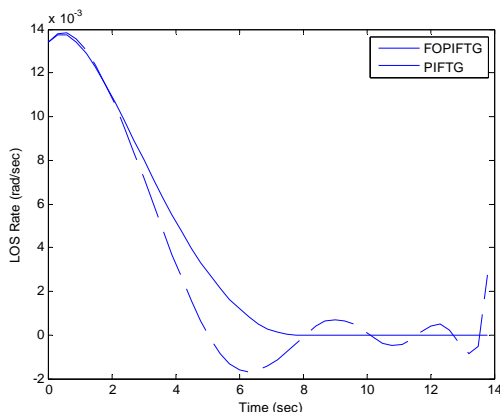
در شکل ۷ شتاب اعمال شده به رهگیر توسط قانون هدایت پیشنهاد شده و قانون هدایت تناسبی زمان محدود و قانون هدایت تناسبی حقیقی نشان داده شده است. در شکل ۸ نرخ چرخش خط دید در هر سه قانون نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل مشخص است، قانون هدایت جدید باعث قرار گرفتن موشک در نزدیک خط دید شده و لذا نرخ چرخش خط دید نسبت به قانون هدایت تناسبی زمان محدود و هدایت تناسبی حقیقی به صفر نزدیک‌تر است. همچنین با استفاده از شکل می‌توان مشاهده کرد که با اعمال قانون جدید، مانور هدف باعث ایجاد یک باند برای نرخ چرخش خط دید شده و این باند مطابق رابطه (۲۳) می‌باشد.



شکل (۷): شتاب رهگیر در سناریوی دوم به ازای قانون هدایت تناسبی-انتگرالی زمان محدود (PIFTG)، هدایت تناسبی زمان محدود (PFTG) و حقیقی (TPN).



شکل (۸): نرخ چرخش خط دید در سناریوی دوم به ازای قوانین هدایت تناسبی-انتگرالی زمان محدود (PIFTG)، هدایت تناسبی زمان محدود (PFTG) و هدایت تناسبی حقیقی (TPN).

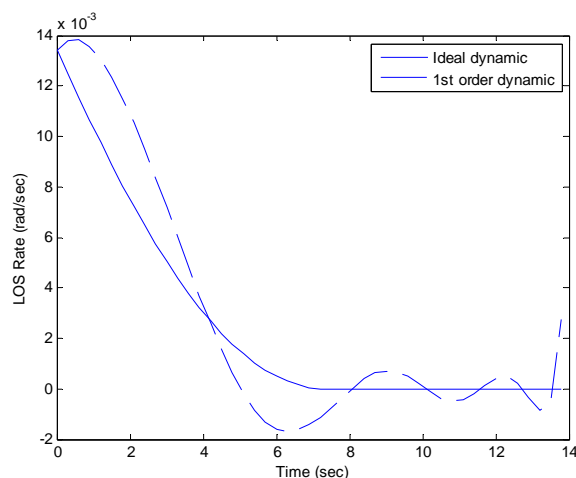


شکل (۱۱): نرخ چرخش خط دید با اعمال قانون هدایت تناسبی-انتگرالی زمان محدود مرتبه اول (FOPIFTG) و قانون هدایت تناسبی-انتگرالی زمان محدود (PIFTG) با در نظر گرفتن دینامیک مرتبه اول رهگیر.

۵- نتیجه گیری

در این مقاله، یک قانون هدایت تناسبی-انتگرالی با همگرایی زمان محدود نرخ چرخش خط دید ارائه شد. از آن جا که هدایت فاز نهایی رهگیرها در مدت زمان محدودی صورت می پذیرد، استفاده از روش هایی که به صورت نمایی و مجانبی نرخ چرخش خط دید را صفر می نمایند، مناسب نبوده و کاربردهای عملی آن تأمل برانگیز است. قانون هدایت تناسبی-انتگرالی ارائه شده، در مدت زمان محدود کوتاهی نرخ چرخش خط دید را به صفر رسانده و قوام مناسبی نسبت به مانور هدف دارد. همچنین قانون مذکور برای دینامیک غیرایده آل رهگیر توسعه داده شده و قانون مناسب برای همگرایی زمان محدود با وجود دینامیک مرتبه اول رهگیر ارائه شده است. قانون مذکور به راحتی قابل تعمیم به دینامیک های مرتبه بالاتر رهگیر بوده و از مشتقات مرتبه بالاتر نرخ چرخش خط دید برای جبران دینامیک رهگیر استفاده کرده است. نتایج شبیه سازی غیرخطی نشان می دهد که با استفاده از قانون هدایت جدید، رهگیر در مدت زمان کمتری به هدف برخورد کرده و حتی ناحیه درگیری در این حالت نسبت به قانون هدایت تناسبی با همگرایی زمان محدود و قانون هدایت تناسبی حقیقی افزایش یافته است.

در ادامه به بررسی اثر دینامیک رهگیر در همگرایی زمان محدود نرخ چرخش خط دید پرداخته می شود. دینامیک رهگیر به صورت یک سیستم مرتبه اول مطابق رابطه (۲۴) و در نظر گرفته شده است. در شکل ۱۰، نرخ چرخش خط دید با اعمال قانون هدایت تناسبی-انتگرالی زمان محدود رابطه (۱۷) با ضرایب $N_1 = 4$ ، $N_2 = 2$ ، $\eta = 0.5$ و $\beta = 20$ برای دو حالت دینامیک ایده آل رهگیر و دینامیک مرتبه اول رهگیر نشان داده شده است. با توجه به شکل مشاهده می شود که قانون مذکور نمی تواند همگرایی زمان محدود نرخ چرخش خط دید را برای دینامیک مرتبه اول رهگیر تضمین نماید و ممکن است دینامیک رهگیر حتی منجر به ناپایداری حلقه هدایت نیز گردد. در شکل ۱۱، نرخ چرخش خط دید با در نظر گرفتن دینامیک مرتبه اول رهگیر و اعمال قانون هدایت تناسبی-انتگرالی زمان محدود مرتبه اول مطابق رابطه (۲۶) و (۱۷) نشان داده شده است. با توجه به شکل مشاهده می شود که قانون هدایت رابطه (۲۶) که دینامیک رهگیر در طراحی آن در نظر گرفته شده است، توانسته نرخ چرخش خط دید را در مدت زمان محدود به صفر همگرا نماید. لذا قانون هدایت مذکور می تواند پایداری حلقه هدایت را با وجود دینامیک مرتبه اول رهگیر تضمین نماید.



شکل (۱۰): نرخ چرخش خط دید با اعمال قانون هدایت تناسبی-انتگرالی زمان محدود برای دو حالت دینامیک ایده آل رهگیر و دینامیک مرتبه اول رهگیر.

15. Brown, M.D.J., Shtesell, Y.B., and Buffington, J.M., "Finite Reaching Time Continues Sliding Mode Control with Enhanced Robustness", AIAA Guidance Navigation, and Control Conf. and Exhibit, Denver, pp.1-11, 2000.
16. Haimo, V.T., "Finite Time Controllers", SIAM J. Control and Optimization, Vol. 24, No. 4, pp. 760-770, 1986.
17. Shtesell, Y.B. and Tournes, C.H., "Integrated Higher-Order Sliding Mode Guidance and Autopilot for Dual-Control Missiles", J. Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 32, No. 6, pp. 1838-1846, 2009.
18. Shtesell, Y.B. and Shkolnikov, I.A., "Integrated Guidance and Control of Advanced Interceptors, Using Second Order Sliding Modes", The 42nd IEEE Conf. on Decision and Control, Maui, Hawaii, USA, pp. 4587-4592, 2003.
19. Zhou, D. and Sun, S., "Guidance Laws with Finite Time Convergence", J. Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 32, No. 6, pp. 1838-1846, 2009.
20. Bhat, S.P. and Bernstein, D.S., "Continuous Finite-Time Stabilization of the Translational and Rotational Double Integrators", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 43, No. 5, pp. 678-682, 1998.
21. Hong, Y., Huang, J., and Xu, Y., "On an Output Feedback Finite Time Stabilization Problem" IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 46, No. 2, pp. 305-309, 2001.
22. Hong, Y., "Finite Time Stabilization and Stability of a Class of Controllable Systems", Systems and Control Letters, Vol. 46, No. 4, pp. 231-236, 2002.
23. Gurfil, P., Jodorkovsky, M., and Guelman, M., "Neoclassical Guidance for Homing Missiles", J. Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 24, No. 3, pp. 452-459, 2001.
24. Gurfil, P., "Zero-miss-distance Guidance Law, Based on Line-of-sight Rate Measurement Only", Control Eng. Practice, Vol. 11, No. 7, pp. 819-832, 2000.

۶- مراجع

1. Zarchan, P., "Tactical and Strategic Missile Guidance", 4th Ed., AIAA Series, Vol. 199, 2002.
2. Shneydor, N.A., "Missile Guidance and Pursuit; Kinematics, Dynamics and Control", Horwood Series in Eng. Sci., Chichester, England, 1998.
3. Yanushevsky, R., "Modern Missile Guidance", CRC Press, Taylor & Francis Group, Fukuoka, Japan, 2008.
4. Yanushevsky, R. and Boord, W., "Lyapunov Approach to Guidance Laws Design", Non-linear Analysis: Theory, Methods, & Applications, Vol. 63, No. 5-7, pp. 162-166, 2005.
5. Yanushevsky, R. and Boord, W., "New Approach to Guidance Law Design", J. Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 28, No. 1, pp. 162-166, 2005.
6. Lechevin, N. and Rabbath, C.A., "Lyapunov-Based Non-linear Missile Guidance", J. Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 27, No. 6, pp. 1096-1102, 2005.
7. Yanushevsky, R., "Concerning Lyapunov-Based Guidance", J. Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 29, No.2, pp. 509-511, 2006.
8. Yang, C.D. and Chen, T.L., "Non-linear H_∞ Robust Guidance Law for Homing Missiles", J. Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 21, No. 6, pp. 882-890, 1998.
9. Moon, J., Kim, K., and Kim, J., "Design of Missile Guidance Law via Variable Structure Control", J. Guidance, Control and Dynamics, Vol. 24, No. 4, pp. 659-664, 2001.
10. Shima, T., Idan, M. and Golan, O.M., "Sliding Mode Control for Integrated Missile Autopilot Guidance", J. Guidance, Control and Dynamics, Vol. 29, No. 2, pp. 250-260, 2006.
11. Rew, D.Y., Tahk, M.J., and Cho, H., "Short Time Stability of Proportional Navigation Guidance Loop", IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 32, No. 4, pp. 1107-1115, 1996.

۱۲. محمدزمان، ا. و مؤمنی، ح.ر.، "طراحی قانون هدایت با استفاده از روش پایداری زمان کوتاه"، مجله علوم و فناوری فضایی، جلد ۳، شماره ۶، ۱۳۸۹.

۱۳. محمدزمان، ا. و مؤمنی، ح.ر.، "طراحی قانون هدایت تناسبی-انتگرالی با استفاده از ملاک دایره"، مجله کنترل، جلد ۴، شماره ۲، ص.ص. ۱۱-۱۹، ۱۳۸۹.

14. Gurfil, P., Jodorkovsky, M., and Guelman, M., "Finite Time Stability Approach to Proportional Navigation Systems Analysis", J. Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 21, No. 6, pp. 853-861, 1998.