

شبیه‌سازی پدیده رهایی متناوب گردابه‌ها در یک جریان دوبعدی حول مانع مربعی در یک کانال، با استفاده از روش شبکه بولتزمن

میثم عبداللهی^۱ و غلامعلی عاطفی^۲

دانشکده مهندسی مکانیک

دانشگاه علم و صنعت ایران

(تاریخ دریافت: ۸۸/۱۰/۲۱؛ تاریخ پذیرش: ۸۹/۱۰/۱)

چکیده

در این مقاله، مدلی برای شبیه‌سازی جریان دوبعدی حول مانع مربعی واقع در یک کانال ارائه شده است. تاکنون عمده تحقیقات انجام شده در این خصوص بر جریانهای خارجی حول سیلندر دایروی متمرکز بوده و در زمینه جریان حول مانع مربعی و شناخت تأثیرات دیواره‌های کانال بر میدان جریان، مطالعات تجربی و عددی کافی صورت نگرفته است. نتایج اندک و پراکنده موجود لزوم مطالعه این نوع از جریان را نشان می‌دهد. در این تحقیق، بجای حل معادلات غیرخطی ناویر-استوکس، از روش شبکه بولتزمن استفاده شده است. این روش با روشهای مبتنی بر مکانیک محیطهای پیوسته دارای تفاوت‌های اساسی است. در این روش با استفاده از گسسته‌سازی معادله دیفرانسیلی بولتزمن و ارائه یک تعریف مجازی از ذرات سیال با جهات حرکت مشخص، نهایتاً الگوریتمی به دست می‌آید که مقادیر ماکروسکوپی جریان سیال را در تمام میدان جریان پیش‌بینی می‌نماید. نتایج شبیه‌سازی این مقاله شامل ارائه الگوهای مختلف جریان دو بعدی حول مانع مربعی، ارائه معادله‌ای برای تخمین طول ناحیه گردابه‌های ساکن، تعیین عدد رینولدز بحرانی (مربوط به آغاز پدیده رهایی متناوب گردابه‌ها)، تخمین فرکانس پدیده رهایی متناوب گردابه‌ها (عدد استروهل) و محاسبه ضریب پسا بر حسب عدد رینولدز می‌باشد. بر اساس این نتایج، در الگوی جریان دائم با گردابه‌های متقارن و ساکن در پشت سیلندر، با افزایش عدد رینولدز طول ناحیه گردابه‌ای به‌طور خطی افزایش می‌یابد. همچنین، در الگوی جریان غیردائم، نفوذ ناحیه جدایی از پشت سیلندر به سمت لبه جلویی تأثیرات قابل توجهی بر روند تغییرات عدد استروهل و ضریب پسا دارد.

واژه‌های کلیدی: روش شبکه بولتزمن، رهایی متناوب گردابه‌ها، عدد استروهل، عدد رینولدز

Simulation of Vortex Shedding Phenomenon in a 2-D Flow over a Squared Section Obstacle inside a Channel, Using Lattice Boltzmann Method

M. Abdollahi and Gh.A. Atefi

Mech. Eng. Dep't

Iran Sci. & Tech. Univ.

(Received: 11 Jan. 2010; Accepted: 22 Dec. 2010)

ABSTRACT

In this paper, a model for simulation of 2-D flow around a square obstacle inside a channel has been obtained. Most researches have concentrated on the external flow around circular cylinders, while there are few researches for flow around square obstacle considering channel wall effects. In this work, the Lattice-Boltzmann method is applied, instead of solving non-linear Navier-Stokes equations. This method has conceptual differences and in which an algorithm is obtained, using discretization of the Boltzmann differential equation and virtual definition of fluid particles. This algorithm can be used to compute the flow macroscopic flow quantities. Simulations include different 2-D flow patterns around a squared section obstacle, presentation of an equation estimating recirculation length, evaluation of critical Reynolds number (related to vortex shedding phenomena), estimation of vortex shedding frequency, and computation of drag coefficient as a function of Reynolds number.

Keywords: Lattice-Boltzmann Method, Vortex Shedding, Strouhal Number, Reynolds Number

۱- کارشناس ارشد (نویسنده پاسخگو): abdollahi_m@nigc.ir

۲- دانشیار

۱- مقدمه

جریان سیال حول سیلندر علیرغم هندسه ساده دارای پیچیدگی‌های خاصی می‌باشد. عمده این پیچیدگی‌ها مربوط به پدیده جدایی جریان، وقوع جریانهای گردابه‌ای و شکل‌گیری الگوی جریان غیردائم‌رهای متناوب گردابه‌ها در محدوده‌ای از اعداد رینولدز می‌باشد. تاکنون عمده تحقیقات انجام گرفته در این خصوص، بر جریان‌های خارجی حول سیلندر دایره شکل متمرکز بوده و در زمینه جریان حول مانع مربعی و شناخت تأثیرات دیواره‌های محدودکننده جریان، مطالعات کمی صورت گرفته است.

با تغییر عدد رینولدز جریان ورودی به کانال، رژیم‌های مختلف جریان در پایین دست سیلندر شکل می‌گیرد. فرانک [۱] در یک تقسیم‌بندی دقیق، هفت رژیم برای جریان خارجی حول سیلندر دایره‌ای شکل ارائه کرده است. سه رژیم ابتدائی در محدوده جریان آرام و بقیه شامل جریان‌هایی با اثرات ناشی از اغتشاش می‌باشند. در مطالعه حاضر، سه رژیم جریان آرام حول مانع مربعی واقع در یک کانال مورد توجه قرار گرفته است. شبیه‌سازی سایر رژیم‌های جریان، مستلزم ارائه شبیه‌سازی‌های سه‌بعدی خواهد بود.

سه رژیم جریان آرام حول مانع مربعی واقع در یک کانال شامل جریان دائم بدون جدائی (در محدوده $Re < 1$)، جریان دائم با گردابه‌های متقارن (در محدوده $1 \leq Re < Re_{cr}$) و جریان غیردائم به همراه پدیده‌های متناوب گردابه‌ها می‌باشد. در اعداد رینولدز خیلی کوچک، نیروهای ناشی از لزجت غالب بوده و هیچ‌گونه جدایی جریان در اطراف مانع رخ نمی‌دهد. با افزایش عدد رینولدز، جدایی جریان در لبه پشتی مانع صورت گرفته و یک ناحیه گردابه‌ای دائم شامل دو گردابه متقارن در پشت مانع به وجود می‌آید. با افزایش عدد رینولدز، اندازه طول ناحیه گردابه‌ای افزایش می‌یابد. وقتی عدد رینولدز به مقدار بحرانی خود می‌رسد، ناگهان یک تغییر کامل در الگوی جریان به وجود می‌آید. یکی از گردابه‌های پشت سیلندر، بزرگ و بزرگتر شده و از حالت سکون خارج و همراه با جریان سیال به سمت پایین دست به حرکت در می‌آید. این اتفاق با یک تأخیر زمانی عینا برای گردابه دوم نیز تکرار می‌شود. سپس در جریان پشت سیلندر، گردابه‌های جدیدی به صورت تناوبی تشکیل شده و با

جریان سیال به سمت پایین دست رها می‌شوند. مسیر تشکیل شده از حرکت این گردابه‌ها را «مسیر گردابه‌ای فون کارمن»^۱ می‌نامند. برای مقدار عدد رینولدز بحرانی در جریان‌های خارجی، مقادیر مختلفی پیشنهاد شده است. زدراکوویچ^۲ [۲] عدد رینولدز بحرانی در جریان خارجی حول سیلندر دایره‌ای شکل را حدود ۴۰ پیش‌بینی نمود. در مراجع [۳-۴] این مقدار برای جریان خارجی حول مانع مربعی، به ترتیب حدود ۵۴ و ۷۰ پیش‌بینی شده است.

همان‌طور که اشاره شد، با شروع اثرات ناشی از جریان‌های مغشوش، جریان دارای ماهیتی سه‌بعدی خواهد شد و در نتیجه شبیه‌سازی این نوع جریان در محدوده مطالعه حاضر نمی‌گنجد. ویلیامسون^۳ [۵] برای آغاز جریان‌های سه‌بعدی حول سیلندر دایره شکل عدد ۱۸۰ را پیشنهاد نمود. همچنین در مرجع [۱] محدوده تقریبی $Re < 300$ برای جریان دوبعدی حول سیلندر ارائه گردیده است. مقدار دقیقی برای آغاز جریان‌های سه‌بعدی حول مانع مربعی ارائه نشده است. در مطالعه حاضر، عدد ۳۰۰ به عنوان حد بالای عدد رینولدز در شبیه‌سازی جریان آرام در نظر گرفته شده است.

در شبیه‌سازی جریان حول مانع مربعی واقع در یک کانال، علاوه بر پارامترهای جریان خارجی حول مانع مربعی، می‌بایست دو پارامتر دیگر را نیز در نظر گرفت. این دو پارامتر، نسبت انسداد مسیر و پروفیل سرعت در بالادست سیلندر می‌باشند. نسبت انسداد مسیر عدد بی‌بعدی است که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$B = \frac{D}{H}, \quad (1)$$

که در آن، D اندازه ضلع مانع مربعی و H عرض کانال می‌باشد.

در مطالعه حاضر، با توجه به آرام بودن جریان، پروفیل سرعت در بالادست مانع به صورت سهمی درجه دو در نظر گرفته شده است. لازم به ذکر است در این مطالعه، سرعت بیشینه پروفیل سهمی گون، مبنای محاسبه اعداد بدون بعد

1- Von Karman Vortex Street

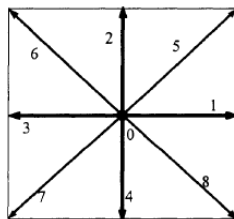
2- Zdravkovich

3- Williamson

- تمام برخوردها به صورت همزمان صورت می‌پذیرند و
- هر برخورد فقط توزیع ذرات در گره‌های مجاور را تحت تأثیر قرار می‌دهد.

به بیان دیگر، الگوریتم این دو روش، موضعی و محلی است. این موضوع منجر به یکی از مهم‌ترین مزیت‌های این دو روش می‌شود. کمیات ماکروسکوپی در این دو روش به صورت محلی محاسبه می‌شود.

مهم‌ترین شبکه دوبعدی که اغلب در مختصات کارتزین دوبعدی مورد استفاده قرار می‌گیرد، شبکه D_2Q_9 می‌باشد که توسط کیان^۲ و همکاران [۷] معرفی شده است. نمونه‌ای از این شبکه به همراه مقادیر بردار یگه سرعت در شکل ۱ نشان داده شده است. در این شبکه، سرعت ذراتی که در مسیرهای قطری حرکت می‌کنند $\sqrt{2}$ برابر سرعت ذراتی است که در مسیرهای اصلی حرکت می‌کنند.



$$\vec{v}_i = \begin{cases} (0,0) & \dots \dots \dots i=0 \\ \left[\cos\left(\frac{i-1}{2}\pi\right), \sin\left(\frac{i-1}{2}\pi\right) \right] c & \dots \dots \dots i=1,2,3,4 \\ \sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{i-5}{2} + \frac{1}{4}\right)\pi, \sin\left(\frac{i-5}{2} + \frac{1}{4}\right)\pi \right] c & \dots \dots \dots i=5,6,7,8 \end{cases}$$

شکل (۱): جهات و مقادیر بردارهای یگه سرعت در شبکه D_2Q_9 .

۲-۲- الگوریتم روش‌های شبکه گاز و بولتزمن

شبیه‌سازی جریان به کمک روش‌های شبکه گاز و بولتزمن یک فرآیند تکراری است. الگوریتم این دو روش از سه مرحله اصلی شکل می‌گیرد. این مراحل برای یک شبکه D_2Q_9 به شرح ذیل می‌باشد:

۱- مرحله انتشار^۳: در هر مرحله زمانی، ذرات در راستای یکی از هشت مسیر ممکن از یک گره به گره‌های مجاور حرکت می‌کنند (شکل ۲)،

قرار گرفته است. این اعداد بی‌بعد، عدد رینولدزو عدد استروهمال می‌باشند که توسط روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$Re = \frac{U \cdot D}{\nu}, \quad (2)$$

$$St = \frac{f \cdot D}{U}, \quad (3)$$

که در آنها، f فرکانس نوسانات جریان، U سرعت بیشینه پروفیل سرعت در بالادست، و ν لزجت سینماتیکی جریان می‌باشد. لازم به ذکر است عدد استروهمال در پدیده‌های متناوب گردابه‌ها، به عنوان اندازه فرکانس بی‌بعد این پدیده در نظر گرفته می‌شود. در واقع عدد استروهمال، رفتار وابسته به زمان این پدیده را توصیف می‌نماید.

۲- معرفی روش شبکه بولتزمن

روش نسبتاً جدید شبکه بولتزمن، شکل بهبود یافته روش خودکار شبکه گاز^۱ می‌باشد. روش شبکه بولتزمن دارای تفاوت‌های اساسی نسبت به روش‌های مبتنی بر مکانیک محیط‌های پیوسته می‌باشد. این روش، مبتنی بر یک تعریف مجازی از ذرات منفرد سیال بوده و مدل‌هایی از برخورد ذرات مجازی بر روی یک شبکه منظم را ارائه می‌دهد. نوع ذرات و قواعد برخورد آنها، در سطح میکروسکوپی منطبق بر واقعیات فیزیکی نمی‌باشد ولی ثابت شده است که الگوریتم‌های حاصل از این روش در سطح ماکروسکوپی و مخصوصاً در جریان تراکم‌ناپذیر، منجر به ارضاء معادلات بقاء جرم و مومنتوم می‌گردد [۶].

۲-۱- نحوه شبکه‌بندی

تاکنون شبکه‌های مختلفی در روش‌های شبکه گاز و بولتزمن به کار رفته است، لیکن موارد ذیل در تمام مدل‌ها، مشترک می‌باشد:

- طول ابعاد شبکه در تمام حوزه مورد مطالعه، یکسان است،
- ذرات مجازی فقط روی مسیرهای شبکه حرکت می‌نمایند،
- در هر لحظه در روی هر مسیر فقط یک ذره مجاز به حرکت می‌باشد،
- برخوردها فقط در مراکز شبکه، یعنی در گره‌ها، رخ می‌دهند،

مقادیر ماکروسکوپی میانگین به صورت آهسته تری صورت گیرد. میانگین گیری با شرایط مذکور، دیگر خاصیت محلی بودن خواص را نخواهد داشت. در روش شبکه بولتزن ضمن حفظ مزایای روش شبکه گاز این نقطه ضعف برطرف می گردد. کبان و همکاران روش شبکه بولتزن را به عنوان روشی مؤثرتر برای شبیه سازی جریان سیال پیشنهاد کردند [۷]. در این روش برخلاف روش شبکه گاز، به جای استفاده از ذراتی با وضعیت باینری، از توابع توزیع دانسیته استفاده می گردد. مقدار این تابع در هر گره، احتمال وجود ذراتی را که در یکی از جهات معین می توانند حرکت کنند، نشان می دهد. مقدار این تابع عددی بین صفر و ۱ خواهد بود. بر اساس مطالب فوق الذکر، در روش شبکه بولتزن بدون نیاز به میانگین گیری روی تعدادی از گره ها، مقادیر ماکروسکوپی در هر مرحله محاسباتی به صورت آهسته تغییر خواهد کرد.

۲-۴- معادلات روش شبکه بولتزن

معادله پیوسته بولتزن، معادله ای است که حرکت و برهم کنش ذرات سیال را توصیف می کند. معادلات مربوط به الگوریتم روش شبکه بولتزن، در واقع شکل گسسته معادله پیوسته بولتزن می باشد [۸]. این معادلات برای مراحل مختلف الگوریتم روش شبکه بولتزن به قرار زیر است:

۱- مرحله برخورد

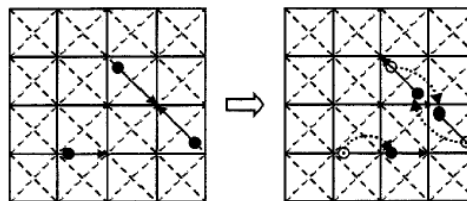
$$f_i(\vec{x}, t+1) = f_i(\vec{x}, t) + \Omega_i(\vec{x}, t), \quad (4)$$

که در آن، $f_i(\vec{x}, t)$ تابع توزیع دانسیته در جهت i ، بردار \vec{x} موقعیت ذره، t زمان و $\Omega_i(\vec{x}, t)$ اپراتور برخورد می باشد. لازم به ذکر است اندیس i مربوط به جهت مسیرهای شبکه است که در شبکه D_2Q_9 اعداد صحیح بین صفر و ۹ را به خود اختصاص می دهد.

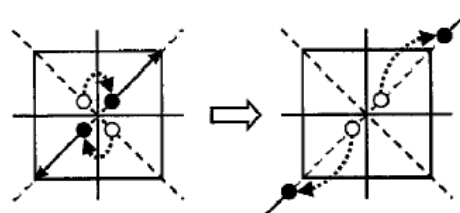
۲- مرحله انتشار

$$f_i(\vec{x} + \vec{e}_i, t+1) = f_i(\vec{x}, t+1), \quad (5)$$

که در آن، e_i بردار یگه سرعت در جهت i و بقیه پارامترها همان تعاریف مربوط به معادله ۲ را دارند. مقادیر بردار یکه سرعت در یک شبکه D_2Q_9 در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل (۲): مرحله انتشار.



شکل (۳): مرحله برخورد.

۲- مرحله برخورد^۱: در گره هایی که تعدادی از ذرات به هم می رسند، برخورد اتفاق می افتد. ذرات در این برخورد، تبادل مومنتوم انجام می دهند؛ به طوری که جرم و مومنتوم کل در هر واحد شبکه ثابت بماند. برهم کنش بین ذرات محلی است. چون هر برخورد فقط روی آرایش گره های مجاور تأثیر دارد (شکل ۳) و

۳- محاسبه مقادیر ماکروسکوپی: پس از دو مرحله فوق، با استفاده از توزیع جدید ذرات در هر گره، مرحله انتقال از فضای مجازی ذرات منفرد به فضای ماکروسکوپی صورت می گیرد. این مرحله، معادل ساده شده قوانین آماری است که در ترمودینامیک آماری برای محاسبه خواص ماکروسکوپی بر حسب خواص میکروسکوپی استفاده می گردد.

۲-۳- تفاوت روش شبکه بولتزن با روش شبکه گاز

در روش شبکه گاز وضعیت ذرات در هر گره به صورت باینری^۲ است. یعنی در یک گره خاص یا ذره وجود دارد و یا ندارد. بدین ترتیب این روش در مرحله محاسبه مقادیر ماکروسکوپی دچار یک سری اغتشاشات آماری^۳ می گردد که برای رفع آن بایستی میانگین گیری مقادیر ماکروسکوپی روی منطقه ای از گره ها انجام شود تا تغییرات

- 1- Collision
- 2- Binary
- 3- Statistical Noise

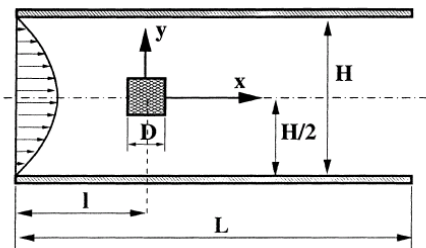
- حدس مقدار اولیه تابع توزیع دانسیته در تمام گره‌ها،
 - محاسبه مقادیر ماکروسکوپی در تمام گره‌ها،
 - محاسبه مقادیر تابع توزیع تعادلی در تمام گره‌ها،
 - محاسبه مقادیر جدید تابع توزیع دانسیته (پس از مراحل برخورد و انتشار) در تمام گره‌ها و
 - اعمال شرایط مرزی.
- حلقه محاسباتی فوق‌الذکر تا محاسبه مقادیر نهایی کمیات ماکروسکوپی میدان جریان تکرار خواهد شد.

۳- مشخصات مسئله مورد مطالعه

در این بخش مشخصات هندسی و شرایط مرزی مسئله مورد مطالعه بیان می‌شود.

۳-۱- مشخصات هندسی و نحوه شبکه‌بندی

شکل ۶ هندسه حوزه محاسباتی مورد مطالعه را نشان می‌دهد. نسبت انسداد مسیر در مسئله اصلی، $B=1/8$ ، می‌باشد. به منظور کاهش تأثیر شرایط مرزی ورودی و خروجی بر حل میدان جریان، نسبت طول کانال به طول مانع، برابر ۴۲ قرار داده شده است ($L/D=42$).



شکل (۴): مشخصات هندسی جریان.

طول ورودی جریان (فاصله لبه جلویی سیلندر مربعی از ورودی کانال) برابر $\frac{L}{3}$ در نظر گرفته شده است.

جدول ۱، مشخصات شبکه‌های مورد استفاده در حل عددی این جریان را مشخص می‌نماید. در این جدول از چهار نوع شبکه به‌منظور دستیابی به دقت بهتر استفاده شده است. تعداد نقاط شبکه روی هر ضلع مانع مربعی از ۱۰ تا ۴۰ نقطه است که در نتیجه طول واحد شبکه بر حسب ابعاد سیلندر بین $\frac{D}{10}$ تا $\frac{D}{40}$ خواهد بود.

۳- محاسبه مقادیر ماکروسکوپی

مقادیر خواص ماکروسکوپی جریان مانند دانسیته و بردار سرعت در هر گره با استفاده از مقادیر تابع توزیع دانسیته در همان گره به‌صورت زیر قابل محاسبه می‌باشد:

$$\rho(\bar{x}, t) = \sum_i f_i(\bar{x}, t), \quad (۶)$$

$$\bar{u}(\bar{x}, t) = \frac{\sum_i e_i f_i(\bar{x}, t)}{\rho(\bar{x}, t)}, \quad (۷)$$

که در آن، $\rho(\bar{x}, t)$ و $\bar{u}(\bar{x}, t)$ به ترتیب مقادیر دانسیته و سرعت جریان در مکان x و زمان t می‌باشد.

یکی از مسائل مهم در روش شبکه بولتزمن، ارائه رابطه‌ای برای اپراتور برخورد، Ω_i ، می‌باشد. مطرح‌ترین معادله برای اپراتور برخورد تقریبی موسوم به BGK است که در ابتدا برای توصیف برخورد ذرات در گازهای رقیق ارائه شد [۹]. این معادله توسط کیان و همکاران، در توسعه روش شبکه بولتزمن مورد استفاده قرار گرفت [۷]:

$$\Omega_i = \frac{f_i(\bar{x}, t) - f_i^{eq}(\bar{x}, t)}{\tau}, \quad (۸)$$

که در آن، f_i^{eq} تابع توزیع تعادلی و τ زمان استراحت بدون بعد است. مقادیر این دو پارامتر، برحسب مقادیر ماکروسکوپی به‌صورت زیر قابل محاسبه می‌باشد:

$$f_i^{eq} = w_i \rho \left[1 + 3e_i \cdot \bar{u} + \frac{9}{2} (e_i \cdot \bar{u})^2 - \frac{3}{2} (\bar{u} \cdot \bar{u}) \right], \quad (۹)$$

که در آن، w_i ضریبی است که مقادیر آن برای شبکه D_2Q_9 به‌قرار زیر است:

$$w_i = \begin{cases} 4/9 & i=0 \\ 1/9 & i=1, \dots, 4 \\ 1/36 & i=5, \dots, 8 \end{cases}. \quad (۱۰)$$

همان‌طور که ملاحظه می‌گردد، مقادیر f_i^{eq} در هر گره، برحسب مقادیر ماکروسکوپی همان گره محاسبه می‌شود. زمان استراحت بدون بعد، τ ، بر حسب لزجت سیال و طبق رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\tau = 3\nu + \frac{1}{2}, \quad (۱۱)$$

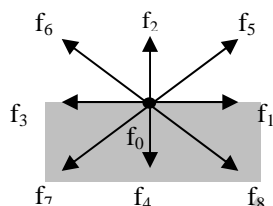
که در آن، ν لزجت سینماتیکی جریان می‌باشد. با کنار هم قرار دادن روابط (۱۱-۴)، یک حلقه محاسباتی جهت محاسبه مقادیر ماکروسکوپی جریان در تمام گره‌ها به‌دست می‌آید. این حلقه محاسباتی شامل موارد زیر می‌باشد:

ماکروسکوپی جریان در مقطع ورودی، پروفیل سرعت جریان (به عنوان شرط مرزی ماکروسکوپی) معلوم و مقدار فشار (دانسیته) جریان مجهول می‌باشد.

مرسوم‌ترین روش برای به دست آوردن این چهار پارامتر مجهول در مقطع ورودی، استفاده از روشی است که توسط زو و هی^۲ [۱۰] ارائه شده است. در این روش از یک معادله بقای جرم (معادله ۶)، دو معادله بقای مومنتوم (معادله ۷) و همچنین از یک معادله اضافه زیر، برای به دست آوردن چهار پارامتر مجهول استفاده می‌شود:

$$f_1 - f_1^{eq} = f_3 - f_3^{eq}. \quad (13)$$

روش به دست آوردن مقادیر توابع توزیع مجهول در مقطع خروجی (f_3 ، f_6 و f_7) مشابه به دست آوردن این مقادیر در مقطع ورودی است، با این تفاوت که در مطالعه حاضر در مقطع خروجی، مقدار سرعت جریان، مجهول و مقدار فشار (دانسیته) جریان، به عنوان شرط مرزی ماکروسکوپی معلوم می‌باشد.



شکل (۵): توابع توزیع در دیواره پایینی کانال.



شکل (۶): توابع توزیع مجهول در مقاطع ورودی و خروجی کانال.

۴- نتایج

در این قسمت نتایج محاسبات شبیه‌سازی جریان حول سیلندر مربعی واقع در یک کانال با شرایط ذکر شده در قسمت قبلی و در محدوده $Re \leq 300$ ارائه شده است. همان‌طور که اشاره شد، سرعت بیشینه پروفیل سهمی‌گون، مبنای محاسبه اعداد بدون بعد قرار گرفته است. در این

جدول (۱): نحوه شبکه‌بندی.

ابعاد شبکه در کل میدان جریان	ابعاد شبکه روی سیلندر	واحد شبکه بر حسب ابعاد سیلندر
۴۲۰×۸۰	۱۰×۱۰	0.1D
۸۴۰×۱۶۰	۲۰×۲۰	0.05D
۱۲۶۰×۲۴۰	۳۰×۳۰	0.033D
۱۶۸۰×۳۲۰	۴۰×۴۰	0.025D

۳-۲- شرایط مرزی

در این قسمت شرایط مرزی در دیواره‌ها و همچنین در ورودی و خروجی کانال بیان می‌شود.

۳-۲-۱- شرط مرزی دیواره‌ها

مرسوم‌ترین روشی که تاکنون برای جایگزینی شرط عدم لغزش در روش شبکه بولتزمن بکار رفته است، شرط مرزی موسوم به «پرش به عقب»^۱ می‌باشد. شکل ۵، جهات توابع توزیع دانسیته را در نقطه‌ای روی دیواره پایین یک کانال نشان می‌دهد. با توجه به این شکل و با در نظر گرفتن معادله مربوط به مرحله انتشار، می‌توان نتیجه‌گیری کرد که در هر مرحله محاسباتی، سه تابع توزیع f_2 ، f_5 و f_6 مجهول باقی خواهند ماند.

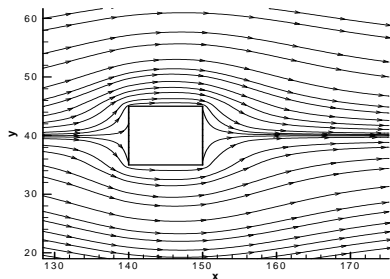
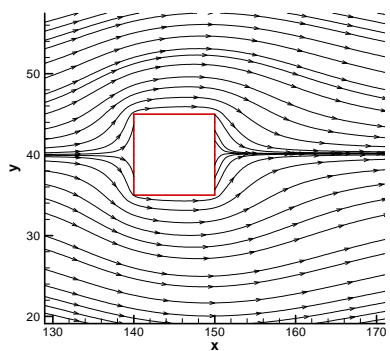
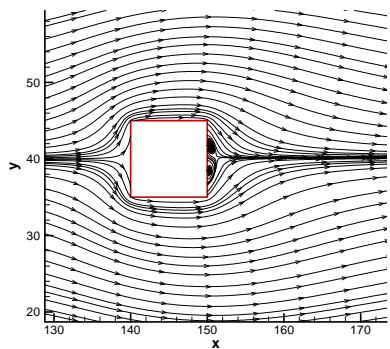
طبق شرط مرزی «پرش به عقب» این توابع توزیع مجهول، در هر مرحله محاسباتی از توابع توزیع معلومی که در خلاف جهت آنها می‌باشد، به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} f_2 &= f_4, \\ f_5 &= f_7, \\ f_6 &= f_8. \end{aligned} \quad (12)$$

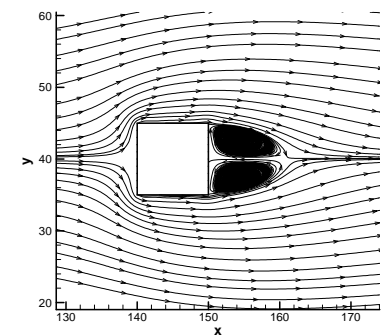
در مطالعه حاضر نیز از این نوع شرط مرزی در دیواره‌ها استفاده شده است.

۳-۲-۲- شرایط مرزی در ورودی و خروجی کانال

شکل ۶، جهات توابع توزیع را مقاطع ورودی و خروجی یک کانال نشان می‌دهد. با توجه شکل فوق و با در نظر گرفتن معادله مربوط به مرحله انتشار، می‌توان نتیجه‌گیری کرد که در هر مرحله محاسباتی در مقطع ورودی، سه تابع توزیع، f_1 ، f_5 و f_8 مجهول خواهند بود. از میان مقادیر

شکل (۷): خطوط جریان در $Re = 1$.الف) $Re = 2.5$ ب) $Re = 3.5$

شکل (۸): مقایسه خطوط جریان در

 $Re = 3.5$ و $Re = 2.5$ شکل (۹): خطوط جریان در $Re = 20$.

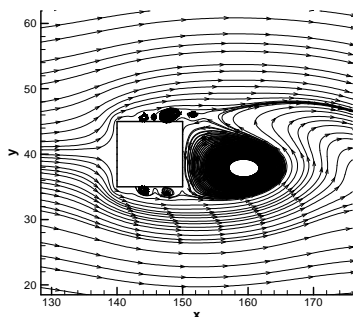
قسمت، ابتدا خطوط جریان در رژیم‌های مختلف جریان دوبعدی (در اعداد رینولدز مختلف) در مسئله اصلی ترسیم شده آنگاه مشخصه‌های مختلف جریان در حالات دائم و غیر دائم به دست آمده و با نتایج سایر محققان مقایسه شده است.

۴-۱- رژیم‌های مختلف جریان

شکل‌های ۷-۱۲ خطوط جریان حاصل از نتایج محاسبات را برای چند عدد رینولدز مختلف نشان می‌دهد. شکل‌های مزبور با استفاده از نرم‌افزار تک‌پلات و براساس بخشی از خروجی‌های نرم‌افزار این مقاله (مؤلفه‌های افقی و عمودی سرعت)، به دست آمده است. رژیم‌های جریان آرام حول سیلندر یا مانع برحسب عدد رینولدز در مقدمه معرفی گردید. شکل ۷ جریان در $Re = 1$ را نشان می‌دهد. همان‌طور که انتظار می‌رفت در این حالت، به دلیل غالب بودن نیروهای لزجی، جریان دائم بدون هرگونه جدایی، شکل خواهد گرفت.

با افزایش عدد رینولدز جدایی جریان در ناحیه پشت مانع رخ می‌دهد. نتایج محاسبات، شروع پدیده جدایی و تشکیل گردابه‌های ساکن را برای مسئله مورد مطالعه، در $Re \approx 3$ پیش‌بینی می‌نماید. برای نشان دادن این موضوع، خطوط جریان برای $Re = 2.5$ و $Re = 3.5$ در شکل ۸ با هم مقایسه شده است.

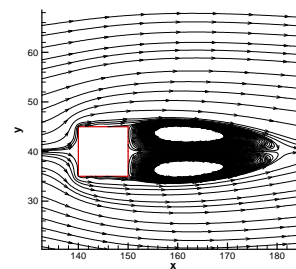
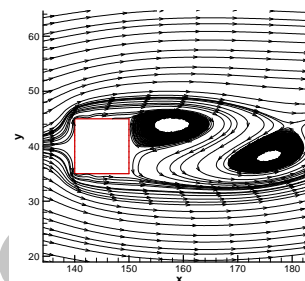
زدراو کوویچ [۲] در مشاهدات تجربی خود، این مقدار را برای سیلندر دایره شکل در جریان آزاد به صورت $Re = 4.4$ ارائه نموده است. همان‌طور که مشاهده می‌گردد این مقدار برای مانع مربعی کوچکتر از مقدار متناظر برای جریان حول سیلندر دایروی است. علت کوچکتر بودن این مقدار در جریان حول مانع مربعی را می‌توان به وجود لبه‌های تیز در این مسئله مرتبط نمود که موجب می‌شود پدیده جدایی در رینولدزهای پایین‌تر نسبت به جریان حول سیلندر دایره شکل رخ دهد. در این حالت، دو ناحیه گردابه‌ای متقارن در پشت سیلندر به وجود می‌آید. خطوط جریان دائم مربوط به این حالت در شکل ۹ برای $Re = 20$ نمایش داده شده است.

شکل (۱۲): خطوط جریان در $Re = 200$.

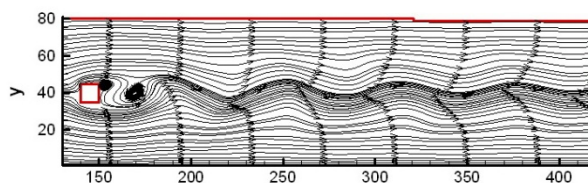
شکل ۱۲ خطوط جریان برای $Re = 200$ را در یک لحظه خاص، نشان می‌دهد. در این حالت نیز مانند حالت قبل، پدیده غیردائم‌رهایی متناوب گردابه‌ها رخ می‌دهد. از مقایسه شکل‌های ۱۰-۹ مشخص می‌گردد که در جریان با $Re = 200$ ، علاوه بر جریان‌های گردابه‌ای پشت سیلندر، جریان‌های گردابه‌ای با مقیاس کوچکتری در مجاورت لبه‌های جانبی سیلندر شکل خواهد گرفت. به عبارت دیگر ناحیه جدایی از پشت سیلندر به سمت لبه جلویی نفوذ می‌کند. بر اساس نتایج محاسبات، پدیده نفوذ ناحیه جدایی به سمت لبه جلویی را می‌توان در محدوده $Re \geq 130$ مشاهده نمود. این پدیده تأثیرات قابل توجهی بر مشخصه‌های جریان می‌گذارد که در قسمت‌های بعدی به آن پرداخته خواهد شد.

۴-۲- مشخصات جریان دائم

در این قسمت، نتایج محاسبات برای دو مشخصه از مشخصات جریان دائم حول مانع مربعی، ارائه می‌گردد. این مشخصات شامل تغییرات طول ناحیه گردابه‌ای پشت سیلندر و ضریب پسا برحسب عدد رینولدز می‌باشد. ضریب انسداد مسیر برابر 0.125 در نظر گرفته شده است. شکل ۱۳ نتایج محاسبات مربوط به تغییرات طول ناحیه گردابه‌ای (جریان دائم با گردابه‌های متقارن-شکل ۹) برحسب عدد رینولدز را نشان می‌دهد. محاسبات مذکور افزایش خطی طول ناحیه گردابه‌ای برحسب افزایش عدد رینولدز را تایید می‌کند. مقایسه شکل‌های ۸-ب، ۹، و ۱۰-الف نیز نتیجه فوق‌الذکر را به صورت کیفی نشان می‌دهند.

الف) خطوط جریان در $Re = 50$.ب) خطوط جریان در $Re = 60$.شکل (۱۰): مقایسه خطوط جریان در $Re = 50$ و $Re = 60$.

وقتی مقدار عدد رینولدز جریان بالادست، به مقدار عدد رینولدز بحرانی می‌رسد، پدیده غیردائم‌رهایی متناوب گردابه‌ها رخ می‌دهد. با در نظر گرفتن مفروضات قبلی، مقدار عدد رینولدز بحرانی برای مسئله مورد مطالعه با ضریب انسداد مسیر 0.125 حدود 55 محاسبه شده است. برای نشان دادن این موضوع، خطوط جریان برای $Re = 50$ و $Re = 60$ در شکل ۱۰ با هم مقایسه شده است. در قسمت ۱ اشاره گردید که مراجع [۳-۴] به ترتیب مقادیر 54 و 70 را برای رینولدز بحرانی ارائه کرده‌اند. شکل ۱۱ خطوط جریان برای $Re = 100$ را تا انتهای کانال نمایش می‌دهد. از آنجا که جریان در این حالت غیردائم است لذا شکل خطوط جریان در یک لحظه خاص، رسم شده است.

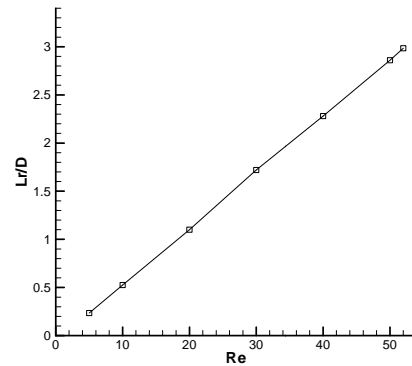
شکل (۱۱): خطوط جریان در $Re = 100$.

دیواره به‌دست آمده و سپس مؤلفه افقی نیروی وارد بر مانع توسط نیروی اینرسی جریان بی‌بعد می‌گردد. جزئیات بیشتر در خصوص نحوه محاسبه نیروهای وارد بر سطوح در روش شبکه بولتزمن در مرجع [۱۱] ارائه شده است.

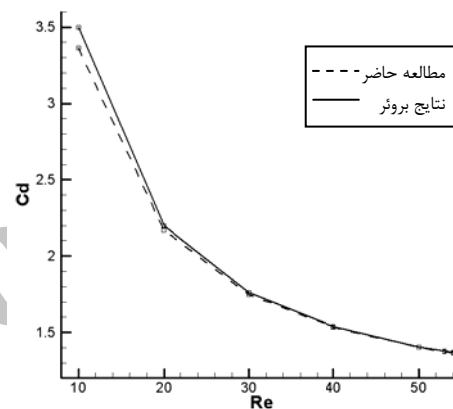
در اعداد رینولدز کوچک، ضریب پسا تغییرات شدیدی از خود نشان می‌دهد. شکل ۱۴ تغییرات ضریب پسا برحسب عدد رینولدز را در محدوده $Re \leq 55$ نشان می‌دهد. در این شکل، نتایج محاسبات به همراه نتایجی که توسط بروئر و همکاران (مبتنی بر روش حجم محدود با طول شبکه متغیر) ارائه شده، مقایسه گردیده است [۱۲]. شکل مزبور، وجود اختلاف محسوس بین این دو روش در اعداد رینولدز پایین‌تر و نزدیکی نتایج در اعداد رینولدز بالاتر را نشان می‌دهد. علت وجود اختلاف در نتایج محاسبه ضریب پسا در اعداد رینولدز پایین‌تر را می‌توان در یکی از مهم‌ترین محدودیت‌های روش شبکه بولتزمن جستجو کرد. این محدودیت، عدم امکان ایجاد شبکه‌ای با طول متغیر در روش شبکه بولتزمن می‌باشد که در قسمت‌های ۱-۲ به آن اشاره شد. در اعداد رینولدز پایین‌تر، سهم نیروهای اصطکاکی در محاسبه نیروی پسا نسبت به نیروهای فشاری بیشتر است. بنابراین تغییرات شدید سرعت درون لایه مرزی در جهت عمود بر سطح سیلندر، نقش عمده‌ای در محاسبه ضریب پسا ایفا می‌کند. با توجه به اینکه در روش حجم محدود امکان ایجاد شبکه با طول متغیر وجود دارد، لذا می‌توان نتیجه گرفت با کاهش طول شبکه در نقاط نزدیک به جسم (درون لایه مرزی) نسبت به نقاط دور از جسم، روش حجم محدود در اعداد رینولدز پایین‌تر نتایج دقیق‌تری نسبت به روش شبکه بولتزمن پیش‌بینی نماید. با افزایش عدد رینولدز و افزایش سهم نیروهای فشاری در ضریب پسا این انحراف کاهش می‌یابد زیرا تغییرات فشار در جهت عمود بر سطح سیلندر در درون لایه مرزی محسوس نبوده و بنابراین شبکه محاسباتی با طول یکسان از این نظر انحرافی در نتایج محاسبات ایجاد نمی‌نماید.

۴-۳- مشخصات جریان غیردائم

در این قسمت، نتایج محاسبات برای دو مشخصه از مشخصات جریان غیردائم حول مانع مربعی، ارائه می‌گردد.



شکل (۱۳): طول ناحیه گردابه‌ای برحسب عدد رینولدز در جریان دائم.



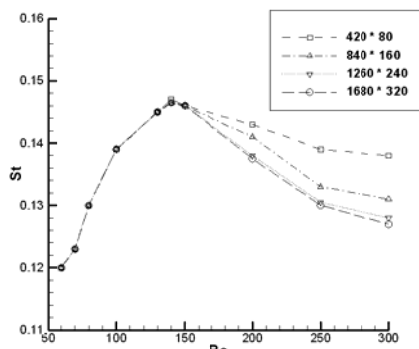
شکل (۱۴): ضریب پسا برحسب عدد رینولدز در جریان دائم.

رابطه خطی زیر بر اساس نتایج محاسبات و با استفاده از روش عددی کمینه‌به‌دست آمده است:

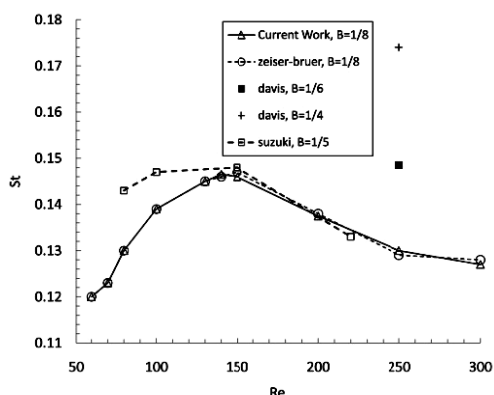
$$3 \leq Re \leq 55, \quad \frac{L_r}{D} = .0585 Re - .058, \quad (14)$$

که در آنها، L_r طول ناحیه گردابه‌ای و D قطر سیلندر می‌باشد.

دومین مشخصه از مشخصات جریان دائم حول سیلندر مربعی که در این قسمت محاسبه می‌شود، ضریب پسا، C_d ، است. از نکات قابل توجه، نحوه محاسبه ضریب پسا در روش شبکه بولتزمن می‌باشد. در این روش، نیروی پسا از طریق روابط انتگرالی مرسوم مبتنی بر مکانیک محیط‌های پیوسته به‌دست نمی‌آید، بلکه با استفاده از تغییر مومنوم ذرات مجازی روی مسیرهای مجاور دیواره مانع، نیروی وارد بر



الف): دستیابی به نتایج مستقل از شبکه.



ب): مقایسه نتایج دقیق‌ترین شبکه با سایر مراجع شکل (۱۵): عدد استروهمال بر حسب عدد رینولدز.

بر اساس نمودار شکل ۱۵-الف، در محدوده $55 \leq Re \leq 140$ با افزایش عدد رینولدز، عدد استروهمال نیز افزایش می‌یابد. وقتی عدد رینولدز حدوداً به مقدار ۱۴۰ می‌رسد، نمودار دارای یک نقطه ماکزیمم خواهد بود و بعد از آن عدد استروهمال شروع به کاهش تدریجی می‌نماید. علت این امر، تغییر مهمی است که در الگوی جریان رخ می‌دهد. همان‌طور که در قسمت ۴-۱ ذکر شد، در محدوده $Re \geq 130$ نقطه جدایی جریان از لبه پشتی سیلندر به سمت لبه جلویی حرکت کرده و بنابراین جریان‌های گردابه‌ای با مقیاس کوچک‌تری در مجاورت لبه‌های جانبی شکل می‌گیرد. وقوع این پدیده موجب کند شدن رفتار نوسانی جریان پایین دست می‌شود.

از دیگر نکات قابل توجه در نمودار شکل ۱۳ این است که در محدوده $55 \leq Re \leq 140$ نتایج محاسبات برای هر دو نوع شبکه 420×80 و 840×160 تطابق زیادی با نتایج

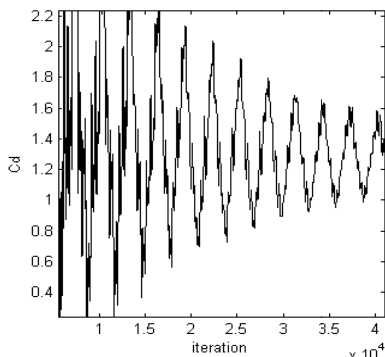
این مشخصات شامل محاسبه تغییرات عدد استروهمال (فرکانس بی‌بعد پدیده رهایی متناوب گردابه‌ها) و ضریب پسا بر حسب عدد رینولدز می‌باشد. ضریب انسداد مسیر برابر 0.125 در نظر گرفته شده است.

شکل ۱۵ تغییرات عدد استروهمال بر حسب عدد رینولدز را نشان می‌دهد. همان‌طور که در قسمت ۱ ذکر شد، عدد استروهمال رفتار وابسته به زمان جریان را توصیف می‌نماید. به‌طور خاص در پدیده رهایی متناوب گردابه‌ها، عدد استروهمال به‌عنوان اندازه فرکانس بی‌بعد این پدیده در نظر گرفته می‌شود. در شکل ۱۵-الف، نتایج محاسبات برای چهار نوع شبکه با ابعاد شبکه‌های 420×80 ، 840×160 ، 1260×240 و 1680×320 ارائه شده است. مقایسه دو شبکه ریزتر و انطباق نتایج آنها بر یکدیگر، استقلال نتایج از شبکه را نشان می‌دهد. در شکل ۱۵-ب به منظور اعتبارسنجی، نتایج مطالعه حاضر (برای شبکه 1680×320) با نتایج نتایج دیگر محققان مقایسه شده است. در خصوص مطالعه میدان جریان حول مانع مربعی واقع در یک کانال تاکنون مطالعات تجربی گسترده‌ای صورت نگرفته است. به‌عنوان نمونه مطالعه تجربی خاصی برای این جریان با نسبت انسداد مسیر $B=1/8$ وجود ندارد. مطالعات تجربی و عددی دیویس در مورد جریان حول مانع مربعی با نسبت‌های انسداد $B=1/4$ و $B=1/6$ صورت گرفته، هر چند قسمت تجربی این نتایج در محدوده رینولدزهای مطالعه حاضر نمی‌گنجد. همچنین مطالعات عددی سوزوکی برای نسبت انسداد $B=1/5$ و بروئر برای نسبت انسداد $B=1/8$ قابل ذکر هستند. نتایج عددی فوق بر اساس روش حجم محدود با شبکه‌بندی غیریکنواخت حاصل شده است.

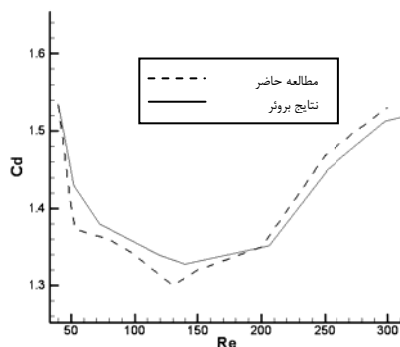
لازم به‌ذکر است برای محاسبه فرکانس نوسانات جریان گردابه‌ای از تحلیل رفتار نوسانی مؤلفه قائم سرعت در یک نقطه خاص در پایین دست سیلندر، استفاده شده است. چنانچه برای تعیین فرکانس نوسانات از نوسانات ضریب پسا و یا ضریب برآ نیز استفاده گردد، نتایج مشابهی حاصل خواهد شد.

به صورت نوسانی با زمان تغییر می‌نماید. نمونه‌ای از تغییرات زمانی ضریب پسا در جریان $Re = 150$ در شکل ۱۶ نشان داده شده است. واضح است که در یک روش محاسباتی تکراری، لازم است محاسبات به تعداد کافی تکرار و سپس تغییرات آن کمیت بررسی گردد. همان‌طور که در این شکل ملاحظه می‌شود به دلیل تکراری بودن الگوریتم روش شبکه بولتزمن، در مراحل محاسباتی اولیه مقدار ضریب پسا دارای نوسانات زیادی بوده و پس از گذراندن مراحل محاسباتی قابل توجه (برای نمودار فوق حدوداً ۳۰,۰۰۰ تکرار) مقدار ضریب پسا به مقادیر تناوبی خود همگرا می‌گردد.

به منظور بررسی تغییرات ضریب پسا بر حسب تغییرات عدد رینولدز از مقدار میانگین این ضریب در یک دوره تناوب استفاده شده و نتایج آن در نمودار شکل ۱۷ ارائه شده است. در این نمودار، نتایج مطالعات بروئر و همکاران (مبتنی بر روش حجم محدود با طول شبکه متغیر) برای مقایسه ارائه شده است.



شکل (۱۶): تغییرات زمانی ضریب پسا در جریان $Re = 150$



شکل (۱۷): ضریب پسا میانگین بر حسب عدد رینولدز در جریان غیردائم.

تحقیقات قبلی دارند، لیکن در رینولدزهای بالاتر نتایج محاسبات این دو نوع شبکه اختلاف محسوس را نشان می‌دهند. به عبارت دیگر در محدوده $Re \geq 140$ حساسیت نتایج محاسبات به نوع شبکه‌بندی بیشتر است. با توجه به نزدیکی نتایج محاسبات شبکه 840×160 و نتایج تحقیقات قبلی، می‌توان نتیجه‌گیری کرد که نتایج شبکه 420×80 در محدوده $140 \leq Re$ از دقت و اعتبار کافی برخوردار نمی‌باشند. علت تأثیرات قابل توجه نوع شبکه‌بندی بر نتایج مربوط به عدد استروهال در محدوده $Re \geq 140$ را نیز می‌توان به تغییر الگوی جریان و نفوذ جریان‌های گردابه‌ای از لبه پشتی سیلندر به سمت لبه جلویی مربوط دانست. در این حالت، جریان‌های گردابه‌ای علاوه بر ناحیه پشت سیلندر در مجاورت دو وجه جانبی سیلندر مربعی شکل نیز وجود دارند و این امر لزوم تشکیل شبکه محاسباتی دقیق‌تر در نزدیکی سیلندر مربعی نسبت به نقاط دورتر را نشان می‌دهد. لیکن همان‌طور که در قسمت ۲-۱ ذکر شد روش شبکه بولتزمن قابلیت تشکیل این نوع از شبکه‌بندی را دارا نبوده و این امر یکی از مهم‌ترین محدودیت‌های این روش است. لذا بایستی دقت شبکه‌بندی کل حوزه محاسباتی به‌طور یکسان افزوده گردد. همچنین نمودار شکل ۱۵-ب انطباق قابل قبول نتایج مطالعه حاضر را با نتایج بروئر نشان می‌دهد. از دیگر نتایج شکل ۱۵-ب می‌توان به تأثیر تغییر نسبت انسداد بر تغییرات استروهال اشاره نمود. مقایسه عدد استروهال در نسبت‌های انسداد مختلف نشان می‌دهد. به‌طور کلی با افزایش نسبت انسداد مسیر عدد استروهال نیز افزایش می‌یابد، یعنی با افزایش نسبت انسداد مسیر سرعت نوسانات گردابه‌ها افزایش می‌یابد.

از دیگر مشخصات جریان غیردائم که مورد بررسی قرار گرفته ضریب پسا می‌باشد. همان‌طور که در قسمت ۴-۱ اشاره گردید، در محدوده $Re \leq 55$ الگوی جریان دائم حول سیلندر شکل می‌گیرد و به ازای یک عدد رینولدز خاص در جریان ورودی به کانال، مقدار ضریب پسا بر حسب زمان ثابت خواهد بود. تغییرات ضریب پسا بر حسب رینولدز در جریان دائم در نمودار شکل ۱۴ نشان داده شده است. در محدوده $Re \geq 55$ جریان غیردائم بوده و مقدار ضریب پسا نیز به ازای یک عدد رینولدز خاص در جریان بالادست،

همان‌طور که در شکل ۱۷ ملاحظه می‌گردد نمودار در محدوده $Re \leq 130$ دارای روند کاهشی می‌باشد که مربوط به اثرات ناشی از نازک شدن لایه مرزی می‌باشد. نمودار مزبور دارای یک نقطه کمینه در نقطه $Re \approx 130$ می‌باشد و در رینولدزهای بزرگتر ضریب پسا افزایش خواهد یافت. علت این امر نیز مربوط به نفوذ نقطه جدایی جریان از لبه پشتی سیلندر به سمت لبه جلویی و در نتیجه افزایش محسوس سهم نیروی پسا فشاری در محاسبه ضریب پسا می‌باشد.

همان‌طور که ملاحظه گردید پدیده نفوذ ناحیه جدایی به سمت لبه جلویی در محدوده $Re \geq 130$ تأثیرات قابل توجهی بر مشخصه‌های جریان غیر دائم داشته و در تفسیر نمودار تغییرات عدد استروهمال و ضریب پسا نقش عمده‌ای ایفا می‌کند.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، شبیه‌سازی جریان آرام حول مانع مربعی واقع در وسط یک کانال، با استفاده از روش شبکه بولتزمن ارائه شد. نتایج شبیه‌سازی عددی، مشتمل بر تعیین الگوهای مختلف جریان آرام حول مانع مربعی واقع در وسط یک کانال و تعیین مشخصه‌های این جریان مانند رسم خطوط جریان، محاسبه طول ناحیه گردابه‌ای، تعیین فرکانس نوسانی پدیده‌های متناوب گردابه‌ها و در نهایت محاسبه ضریب پسا می‌باشد. بر اساس نتایج محاسبات، ملاحظه می‌گردد الگوهای مختلف جریان حول مانع مربعی در یک کانال با نسبت انسداد مسیر $0/125$ در محدوده $Re \leq 300$ شامل موارد ذیل می‌باشد:

- مراجع
1. Franke, R. "Numerical Calculation of Unsteady Vortex Shedding Flow behind Cylindrical Bodies", Ph.D Dissertation, Faculty of Civil Engineering and Surveying, Univ. of Karlsruhe, 1991 (In Dutch).
 2. Zdravkovich, M.M. "Flow around Circular Cylinders", Oxford Univ. Press, New York, 1997.
 3. Klekar, K.M. and Patankar, S.V. "Numerical Prediction of Vortex Shedding behind Square Cylinders", Int. J. Numerical Meth. Fluids, Vol. 14, No. 3, pp. 327-341, 1992.
 4. Okajima, A. "Strouhal Numbers of Rectangular Cylinders", J. Fluid Mech., Vol. 123, pp. 379-398, 1982.

۱- جریان دائم خزشی بدون هرگونه جدایی در محدوده $Re \leq 1$.

۲- پدیده جدایی جریان در $Re \geq 3$ و شکل‌گیری جریان دائم با گردابه‌های متقارن و ساکن در پشت سیلندر.

۳- پدیده‌های متناوب گردابه‌ها و رفتار غیردائم جریان در محدوده $Re \geq 55$ و

۴- نفوذ جریان‌های گردابه‌ای از ناحیه پشت سیلندر به سمت لبه جلویی در محدوده $Re \geq 130$.

نتایج محاسبات نشان می‌دهد در الگوی جریان دائم با گردابه‌های متقارن و ساکن در پشت سیلندر در محدوده

- Amplitude Process in Charged and Neutral one-component System”, *Physical Review*, Vol. 94, pp. 511-525, 1954.
10. Zou, Q. and He, X. “On Pressure and Velocity Boundary Conditions for the Lattice Boltzmann BGK Model”, *Physics of Fluids*, Vol. 9, No. 6, pp. 1591-1598, 1997.
 11. Mei, R., Yu, D., and Shyy, W. “Force Evaluation in the Lattice Boltzmann Method Involving Curved Geometry”, *Physical Review E*, Vol. 65, No. 4, pp. 1-14, 2002.
 12. Breuer, M., Bernsdorf, J., Zeiser, T., and Durst, F. “Accurate Computations of Laminar Flow Past a Square Cylinder”, *J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 2, No. 2, pp.186-196, 2000.
 5. Williamson, C.H.K. “Vortex Dynamics in the Cylinder Wake”, *Ann. Rev. Fluid Mech*, Vol. 28, pp. 447-539, 1996.
 6. Frisch, U., Hasslacher, B., and Pomeau, Y. “Lattice-gas Automata for the Navier-Stokes Equation”, *Physical Review Lett.*, Vol. 56, No. 14, 1986.
 7. Qian, Y.H., Humieres, D., and Lallemand, P. “Lattice BGK Models for Navier-Stokes Equation”, *Euro Physics. Lett.*, Vol. 17, No. 6, pp. 479-484, 1992.
 8. He, X. and Luo, L. “A Priori Derivation of Lattice Boltzmann Equation”, *Physical Review*, Vol. 55, No. 6, pp. 6333-6336, 1997.
 9. Bhatnagar, P.L., Gross, E.P., and Krook, M.K. “A Model for Collision Process in Gases, I .Small

Archive of SID