# شبیهسازی پدیده رهایی متناوب گردابهها در یک جریان دوبعدی حول مانع مربعی در یک کانال، با استفاده از روش شبکه بولتزمن

میثم عبداللهی<sup>۱</sup> و غلامعلی عاطفی<sup>۲</sup> دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه علم و صنعت ایران (تاریخ دریافت: ۸۸/۱۰/۲۱، تاریخ پذیرش: ۸۹/۱۰/۱)

#### چکیدہ

در این مقاله، مدلی برای شبیه سازی جریان دوبعدی حول مانع مربعی واقع در یک کانال ارائه شده است. تاکنون عمده تحقیقات انجام شده در این خصوص بر جریانهای خارجی حول سیلندر دایروی متمرکز بوده و در زمینه جریان حول مانع مربعی و شناخت تأثیرات دیوارههای کانال بر میدان جریان، مطالعات تجربی و عددی کافی صورت نگرفته است. نتایج اندک و پراکنده موجود لزوم مطالعه این نوع از جریان را نشان می دهد. در این تحقیق، بجای حل معادلات غیرخطی ناویر استوکس، از روش شبکه بولتزمن استفاده شده است. این روش با روشهای مبتنی بر مکانیک محیطهای پیوسته دارای تفاوت های اساسی است. در این روش با استفاده از گسسته ازی معادله دیفرانسیلی بولتزمن و ارائه یک تعریف مجازی از ذرات سیال با جهات حرکت مشخص، نهایتاً الگوریتمی به دست می آید که مقادیر ماکروسکوپی جریان سیال را در تمام میدان جریان پیش بینی می نماید. نتایج شبیه سازی این مقاله شامل ارائه الگوهای مختلف جریان دو بعدی حول مانع مربعی، ارائه معادلهای برای تخمین طول پیش بینی می نماید. نتایج شبیه سازی این مقاله شامل ارائه الگوهای مختلف جریان دو بعدی حول مانع مربعی، ارائه معادلهای برای تخمین طول پیش بینی می نماید. نتایج شبیه سازی این مقاله شامل ارائه الگوهای مختلف جریان دو بعدی حول مانع مربعی، ارائه معادلهای برای تخمین طول پیش بینی می نماید. نتایج شبیه سازی این مقاله شامل ارائه الگوهای مختلف جریان دو بعدی حول مانع مربعی، ارائه معادلهای برای تخمین طول پیش بینی می نماید. نتایج شبیه سازی این مقاله شامل ارائه الگوهای مختلف جریان دو بعدی حول مانع مربعی، ارائه معادلهای برای تخمین طول پیش بینی می مراید ماکن، تعیین عدد رینولدز بحرانی( مربوط به آغاز پدیده رهایی متناوب گردابهها)، تخمین فرکنس پدیده رهایی متناوب گردابهها (عدد استروهال) و محاسبه ضریب پسا برحسب عدد ریئولدز می باشد. بر اساس این نتایج، در الگوی جریان دائم با گردابههای مقارن و ساکن در پشت سیلندر، با افزایش عدد رینولدز طول ناحیه گردابهای به طور خطی افزایش می یابد. همچنین، در الگوی جریان غیردائم، نفوذ ناحیه جرایی از پشت سیلندر، با افزایش عدد رینولدز می تارم توجهی بر روند تغییرات عدد استروهال و ضریب پسا دارد.

واژههای کلیدی: روش شبکه بولتزمن، رهایی متناوب گردابهها، عدد استروهال، عدد رینولدز

# Simulation of Vortex Shedding Phenomenon in a 2-D Flow over a Squared Section Obstacle inside a Channel, Using Lattice Boltzmann Method

M. Abdollahi and Gh.A. Atefi

Mech. Eng. Dep't Iran Sci. & Tech. Univ. (Received: 11 Jan. 2010; Accepted: 22 Dec. 2010)

#### ABSTRACT

In this paper, a model for simulation of 2-D flow around a square obstacle inside a channel has been obtained. Most researches have concentrated on the external flow around circular cylinders, while there are few researches for flow around square obstacle considering channel wall effects. In this work, the Lattice-Boltzmann method is applied, instead of solving non-linear Navier-Stokes equations. This method has conceptual differences and in which an algorithm is obtained, using discretization of the Boltzmann differential equation and virtual definition of fluid particles. This algorithm can be used to compute the flow macroscopic flow quantities. Simulations include different 2-D flow patterns around a squared section obstacle, presentation of an equation estimating recirculation length, evaluation of critical Reynolds number (related to vortex shedding phenomena), estimation of vortex shedding frequency, and computation of drag coefficient as a function of Reynolds number.

Keywords: Lattice-Boltzmann Method, Vortex Shedding, Strouhal Number, Reynolds Number

abdollahi\_m@nigc.ir - کارشناس ارشد (نویسنده پاسخگو): ۲ ۲- دانشیار ۲**۰ www.SID.ir** 

۱– مقدمه

۵۲

جریان سیال حول سیلندر علیرغم هندسه ساده دارای پیچیدگیهای خاصی میباشد. عمده این پیچیدگیها مربوط به پدیده جدایی جریان، وقوع جریانهای گردابهای و شکل گیری الگوی جریان غیردائم رهایی متناوب گردابهها در محدودهای از اعداد رینولدز میباشد. تاکنون عمده تحقیقات انجام گرفته در این خصوص، بر جریانهای خارجی حول سیلندر دایره شکل متمرکز بوده و در زمینه جریان حول مانع مربعی و شناخت تأثیرات دیوارههای محدودکننده جریان، مطالعات کمی صورت گرفته است.

با تغییر عدد رینولدزجریان ورودی به کانال، رژیمهای مختلف جریان در پاییندست سیلندر شکل میگیرد. فرانک [۱] در یک تقسیمبندی دقیق، هفت رژیم برای جریان خارجی حول سیلندر دایرهای شکل ارائه کرده است. سه رژیم ابتدائی در محدوده جریان آرام و بقیه شامل جریانهایی با اثرات ناشی از اغتشاش میباشند. در مطالعه حاضر، سه رژیم جریان آرام حول مانع مربعی واقع در یک کانال مورد توجه قرار گرفته است. شبیهسازی سایر رژیمهای جریان، مستلزم ارائه شبیهسازیهای سهبعدی خواهد بود.

سه رژیم جریان آرام حول مانع مربعی واقع در یک کانال شامل جریان دائم بدون جدائی (در محدودہ Re <1)، جریان دائم با گردابههای متقارن(در محدوده Re<Re) و جريان غيردائم به همراه پديده رهايي متناوب گردابهها میباشد. در اعداد رینولدز خیلی کوچک، نیروهای ناشی از لزجت غالب بوده و هیچگونه جدایی جریان در اطراف مانع رخ نمیدهد. با افزایش عدد رینولدز، جدایی جریان در لبه پشتی مانع صورت گرفته و یک ناحیه گردابهای دائم شامل دو گردابه متقارن در پشت مانع بهوجود می آید. با افزایش عدد رينولدز، اندازه طول ناحيه گردابهاي افزايش مييابد. وقتی عدد رینولدز به مقدار بحرانی خود میرسد، ناگهان یک تغییر کامل در الگوی جریان به وجود می آید. یکی از گردابههای پشت سیلندر، بزرگ و بزرگتر شده و از حالت سکون خارج و همراه با جریان سیال به سمت پاییندست به حرکت در میآید. این اتفاق با یک تأخیر زمانی عینا برای گردابه دوم نیز تکرار میشود. سپس در جریان پشت سیلندر،گردابههای جدیدی بهصورت تناوبی تشکیل شده و با

جریان سیال به سمت پاییندست رها میشوند. مسیر تشکیل شده از حرکت این گردابه ها را «مسیر گردابه ای فون کارمن<sup>۱</sup>» مینامند. برای مقدار عدد رینولدز بحرانی در جریان های خارجی، مقادیر مختلفی پیشنهاد شده است. زدراکوویچ<sup>۲</sup> [۲] عدد رینولدز بحرانی در جریان خارجی حول سیلندر دایره ای شکل را حدود ۴۰ پیشبینی نمود. در مراجع [۴–۳] این مقدار برای جریان خارجی حول مانع مربعی، به ترتیب حدود ۵۴ و ۷۰ پیشبینی شده است.

همانط ور که اشاره شد، با شروع اثرات ناشی از جریانهای مغشوش، جریان دارای ماهیتی سهبعدی خواهد شد و در نتیجه شبیهسازی این نوع جریان در محدوده مطالعه حاضر نمی گنجد. ویلیامسون<sup>۳</sup> [۵] برای آغاز جریانهای سهبعدی حول سیلندر دایره شکل عدد ۱۸۰ را پیشنهاد نمود. همچنین در مرجع [۱] محدوده تقریبی پیشنهاد نمود. همچنین در مرجع [۱] محدوده تقریبی پیشنهاد نمود. همچنین در مرجع [۱] محدوده تقریبی مربعی ارائه نشده است. در مطالعه حاضر، عدد ۳۰۰ به عنوان مربعی ارائه نشده است. در مطالعه حاضر، عدد ۲۰۰ به عنوان حد بالای عدد رینولدز در شبیه سازی جریان آرام در نظر گرفته شده است.

در شبیه سازی جریان حول مانع مربعی واقع در یک کانال، علاوه بر پارامترهای جریان خارجی حول مانع مربعی، می ایست دو پارامتر دیگر را نیز در نظر گرفت. این دو پارامتر، نسبت انسداد مسیر و پروفیل سرعت در بالادست سیلندر می باشند. نسبت انسداد مسیر عدد بی بعدی است که از رابطه زیر به دست می آید:

 $B = \frac{D}{H},$ 

که در آن، D انـدازه ضـلع مـانع مربعـی و H عـرض کانـال میباشد.

(1)

در مطالعه حاضر، با توجه به آرام بودن جریان، پروفیل سرعت در بالادست مانع به صورت سهمی درجه دو در نظر گرفته شده است. لازم بهذکر است دراین مطالعه، سرعت بیشینه پروفیل سهمی گون، مبنای محاسبه اعداد بدون بعد

<sup>1-</sup> Von Karman Vortex Street

<sup>2-</sup> Zdravkovich

<sup>3-</sup> Williamson

– تمام برخوردها بهصورت همزمان صورت میپذیرند و – هر برخورد فقط توزیع ذرات در گرههای مجاور را تحـت تأثیر قرار میدهد.

به بیان دیگر، الگوریتم این دو روش، موضعی و محلی است. این موضوع منجر به یکی از مهمترین مزیتهای این دو روش میشود. کمیات ماکروسکوپی در این دو روش بهصورت محلی محاسبه میشود.

مهم ترین شبکه دوبعدی که اغلب در مختصات کارتزین دوبعدی مورد استفاده قرار می گیرد، شبکه  $_{\mathcal{D}_2 \mathcal{Q}_2}$  می باشد که توسط کیان<sup>۲</sup> و همکاران [۲] معرفی شده است. نمونه ای از این شبکه به همراه مقادیر بردار یکّه سرعت در شکل ۱ نشان داده شده است. در این شبکه، سرعت ذراتی که در مسیرهای قطری حرکت می کنند  $\sqrt{2}$  برابر سرعت ذراتی است که در مسیرهای اصلی حرکت می کنند.



 $.D_2Q_9$  شکل(۱): جهات و مقادیر بردارهای یکّه سرعت در شبکه  $D_2Q_9$ 

 ۲-۲- الگوریتم روشهای شبکه گاز و بولتزمن شبیه سازی جریان به کمک روشهای شبکه گاز و بولتزمن یک فرآیند تکراری است. الگوریتم این دو روش از سه مرحله اصلی شکل می گیرد. این مراحل برای یک شبکه <sub>و20</sub> مرحله انتشار<sup>7</sup>: در هر مرحله زمانی، ذرات در راستای یکی از هشت مسیر ممکن از یک گره به گرههای مجاور حرکت می کنند (شکل ۲)،

$$Re = \frac{U \cdot D}{v},\tag{7}$$

$$St = \frac{f \cdot D}{IU},\tag{(7)}$$

که در آنها، f فرکانس نوسانات جریان، Uسرعت بیشینه پروفیل سرعت در بالادست، و U لزجت سینماتیکی جریان میباشد. لازم به ذکر است عدد استروهال در پدیده رهایی متناوب گردابهها، به عنوان اندازه فرکانس بیبعد این پدیده در نظر گرفته میشود. در واقع عدد استروهال، رفتار وابسته به زمان این پدیده را توصیف مینماید.

# ۲-معرفی روش شبکه بولتزمن

روش نسبتاً جدید شبکه بولتزمن، شکل بهبود یافته روش خودکار شبکه گاز <sup>۱</sup> میباشد. روش شبکه بولتزمن دارای تفاوتهای اساسی نسبت به روشهای مبتنی بر مکانیک محیطهای پیوسته میباشد. این روش، مبتنی بر یک تعریف مجازی از ذرات منفرد سیال بوده و مدلهایی از برخورد ذرات مجازی بر روی یک شبکه منظم را ارائه میدهد. نوع ذرات و قواعد برخورد آنها، در سطح میکروسکوپی منطبق بر واقعیات فیزیکی نمیباشد ولی ثابت شده است که الگوریتمهای حاصل از این روش در سطح ماکروسکوپی و مخصوصاً در جریان تراکمناپذیر، منجر به ارضاء معادلات بقاء جرم و مومنتوم می گردد [۶].

۲-۱- نحوه شبکهبندی
 تاکنون شبکههای مختلفی در روشهای شبکه گاز و بولتزمن به کار رفته است، لیکن موارد ذیل در تمام مدلها، مشترک می باشد:
 طول ابعاد شبکه در تمام حوزه مورد مطالعه، یکسان است،
 خرات مجازی فقط روی مسیرهای شبکه حرکت می نمایند،
 در هر لحظه در روی هر مسیر فقط یک ذره مجاز به حرکت می باشد،
 بر خوردها فقط در مراکز شبکه، یعنی در گرهها، رخ می در خورده.

<sup>2-</sup> Qian

<sup>3-</sup> Propagation

<sup>1-</sup> Lattice Gas Automata



**شکل(۲):** مرحله انتشار.



۲- مرحله برخورد <sup>۱</sup>: در گرههایی که تعدادی از ذرات به هم میرسند، برخورد اتفاق میافتد. ذرات در این برخورد، تبادل مومنتوم انجام میدهند؛ بهطوری که جرم و مومنتوم کل در هر واحد شبکه ثابت بماند. برهم کنش بین ذرات محلی است. چون هر برخورد فقط روی آرایش گرههای مجاور تأثیر دارد (شکل ۳) و

۳- محاسبه مقادیر ماکروسکوپی: پس از دو مرحله فوق، با استفاده از توزیع جدید ذرات در هر گره، مرحله انتقال از فضای مجازی ذرات منفرد به فضای ماکروسکوپی صورت می گیرد. این مرحله، معادل ساده شده قوانین آماری است که در ترمودینامیک آماری برای محاسبه خواص ماکروسکوپی بر حسب خواص میکروسکوپی استفاده می گردد.

۲–۳– تفاوت روش شبکه بولتزمن با روش شبکه گاز در روش شبکه گاز وضعیت ذرات در هر گره بهصورت باینری<sup>۲</sup> است. یعنی در یک گره خاص یا ذره وجود دارد و یا ندارد. بدین ترتیب این روش در مرحله محاسبه مقادیرماکروسکوپی دچار یک سری اغتشاشات آماری<sup>۳</sup> می گردد که برای رفع آن بایستی میانگین گیری مقادیر ماکروسکوپی روی منطقهای از گرهها انجام شود تا تغییرات

مقادیر ماکروسکوپی میانگین به صورت آهسته تری صورت گیرد. میانگین گیری با شرایط مذکور، دیگر خاصیت محلی بودن خواص را نخواهد داشت. در روش شبکه بولتزمن ضمن حفظ مزایای روش شبکه گاز این نقطه ضعف برطرف می گردد. کیان و همکاران روش شبکه بولتزمن را بهعنوان روشی مؤثرتر برای شبیه سازی جریان سیال پیشنهاد کردند [۷]. در این روش برخلاف روش شبکه گاز، به جای استفاده از ذراتی با وضعیت باینری، از توابع توزیع دانسیته استفاده می گردد. مقدار این تابع در هر گره، احتمال وجود ذراتی را که در یکی از جهات معین می توانند حرکت کنند، نشان می دهد. مقدار این تابع عددی بین صفر و ۱ خواهد بود. بر اساس مطالب فوق الذکر، در روش شبکه بولتزمن بدون نیاز به میانگین گیری روی تعدادی از گرهها، مقادیر ماکروسکوپی

## ۲-۴- معادلات روش شبکه بولتزمن

معادله پیوسته بولتزمن، معادلهای است که حرکت و برهم کنش ذرات سیال را توصیف می کند. معادلات مربوط به الگوریتم روش شبکه بولتزمن، در واقع شکل گسسته معادله پیوسته بولتزمن میباشد [۸]. این معادلات برای مراحل مختلف الگوریتم روش شبکه بولتزمن به قرار زیر است:

- مرحله برخورد  $f_i(\vec{x},t+1) = f_i(\vec{x},t) + \Omega_i(\vec{x},t),$  (۴) که در آن،  $(\vec{x},t)$  تابع توزیع دانسیته در جهت i تبردار موقعیت ذره، t زمان و $\Omega_i(\vec{x},t)$  اپراتور برخورد میباشد. لازم به ذکر است اندیس i مربوط به جهت مسیرهای شبکه است که در شبکه  $D_2 Q_9$  اعداد صحیح بین صفر و ۹ را به خود اختصاص میدهد.

۲- مرحله انتشار

 $f_i(\vec{x} + \vec{e}_i, t + 1) = f_i(\vec{x}, t + 1),$  (۵) که در آن،  $e_i$  بردار یکّه سرعت در جهت i و بقیه پارامترها همان تعاریف مربوط به معادله ۲ را دارند. مقادیر بردار یکه سرعت در یک شبکه  $D_2 Q_9$  در شکل **۱** نشان داده شده است.

<sup>1-</sup> Collision 2- Binary

<sup>3-</sup> Statistical Noise

**– محاسبه مقادیر ماکروسکوپی** مقادیر خواص ماکروسکوپی جریان مانند دانسیته و بردار سرعت در هر گره با استفاده از مقادیر تابع توزیع دانسیته در همان گره بهصورت زیر قابل محاسبه میباشد:  $\rho(\vec{x},t) = \sum_{i} f_{i}(\vec{x},t),$  (۶)

$$\vec{u}(\vec{x},t) = \frac{\sum_{i} e_i f_i(\vec{x},t)}{\rho(\vec{x},t)},\tag{V}$$

که در آن، 
$$ho(\vec{x},t)$$
 و  $ec{u}(ec{x},t)$  به ترتیب مقادیر دانسیته و  $ho(ec{x},t)$  سرعت جریان در مکان  $x$  و زمان  $t$  میباشد.

یکی از مسائل مهم در روش شبکه بولتزمن، ارائه رابطهای برای اپراتور برخورد، ،Ω، میباشد. مطرحترین معادله برای اپراتور برخورد تقریبی موسوم به BGK است که در ابتدا برای توصیف برخورد ذرات در گازهای رقیق ارائه شد[۹]. این معادله توسط کیان و همکاران، در توسعه روش شبکه بولتزمن مورد استفاده قرار گرفت[۷]:

$$\Omega_{i} = \frac{f_{i}(\vec{x},t) - f_{i}^{eq}(\vec{x},t)}{\tau}, \qquad (\Lambda)$$

که در آن،  $f_i^{eq}$  تابع توزیع تعادلی و  $\tau$  زمان استراحت بدون بعد است. مقادیر این دو پارامتر، برحسب مقادیر ماکروسکوپی به صورت زیر قابل محاسبه می باشد:

$$f_i^{eq} = w_i \rho [1 + 3e_i . \vec{u} + \frac{\gamma}{2} (e_i . \vec{u})^2 - \frac{\beta}{2} (\vec{u} . \vec{u})], \qquad (9)$$

 $D_2 Q_9$  که در ان،  $w_i$  ضریبی است که مقادیر ان برای شبکه  $w_i$  به قرار زیر است:

$$w_{i} = \begin{cases} 4/9 & i = 0\\ 1/9 & i = 1, \dots, 4\\ 1/36 & i = 5, \dots, 8 \end{cases}$$
 (1.1)

همان طور که ملاحظه میگردد، مقادیر f<sub>i</sub><sup>eq</sup> در هر گره، برحسب مقادیر ماکروسکوپی همان گره محاسبه میشود. زمان استراحت بدون بعد، r، بر حسب لزجت سیال و طبق رابطه زیر محاسبه میشود:

$$\tau = 3\nu + \frac{1}{2},$$
 (۱۱)  
که در آن،  $\nu$  لزجت سینماتیکی جریان میباشد.

با کنار هم قرار دادن روابط (۱۱–۴)، یک حلقه محاسباتی جهت محاسبه مقادیر ماکروسکوپی جریان در تمام گرهها بهدست میآید. این حلقه محاسباتی شامل موارد زیر میباشد:

حدس مقدار اولیه تابع توزیع دانسیته در تمام گرهها،
 محاسبه مقادیر ماکروسکوپی در تمام گرهها،
 محاسبه مقادیر تابع توزیع تعادلی در تمام گرهها،
 محاسبه مقادیر جدیدتابع توزیع دانسیته (پس از مراحل برخورد و انتشار) در تمام گرهها و
 اعمال شرایط مرزی.
 حلقه محاسباتی فوقالذکر تا محاسبه مقادیر نهایی کمیات ماکروسکوپی میدان جریان تکرار خواهد شد.

۳-مشخصات مسئله مورد مطالعه در این بخش مشخصات هندسی و شرایط مرزی مسئله مورد مطالعه بیان میشود.

۳-۱- مشخصات هندسی و نحوه شبکهبندی

شکل ۶ هندسه حوزه محاسباتی مورد مطالعه را نشان میدهد. نسبت انسداد مسیر در مسئله اصلی، B=1/8 میباشد. به منظور کاهش تأثیر شرایط مرزی ورودی و خروجی بر حل میدان جریان، نسبت طول کانال به طول مانع، برابر ۴۲ قرار داده شده است (L/D=42).



طول ورودی جریان ( فاصله لبه جلویی سیلندر مربعی از ورودی کانال) برابر <u>L</u> در نظر گرفته شده است.

جدول ۱، مشخصات شبکههای مورد استفاده در حل عددی این جریان را مشخص مینماید. در این جدول از چهار نوع شبکه بهمنظور دستیابی به دقت بهتر استفاده شده است. تعداد نقاط شبکه روی هر ضلع مانع مربعی از ۲۰تـــ نقطه است که در نتیجه طول واحد شبکه بر حسب ابعـاد سیلندر بین  $\frac{D}{40}$  تا  $\frac{D}{10}$  خواهد بود.

واحد شبکه بر حسب ابعاد سیلندر	ابعاد شبکه روی سیلندر	ابعاد شبکه در کل میدان جریان
0.1D	1•×1•	۴۲۰×۸۰
0.05D	۲۰×۲۰	840×180
0.033D	۳۰×۳۰	1780×740
0.025D	4•×4•	188•×22

**جدول(۱)**: نحوه شبکهبندی.

۲-۳- شرایط مرزی

در این قسمت شرایط مرزی در دیـوارههـا و همچنـین در ورودی و خروجی کانال بیان میشود.

۳-۲-۱- شرط مرزی دیوارهها

مرسومترین روشی که تاکنون برای جایگزینی شرط عدم لغزش در روش شبکه بولتزمن بکار رفته است، شرط مرزی موسوم به «پرش به عقب<sup>۱</sup>» میباشد. شکل **۵**، جهات توابع توزیع دانسیته را در نقطهای روی دیواره پایین یک کانال نشان میدهد. با توجه به این شکل و با در نظر گرفتن معادله مربوط به مرحله انتشار، میتوان نتیجه گیری کرد که در هر مرحله محاسباتی، سه تابع توزیع ،  $f_2$ ،  $f_5$  مجهول باقی خواهند ماند.

طبق شرط مرزی « پرش به عقب » این توابع توزیع مجهول، در هر مرحله محاسباتی از توابع توزیع معلومی که در خلاف جهت آنها می،باشد، بهدست میآید:

$$f_2 = f_4,$$
  

$$f_5 = f_7,$$
  

$$f_6 = f_8.$$
  
(17)

در مطالعه حاضر نیز از این نوع شرط مرزی در دیوارهها استفاده شده است.

# ۳-۲-۲-۳ **شرایط مرزی در ورودی و خروجی کانال** شکل ۶، جهات توابع توزیع را مقاطع ورودی و خروجی یک کانال نشان میدهد. با توجه شکل فوق و با در نظر گرفتن معاداه میدها به میچاه انتشاب میتمان نتیچه گری کرد که

معادله مربوط به مرحله انتشار، می توان نتیجه گیری کرد که در هر مرحله محاسباتی در مقطع ورودی، سه تابع توزیع، در هر مرحله محاسباتی در مقطع ورودی، سه تابع توزیع،  $f_5$  ,  $f_1$ 

ماکروسکوپی جریان در مقطع ورودی، پروفیل سرعت جریان (به عنوان شرط مرزی ماکروسکوپی) معلوم و مقدار فشار (دانسیته) جریان مجهول میباشد.

مرسوم ترین روش برای به دست آوردن این چهار پارامتر مجهول در مقطع ورودی، استفاده از روشی است که توسط زو و هی<sup>۲</sup> [۱۰] ارائه شده است. در این روش از یک معادله بقای جرم (معادله ۶)، دو معادله بقای مومنتوم (معادله ۷) و همچنین از یک معادله اضافه زیر، برای به دست آوردن چهار پارامتر مجهول استفاده می شود:

(۱۳)  $f_1 - f_1^{eq} = f_3 - f_3^{eq}$ . روش بهدست آوردن مقادیر توابع توزیع مجهـول در مقطـع خروجی( $f_6$ ,  $f_6$  و  $f_7$ ) مشابه بهدست آوردن ایـن مقـادیر در مقطع ورودی است، با این تفاوت که در مطالعـه حاضـردر مقطـع خروجـی، مقـدار سـرعت جریـان، مجهـول و مقـدار فشار(دانسیته) جریان،به عنـوان شـرط مـرزی ماکروسـکوپی معلوم میباشد.



۴- نتایج

در این قسمت نتایج محاسبات شبیهسازی جریان حول سیلندر مربعی واقع در یک کانال با شرایط ذکر شده در قسمت قبلی و در محدوده 300 ke ارائه شده است. همان طور که اشاره شد، سرعت بیشینه پروفیل سهمی گون، مبنای محاسبه اعداد بدون بعد قرار گرفته است. در این

<sup>1-</sup> Bounce Back

<sup>2-</sup> Zou and He

قسمت، ابتدا خطوط جریان در رژیم های مختلف جریان دوبعدی (در اعداد رینولدز مختلف) در مسئله اصلی ترسیم شده آنگاه مشخصههای مختلف جریان در حالات دائم و غیر دائم بهدست آمده و با نتایج سایر محققان مقایسه شده است.

## ۴–۱– رژیمهای مختلف جریان

شکلهای ۲۲−۷ خطوط جریان حاصل از نتایج محاسبات را برای چند عدد رینولدز مختلف نشان می دهـد. شکلهای مزبور با استفاده از نرمافـزار تـکپلات و براساس بخشی از خروجیهای نرمافزار این مقاله (مؤلفههای افقی و عمودی سرعت)، بهدست آمده است. رژیمهای جریان آرام حول سیلندر یا مانع برحسب عـدد رینولـدز در مقدمه معرفی سیلندر یا مانع برحسب عـدد رینولـدز در مقدمه معرفی مهمانطور که انتظار میرفت در این حالت، بـه دلیـل غالب بودن نیروهای لزجی، جریان دائـم بـدون هرگونـه جـدایی، شکل خواهد گرفت.

با افزایش عدد رینولدز جدایی جریان در ناحیه پشت مانع رخ میدهد. نتایج محاسبات، شروع پدیده جدایی و تشکیل گردابههای ساکن را برای مسئله مورد مطالعه، در 3 ≈ Re پیش بینی می نماید. برای نشان دادن این موضوع، خطوط جریان برای Re = 2.5 و Re = 3.5 در شکل لا با هم مقایسه شده است.

زدراوکوویچ[۲] در مشاهدات تجربی خود، این مقدار را برای سیلندر دایره شکل در جریان آزاد به صورت Re = 4.4 ارائه نموده است. همان طور که مشاهده می گردد این مقدار برای مانع مربعی کوچکتر از مقدار متناظر برای جریان حول سیلندر دایروی است. علت کوچکتر بودن این مقدار در جریان حول مانع مربعی را میتوان به وجود لبه های تیز در این مسئله مرتبط نمود که موجب می شود پدیده جدایی در رینولدزهای پایین تر نسبت به جریان حول سیلندر دایره شکل رخ دهد. در این حالت، دو ناحیه گردابه ای متقارن در پشت سیلندر به وجود می آید. خطوط جریان دائم مربوط به این حالت در شکل **P** برای Re = 20 نمایش داده شده این حالت در شکل **P** برای Re = 20 نمایش داده شده



Re = 20 شکل (۹): خطوط جریان در Re = 20



**شکل (۱۲):** خطوط جریان در Re = 200 .

شکل ۱۲ خطوط جریان برای 200 = Re را در یک لحظه خاص، نشان میدهد. در این حالت نیز مانند حالت قبل، پدیده غیردائم رهایی متناوب گردابهها رخ میدهد. از مقایسه شکلهای ۱۰–۹ مشخص می گردد که در جریان با 200 = Re، علاوه بر جریانهای گردابهای پشت سیلندر، جریانهای گردابهای با مقیاس کوچکتری در مجاورت لبههای جانبی سیلندر شکل خواهد گرفت. بهعبارت دیگر ناحیه جدایی از پشت سیلندر به سمت لبه جلویی نفوذ ناحیه جدایی از پشت سیلندر به سمت لبه جلویی نفوذ می کند. بر اساس نتایج محاسبات، پدیده نفوذ ناحیه جدایی به سمت لبه جلویی را می توان در محدوده 130 ≤ Re مشاهده نمود. این پدیده تأثیرات قابل توجهی بر مشخصههای جریان می گذارد که در قسمتهای بعدی به آن

۲-۴- مشخصات جریان دائم

در این قسمت، نتایج محاسبات برای دو مشخصه از مشخصات جریان دائم حول مانع مربعی، ارائه می گردد. این مشخصات شامل تغییرات طول ناحیه گردابهای پشت سیلندر و ضریب پسا برحسب عدد رینولدزمی باشد. ضریب انسداد مسیر برابر ۲۱۲۵ در نظر گرفته شده است. شکل ۱۳ نتایج محاسبات مربوط به تغییرات طول ناحیه گردابهای (جریان دائم با گردابههای متقارن-شکل ۹) برحسب عدد رینولدز را نشان می دهد. محاسبات مذکور افزایش خطی طول ناحیه گردابهای برحسب افزایش عدد رینولدز را تایید می کند. مقایسه شکلهای ۸–ب، ۹ و ۱۰–الف نیز نتیجه فوق الذکر را به صورت کیفی نشان می دهند.



**شکل(۱۰):** مقایسه خطوط جریان در Re = 50 و Re = 60.

وقتی مقدار عدد رینولدز جریان بالادست، به مقدار عدد رینولدز بحرانی میرسد، پدیده غیردائم رهایی متناوب گردابهها رخ میدهد. با در نظر گرفتن مفروضات قبلی، مقدار عدد رینولدز بحرانی برای مسئله مورد مطالعه با ضریب انسداد مسیر ۱۲۵/۰ حدود ۵۵ محاسبه شده است. برای نشان دادن این موضوع، خطوط جریان برای 50 = Re 60 + هم مقایسه شده است. در قسمت ۲ اشاره گردید که مراجع [۴–۳] به ترتیب مقادیر ۵۴ و ۷۰ را برای رینولدز بحرانی ارائه کردهاند. شکل ۱۱ خطوط جریان برای 100 = Re را تا انتهای کانال نمایش میدهد. از آنجا که جریان در این حالت غیردائم است لذا شکل خطوط جریان در یک لحظه خاص، رسم شده است.





$$\frac{L_r}{D} = .0585 \text{ Re} - .058 , \qquad (1f)$$

کـه در انهـا،  $L_r$  طـول ناحيـه گردابـهای و Dقطـر سـيلندر میباشد.

دومین مشخصه از مشخصات جریان دائم حول سیلندر مربعی که در این قسمت محاسبه میشود، ضریب پسا، *C*، است. از نکات قابل توجه، نحوه محاسبه ضریب پسا در روش شبکه بولتزمن میباشد. در این روش، نیروی پسا از طریق روابط انتگرالی مرسوم مبتنی بر مکانیک محیطهای پیوسته بهدست نمیآید، بلکه با استفاده از تغییر مومنتوم ذرات مجازی روی مسیرهای مجاور دیواره مانع، نیروی وارد بر

دیواره بهدست آمده و سپس مؤلفه افقی نیروی وارد بر مانع توسط نیروی اینرسی جریان بی بعد می گردد. جزئیات بیشتر در خصوص نحوه محاسبه نیروهای وارد بر سطوح در روش شبکه بولتزمن در مرجع [۱۱] ارائه شده است.

در اعداد رینولدز کوچک، ضریب پسا تغییرات شدیدی از خود نشان میدهد. شکل **۱۴** تغییرات ضریب پسا برحسب عدد رینولدز را در محدوده Re ≤ 55 نشان میدهد. در این شکل، نتایج محاسبات به همراه نتایجی که توسط بروئر و همکاران (مبتنی بر روش حجم محدود با طول شبکه متغیر) ارائه شده، مقایسه گردیده است[۱۲]. شکل مزبور، وجود اختلاف محسوس بین این دو روش در اعداد رینولدز پایین تر و نزدیکی نتایج در اعداد رینولدز بالاتر را نشان میدهد. علت وجود اختلاف در نتایج محاسبه ضریب پسا در اعداد رینولدز پایین تر را می توان در یکی از مهم ترین محدودیت های روش شبكه بولتزمن جستجو كرد. اين محدوديت، عدم امكان ایجاد شبکهای با طول متغیر در روش شبکه بولتزمن میباشد که در قسمتهای ۲–۱ به آن اشاره شد. در اعداد رینولدز پایین تر، سهم نیروهای اصطکاکی در محاسبه نیروی پسا نسبت به نیروهای فشاری بیشتر است. بنابراین تغییـرات شدید سرعت درون لایه مرزی در جهت عمود بر سطح سیلندر، نقش عمدهای در محاسبه ضریب پسا ایفا می کند. با توجه به اینکه در روش حجم محدود امکان ایجاد شبکه با طول متغیر وجود دارد، لذا میتوان نتیجه گرفت با کاهش طول شبکه در نقاط نزدیک به جسم (درون لایه مرزی) نسبت به نقاط دور از جسم، روش حجم محدود در اعداد رینولدز پایین تر نتایج دقیق تری نسبت به روش شبکه بولتزمن پیشبینی نماید. با افزایش عدد رینولدز و افزایش سهم نیروهای فشاری در ضریب پسا این انحراف کاهش می یابد زیرا تغییرات فشار در جهت عمود بر سطح سیلندر در درون لایه مرزی محسوس نبوده و بنابراین شبکه محاسباتی با طول یکسان از این نظر انحرافی در نتایج محاسبات ايجاد نمى نمايد.

## ۴-۳- مشخصات جریان غیردائم

در این قسمت، نتایج محاسبات برای دو مشخصه از مشخصات جریان غیردائم حول مانع مربعی، ارائه می گردد.

<sup>1-</sup>Least Square Method

اين مشخصات شامل محاسبه تغييرات عدد استروهال (فرکانس بیبعد پدیده رهایی متناوب گردابهها) و ضریب پسا بر حسب عدد رینولدز میباشد. ضریب انسداد مسیر برابر ۰/۱۲۵ در نظر گرفته شده است.

شکل ۱۵ تغییرات عدد استروهال بر حسب عدد رینولدز را نشان میدهد. همان طور که در قسمت ۱ ذکر شد، عدد استروهال رفتار وابسته به زمان جریان را توصیف می-نماید. بهطور خاص در پدیده رهایی متناوب گردابهها، عـدد استروهال بهعنوان اندازه فركانس بي بعد اين پديده در نظر گرفته می شود. در شکل ۱۵-الف، نتایج محاسبات برای چهار نوع شبکه با ابعاد شبکه ای ۸۰×۴۲۰، ۱۶۰×۸۴۰، ۲۴۰×۱۲۶۰ و ۳۲۰ ×۱۶۸۰، ارائیه شده است. مقایسیه دو شبکه ریزتر و انطباق نتایج آنها بر یکدیگر، استقلال نتایج از شــبکه را نشــان مـــیدهــد. در شــکل **۱۵–ب** بــه منظــور اعتبارسنجی، نتایج مطالعه حاضر (برای شبکه ۳۲۰ ×۱۶۸) با نتایج نتایج دیگر محققان مقایسه شده است. در خصوص مطالعه میدان جریان حول مانع مربعی واقـع در یـک کانـال تاکنون مطالعات تجربی گستردهای صورت نگرفته است. بهعنوان نمونه مطالعه تجربى خاصى براى اين جريان با نسبت انسداد مسير B=1/8 وجود ندارد. مطالعات تجربي و عددی دیویس در مورد جریان حول مانع مربعی با نسبتهای انسداد  $\frac{1}{4}$  و  $\frac{1}{6} = \frac{1}{6}$  صورت گرفته، هر چند قسمت تجربی این نتایج در محدوده رینولدزهای مطالعه حاضر نمی گنج.د.  $B = \frac{1}{5}$  همچنین مطالعات عددی سوزوکی برای نسبت انسداد و بروئر برای نسبت انسداد  $B = \frac{1}{2}$ قابل ذکر هستند. نتایج عددی فوق بر اسـاس روش حجـم محـدود بـا شـبکهبنـدی غيريكنواخت حاصل شدهاست.

لازم بهذكر است براى محاسبه فركانس نوسانات جريان گردابهای از تحلیل رفتار نوسانی مؤلفه قائم سرعت در یک نقطه خاص در پایین دست سیلندر، استفاده شده است. چنانچه برای تعیین فرکانس نوسانات از نوسانات ضریب پسا و یا ضریب برآ نیز استفاده گردد، نتایج مشابهی حاصل خواهد شد.





ب): مقایسه نتایج دقیقترین شبکه با سایر مراجع شکل(۱۵): عدد استروهال برحسب عدد رینولدز.

اس نمبودار شبکل **۱۵-البف،** در محبدوده Re < 140 > 55 با افزایش عدد رینولدز، عدد استروهال نيز افزايش مي يابد. وقتى عدد رينولدز حدوداً به مقدار ١۴٠ میرسد، نمودار دارای یک نقطه ماکزیمم خواهد بود و بعد از آن عدد استروهال شروع به كاهش تدريجي مينمايد. علت این امر، تغییر مهمی است که در الگوی جریان رخ میدهـد. همانطورکه در قسمت ۴–۱ ذکر شد، در محدوده Re ≥ 130 نقطه جدایی جریان از لبه پشتی سیلندر به سمت لبه جلوبی حرکت کرده و بنابراین جریان های گردابهای با مقیاس کوچکتری در مجاورت لبه های جانبی شکل می گیرد. وقوع این پدیده موجب کند شدن رفتار نوسانی جریان پاییندست میشود.

از دیگر نکات قابل توجه در نمودار شکل ۱۳ این است که در محدوده Re ≤ 140 نتایج محاسبات برای هـر دو نوع شبکه ۸۰×۴۲۰ و ۱۶۰×۸۴۰ تطابق زیادی با نتایج

تحقیقات قبلی دارند، لیکن در رینولدزهای بالاتر نتایج محاسبات این دو نوع شبکه اختلاف محسوسی را نشان میدهند. به عبارت دیگر در محدوده Re  $\geq 140$  حساسیت نتایج محاسبات به نوع شبکهبندی بیشتر است. با توجه به نزدیکی نتایج محاسبات شبکه ۱۶۰×۸۴۰ و نتایج تحقیقات قبلی، می توان نتیجه گیری کرد که نتایج شبکه ۸۰×۴۲۰ در محدوده Re از دقت و اعتبار کافی برخوردار Re محدوده مح نمی باشند. علت تأثیرات قابل توجه نوع شبکه بندی بر نتایج مربوط به عدد استروهال در محدوده Re ≥ 140 را نیز می توان به تغییر الگوی جریان و نفوذ جریان های گردابه ای از لبه پشتی سیلندر به سمت لبه جلویی مربوط دانست. در این حالت، جریانهای گردابهای علاوه بر ناحیه پشت سیلندر در مجاورت دو وجه جانبی سیلندر مربعی شکل نیز وجود دارند و این امر لزوم تشکیل شبکه محاسباتی دقیقتر در نزدیکی سیلندر مربعی نسبت به نقاط دورتر را نشان میده. لیکن همان طور که در قسمت ۲-۱ ذکر شد روش شبکه بولتزمن قابلیت تشکیل این نوع از شبکهبندی را دارا نبوده و این امر یکی از مهمترین محدودیتهای این روش است. لذا بایستی دقت شبكهبندى كل حوزه محاسباتي بهطور يكسان افزوده گردد. همچنین نمودار شکل **۱۵-ب** انطباق قابل قبول نتایج مطالعه حاضر را با نتایج بروئر نشان میدهد. از دیگر نتایج شکل **۱۵-ب** میتوان به تأثیر تغییر نسبت انسداد بر تغییرات استروهال اشاره نمود. مقایسه عدد استروهال در نسبتهای انسداد مختلف نشان میدهد. بهطور کلی با افزایش نسبت انسداد مسیر عدد استروهال نیز افزایش مى يابد، يعنى با افزايش نسبت انسداد مسير سرعت نوسانات گردابهها افزایش می یابد.

از دیگر مشخصات جریان غیردائم که مورد بررسی قرار گرفته ضریب پسا میباشد. همان طور که در قسمت ۴-۱ اشاره گردید، در محدوده 55  $\ge$  Re الگوی جریان دائم حول سیلندر شکل می گیرد و به ازای یک عدد رینولدز خاص در جریان ورودی به کانال، مقدار ضریب پسا برحسب زمان ثابت خواهد بود. تغییرات ضریب پسا برحسب رینولدز در جریان دائم در نمودار شکل ۱۴ نشان داده شده است. در محدوده 55  $\le$  Re جریان غیردائم بوده و مقدار ضریب پسا نیز به ازای یک عدد رینولدز خاص در جریان بالادست،

به صورت نوسانی با زمان تغییر می نماید. نمونه ای از تغییر ات زمانی ضریب پسا در جریان Re = 150 در شکل **۶** نشان داده شده است. واضح است که در یک روش محاسباتی تکراری، لازم است محاسبات به تعداد کافی تکرار و سپس تغییرات آن کمیت بررسی گردد. همان طور که در این شکل ملاحظه می شود به دلیل تکراری بودن الگوریتم روش شبکه بولتزمن، در مراحل محاسباتی اولیه مقدار ضریب پسا دارای نوسانات زیادی بوده و پس از گذراندن مراحل محاسباتی قابل توجه (برای نمودار فوق حدوداً ۲۰۰٫۰۰۰ تکرار) مقدار ضریب پسا به مقادیر تناوبی خود همگرا می گردد.

به منظور بررسی تغییرات ضریب پسا برحسب تغییرات عدد رینولدز از مقدار میانگین این ضریب در یک دوره تناوب استفاده شده و نتایج آن در نمودار شکل **۱۷** ارائه شده است. در این نمودار، نتایج مطالعات بروئر و همکاران (مبتنی بر روش حجم محدود با طول شبکه متغیر) برای مقایسه ارائه شده است.



همانطور که در شکل **۱۷** ملاحظه می گردد نمودار در محدوده 130 ≥ Re دارای روند کاهشی می باشد که مربوط به اثرات ناشی از نازک شدن لایه مرزی می باشد. نمودار مزبور دارای یک نقطه کمینه در نقطه 130 ≈ Re می باشد و در رینولدزهای بزرگتر ضریب پسا افزایش خواهد یافت. علت این امر نیز مربوط به نفوذ نقطه جدایی جریان از لبه پشتی سیلندر به سمت لبه جلویی و در نتیجه افزایش محسوس مهم نیروی پسا فشاری در محاسبه ضریب پسا می باشد. همان طور که ملاحظه گردید پدیده نفوذ ناحیه جدایی به سمت لبه جلویی در محدوده 130 ≤ Re تأثیرات قابل توجهی بر مشخصه های جریان غیر دائم داشته و در تفسیر نمودار تغییرات عدد استروهال و ضریب پسا نقش عمده ای ایفا می کند.

## ۵- نتیجهگیری

در این مقاله، شبیهسازی جریان آرام حول مانع مربعی واقع در وسط یک کانال، با استفاده از روش شبکه بـولتزمن ارائـه شد. نتایج شبیهسازی عددی، مشـتمل بـر تعیـین الگوهـای مختلف جریان آرام حول مانع مربعی واقع در وسط یک کانال و تعیین مشخصههای این جریان مانند رسم خطوط جريان، محاسبه طول ناحيه گردابهاي، تعيين فركانس نوسانی یدیده رهایی متناوب گردابهها و در نهایت محاسبه ضريب يسا مي باشد. بر اساس نتايج محاسبات، ملاحظه می گردد الگوهای مختلف جریان حول مانع مربعی در یک کانال با نسبت انسداد مسیر ۱۲۵/۰ در محدوده 300 Re < شامل موارد ذیل می باشد: ۱- جریان دائم خزشی بدون هرگونه جدایی در محدوده  $\cdot \text{Re} \leq 1$ - پدیدہ جدایی جریان در  $\mathrm{Re} \geq 3$  و شکل گیری جریان دائم با گردابههای متقارن و ساکن در پشت سیلندر، ۳- پدیده رهایی متناوب گردابهها و رفتار غیردائم جریان در محدودہ Re ≥ 55 و ۴- نفوذ جریان های گردابه ای از ناحیه پشت سیلندر به . Re  $\geq 130$  سمت لبه جلویی در محدوده Re  $\geq 130$ نتایج محاسبات نشان مےدھد در الگوی جریان دائم با گردابههای متقارن و ساکن در پشت سیلندر در محدوده

Re < 55 که Re که با افزایش عدد رینولدز طول ناحیه گردابهای بهطور خطی افزایش مییابد.

یکی از مشخصههای مهم در الگوی جریان غیر دائم حول سیلندر مربعی واقع در یک کانال، تعیین عدد استروهال (فرکانس بیبعد پدیده جدایی متناوب گردابهها) برحسب عدد رینولدز میباشد. بر اساس نتایج محاسبات، با افزایش عدد رینولدز، روند تغییرات عدد استروهال در محدوده  $140 \le \text{Re} \le 300$  افزايشيے، و در محيدودہ Re  $\le 140$ کاهشی میباشد. همچنین تأثیر دقت شبکه محاسباتی بر نتایج مربوط به عدد استروهال در محدوده مى باشـد. Re  $\leq 140$  مى باشـد.  $140 \leq \text{Re} \leq 300$ محاسبه ضريب پسا بهعنوان يکی از مهمترين مشخصههای جریان حول سیلندر مربعی در یک کانال، از دیگر نتایج این تحقيق مى باشد. لازم بەذكر است با توجه به تغييرات نوسانى ضریب پسا در حالت غیر دائم، در این حالت میانگین ضریب پسا در طول یک دوره تناوب محاسبه شده است. بر اساس نتایج محاسبات، با افزایش عدد رینولدز، روند تغییرات ضریب یسا در محدوده Re ≤ 130 کاهشیے و در محدوده Re < 300 افزایشی میباشد. وجود تغییر رفتار در روند تغییرات عدد استروهال و ضریب پسا در محدوده Re < 140 کے 130 دا میتوان به تغییر الگوی جریان در این محدوده مربوط دانست. نفوذ جریان های گردابهای از ناحیه یشت سیلندر به سمت لبه جلویی علت اصلی این تغيير رفتار مىباشد.

#### مراجع

- 1. Franke, R. "Numerical Calculation of Unsteady Vortex Shedding Flow behind Cylinderical Bodies", Ph.D Dissertation, Faculty of Civil Engineering and Surveying, Univ. of Karlsruhe, 1991(In Dutch).
- Zdravkovich, M.M. "Flow around Circular Cylinders", Oxford Univ. Press, New York, 1997.
- Klekar, K.M. and Patankar, S.V. "Numerical Prediction of Vortex Shedding behind Square Cylinders", Int. J. Numerical Meth. Fluids, Vol. 14, No. 3, pp. 327-341, 1992.
- Okajima, A. "Strouhal Numbers of Rectangular Cylinders", J. Fluid Mech., Vol. 123, pp. 379-398, 1982.

Amplitude Process in Charged and Neural onecomponent System", Physical Review, Vol. 94, pp. 511-525, 1954.

- Zou, Q. and He, X. "On Pressure and Velocity Boundary Conditions for the Lattice Boltzmann BGK Model", Physics of Fluids, Vol. 9, No. 6, pp. 1591-1598, 1997.
- Mei, R., Yu, D., and Shyy, W. "Force Evaluation in the Lattice Boltzmann Method Involving Curved Geometry", Physical Review E, Vol. 65, No. 4, pp. 1-14, 2002.
- Breuer, M., Bernsdorf, J., Zeiser, T., and Durst, F. "Accurate Computations of Laminar Flow Past a Square Cylinder", J. Heat and Fluid Flow, Vol. 2, No. 2, pp.186-196, 2000.

- Williamson, C.H.K. "Vortex Dynamics in the Cylinder Wake", Ann. Rev. Fluid Mech, Vol. 28, pp. 447-539, 1996.
- 6. Frisch, U., Hasslacher, B., and Pomeau, Y. "Lattice-gas Automata for the Navier-Stokes Equation", Physical Review Lett., Vol. 56, No. 14, 1986.
- 7. Qian, Y.H., Humieres, D., and Lallemand, P. "Lattice BGK Models for Navier-Stokes Equation", Euro Physics. Lett., Vol. 17, No. 6, pp. 479-484, 1992.
- He, X. and Luo, L."A Priori Derivation of Lattice Boltzmann Equation", Physical Review, Vol. 55, No. 6, pp. 6333-6336, 1997.
- 9. Bhatnagar, P.L., Gross, E.P., and Krook, M.K. "A Model for Collision Process in Gases, I .Small