تحلیل عددی جریان‌های مافوق صوت دائم در سیستم مختصات یک‌پارچه، با استفاده از حل ریمن تکراری و روش گودنف

بهرام زارعیان[۱]
دانشکده مهندسی مکانیک
دانشگاه محقق اردبیلی

مسعود میرزائی[۲]
دانشکده مهندسی هوافضا
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

(تاریخ دریافت:۸۸/۲/۱۴؛ تاریخ پذیرش:۸۹/۱۰/۲۲)

چکیده

در دینامیک سیالات عددی، نقش مختصات به‌ویژه مختصات بهینه، همواره مورد علاقه پژوهشگران بوده است. هدف این مقاله محاسبات عددی جریان‌های مافوق صوت با استفاده از یک سیستم مختصات جدید (مختصات یک‌پارچه) و حل مسئله ریمن به روش تکراری است. سیستم مختصات یک‌پارچه در مناطقی که ناپیوستگی‌ها (موج ضربه‌ای و موج انبساطی) در جریان مافوق صوت رخ می‌دهد، بر سیستم‌های مختصات قدیمی (اویلری و لاگرانژی) برتری دارد. بسیاری از مشکلاتی که در سیستم‌های مختصات قدیمی وجود دارد در سیستم یک‌پارچه مرتفع می‌شود. برای محاسبات معادلات دوبعدی دینامیک گازها در مختصات یک‌پارچه، محاسبه شارها در فصل مشترک سلول‌ها ضرورت دارد. در این مقاله، مستقیماً مقادیر شارها در دو جهت به کمک حل مسئله ریمن محاسبه می‌شوند. این نکته نیز اهمیت دارد که در استفاده از دستگاه مختصات یک‌پارچه نیازی به تولید شبکه قبلی روی بدنه جسم برای محاسبه جریان عبوری از آن نیست، بلکه شبکه به‌طور خودکار توسط جریان به‌وجود می‌آید. دستگاه مختصات یک‌پارچه مزایای هر دو دستگاه اویلری و لاگرانژی (و بیشتر از آن) را نیز داراست که این موضوع در نتایج عددی و همچنین در سرعت بالای محاسبات مشهود می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: مسئله ریمن، مختصات یک‌پارچه، روش گودنف، خط لغزش، موج ضربه‌ای

Numerical Analysis of Supersonic Flows in Unified Coordinate System, Using Iterative Riemann Problem and Godunov Scheme

B. Zareyan
Mech. Eng. Dep't.
Mohaghegh Ardabili Univ.

M. Mirzaei
Aerospace Eng. Dep't.
K.N. Toosi Univ. of Tech.

(Received: 4 May 2009 ; Accepted: 12 Jan. 2011)

ABSTRACT

Using suitable coordinate systems in CFD have been of interest for many researchers. The objective of this study is numerical modeling of supersonic flows, using a new coordinate system, i.e. Unified coordinate system (UCS) and iterative Riemann problem solution. Unified coordinate system has advantage over traditional coordinate systems (Eulerian/Lagrangian) in supersonic flows, especially in discontinuous regions (shocks and expansions). Moreover, most of the difficulties of the traditional coordinate system may be removed using UCS. For 2-D gas dynamics calculations in UCS, it is required to approximate fluxes on cell faces. This is normally modeled by Riemann problem solution. It is important to mention that in using UCS, there is no need to generate a body-fitted mesh prior to computing flow past a body; the grid is automatically generated by the flow. The UCS has the advantages of both Eulerian and Lagrangian systems. These can be seen in our results, which also show the high speed in our computations.

Keywords: Riemann Problem, Unified Coordinate System (UCS), Godunov Scheme, Slip Line, Shock

۱- دانشجوی دکتری : Zareyan@qdiau.ac.ir
۲- دانشیار (نویسنده پاسخگو): Mirzaei@kntu.ac.ir

۱- مقدمه

در دینامیک سیالات محاسباتی از محاسبات عددی به‌صورت گسترده برای حل مسائل جریان سیالات استفاده می‌شود. وابستگی حل عددی یک جریان به رابطه بین جریان و مختصات (مش) مورد استفاده برای محاسبه آن از سال‌ها پیش شناخته شده است. هر یک از دو دستگاه مختصات معروف برای تشریح جریان سیالات اویلری و لاگرانژی علاوه بر مزایا دارای اشکالاتی نیز می‌باشند. روش اویلری به نسبت ساده است اما معایب آن عبارتند از:

(الف) ناپیوستگی‌های محل تماس[1] بسیار آشفته و نقاط بسیار پراکنده محاسبه می‌شوند و

(ب) نیاز به ایجاد یک مش قبلی روی سرتاسر بدنه جسم دارد تا جریان گذرا از بدنه را بتوان محاسبه نمود.

در مقایسه، روش لاگرانژی، ناپیوستگی‌های محل تماس را به‌طور دقیق محاسبه می‌کند اما این روش نیز اشکالاتی دارد که عبارتند از:

(الف) معادلات دینامیک گاز را نمی‌توان به شکل معادلات دیفرانسیل جزئی نوشت زیرا محاسبه عددی پیچیده‌ای را در بر خواهند داشت و

(ب) به‌علت تغییر شکل سلول‌های شبکه، محاسبات واگرا شده و متوقف می‌شوند.

موضوع این مقاله، بررسی و محاسبه جریان‌های دوبعدی در دستگاه مختصات یک‌پارچه است که مقدمات آن توسط پروفسور هیو[2] و همکاران مورد بررسی قرار گرفته است. با استفاده از روش تکراری حل مسئله ریمن، جواب‌های دقیق‌تری نسبت به حل غیر تکراری آن به‌دست می‌آید. با وجود اینکه حل تکراری مسئله ریمن به تنهایی، زمان محاسبات بیشتری نیاز دارد، ولی زمان کل محاسبات در سیستم مختصات یک‌پارچه کمتر است. در این تحقیق محاسبات با استفاده از برنامه رایانه‌ای مربوط به زبان فرترن با اعمال تغییراتی که در روش حل گفته شده انجام داده شده است.

برای آشنایی بیشتر با سیستم‌های مختصات قبلی و مقایسه آن با سیستم مختصات یک‌پارچه، ابتدا شایستگی‌های نسبی دستگاه‌های مختصات موجود را که معروف‌ترین آن‌ها مختصات اویلری، لاگرانژی، اختیاری-لاگرانژی-اویلری و مختصات مش (مختصات) متحرک می‌باشد، توضیح داده می‌شود [۱۶-۱].

۲- مباحث تئوری

بیش از ۲۰۰ سال، دو دستگاه مختصات برای تشریح جریان سیال موجود بودند؛ دستگاه اویلری و دستگاه لاگرانژی. دستگاه اویلری در فضا ثابت می‌باشد، در حالی‌که دستگاه لاگرانژی سیال را دنبال می‌کند.

یک سؤال مهم این است که « آیا این دو دستگاه مختصات از نظر تئوری با یکدیگر معادل هستند؟ ». این سؤال توسط محققان زیادی در زمینه مکانیک سیالات مطرح شده و احتمالاً جواب سؤال مثبت بوده است. اولین استدلال، هم‌ارزی ریاضی به معنی وجود نگاشت یک به یک بین دو دستگاه مختصات در اواخر سال ۱۹۸۷ توسط واگنر[3] [۱۷] به‌دست آمده و فقط برای جریان یک‌بعدی کاربرد دارد.

برای جریان‌های دو و سه‌بعدی، هیو [۲-۱] نشان داد که از نظر تئوری آن‌ها با یکدیگر معادل نیستند که در بخش‌های بعدی در این مورد بیشتر بحث خواهد شد.

۳- مبحث محاسباتی

از نظر محاسباتی، دستگاه‌های اویلری و لاگرانژی حتی برای جریان یک‌بعدی نیز معادل نیستند. برای جریان یک‌بعدی نشان داده شده که دستگاه لاگرانژی به‌علاوه روش سازگار با موج ضربه‌ای گودنف[4] [۲۰-۶] ، از دستگاه مختصات اویلری بهتر می‌باشد. وضعیت در جریان‌های دو و سه‌بعدی پیچیده‌تر می‌شود.

هر یک از دستگاه‌های اویلری و لاگرانژی مزایا و معایبی دارند. به‌طور کلی، می‌توان گفت روش اویلری نسبتاً ساده است اما معادلات دینامیک گازها را می‌توان به‌صورت معادلات دیفرانسیل جزئی نوشت و پایه تئوری را برای محاسبه و آشکارسازی موج ضربه‌ای فراهم آورد. روش اویلری دارای دو عیب می‌باشد:

1- Contact Discontinuity
2- W.H. Hui
3- Wagner
4- Shock-Adaptive Godunov Scheme

الف) ناپیوستگی‌های محل تماس را به شدت آشفته می‌کند و ب) نیاز به ایجاد یک مش سرتاسری منطبق بر سطح جسم و از پیش تعیین شده برای محاسبه جریان عبوری از بدنه جسم دارد، اما ایجاد مش، خسته‌کننده و وقت‌گیر بوده و نیازمند سعی و تلاش ویژه است.

روش لاگرانژی نسبت به روش اویلری، ناپیوستگی‌های محل تماس (شامل فصل مشترک ماده و سطوح آزاد) را به‌صورت دقیق‌تر محاسبه می‌کند، زیرا آنها بر محورهای مختصات لاگرانژی منطبق می‌شوند. این روش معایبی نیز دارد که عبارتند از:

الف) به علت تغییر شکل سلول‌ها ممکن است محاسبات واگرا شده یا نوسانات زیادی داشته باشند. زیرا یک سلول محاسباتی لاگرانژی دقیقاً همان ذره سیال با اندازه کوچک می‌باشد و از این‌رو با سیال تغییر شکل می‌یابد و

ب) معادلات دینامیک گازها را نمی‌توان به شکل معادلات دیفرانسیل جزئی نوشت. معادلات غیرجزئی، محاسبه عددی پیچیده‌ای را به دنبال دارند. در این باره، یادآوری می‌شود که در سال ۱۹۹۹، سره[۱] [۲۱] عنوان نمود که نوشتن معادلات دینامیک گازها در مختصات لاگرانژی در صورتی‌که ابعاد، بزرگ‌تر از ۲ اینچ باشد خیلی پیچیده است. در همان سال نشان داده شد [۱] که با مختصات یک‌پارچه، استخراج معادلات دینامیک گازی لاگرانژی به شکل معادلات دیفرانسیل جزئی ساده می‌باشد (در بخش‌های بعدی این موضوع ملاحظه خواهد شد).

در ابتدا تلاش‌ها برای ترکیب مزایای هر دو دستگاه لاگرانژی و اویلری منجر به ارائه روش معروف « ذره در سلول[۲]» [۲۳-۲۲] و روش « نشان‌گر و سلول[۳] » [۲۶-۲۴] شد. ایده اصلی هارلو در روش « ذره در سلول » در جداسازی سیکل محاسباتی در فاز لاگرانژی همراه با انتقال یا فاز ترسیم مجدد-تغییر محیط، به‌طور گسترده در بسیاری از کدهای رایانه‌ای هیدرودینامیکی به ویژه در کد دلخواه-لاگرانژی-اویلری[۴] مورد استفاده قرار گرفت. در حالی‌که روش دلخواه-لاگرانژی-اویلری در زمینه حل ناپیوستگی‌های محل تماس و در یک قسمت مهم محاسباتی آن (ترسیم مجدد-تغییر محیط فازی) نیاز به مداخله کاربر [۲۷] دارد. هر چند که اخیراً ایده‌های جدیدی برای حل این مشکل ارائه شده است.

لازم به ذکر است که چندین روش مش متحرک نیز ارائه شده‌اند که نیاز به توجیه یک یا چند معادله فضایی (یا هندسی) بقایی دارد. این معادلات یا به‌صورت ریاضی استخراج و یا مستقیماً همراه با قوانین فیزیکی داده می‌شوند. در ضمن مشخص نیست که به طور کامل اثرات جابه‌جایی مختصات بر روی جریان در این روش ها اعمال شده باشد.

دستگاه مختصات یک‌پارچه[۵] [۱۶-۱] با پیش زمینه‌ای که در بالا گفته شد توسط هیو ارائه شده است. برای جریان دوبعدی، دستگاه مختصات یک‌پارچه از یک مختصات مادی استفاده می‌کند تا قائم بودن یا ژاکوبین مش را حفظ کند. برای جریان سه‌بعدی، از دو مختصات بهره گرفته و مختصات سوم، برای تضمین متعامد بودن مش در نظر گرفته می‌شود. قابل ذکر است که مختصات یک‌پارچه یک‌بعدی، بر دستگاه لاگرانژی منطبق می‌شود.

در مقاله حاضر، مشاهده می‌شود که دستگاه مختصات یک‌پارچه، مزایای هر دو دستگاه اویلری و لاگرانژی را با هم دارد. رابطه آن با روش‌های دلخواه- لاگرانژی- اویلری و مش متحرک نیز توضیح داده خواهد شد.

۴- مقایسه سیستم‌های مختصات

در این قسمت به بررسی سیستم های مختصات رایج پرداخته می‌شود.

۴-۱- محاسبات لاگرانژی

مهم‌ترین مزیت روش لاگرانژی آن است که می‌تواند ناپیوستگی‌های محل تماس را به طور دقیق محاسبه نماید، چون ناپیوستگی‌ها بر مختصات لاگرانژی منطبق می‌شوند. ولی محاسبات لاگرانژی معایبی نیز دارند که از آن جمله می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:

الف) به‌علت مجهول بودن و تغییر شکل سلول‌ها، معادلات حاکم را نمی‌توان به‌راحتی به شکل معادلات دیفرانسیل جزئی بقایی[۶] نوشت (جریان یک‌بعدی یک استثنای اتفاقی می‌باشد).

1- Serre
2- Particle-in-Cell Method
3- Marker-and-Cell Method
4- Arbitrary-Lagrangian-Eulerian

5- Unified Coordinate System
6- Conservation Form

می‌باشد). این امر مشکلات جدی را در بردارد. برای شروع، نبود شکل بقائی معادلات دیفرانسیل جزئی باعث می‌شود که مختصات لاگرانژی بر روی مش متحرک در فضای اویلری قرار نگیرد. به‌علاوه بدون داشتن شکل بقائی معادلات، به محاسبات اضافی برای اندازه جابه‌جایی سلول‌های محاسباتی نیاز است. این کار معمولاً با استفاده از مش‌های شطرنجی برای پایین آوردن میزان خطا (به علت میان‌یابی) در سرعتی که جابه‌جایی مش را کنترل می‌کند انجام می‌شود. اما تغییر جهت‌دادن مش‌ها نیاز به میان‌یابی متغیرها و هندسه جریان دارد که ایجاد پراکندگی عددی می‌کند.

ب) محاسبات ممکن است به علت تغییر شکل سلول‌ها، متوقف شود. این امر به این دلیل است که سلول محاسباتی لاگرانژی در واقع ذره‌ای از سیال با اندازه کوچک بوده و اهمیتی ندارد که چقدر کوچک و لذا با سیال تغییر شکل می‌یابد. تحقیقات بسیاری در زمینه محاسبات در مختصات لاگرانژی و جلوگیری از شکسته شدن محاسبات آن با استفاده از تدابیر خاص انجام شده که روش دلخواه-لاگرانژی-اویلری یک نمونه از این تحقیقات است.

۴-۲- محاسبات به روش دلخواه- لاگرانژی- اویلری:

در این روش یک سیکل (حلقه) محاسباتی شامل فاز محاسباتی در فضای لاگرانژی توسط یک فاز ترسیم مجدد-تغییر منطقه، در فضای اویلری با روش دلخواه-لاگرانژی-اویلری دنبال می‌شود. فاز لاگرانژی، مزایایی را علاوه بر معایب محاسبه لاگرانژی که در بالا اشاره شد دارد. برای مثال، این روش ناپیوستگی‌های سطح تماس را به طور دقیق محاسبه می‌کند اما به دلیل نبود شکل بقائی معادلات، باید از مش شطرنجی استفاده نمود که پراکندگی عددی را در پی دارد که ناشی از سوئیچینگ و تغییر جریان بین سلول‌ها است. به‌علاوه، پراکندگی عددی در فاز «ترسیم مجدد-تغییر محیط» محاسبات نیز مطرح می‌شود، زیرا به میان‌یابی متغیرها و هندسه جریان نیاز دارد [۲۸-۲۷].

۴-۳- محاسبات در سیستم مختصات یک‌پارچه

جزئیات روش مختصات یک‌پارچه در قسمت‌های بعدی ارائه خواهد شد. برای مقایسه با این روش «دلخواه- لاگرانژی- اویلری»، ویژگی‌های مهم و عمده آن به‌صورت مختصر بیان می‌شود.

معادلات حاکم به شکل معادلات دیفرانسیل جزئی بقایی نوشته می‌شوند و سرعت مش به‌گونه‌ای انتخاب می‌شود که برای جریان‌های دوبعدی یکی از محورهای مختصات بر مختصات مادی منطبق شود (در جریان سه‌بعدی، دو مختصات مادی وجود دارد). مختصات یک‌پارچه نخست از مزیت روش اویلری بهره می‌برد در حالی که در مورد دومی که اشاره شد از مزیت روش لاگرانژی بهره می‌برد.

روش دستگاه مختصات یک‌پارچه و روش «دلخواه لاگرانژی- اویلری» از مزایای مشابهی برخوردارند. زیرا هر دو روش بهترین ویژگی‌های روش لاگرانژی و اویلری را ترکیب کرد و سیستم مختصات با سرعت دلخواه حرکت می‌کند. اگر چه، استراتژی‌ها کاملاً متفاوت هستند.

در روش «دلخواه- لاگرانژی- اویلری»، استراتژی کلی اجرای مرحله لاگرانژی و دنبال نمودن آن با یک مرحله طرح-ریزی مجدد است که در حل، مش لاگرانژی تغییرشکل یافته را بر روی مش اویلری ثابت از نظر فاصله یا مش روش «دلخواه- لاگرانژی- اویلری» می‌نگارد. این کار معمولاً با به‌کارگیری یک مش شطرنجی انجام می‌شود. علاوه بر این، استراتژی‌های تغییر منطقه از قبل تعیین نمی‌شوند. در عوض تغییر منطقه نیاز به مداخله کاربر و غیره داشته و موفقیت روش تا حد زیادی بستگی به مهارت و صبر کاربر دارد. در روش دستگاه مختصات یک‌پارچه، از آنجایی که معادلات حاکم به شکل بقایی می‌باشند، اگر محاسبات اویلری باشد محاسبات در یک مرحله اما بدون پراکندگی عددی در طول ناپیوستگی‌های محل تماس انجام می‌شود. بنابراین از پراکندگی عددی ناشی از مش شطرنجی و نیز ناشی از «ترسیم مجدد-تغییر محیط» اجتناب می‌شود. از توقف احتمالی محاسبات با وجود مش متعامد (در جریان دوبعدی) یا مش غیر متعامد (در جریان سه‌بعدی) جلوگیری می‌شود.

۴-۴- سیستم مختصات بهینه

آیا می‌توان دستگاه مختصاتی پیدا کرد که مزایای سیستم‌های اویلری و لاگرانژی را بدون معایب آنها دارا باشد؟ چنین دستگاهی در بعضی جهات مزایایی دارد. البته بهینه بودن و

یا نبودن یک سیستم بستگی به ضوابطی دارد که این ضوابط کاملاً منطقی می‌باشند. در موارد خاص، سیستم بایستی خواص زیر را برای محاسبات جریان تراکم‌پذیر دارا باشد:

۱- مانند مختصات اویلری شکل بقایی معادلات دیفرانسیل جزئی موجود باشد،

۲- مانند مختصات لاگرانژی، ناپیوستگی‌های محل تماس به‌صورت کامل و بدون پیچیدگی محاسبه شوند،

۳- مش، توانایی تولید خودکار روی بدنه جسم موردنظر را داشته باشد و

۴- مش متعامد و یکنواخت باشد.

در قسمت‌های بعدی خواهیم دید که سیستم مختصات یک‌پارچه این خصوصیات را دارد. لذا می‌توان گفت که این مختصات یک‌پارچه، مختصات بهینه می‌باشد.

۵- معادلات دینامیک گازها در مختصات یک‌پارچه

معادلات اویلر برای جریان‌های دوبعدی غیردائم به صورت می‌باشند:

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}=0, \qquad (۱)$$

که در آن،

$$E=\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho e\end{pmatrix}, \qquad F=\begin{pmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ \rho u(e+\dfrac{p}{\rho})\end{pmatrix},$$

$$G=\begin{pmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ \rho v^2+p\\ \rho v(e+\dfrac{p}{\rho})\end{pmatrix}, e=\frac{1}{2}(u^2+v^2)+\frac{1}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}.$$

مختصات یک‌پارچه $(\lambda,\xi,\eta,\varsigma)$ که از طریق یک انتقال از مختصات کارتزین (t,x,y,z) به‌دست می‌آید که به این صورت معرفی می‌شود:

$$\begin{aligned} dt &= d\lambda,\\ dx &= hud\lambda+Ad\xi+Ld\eta,\\ dy &= hvd\lambda+Bd\xi+Md\eta. \end{aligned} \qquad (۲)$$

لذا، معادلات حاکم در مختصات یک‌پارچه به‌صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\frac{\partial E}{\partial \lambda}+\frac{\partial F}{\partial \xi}+\frac{\partial G}{\partial \eta}=0\ . \qquad (۳)$$

در معادلات مختصات یک‌پارچه E، F و G به‌صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$E=\begin{pmatrix}\rho\Delta\\ \rho\Delta u\\ \rho\Delta v\\ \rho\Delta e\\ A\\ B\\ L\\ M\end{pmatrix}, \qquad F=\begin{pmatrix}\rho(1-h)I\\ \rho(1-h)Iu+pM\\ \rho(1-h)Iv-pL\\ \rho(1-h)Ie+pI\\ -hu\\ -hv\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

$$G=\begin{pmatrix}\rho(1-h)J\\ \rho(1-h)Ju-pB\\ \rho(1-h)Jv+pA\\ \rho(1-h)Je+pJ\\ 0\\ 0\\ -hu\\ -hv\end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \Delta &= AM-BL\ ,\\ I &= uM-vL\ ,\\ J &= Av-Bu\ ,\\ e &= \frac{1}{2}(u^2+v^2)+\frac{1}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}\ . \end{aligned}$$

معادلات حاکم در سیستم مختصات یک‌پارچه ارائه شد. در قسمت‌های بعدی نحوه حل این معادلات برای جریان‌های مافوق صوت بررسی خواهند شد.

۶- مباحث محاسباتی

روش‌های محاسباتی استفاده شده بسیار مفصل می‌باشد که در اینجا به موارد مهم اشاره می‌گردد.

۶-۱- محاسبه گام زمانی $\Delta\lambda$ با اعمال شرط CFL

با در نظر گرفتن شرایط پایداری، آن را تعریف می‌کنیم:

$$\frac{\Delta\lambda}{2}\left(\frac{\Psi\xi}{\Delta\xi}+\frac{\Psi\eta}{\Delta\eta}\right)<CFL \ . \qquad (۴)$$

مقدار عدد CFL بین ۰ و ۱ است. در معادله فوق Ψ_ξ یک شعاع فرضی از $\frac{dF}{dE}$ و Ψ_η، یک شعاع فرضی از $\frac{dG}{dE}$ است و به‌صورت زیر می‌باشند:

$$\Psi_\xi=\max_{\forall(i,j)}\left\{(1-h)\frac{|uM-vL|}{\Delta}+a\frac{\sqrt{|uM^2|+|vL^2|}}{\Delta}\right\},$$
$$=\max_{\forall(i,j)}\left\{(1-h)\left|u\xi_x+v\xi_y\right|+a\sqrt{\xi_x^2+\xi_y^2}\right\}, \qquad (۵)$$
$$\Psi_\eta=\max_{\forall(i,j)}\left\{(1-h)\frac{|uB-vA|}{\Delta}+a\frac{\sqrt{|uB^2|+|vA^2|}}{\Delta}\right\},$$
$$=\max_{\forall(i,j)}\left\{(1-h)\left|u\eta_x+v\eta_y\right|+a\sqrt{\eta_x^2+\eta_y^2}\right\}.$$

۶-۲- روش تقریب گام زمانی اویلری

گام اساسی در روش گام زمانی اویلری[1]، حل قوانین بقای فیزیکی یعنی حل چهار معادله اول از دوازده معادلات (۳) می‌باشد. در این معادلات متغیرهای جریان به شکل $Q=(\rho,p,u,v)^T$ در گام زمانی λ تعریف می‌شود. که λ از زمان λ^k تا λ^{k+1} در نظر گرفته شده است. متغیرهای هندسی $K=(A,B,L,M)^T$ و h نسبت به λ ثابت فرض می‌شوند ولی تابعی از ξ و η می‌باشند.

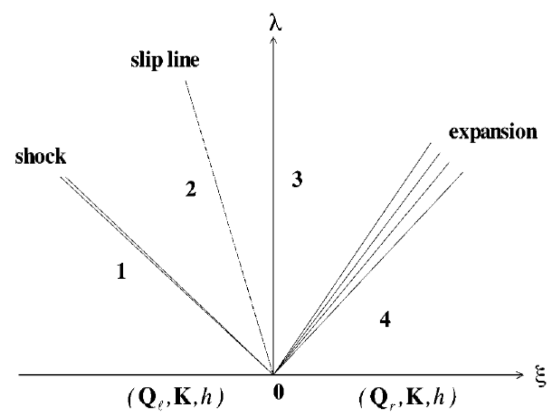
همچنین، برای حل چهار معادله بقایی فیزیکی در $\Omega^k(\lambda)$، $\lambda^k<\lambda<\lambda^{k+1}$ از $K=K(\lambda^k,\xi,\eta)$ و $h=h(\lambda^k,\xi,\eta)$ استفاده می‌شود. پس از تعیین $Q(\lambda,\xi,\eta)$ برای به روز کردن قوانین بقایی هندسی (چهار معادله دوم) مقادیر $K(\lambda^{k+1},\xi,\eta)$ در نظر گرفته شده و سپس از حل شرط حفظ زاویه گریدها مقدار $h(\lambda^{k+1},\xi,\eta)$ به‌دست می‌آید که در اینجا از مقادیر h ثابت، استفاده شده است. با این روش، تأثیر جریان بر روی شکل سلول در محاسبات اعمال شده و می‌توان محاسبات را از گام زمانی $\lambda=\lambda^k$ به $\lambda=\lambda^{k+1}$ جلو برده و با تکرار، به گام‌های زمانی بعدی رسید. از لحاظ فیزیکی، ایده تقریب گام زمانی اویلری معادل این است که در زمان شکل ذرات سیال در $\Omega^k(\lambda)$ ثابت نگه داشته، میدان جریان محاسبه شود. از لحاظ ریاضی، مسئله حل قوانین بقایی فیزیکی در $\Omega^k(\lambda)$ با ثابت نگاه داشتن h و K، معادل با حل معادلات اویلر در مختصات (ξ,η) منحنی‌الشکل ثابت با ضرایبی که در معادلات حاکم در ξ و η متفاوت هستند، می‌باشد. حل مسئله ریمن در مختصات منحنی‌الشکل (ξ,η) بسیار مشکل‌تر از حل آن در مختصات کارتزین بوده ولی به‌صورتی که در بخش بعدی شرح داده خواهد شد قابل حل است.

۶-۳- الگوریتم حل عددی و حل مسئله ریمن

گام کلیدی در حل مسئله ریمن یک‌بعدی در گام زمانی $\lambda^k<\lambda<\lambda^{k+1}\ ;\ \Omega^k(\lambda)$ و سپس محاسبه شارها در معادلات دوبعدی به کمک روش تقریب گام زمانی اویلری می‌باشد. در این مقاله و در مثالی که برای جریان‌های مافوق صوت دائم دوبعدی محاسبه شده است، از روش گودنف و از روش تجزیه داده‌های ماسکل استفاده شده است. همچنین برای محاسبه شارهای گودنف در هر گام زمانی نیاز به حل مسئله ریمن یک‌بعدی در هر جفت از سلول‌های محاسباتی مجاور می‌باشد که بدین وسیله مقادیر متغیرهای جریان در فصل مشترک دو سلول محاسبه خواهد شد.

حل مسئله ریمن مشتمل بر چهار ناحیه جداگانه با جریان یکنواخت می‌باشد که به‌وسیله سه موج تکین غیر خطی موج ضربه‌ای، خط لغزش و موج انبساطی از هم جدا می‌شوندکه موقعیت خط لغزش بین موج ضرب‌ها و موج انبساطی می‌باشد (شکل **۱**).

1- The Time Stepwise Eulreian Approximation



شکل (۱): ساختار کلی حل مسئله ریمن.

۶-۴- روش عددی

در روش عددی که برای محاسبات جریان مافوق صوت دائم استفاده شده از روش گودنف/ماسکل[۱] کمک گرفته شده و در این‌جا روش عددی مورد استفاده توضیح داده می‌شود.

مرحله اول: مقداردهی اولیه

فرض می‌شود که شرایط اولیه جریان در زمان $t=0$ $(\lambda=0)$ در مختصات x-y داده شده است. لذا یک شبکه از سلول‌های محاسباتی در مختصات $\xi-\eta$ را می‌توان از مختصات x-y بدست آورد. به‌عنوان مثال می‌توان طول کمان بین دو نقطه[۲] را در مختصات $\xi-\eta$ با فاصله دو نقطه در مختصات x-y مساوی فرض نمود. در مختصات $\xi-\eta$ داریم:

$\eta=\eta_0,\eta_1,\eta_2,......,\eta_n$ و $\xi=\xi_0,\xi_1,\xi_2,.....,\xi_m$. (۶)

اگر سطح بدنه جسم جامد در مسئله موجود باشد، منحنی $\xi=\xi_0$ (یا $\eta=\eta_0$) بر سطح جسم منطبق خواهد شد.

ذکر این نکته ضروری است که مقادیر ضرائب هندسی در زمان صفر $K^0{}_{i,j}$ مانند متغیرهای جریان $Q^0{}_{i,j}=(\rho^0,p^0,u^0,v^0)_{i,j}{}^T$ با معدل‌گیری از کل میدان جریان و از همه سلول‌های محاسباتی (i,j) به‌دست می‌آید. مقادیر $K^0{}_{i,j}$ و $Q^0{}_{i,j}=(\rho^0,p^0,u^0,v^0)_{i,j}{}^T$ به همراه $h_{i,j}{}^0=0$ به‌عنوان شرایط اولیه برای محاسبات در نظر گرفته شده و مقادیر $E^0{}_{i,j}$ $i=1,2,3,...,m,\ j=1,2,3,...,n$ معلوم می‌باشند. مقدار K یا A,B,L,M از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$A_{i,j}=\frac{x_{i+1,j}-x_{i-1,j}}{2\Delta\xi}\ ,\quad B_{i,j}=\frac{y_{i+1,j}-y_{i-1,j}}{2\Delta\xi}\ ,\quad L_{i,j}=\frac{x_{i,j-1}-x_{i,j-1}}{2\Delta\eta}\ ,\quad M_{i,j}=\frac{y_{i,j-1}-y_{i,j-1}}{2\Delta\eta}\ . \qquad (۷)$$

مرحله دوم: محاسبه عملگر $\pounds_{\Delta\lambda}{}^{\xi}$

برای پیش‌روی از λ^k به $\lambda^{k+1}=\lambda^k+\Delta\lambda$ ($k=0,1,2,...$) ابتدا فرض می‌شود که مقدار متغیرهای هندسی یعنی K در بازه زمانی $\lambda^k<\lambda<\lambda^{k+1}$ ثابت می‌باشد سپس برای هر جفت سلول همسایه (i,j) و (i+1,j) مراحل زیر انجام می‌شود:

۱- از روش بازیابی داده از نوع ماسکل[۳] و از حالت جزء به جزء استفاده می‌شود. به عنوان مثال در جهت ξ فرض می‌شود که f می‌تواند هر یک از متغیرهای فیزیکی ρ,p,u,v باشد. سپس به جای در نظر گرفتن یک توزیع یکنواخت برای این متغیرها ، از یک برون‌یابی خطی برای محاسبه متغیرهای جریان در فصل مشترک دو سلول همسایه به‌صورت زیر استفاده می‌شود:

$$\begin{cases} f_r=f_{i+1,j}-0/5(f_{i+2,j}-f_{i+1,j})\phi(r^+) \\ f_r=f_{i,j}+0/5(f_{i,j}-f_{i-1,j})\phi(r^-) \\ r^+=(f_{i+1,j}-f_{i,j})/(f_{i+2,j}-f_{i+1,j}) \\ r^-=(f_{i+1,j}-f_{i,j})/(f_{i,j}-f_{i-1,j}) \end{cases}\ , \qquad (۸)$$

که در آن:

$$\phi(r)=\max(0,\min(1,r))\ . \qquad (۹)$$

به این روش محدودکننده، شار مین مود گفته می‌شود. همچنین اندیس ۱ و r مربوط به شارهای چپ و راست می‌باشد.

1- Godunov/MUSCL Scheme
2- Node
3- MUSCL Type Data Reconstruction

۲- بردار یکه عمود بر فصل مشترک دو سلول را بین دو سلول مجاور (i,j) و (i+1,j) به این ترتیب می‌توان نوشت:

$$n=\frac{(\nabla\xi)_{i,j}+(\nabla\xi)_{i+1,j}}{\left|(\nabla\xi)_{i,j}+(\nabla\xi)_{i+1,j}\right|}\quad . \tag{۱۰}$$

که از متوسط‌گیری از $(\nabla\xi)_{i,j}$ و $(\nabla\xi)_{i+1,j}$ به‌دست آمده است. حال باید بردار سرعت $q=(u,v)$ را در جهات قائم و مماسی تصویر کنیم (ω و τ).

۳- در اینجا مسئله ریمن برای به‌دست آوردن متغیرهای $(\rho,p,\omega,\tau)^T$ در فصل مشترک دو سلول همسایه به روش تکراری حل شده و از $(\rho,p,\omega,\tau)^T$ مقادیر $(\rho,p,u,v)^T$ در $\xi=\xi_{i+\frac{1}{2},j}$ به راحتی قابل محاسبه خواهد بود. این مقادیر ثابت بوده و با اندیس $(.)_{i+\frac{1}{2},j}$ نشان داده شده‌اند.

۴- مقدار $K_{i,j}{}^{k+1}$ را از $K_{i,j}{}^{k}$ محاسبه می‌شود:

$$\begin{pmatrix}A_{i,j}{}^{k+1}\\ B_{i,j}{}^{k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{i,j}{}^{k}\\ B_{i,j}{}^{k}\end{pmatrix}+\frac{\Delta\lambda^k}{\Delta\xi_i}h^k{}_{i,j}\begin{pmatrix}u_{i+\frac{1}{2},j}-u_{i-\frac{1}{2},j}\\ v_{i+\frac{1}{2},j}-v_{i-\frac{1}{2},j}\end{pmatrix}\ .$$
$$\begin{pmatrix}L_{i,j}{}^{k+1}\\ M_{i,j}{}^{k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}L_{i,j}{}^{k}\\ M_{i,j}{}^{k}\end{pmatrix} \tag{۱۱}$$

۵- حال می‌توان چهار مؤلفه اول شار[1] در فصل مشترک سلول را محاسبه نمود. به‌عنوان مثال مؤلفه دوم شار فصل مشترک $F_{i+\frac{1}{2},j}^{\ k+\frac{1}{2}}$ به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\rho_{i+\frac{1}{2},j}(1-h^k_{i,j})(u_{i+\frac{1}{2},j}M^{k+1}_{i,j}-v_{i+\frac{1}{2},j}L^{k+1}_{i,j})u_{i+\frac{1}{2},j}+p_{i+\frac{1}{2},j}M^{k+1}_{i,j} \tag{۱۲}$$

۶- عملگر $\pounds_{\Delta\lambda}{}^{\xi}$ را برای پیش‌روی از λ^k به $\lambda^{k+1}=\lambda^k+\Delta\lambda,\ k=0,1,2,...$ برای هر جفت از سلول‌های مجاور (i,j) و (i,j+1) اعمال می‌شود (مراحل ۱ تا ۶ تکرار می‌شود).

۷- متغیرهای بقایی E_p در قوانین بقای فیزیکی یعنی معادلات (۳) با استفاده از معادله زیر به روز می‌شود.

$$E_{p_{i,j}}^{k+1}=E_{p_{i,j}}^{k}-\frac{\Delta\lambda^k}{\Delta\xi_i}(F_{i+\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}}-F_{i-\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}})+\frac{\Delta\lambda^k}{\Delta\eta_i}(G_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}-G_{i,j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}). \tag{۱۳}$$

۸- $E_{p_{i,j}}^{k+1}$ را برای به‌دست آوردن $Q_{i,j}^{k+1}$ تجزیه نموده و برای این کار از مقادیر به روز شده متغیرهای هندسی استفاده می‌شود. پس می‌توان نوشت:

$$\Delta=A_{i,j}^{k+1}M_{i,j}^{k+1}-B_{i,j}^{k+1}L_{i,j}^{k+1}\,. \tag{۱۴}$$

۹- با به‌کار بردن ضرایب به روز شده $Q_{i,j}^{k+1}$ و $K_{i,j}^{k+1}$ در معادلات آن، $h_{i,j}^{k}$ به $h_{i,j}^{k+1}$ به روز می‌شود (اگر مقدار h ثابت در نظر گرفته شود می‌توان این قسمت را میان‌بر زد).

۱۰- گرید در صفحه $x-y$ در زمان λ^{k+1} محاسبه می‌شود:

$$x_{i,j}^{k+1}=x_{i,j}^{k}+\frac{1}{2}(h_{i,j}^{k}u_{i,j}^{k}+h_{i,j}^{k+1}u_{i,j}^{k+1})\Delta\lambda$$
$$y_{i,j}^{k+1}=y_{i,j}^{k}+\frac{1}{2}(h_{i,j}^{k}v_{i,j}^{k}+h_{i,j}^{k+1}v_{i,j}^{k+1})\Delta\lambda \tag{۱۵}$$

باید دقت کرد که خطوط شبکه از به هم وصل شدن مراکز سلول‌ها حاصل می‌گردد و نه از به‌هم وصل کردن فصل مشترک سلول‌ها. همچنین شبکه‌ای که در صفحه فیزیکی قرار دارد در محاسبات استفاده نمی‌شود (فقط K استفاده می‌شود). بنابراین، گام (۱۰) دلخواه می‌باشد.

عموماً در مسائل برای محاسبه جریان دائم از معادلات جریان غیر دائم استفاده می‌شود و وقتی که با پیش‌روی در زمان، تغییرات متغیرهای جریان ناچیز باشد (حالت مجانب)، جواب حاصل شده است. در این روش، در حالت دائم (حالتی که متغیرهای جریان در هر نقطه ثابت در صفحه x-y با افزایش زمان تغییر نمی‌کنند) باید متغیرهای جریان Q در یک نقطه مشابه ثابت (x,y) در صفحه فیزیکی مقایسه شوند، نه در نقاط مشابه (ξ,η) و در صفحه انتقال یافته. دلیل این کار این است که موقعیت ذرات سودو[2] (ذراتی که با سرعت h.q با ذرات سیال در حرکتند) در صفحه x-y عموماً با زمان تغییر می‌کند و هرگز به یک حالت مجانب نمی‌رسد. در این مرحله، برای پیش‌روی به زمان λ^{k+2} مرحله دوم دوباره تکرار شده و تا رسیدن به جواب نهایی، این تکرار ادامه می‌یابد.

1- Flux

2- Psesudo Particles

۷- نمونه‌ای از نتایج محاسبات

برای ارائه نتایج دو مثال زیر در نظر گرفته شده است:

مثال اول: یکی از مثال‌هایی که به کمک الگوریتم ارائه شده در این مقاله محاسبه شده، مسئله ریمن دوبعدی دائم است. جریان ورودی به دامنه فیزیکی به این صورت می‌باشد:

$$(p,\rho,M,\theta)=\begin{cases}(0.25,0.5,5.0,0)\\(1.0,1.0,2.4,0)\end{cases}. \qquad (۱۶)$$

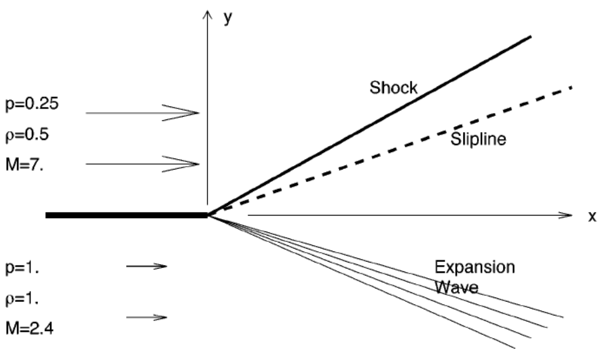
در این مثال از دو جریان موازی و یکنواخت با عدد ماخ ۵/۰ و ۲/۴ استفاده شده است. در این مثال اگر از مختصات اویلری استفاده شود شاهد پراکندگی نتایج محاسبات خواهیم بود و این یکی از خصوصیات روش‌های تفکیک مرکزی می‌باشد. ولی با استفاده از سیستم مختصات یک‌پارچه و h=۰/۹۹۹ شاهد جواب بسیار عالی و با وضوح خط لغزش بسیار بالا خواهیم بود. این مثال نیز برتری سیستم مختصات یک‌پارچه به سیستم‌های مختصات رایج دیگر را نشان می‌دهد. همچنین برای حل مسئله ریمن در فصل مشترک دو سلول مجاور که برای محاسبه شارهای روش گودنف به آن‌ها نیاز است، از دو روش استفاده شده است.

در روش اول از فرمول ارائه شده در مقاله هیو استفاده شود و نتیجه این‌که زمان محاسبات بسیار کمتر شده است. ایرادی این روش این است که حدس p^*، باید در محدوده خاصی باشد تا واگرا نشود.

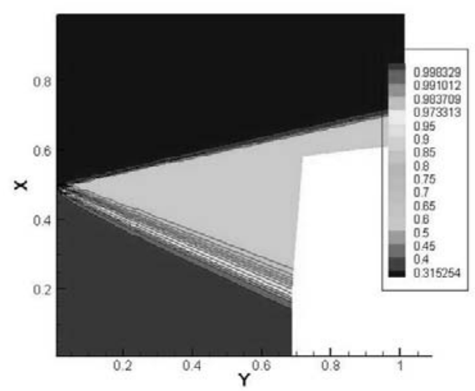
روش دوم این است که از زیر برنامه تورو (کتاب ۱۹۹۹) برای حل مسئله ریمن استفاده شود. در این روش p^* با هوشمندی کامل حدس زده شده و هم‌چنین از روش تکرار و پیش‌روی در زمان استفاده شده است. این باعث می‌شود تا محاسبات مسئله ریمن مدت زمان بیشتری نسبت به روش‌های غیر تکراری (روش استفاده شده توسط هیو و همکارانش) طول بکشد ولی زمان کل محاسبات در سیستم مختصات یک‌پارچه کمتر بوده و جواب‌هایی که از این روش به‌دست می‌آیند دقیق‌تر می‌باشند.

در محاسبات از h ثابت استفاده شده که باعث اعوجاج گریدها در منطقه‌ای که خط لغزش اتفاق افتاده می‌شود که بر وضوح خط لغزش تاثیر زیادی نداشته و این امر با استفاده از روش حفظ زاویه گریدها قابل حل می‌باشد.

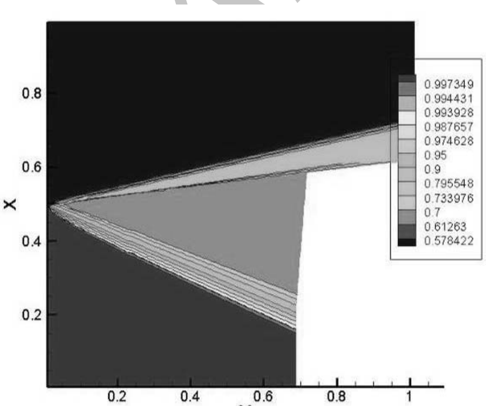
ساختار کلی یک مسئله ریمن دوبعدی در شکل **۲** قابل مشاهده می‌باشد. اگر کانتورهای فشار و چگالی (شکل‌های **۳-۴**) که در مختصات یک‌پارچه به‌دست آمده ملاحظه شود، به وضوح و دقت خط لغزش و موج ضربه‌ای در کانتورها پی خواهیم برد.



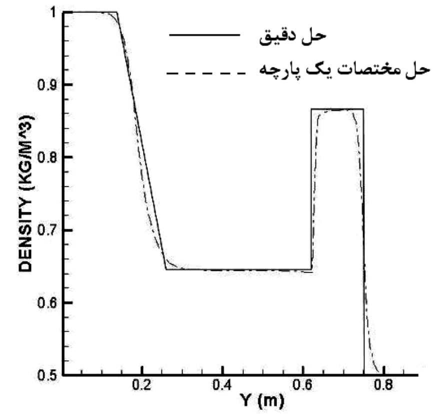
شکل (۲): ساختار کلی حل مسئله ریمن دوبعدی.



شکل (۳): کانتور فشار مثال اول.



شکل (۴): کانتور چگالی مثال اول.



شکل (۵): مقایسه حل دقیق مثال اول با محاسبات مختصات یک‌پارچه.

مثال دوم - (مسئله ریمن دوتایی دائم دوبعدی):

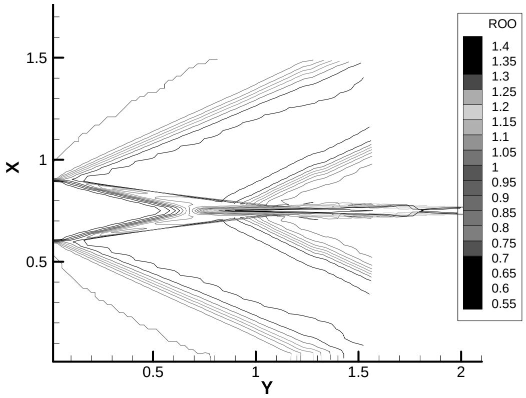
در اینجا متفاوت از مسئله ریمنی که در مثال قبلی ارائه شده، یک مسئله ریمن دوتایی دائم دوبعدی محاسبه و نتایج عددی حاصل که به‌وسیله سه جریان موازی ایجاد شده، ارائه شده است. جریان ورودی به شرح زیر می‌باشد:

(۱۷)

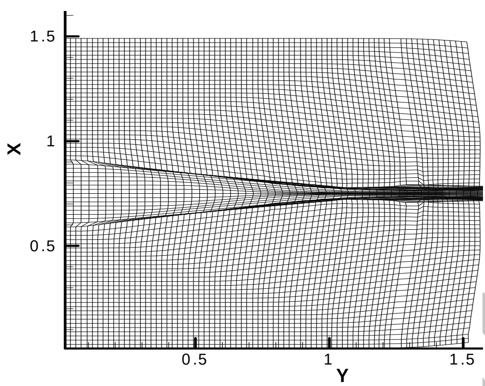
$$(p,\rho,M,\theta)=\begin{cases}(0.25,0.5,5.0,0)\rightarrow 0.6\langle x\langle 0.9\\(1.0,1.0,2.4,0)\rightarrow x\langle 0.6, x\rangle 0.9\end{cases}.$$

در این مثال علاوه بر اینکه جریان شامل امواج ضربه‌ای، خطوط لغزش و امواج انبساطی می‌باشد، حاوی برهم‌کنش‌های این امواج نیز می‌باشد. چنان‌که قبلاً نیز توضیح داده شد، در این مسئله نیز به علت وجود خصوصیت پراکندگی حل‌های عددی، در سیستم مختصات اویلری شاهد وضوح پایین و لکه‌دار بودن خط لغزش خواهیم بود. از آنجا که حل جریان بعد از برهم‌کنش‌ها در این مثال بسیار وابسته به دقت خطوط لغزش می‌باشد، این مسئله بسیار اهمیت دارد که این امواج قبل از اینکه با همدیگر برخورد کنند به دقت محاسبه گردند.

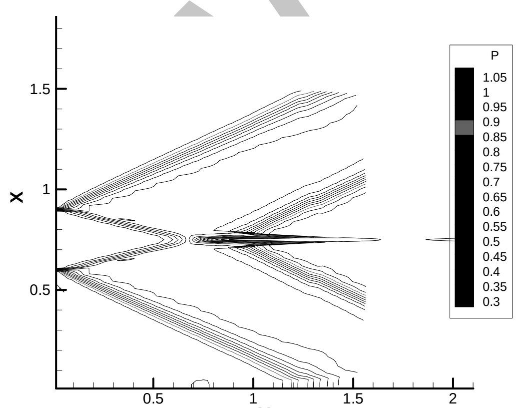
در کانتور چگالی شکل‌های **۶-۴** این نکته قابل مشاهده است که در مکانی که امواج ضربه‌ای به هم‌دیگر رسیده‌اند به علت برخورد با خطوط لغزش منعکس شده‌اند. همچنین در نتایج عددی این تحقیق، مطابقت شبکه محاسباتی با جریان (شکل **۷**) و فشردگی شبکه در نزدیکی موج ضربه‌ای و موج انبساطی قابل مشاهده است که علت این امر، تولید شبکه به‌صورت خودکار به موازات محاسبه جریان می‌باشد. در کانتور فشار (شکل **۸**) که در سیستم مختصات یک‌پارچه حل شده نیز دقت و وضوح موج ضربه‌ای و انبساطی آشکار است.



شکل (۶): کانتور چگالی مثال دوم.



شکل (۷): شبکه محاسباتی حاصل از مختصات یک‌پارچه مثال دوم.



شکل (۸): کانتور فشار مثال دوم.

۸- نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر، شرایط مختلف محاسبات با استفاده از کنترل‌کننده شبکه (h) در سیستم مختصات یک‌پارچه مورد مطالعه قرار داده شده و نتایج حاصل نشان‌گر این است که:

۱-با استفاده از سیستم مختصات یک‌پارچه، وضوح و دقت خطوط لغزش بالاتر خواهد بود و موجهای ضربه‌ای و انبساطی نیز با وضوح بالایی به‌دست می‌آیند،

۲-محاسبات جریان در سیستم‌های مختصات قدیمی‌تر و مخصوصاً سیستم مختصات اویلری، نتایج غیرواضح و پراکنده‌ای را نسبت به سیستم مختصات یک‌پارچه نتیجه می‌دهند. قابل ذکر است که در مختصات لاگرانژی در جریان‌های پیچیده‌تر، محاسبات بسیار دشوارتر از مختصات یک‌پارچه و در بعضی مواقع غیرممکن است،

۳-در محاسبات مقاله حاضر، نیازی به محاسبه گام زمانی از طریق شرط CFL احساس نمی‌شود. برای گام‌های زمانی کمتر از یک صدم، محاسبات هم‌گرا شده ولی با استفاده از CFL های کمتر از یک، با تعداد تکرار کمتری حالت دائم و پایدار حاصل شده است،

۴- در این مقاله از حل حاصل از روش‌های تکراری مسئله ریمن به جای دیگر روش‌های حل مسئله ریمن استفاده شده و این نتیجه حاصل شده که با وجود اینکه روش‌های تکراری حل مسئله ریمن به تنهایی زمان بیشتری نسبت به روش‌های غیرتکراری نیاز دارند ولی زمان کلی حل با استفاده از سیستم مختصات یک‌پارچه کمتر خواهد بود. همچنین با استفاده از روش‌های تکراری حل مسئله ریمن جواب‌ها دقیق‌تر بوده و خطای کمتری خواهند داشت،

۵-برای محاسبه شارها در فصل مشترک سلول‌ها نیز در این مقاله از دو روش می‌توان استفاده نمود. روش اول فقط نیاز به محاسبه دو عملگر دارد ولی در روش دوم از روش کاهنده بعد استرانگ که نیاز به محاسبه سه عملگر داشته و زمان‌بر است، استفاده می‌شود. در محاسبات حاضر از روش اول استفاده شده است. در روش دوم، محاسبات و زمان بیشتری نیاز است،

۶- سیستم مختصات یک‌پارچه در مقایسه با سیستم‌های مختصات اویلری و لاگرانژی برتری داشته و این برتری در نتایج محاسبات ارائه شده کاملاً واضح است و

۷- از سیستم مختصات یک‌پارچه می‌توان برای محاسبه جریان‌های دوبعدی لزج و جریان‌های دو فازی و حل عددی اکثر مسائل آئرودینامیک و مکانیک سیالات استفاده نمود که در این نوع مسائل نیز برتری این سیستم مختصات توسط هیو به اثبات رسیده است. در مسائل پیچیده‌تر سه‌بعدی معادلات این سیستم مختصات توسط هیو ارائه شده است.

مراجع

1. Li. J., Li. Q., and Xu. K. “Comparison of the Generalized Riemann Solver and the Gas-Kinetic Scheme for Inviscid Compressible Flow Simulations”, J. Comp. Phys., Vol. 230, No. 12, pp. 5088-5099 , 2011.
2. Jin. C., Xu. K., and Chen. S. “A Three-dimensional Gas-Kinetic Scheme with Moving Mesh for Low-Speed Viscous Flow Computations”, Adv. Appl. Math. Mech., Vol. 2, No. 6, pp. 746-762, 2010.
3. Ahmed, D.I., Al-Falahi, A., Yusoff, M.Z., and Shuaib, N.H. “Two-dimensional Numerical Investigations of the Velocity Profile in a Shock Tunnel”, European J. Scientific Research, Vol. 45, No. 3, pp. 458-469, 2010.
4. Hui, W.H. “The Unified Coordinate System in Computational Fluid Dynamics”, Comm. in Comp. Phys., Vol. 2, No. 4, pp. 577-610, 2007.
5. Jin, C. and Xu. K. “A Unified Moving Grid Gas-Kinetic Method in Eulerian Space for Viscous Flow Computation”, J. Comp. Phys., Vol. 222, No. 1, pp. 155- 175 , 2007.
6. Hui, W.H. and Hu. J.J. “Space-Marching Gridless Computation of Steady Supersonic/Hypersonic Flow”, Int. J. CFD, Vol. 20, No. 1, pp. 55-59, 2006.
7. Srinivas, Y. and Gutheil, E. “Modification of Conservation Laws for Use on Moving Grids”, J. Comp. Phys., Vol. 2, No. 3, pp. 31-43, 2006.
8. Hui, W.H., Li, P.Y., and Li, Z.W. “A Unified Coordinate System for Solving the Two-dimensional Euler Equations”, J. Comp. Phys., Vol. 153, No. 2, p. 596, 1999.
9. Hui, W.H. and Kudriakov, S. “A Unified Coordinate System for Solving the Three-dimensional Euler Equations”, J. Comp. Phys., Vol. 172, No. 1, p. 235, 2001.
10. Hui, W.H. and Kudriakov, S. “Computation of Shallow Water Waves, Using Unified Coordinates”, SIAM J. Sci. Comp., Vol. 23, No. 1, pp. 1615-1619, 2002.
11. Loh, C.Y. and Hui, W.H. “A New Lagrangian Method for Steady Supersonic Flow Computation,

Part I: Godunov Scheme", J. Comp. Phys., Vol. 89, No. 1, pp. 207-210, 1990.
12. Hui, W.H. and Loh, C.Y. "A New Lagrangian Method for Steady Supersonic Flow Computation, Part II: Slip-line Resolution", J. Comp. Phys., Vol. 103, No. 2, pp. 450-464, 1992.
13. Hui, W.H. and Loh, C.Y. "A New Lagrangian Method for Steady Supersonic Flow Computation, Part III: Strong Shocks", J. Comp. Phys., Vol. 103, No. 2, pp. 465-470, 1992.
14. Hui, W.H. and Zhao, G.P. "Capturing Contact Discontinuities, Using the Unified Coordinates", The MIT Conf. on Comp. Fluid and Solid Mechanics, Vol. 2, No. 1, pp. 2000-2005, 2003.
15. Wu, Z.N. "A Note on the Unified Coordinate System for Computing Shock Waves", J. Comp. Phys., Vol. 180, No. 1, pp. 110-119, 2002.
16. Hui, W.H., Wu, Z.N., and Gao, B. "Preliminary Extension of the Unified Coordinate Approach to Computation of Viscous Flows", J. Sci. Comp., Vol. 30, No. 2, pp. 301-344, 2007.
17. Wu, N. "Physically Related Coordinate System for Compressible Flow", Mod. Phys. Lett. B, Vol. 19, No's. 28-29, pp. 1455-1458, 2005.
18. Loh, C.Y. and Liou, M.S. "A New Lagrangian Method for Solving the 2-D steady Flow Equations for Real Gas", J. Comp. Phys., Vol. 104, No. 2, pp. 150-160, 1993.
19. Loh, C.Y. and Liou, M.S. "A New Lagrangian Method for Three-dimensional Steady Supersonic Flows", J. Comp. Phys., Vol. 113, No. 2, pp. 224-248, 1994.
20. Liou, M.S. "An Extended Lagrangian Method", J. Comp. Phys., Vol. 118, No. 2, pp. 294-309, 1995.
21. Loh, C.Y., Liou, M.S., and Hui, W.H. "An Investigation of Random Choice Method for 3-D Steady Supersonic Flow", Int. J. Num. Meth. in Fluids, Vol. 29, No. 1, pp. 97-119, 1999.
22. Loh, C.Y. and Hui, W.H. "A New Lagrangian Method for Time-Dependent Inviscid Flow Computations", SIAMJ. Sci. Comp., Vol. 22, No. 1, pp. 330-350, 2000.
23. Jia, P., Jiang, S., and Zhao, G.P. "Two-dimensional Compressible Multi-material Flow Calculations in a Unified Coordinate System", Comp. Fluids, Vol. 35, No. 2, pp. 168-188, 2006.
24. Wagner, D.H. "Equivalence of Euler and Lagrangian Equations of Gas Dynamics for Weak Solutions", J. Diff. Equations, Vol. 68, No. 1, pp. 118-136, 1987.
25. Hui, W.H. and Koudriakov, S. "Role of Coordinates in the Computation of Discontinuities in One-dimensional Flows", Comp. Fluid Dyn. J., Vol. 8, No. 4, pp. 495-510, 2000.
26. Hui, W.H. and Koudriakov, S. "On Contact Overheating and other Computational Difficulties of Shock Capturing Methods", Comp. Fluid Dyn. J., Vol. 10, No. 2, pp. 192-209, 2006.
۲۷. زارعیان، ب. "تحلیل عددی جریان‌های دوبعدی در یک سیستم مختصات یک‌پارچه"، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی، ۱۳۸۷.
۲۸. حیدری، م.ر. و طیبی رهنی، م. "شبیه‌سازی عددی جریان‌های آشفته مافوق صوت حول اجسام متقارن با استفاده از یک شبکه چند بلوکی و ترکیب معادلات PNS و TLNS"، مجله مکانیک هوافضا، جلد ۳، شماره ۴، ص.ص. ۱۱-۱، ۱۳۸۶.