

تحلیل عددی مسائل تماسی همراه با اصطکاک در فروروی نانو بر مبنای یک رهیافت اصلاح شده بهینه‌سازی لاگرانژ الحاقی

حسین اشرفی^۱ و محمد شریعتی^۲

دانشکده مهندسی مکانیک

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

(تاریخ دریافت: ۱۳۸۹/۳/۳؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۰/۱/۲۲)

چکیده

در این پژوهش به توسعه یک فرمول‌بندی المان محدود کلی بر اساس روش اصلاح یافته بهینه‌سازی لاگرانژ الحاقی برای تحلیل رفتار شبه‌استاتیکی تماس اصطکاکی در فروروی نانو پرداخته شده و بر اساس شرایط سینماتیکی هندسی اجزاء در حال تماس، از رهیافت لاگرانژ الحاقی بهبود یافته استفاده شده است. این نوع فرآیند جدید حل بر دشواری‌های تعیین دو عامل پنالتی و تعداد گام‌های بار نموی که در روش‌های مرسوم باید توسط کاربر تعیین شوند، غلبه نموده است. برای برطرف نمودن دشواری‌های عددی فرمول‌بندی‌های تساوی، از قانون اصطکاک غیر کلاسیک جدیدی استفاده شده که در آن شرایط چسبندگی و لغزشی قانون کلاسیک به یک قانون اصطکاکی الاستیک بهبود یافته تبدیل شده است. در پایان، این فرمول‌بندی به یک الگوی کامل برای حل مسائل کلی تماس اصطکاکی منتهی شده و برای بررسی درستی نتایج به بررسی فرآیند فروروی یک فرورونده صلب در یک لایه الاستیک پرداخته شده است. الگوریتم استفاده شده در مثال کاربردی بیان شده برای شرایط اصطکاکی چسبندگی و لغزشی به خوبی همگرا گردید و همگرایی حل با گام گذاری بار خودکار و پیش‌گویی بار تماس مورد تحلیل قرار گرفت.

واژه‌های کلیدی: رهیافت لاگرانژی الحاقی، مکانیک عددی تماس، اصطکاک، فروروی نانو

Numerical Analysis of Contact Problems with Friction on Nano-indentation by a Modified Augmented Lagrangian Optimization Approach

H. Ashrafi and M. Shariyat

Mech. Eng. Dep't.

K.N. Toosi Univ. of Tech.

(Received: 24 May, 2010; Accepted: 11 Apr., 2011)

ABSTRACT

In this paper a general finite element formulation, using a modified augmented Lagrangian (AL) optimization method, has been developed to analyze the quasi-static frictional contact behavior of nano-indentation procedure. Based on the geometrical kinematic conditions of contacting parts, a novel improved AL approach has been used. This novel solution procedure for contact formulation overcomes the difficulty of dependence of the solution process on two user-specified parameters, i.e. the penalty parameter for contact constraints and the number of load steps. For overcoming the numerical difficulties of variational equality formulations, a new non-classical friction law has been used, in which the stick and slip conditions of classical law have been changed to a modified elastic friction law. Finally, the indentation procedure of rigid nano-indenters into an elastic layer has been evaluated to verify the results. The numerical algorithm in an applied example is accurately converged for stick and slip friction conditions and solution convergence is analyzed using automatic load stepping and contact load predicting.

Keywords: Augmented Lagrangian Optimization Approach, Numerical Contact Mechanics, Friction, Nano-indentation

۱- دانشجوی دکترا: hashrafi.ir@gmail.com

۲- دانشیار (نویسنده پاسخگو): shariyat@kntu.ac.ir

۱- مقدمه

پدیده‌های تماس اصطکاکی و ضربه در اثر برهمکنش‌های تماسی و اصطکاکی بین اجزاء مکانیکی رخ می‌دهند که اکثر بارهای مکانیکی نیز از چنین برهم‌کنش‌هایی ناشی می‌شوند. چگونگی توزیع فشارهای تماسی و ضربه در سراسر ناحیه برهمکنشی نقش کلیدی بر تریبولوژیکی و بالستیکیتی پیکره‌های مکانیکی دارند. به طور کلی پدیده‌های تماس و ضربه در پیکره‌های تغییرشکل‌پذیر پدیده‌ای غیرخطی هستند. معرفی پدیده اصطکاک به عنوان یک عامل برگشت‌ناپذیر در میانجی سامانه‌های برهمکنشی، مسئله تماس را پیچیده‌تر نیز نموده است. بنابراین اغلب سامانه‌های فیزیکی برای انجام یک تحلیل موفق نیاز به توصیف کامل برهمکنش‌های مکانیکی در نواحی تماس دارند. در چنین برهمکنش‌های تماسی، بسته به نوع کاربرد سامانه فیزیکی، ممکن است رفتار اصطکاکی، برهمکنش‌گذرای نواحی مشترک، اتصال ترمومکانیکی، برهمکنش با روان‌سازها و آسیب‌های سایشی نواحی مشترک نیز مورد تحلیل قرار گیرند.

امروزه با گسترش سریع فناوری رایانه‌های پیشرفته، می‌توان روش‌های تماس و ضربه را با به‌کارگیری ابزاری به نام مکانیک محاسباتی به کمک شیوه‌های عددی شبیه‌سازی نمود.

به طور کلی دو نوع فرمول‌بندی اصلی برای حل محاسباتی مسائل تماس و ضربه در منابع مورد بررسی قرار گرفته‌اند که عبارتند از: فرمول‌بندی‌های نامساوی تغییراتی و تساوی تغییراتی که از اصل کار مجازی منتج شده‌اند [۱-۲]. فرمول‌بندی‌های نوع اول از نامساوی‌های تغییراتی که در واقع بیانگر اصل کار مجازی به شکل نامساوی هستند، استفاده می‌نمایند. همه شرایط مرزی شامل شرایط تماسی و اصطکاکی فقط در قالب رابطه‌ای نامساوی تغییراتی بیان می‌شود. ادن^۱ و کیکوچی^۲ [۲] مسائل تماسی بدون اصطکاک را با استفاده از نامساوی‌های تغییراتی فرمول‌بندی نموده و درباره وجود و یکتایی حل خود نیز با ارائه مثال‌های عددی بحث نمودند. هنگامی که فرض شود نحوه توزیع

نیروی طبیعی بر روی رویه تماسی مشخص است به واسطه نامساوی‌های تغییراتی می‌توان مسائل اصطکاکی را نیز تعریف نمود. مسائل تماس اصطکاکی به کمک فرمول‌بندی‌های نامساوی تغییراتی توسط آلت^۳ و کرنیر^۴ [۳] با استفاده از دیفرانسیل‌ها در قالب مسائل شبه‌بهینه‌سازی قرار گرفتند.

در فرمول‌بندی نوع دوم، از تساوی‌های تغییراتی حاصل از اصل کار مجازی استفاده می‌شود که رویه تماسی در آن‌ها بین دو پیکره در شروع نمو بار به صورت مشخص فرض شده و با تکرار بازسازی می‌شود. سیمو^۵ و همکارانش [۴] مسائل تماسی بدون اصطکاک را با فرمول‌بندی تساوی تغییراتی حل نموده و قیود تماس تک سویه را با روش لاگرانژی متفاوتی ارضا نمودند. سیمو و لارسن^۶ [۵] با تساوی تغییراتی برای اولین بار از رهیافت لاگرانژی الحاقی برای تحلیل مسائل تماسی با قابلیت بهنگام‌سازی خودکار ضریب پنالتی و ارضاء قیود از راه مقادیر محدود پنالتی استفاده نمودند. مقدار اولیه عامل پنالتی به طور خودکار در داخل الگو برای تعیین مقدار نهایی آن بدون دخالت کاربر بهنگام‌سازی می‌شود. زاواریس و همکارانش [۶] مسائل تماس اصطکاکی ترمومکانیکی را با راهی مشابه با رهیافت سیمو و لارسن طراحی و حل نمودند. آریچیو و ساکو [۷] دو فرآیند حل شبه لاگرانژی الحاقی را بر اساس ترکیب کار آلت و کرنیر و رهیافت سیمو و لارسن برای طراحی تماس بدون اصطکاک بین یک ورق و مانع صلب استفاده نمودند. با یک رهیافت لاگرانژی الحاقی تعمیم‌یافته، پیترزاک^۷ و کرنیر^۸ [۸] مسائل تماسی تک سویه را برای شرایط تغییرشکل‌های بزرگ حل نمودند. یک رهیافت لاگرانژی الحاقی مشابه با کار سیمو و لارسن برای کاربردهای عملی مهندسی و در عملیات شکل‌دهی فلزات توسط بابا^۹ و همکارانش [۹] به کار برده شد. میجار^{۱۰} و آرورا [۱۰] با بررسی روش‌های مختلف

3- Alart
4- Curnier
5- Simo
6- Laursen
7- Pietrzak
8- Curnier
9- Baba
10- Mijar and Arora

1- Oden
2- Kikuchi

حل جدید در فرمول‌بندی تماسی بر سختی‌های تعیین دو پارامتر پنالتی و تعداد گام‌های بار نموی که در روش‌های لاگرانژ الحاقی مرسوم باید توسط کاربر تعیین می‌شدند، غلبه نموده است. عوامل پنالتی و تعداد گام‌های بار وابسته در فرآیندهای حل، مرسوم به نوع کاربرد مسئله تماسی است و باید در استفاده از آن‌ها برای رسیدن به همگرایی در جواب از عملیات نامطلوب سعی و خطا استفاده نمود. هدف در مرحله اول فرمول‌بندی، یافتن نقطه تماس اولیه در گره تماس و سپس نیروی تماسی در آن است. در مرحله دوم، هدف چک نمودن شرایط تماسی و حل مسئله اصطکاکی است. در مرحله دوم فرمول‌بندی، به دلیل وجود نیروهای تماسی وابسته به مسیر، مانند مرحله اول دارای یک کنشمنند انرژی پتانسیل متناسب با آن نیست. بنابراین طرح نمو بار در فرمول‌بندی بکار می‌رود که مسائل خطی را نیز به خوبی مسائل غیرخطی تحت پوشش قرار می‌دهد. در فرآیند حل این فرمول‌بندی از الگوهای نگاشت بازگشتی مرسوم برای محاسبه نیروی تماسی (با همان فشار تماسی) استفاده نمی‌شود و در نتیجه حل را می‌توان مستقل از تعداد گام‌های بار و مقادیر پنالتی دانست. برای ارزیابی نتایج به بررسی فرآیند فروروی نانو یک فرورونده صلب در یک فیلم نازک پلیمری به عنوان کاربردی در حل مسائل تماسی پرداخته شده است.

۲- معادلات متشکله الاستواستاتیک

قوانین تعادل جهانی و معادلات میدانی حاصل برای تمام محیط‌های پیوسته کاربرد داشته و معادلات به دست آمده، خواص مکانیکی و گرمایی مواد مخصوص را بر اساس ساختار ذاتی درونی آن‌ها مشخص می‌نماید. از نظر ریاضی، کاربرد این معادلات در توصیف روابط میان معادلات میدانی گرمایی، مکانیکی، سینماتیکی و تشکیل فرمول‌بندی‌های مسائل قابل طرح در مکانیک محیط‌های پیوسته است. از نظر فیزیکی، کاربرد این معادلات در تعریف مواد گوناگون و ایده‌آل شده است که با به‌کارگیری طرح‌های متفاوت برای بیان رفتار مواد واقعی استفاده می‌شوند. به‌طور کلی این معادلات برای یک ماده ویژه بیانگر رفتار ویژه‌ای هستند.

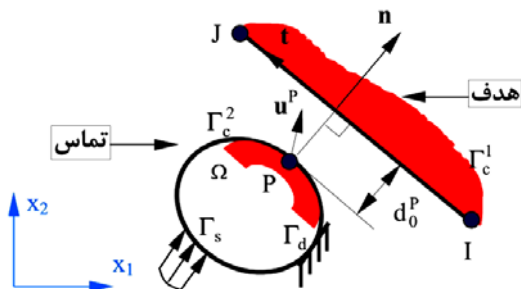
در تحلیل مسائل تماسی، یک فرآیند حل جدید برای بهنگام‌سازی خودکار مقادیر پنالتی ارائه نموده و با مثال عددی ساده‌ای نیز فرمول‌بندی تساوی تغییراتی خود را ارزیابی و تأیید نمودند. اسی^۱ و همکارانش [۱۱] نیز یک طرح المان محدود صحیح را برای تحلیل پاسخ یک سازه ویسکوالاستیک تحت تماس ضربه‌ای با استفاده از یک روش نموی ضریب لاگرانژی ارائه نمودند. اشرفی و همکارانش [۱۲-۱۳] با استفاده از روش وارون‌سازی ماتریسی، فرآیند حل محاسباتی جدیدی را برای فرمول‌بندی و تحلیل مسئله تماس نانو فروروی بین یک فرورونده صلب با یک نیم فضای ویسکوالاستیک و ارتوتروپیک با هر هندسه دلخواه در شرایط بدون اصطکاک ارائه نمودند.

کنشمنند لاگرانژ الحاقی را می‌توان مانند لاگرانژین معمولی که به یک جمله پنالتی الحاق می‌شود در نظر گرفت. در بیشتر فرآیندهای حل با تساوی تغییراتی تماسی بر اساس روش لاگرانژ الحاقی، کنشمنند الحاق درست مانند تابع اصلی پنالتی در روش پنالتی عمل می‌نماید؛ که در آن مقدار ابتدایی عامل پنالتی که توسط کاربر تعریف می‌شود. در طی فرآیند حل تغییر داده نشده و برای اختصاص مقادیر مناسبی برای عامل پنالتی باید از فرآیند سعی و خطا استفاده نمود. رهیافت‌های ذکر شده که بهبودیافته روش پنالتی هستند دارای معایبی مشابه با آن نیز هستند. رهیافت تجمع روش‌های پنالتی و ضریب لاگرانژ، همچنین در برنامه‌های استاندارد اجزاء محدود تجاری مورد استفاده قرار گرفته است. طرح‌های پیشگویی بار - زمان تماسی نیز برای بهبود دقت و بازدهی حل مسائل تماسی به کار برده می‌شوند ولی باز هم این طرح‌ها با وجود بهبود فرآیند حل دارای مشکلات اساسی می‌باشند.

در این پژوهش به توسعه یک فرمول‌بندی المان محدود کلی بر اساس یک رهیافت اصلاح‌یافته بهینه‌سازی لاگرانژ الحاقی برای تحلیل رفتار شبه استاتیکی تماس اصطکاکی در فروروی نانو پرداخته می‌شود. با تعریف مسائل تماسی اصطکاکی، مفاهیم اساسی روش لاگرانژ الحاقی مورد بحث قرار گرفته و یک الگوی جامع با بیان جزئیات برای بکارگیری در حل مسائل عددی مهندسی ارائه می‌شود. این نوع فرآیند

1- Assie

به پیکره تماس اعمال می‌شوند در حالی که پیکره صلب در فضا ثابت است. پیکره تماسی تحت اعمال نیروهای حجمی b_i ، تراکنش سطحی T_i بر روی مرز Γ_s و جابه‌جایی مشخص \bar{u}_i بر روی مرز Γ_d است.



شکل (۱): پیکربندی تماس یک سامانه مکانیکی.

پیکره تماسی به NOE المان محدود که دارای NON گره است، گسسته‌سازی می‌شود. اثرات تماس و اصطکاک در گره‌های گسسته روی رویه تماسی وارد محاسبات می‌شوند. رویه تماسی انتخابی روی لبه پیکره هدف (رویه اصلی) و رویه تماسی انتخابی بر روی مرز پیکره تماس (رویه فرعی) به ترتیب با نمادهای Γ_c^1 و Γ_c^2 مشخص می‌شوند. رویه تماسی Γ_c^2 دارای NOC گره پتانسیلی است ($NOC \leq NON$).

در پیکربندی مرجع، گره P بر روی مرز پیکره تماسی با بردار مختصات X^P و نقاط I و J بر روی لبه پیکره هدف با بردارهای مختصات X^I و X^J مورد توجه قرار می‌گیرند. سامانه مختصات موضعی بر روی لبه پیکره هدف به وسیله بردارهای واحد (n) و (t) نشان داده می‌شود. فاصله نرمال ابتدایی برای گره تماسی P به وسیله رابطه (۳) تعریف می‌شود:

$$d_0^P = (X^J - X^P) \cdot n. \quad (3)$$

فاصله نرمال فعلی، همان گره تماسی پس از حرکت با رابطه (۴) تعریف می‌شود:

$$d_n^P = (d_0^P - u^P \cdot n) = (d_0^P - u_n^P), \quad (4)$$

که در آن، (u_n^P) بیانگر جابه‌جایی نرمال گره P است. در نتیجه تماس گره P بر روی مرز پیکره تماسی با لبه پیکره هدف، نیروی تماسی (f_c^P) بر روی پیکره هدف وارد می‌شود.

معادلات الاستوستاتیک تنش - کرنش جامدات الاستیک خطی با فرض کرنش‌های کوچک عبارت است از [۱۴]:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (1)$$

که در آن، σ و ε به ترتیب بیانگر تانسورهای تنش و کرنش و C_{ijkl} بیانگر ثابت‌های الاستیک است که خصوصیات درونی یک ماده الاستیک را نشان می‌دهد. برای رفتار ایزوتروپیک، این معادله را به صورت خاص زیر می‌توان بازنویسی نمود:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (2)$$

که در آن، λ و μ ضرایب لامه برای یک ماده الاستیک هستند.

۳- پیکربندی و سینماتیک تماس

در مکانیک جامدات، مسائل تماسی اصطکاک اغلب به سه گروه استاتیکی، شبه استاتیکی و دینامیکی طبقه‌بندی می‌شوند. در مسائل ضربه و یا برخورد، اثرات اینرسی باید در نظر گرفته شده و در دامنه زمان نیز باید گسسته‌سازی مناسبی اعمال شود. در برخی مسائل، دو یا چند پیکره در بارگذاری و شرایط مرزی مشخص با یکدیگر در شرایط تماسی قرار می‌گیرند و فاصله ابتدایی بین آن‌ها بسته می‌شود که می‌توانند بر روی هم بدون هیچ نیروی مقاوم اصطکاک حرکت لغزشی داشته باشند که در منابع به آن مسائل تماسی هموار^۱ گفته می‌شود. در تحلیل مسائل تماسی، بیش‌تر از نظریه‌های بهینه‌سازی استفاده می‌شود. نظریه کلاسیک بهینه‌سازی، بر مبنای شرایط بهینگی است که با فرض توابعی پیوسته و نیز توابع دیفرانسیل‌پذیری با حداقل دو مرتبه پیوستگی استنتاج می‌شوند [۱۶-۱۵].

برای تعریف مشخصات مسائل تماسی، یک سامانه مکانیکی دوبعدی که در برگیرنده یک پیکره تغییرشکل‌پذیر (به عنوان پیکره تماسی) و یک پیکره صلب (به عنوان پیکره هدف) است، در نظر گرفته شده است. پیکربندی تماسی سامانه با مختصات مادی $\mathbf{X} = [x_1, x_2]$ در شکل ۱ نشان داده شده است. پیکره تغییرشکل‌پذیر یا پیکره تماسی به وسیله دامنه Ω و مرز Γ مشخص می‌شود. شرایط مرزی و باری

جابه‌جایی مماسی کل برای یک گره مشخص موردنظر است. در مسائل دینامیکی، علامت نیروی اصطکاکی به جهت حرکت گره وابسته است. این نوع وابستگی به حرکت، یا در مسائل غیرخطی، وابستگی به جابه‌جایی نموی، نیروی اصطکاکی در این فرمول‌بندی موردنظر قرار نگرفته است. بنابراین معکوس‌سازی علامت نیروی اصطکاک در فرآیند نموی بار، مجاز نیست و این فرض در الگوی عددی نیز مورد استفاده قرار گرفته است. طبق قانون اصطکاک کلاسیک، شرایط چسبندگی و لغزشی عبارتند از:

$$|f_f^P| - \mu R_n^P < 0 \Rightarrow |u_t^P| = 0 \text{ (Stick)}, \quad (8)$$

$$|f_f^P| - \mu R_n^P = 0 \Rightarrow |u_t^P| > 0 \text{ (Slip)}, \quad (9)$$

که در آن، μ ضریب اصطکاک و u_t^P جابه‌جایی مماسی در راستای t است. نیروی اصطکاکی در راستای خلاف حرکت نسبی u_t^P گره P پیکره تماسی عمل می‌نماید.

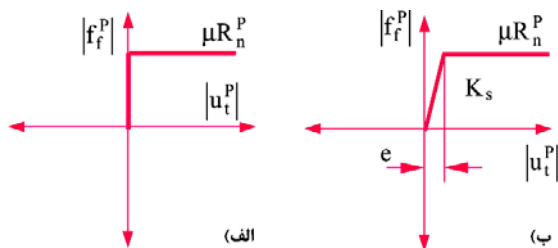
در قانون اصطکاک غیر کلاسیک برای غلبه بر دشواری‌های محاسباتی فرمول‌بندی‌های تساوی تغییراتی، قانون کلاسیک به یک قانون اصطکاکی الاستیک بهبودیافته است. شرایط چسبندگی و لغزشی این قانون بهبودیافته به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$|f_f^P| = K_s |u_t^P| \Rightarrow |u_t^P| \leq e \text{ (Stick)}, \quad (10)$$

$$|f_f^P| = \mu R_n^P \Rightarrow |u_t^P| > e \text{ (Slip)}, \quad (11)$$

که در آن، K_s سختگی چسبندگی نامیده می‌شود.

شیب بخش ابتدایی منحنی نشان داده شده در شکل ۲-ب متناسب با مقدار چسبندگی e است. در این فرمول‌بندی نیز از قانون اصطکاک غیر کلاسیک استفاده شده که در آن شرایط چسبندگی و لغزشی قانون کلاسیک به یک قانون اصطکاکی الاستیک بهبودیافته‌اند.



شکل (۲): قوانین اصطکاک تماس.

این نیرو را می‌توان به دو مؤلفه نرمال (R_n^P) و مماسی (f_f^P) در اثر اصطکاک تجزیه نمود. اندازه نیروی مماس اصطکاکی (f_f^P) در نقطه تماس به مقدار نیروی تماس نرمال (R_n^P) وابسته است.

۴- قانون تماس بهبودیافته

برای جلوگیری از نفوذ پیکره‌ها در یکدیگر از قید نفوذناپذیری تماس تک سوپه استفاده می‌شود که در شرط نفوذناپذیری، فاصله تماس نرمال فعلی باید بزرگتر یا برابر با صفر باشد. این قید تماس تک سوپه به صورت استاندارد ($g_n \leq 0$) نوشته می‌شود. قانون تماس تک سوپه در تماس بین دو پیکره شامل شرایط نفوذناپذیری، فشاری و مکمل است که به ترتیب عبارتند از:

$$g_n^P \leq 0 \quad g_n^P := -d_n^P = u_n^P - d_0^P, \quad (5)$$

$$R_n^P \geq 0, \quad (6)$$

$$(R_n^P)(g_n^P) = 0 \quad (P \in \Gamma_c^2), \quad (7)$$

که در آن، R_n^P اندازه نیروی تماسی نرمال است. شرط اصلی تماس تک سوپه، نفوذ نکردن پیکره‌های تماسی و هدف در یکدیگر است. شرط فشاری تماس تک سوپه بیانگر نبود کشش در پیکره‌های تماسی و هدف به وسیله یکدیگر است. شرط مکمل نیز نشان می‌دهد که پیکره تماسی یا از پیکره هدف جدا می‌شود ($R_n^P = 0, g_n^P < 0$) و یا بر روی آن فشرده می‌شود ($R_n^P \geq 0, g_n^P = 0$).

به طور کلی، دو نوع قانون اصطکاکی در مسائل مختلف مهندسی استفاده می‌شود؛ قانون اصطکاک کلاسیک کولمب یا صلب و قانون غیر کلاسیک یا بهبودیافته. قانون اصطکاک کلاسیک (شکل ۲) کولمب کاربردهای گسترده‌ای دارد [۱] و [۱۶]. نقص اصلی قانون کلاسیک در ناتوانی در برگیری وابستگی ضریب اصطکاک به سرعت لغزشی نسبی است. با این وجود در بسیاری از کاربردهای مهندسی، سرعت لغزشی نسبی به حدی کم است که وابستگی سرعت نسبی به ضریب اصطکاک قابل چشم‌پوشی است. در قانون کلاسیک، نیروی اصطکاکی در گره تماسی P ، یا با دیواره هدف چسبندگی خواهد داشت و یا در امتداد دیواره هدف لغزش خواهد داشت. قوانین اصطکاک برای مسائل ایستایی بیان شده‌اند و

محاسباتی را می‌توان برای حل مسئله تعریف شده در رابطه (۱۹) بکار برد. با این وجود به دلیل محدودیت این روش‌ها، روش لاگرانژ الحاقی راهی بسیار مناسب برای حل این نوع مسائل است. حال به تعریف کنش‌مند لاگرانژ الحاقی در مسئله این مرحله می‌پردازیم:

$$\Phi(\bar{\mathbf{u}}', \theta_n, \mathbf{K}_n, \theta_t, \mathbf{K}_t) = \Pi(\bar{\mathbf{u}}') + \begin{cases} \frac{1}{2} \mathbf{K}_n \theta_n^2 & (g'_n + \theta_n < 0), \\ \mathbf{K}_n \theta_n g'_n + \frac{1}{2} \mathbf{K}_n g_n'^2 + \mathbf{K}_t \theta_t g'_t + \frac{1}{2} \mathbf{K}_t g_t'^2, & (20) \\ \mathbf{K}_n \theta_n^2 & (g'_n + \theta_n \geq 0), \end{cases}$$

که در این روابط، $(\mathbf{K}_n > 0, \mathbf{K}_t > 0, \theta_n, \theta_t)$ عوامل لاگرانژ الحاقی همبسته با قيود نرمال و مماسی (۱۹) هستند. عامل-های (\mathbf{K}_n) و (\mathbf{K}_t) نیز عوامل پنالتی برای قيود مربوطه هستند. ایده روش لاگرانژ الحاقی، تبدیل یک مسئله مقید به یک رشته مسائل غیر مقید که کمینه‌ساز کنش‌مند لاگرانژ الحاقی نسبت به $(\bar{\mathbf{u}}')$ برای تخمین این پارامترها هستند می‌باشد. فرمول‌بندی‌های تماسی روش‌های لاگرانژ الحاقی متداول، عواملی مانند (θ_t) و (θ_n) را مورد استفاده قرار نمی‌هند. در این رهیافت از چنین پارامترهایی برای بدست آوردن حل دقیق مسئله مقید اصلی با استفاده از مقادیر محدود پارامترهای (\mathbf{K}_n) و (\mathbf{K}_t) است.

در صورت نفوذ و فروروی یعنی برای حالت $(g'_n + \theta_n \geq 0)$ ، شرایط بهینگی مرتبه اول نسبت به $(\bar{\mathbf{u}}')$ منجر به معادله تعادلی نموی زیر شده است:

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{k}}^{(i-1)} + \bar{\mathbf{k}}_c'^{(i-1)}) \Delta \bar{\mathbf{u}}'^{(i)} - \bar{\mathbf{f}} + \bar{\mathbf{r}}'^{(i-1)} + \bar{\mathbf{f}}_c'^{(i-1)} &= 0, \\ \Rightarrow (\bar{\mathbf{k}}^{(i-1)} + \bar{\mathbf{k}}_c'^{(i-1)}) \Delta \bar{\mathbf{u}}'^{(i)} &= \bar{\mathbf{f}}_{ub}^{(i-1)}, \end{aligned} \quad (21)$$

به طوری که:

$$\bar{\mathbf{f}}_{ub}^{(i-1)} = \bar{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{r}}'^{(i-1)} - \bar{\mathbf{f}}_c'^{(i-1)}. \quad (22)$$

$(\bar{\mathbf{k}}^{(i-1)} = \nabla \bar{\mathbf{r}}'^{(i-1)})$ ماتریس سختی سازه، بسته به شرایط مادی و هندسی است و $(\bar{\mathbf{k}}_c'^{(i-1)} = \nabla \bar{\mathbf{f}}_c'^{(i-1)})$ ماتریس سختی تماس است. $(\Delta \bar{\mathbf{u}}'^{(i)})$ نیز بیانگر بردار جابه‌جایی نموی و $(\bar{\mathbf{r}}'^{(i-1)} = \bar{\mathbf{k}}^{(i-1)} \bar{\mathbf{u}}'^{(i-1)})$ بردار نیروی گرهی بسته به تنش‌های المان است. همچنین، $(\bar{\mathbf{f}}_{ub}^{(i-1)})$ بردار نیروی

هدف مرحله اول فرمول‌بندی، یافتن نقطه تماس اولیه در گره P و سپس نیروی تماسی در آن است و هدف مرحله دوم، چک نمودن شرایط تماسی و حل مسئله اصطکاک می‌باشد. در مرحله دوم فرمول‌بندی به دلیل وجود نیروهای تماسی وابسته به مسیر دارای یک کنش‌مند انرژی پتانسیل متناسب با آن همانند مرحله اول نمی‌باشد. از این رو نمو بار در فرمول‌بندی بکار رفته است که مسائل خطی را هم به خوبی مسائل غیرخطی هندسی یا مادی تحت پوشش قرار می‌دهد.

مرحله اول فرمول‌بندی: در اینجا تشخیص صحیح نقطه تماس اولیه و پس از آن، تعیین نیروی قید موردنیاز برای باقی نگاه داشتن گره تماسی در آن نقطه، موردنظر است. مسئله زیر برای این مرحله فرمول‌بندی تعریف شده است:

$$\begin{aligned} \min \quad & \Pi(\bar{\mathbf{u}}'), \\ \text{s.t.} \quad & g'_n = u'_n - d_0 \leq 0, \\ & g'_t := \xi(g'_n) (u'_t - d_t) = 0; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\xi(g'_n) = \begin{cases} 0 & g'_n < 0 \\ 1 & g'_n \geq 0 \end{cases}$$

که در این روابط، (Π) انرژی پتانسیل کل سازه، (u'_t) و (u'_n) جابه‌جایی‌های مماسی و نرمال گره تماسی در مرحله اول، (g'_t) فاصله نفوذ مماسی گره تماس درون هدف، (d_t) جابه‌جایی مماسی گره تماس در حالت تماس اولیه با هدف نسبت به موقعیت ابتدایی آن و $(\xi(g'_n))$ تابع واحد پله‌ای هستند. باید توجه نمود که قید فاصله مماسی (g'_t) از نوع برابری است و فقط هنگامی که $g'_n \geq 0$ فعال می‌شود. این بدین معنا است که هنگامی که گره تماس در هدف نفوذ می‌کند، فعال می‌شود. ایده اصلی این قید جدید در به دست آوردن نقطه تماس اولیه به طور دقیق و اعمال نیرو به گره تماس برای چسباندن گره تماس در آنجا، بارگذاری در این مرحله است.

ضرایب لاگرانژ برای قيود، منجر به دست آوردن نیروهای مماسی و عمودی به طور دقیق می‌شوند و بنابراین شرایط لغزش - چسبندگی در اینجا کنترل می‌شوند. از این شرط در مرحله دوم برای اجازه لغزش گره تماس بسته به شرایط اصطکاک، صرف‌نظر می‌شود. روش پنالتی یا سایر روش‌های

$$\bar{\mathbf{k}}_c^{(i-1)} = \nabla \bar{\mathbf{f}}_c^{(i-1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

II. شرایط چسبندگی برای قانون کولمب بهبودیافته:

$$\bar{\mathbf{f}}_c^{(i-1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_n (\mathbf{g}_n^{(i-1)} + \theta_n) \\ \mathbf{K}_s \mathbf{u}_t^{(i-1)} \end{bmatrix}, \quad (28)$$

$$\bar{\mathbf{k}}_c^{(i-1)} = \nabla \bar{\mathbf{f}}_c^{(i-1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_n & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_s \end{bmatrix}. \quad (29)$$

III. شرایط لغزشی برای کولمب کلاسیک و بهبودیافته:

$$\bar{\mathbf{f}}_c^{(i-1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_n (\mathbf{g}_n^{(i-1)} + \theta_n) \\ \mu \operatorname{sgn} \mathbf{u}_t^{(i-1)} \mathbf{K}_n (\mathbf{g}_n^{(i-1)} + \theta_n) \end{bmatrix}, \quad (30)$$

$$\bar{\mathbf{k}}_c^{(i-1)} = \nabla \bar{\mathbf{f}}_c^{(i-1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_n & 0 \\ \mu \mathbf{K}_s \operatorname{sgn} \mathbf{u}_t^{(i-1)} & \mathbf{K}_s \end{bmatrix}. \quad (31)$$

در انتهای مرحله دوم نیز جابه‌جایی گرهی ($\bar{\mathbf{u}}''$) چنان تعیین شده است که سازه در تعادل بوده و شرایط اصطکاکی و تماس ارضاء شوند. مجموع جابه‌جایی‌های مرحله‌های اول و دوم، منجر به یافتن جابه‌جایی دقیق و نهایی ($\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}' + \bar{\mathbf{u}}''$) شده است.

به دلیل آنکه ساختار معادلات تعادلی مراحل اول و دوم (۲۱) و (۲۵) مشابه هستند، معادله کلی زیر از ترکیب معادلات تعادل مراحل اول و دوم استخراج می‌شود:

$$\begin{aligned} & (\bar{\mathbf{k}}^{(i-1)} + \bar{\mathbf{k}}_c^{(i-1)}) \Delta \bar{\mathbf{u}}^{(i)} - \bar{\mathbf{f}} + \bar{\mathbf{r}}^{(i-1)} \\ & \quad + \bar{\mathbf{f}}_c^{(i-1)} = 0, \quad (32) \\ \Rightarrow & (\bar{\mathbf{k}}^{(i-1)} + \bar{\mathbf{k}}_c^{(i-1)}) \Delta \bar{\mathbf{u}}^{(i)} = \bar{\mathbf{f}}_{\text{ub}}^{(i-1)}, \end{aligned}$$

که در آن، ($\bar{\mathbf{r}}^{(i-1)} = \bar{\mathbf{k}}^{(i-1)} \bar{\mathbf{u}}^{(i-1)}$) بردار نیروهای گرهی متناسب با تنش‌های المان و ($\bar{\mathbf{f}}_{\text{ub}}^{(i-1)}$) بردار نیروی غیرتعادلی است که نیاز به صفر گذاردن با تکرار شونده است. با حل این معادله برای ($\Delta \bar{\mathbf{u}}^{(i)}$)، جابه‌جایی‌ها در تکرار (i)ام به صورت ($\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}' + \bar{\mathbf{u}}''$) به دست آمده است.

غیرتعادلی است که به صورت تکرار شونده استخراج شده است.

با حل رابطه (۲۱) برای ($\Delta \bar{\mathbf{u}}^{(i)}$)، جابه‌جایی‌ها در (i) امین تکرار به صورت ($\bar{\mathbf{u}}^{(i)} = \bar{\mathbf{u}}^{(i-1)} + \Delta \bar{\mathbf{u}}^{(i)}$) بدست می‌آیند. در مورد شرایط عدم نفوذ و فروروی، نیروی تماسی ($\bar{\mathbf{f}}_c^{(i-1)} = 0$) می‌شود و در نتیجه، ماتریس سختی تماسی ($\bar{\mathbf{k}}_c^{(i-1)}$) نیز در معادله تعادلی گفته شده برابر با صفر شده است. در مورد شرایط نفوذ و فروروی، نیروی تماسی و ماتریس سختی تماس مورد نیاز برای حل معادله تعادلی فوق به صورت زیر به دست آمده است:

$$\bar{\mathbf{f}}_c^{(i-1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_n (\mathbf{g}_n^{(i-1)} + \theta_n) \\ \mathbf{K}_t (\mathbf{g}_t^{(i-1)} + \theta_t) \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$\bar{\mathbf{k}}_c^{(i-1)} = \nabla \bar{\mathbf{f}}_c^{(i-1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_n & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_t \end{bmatrix}. \quad (24)$$

در انتهای مرحله اول، گره تماس در نقطه تماس اولیه (D) و جابه‌جایی ($\bar{\mathbf{u}}'$) قرار دارد و نیروهای عکس‌العملی ($\bar{\mathbf{f}}_t'$) و ($\bar{\mathbf{f}}_n'$) در این نقطه مشخص هستند.

مرحله دوم فرمول‌بندی: در اینجا، هدف یافتن جابه‌جایی گرهی ($\bar{\mathbf{u}}''$) با توجه به اثرات تماس اصطکاکی است. به عبارت دیگر در مرحله دوم، چگونگی قرارگیری گره تماسی در شرایط تماس لغزشی و یا چسبندگی در سطح بار فعلی تعیین می‌شود. معادله نموی برای مرحله دوم فرمول‌بندی عبارت است از:

$$\begin{aligned} & (\bar{\mathbf{k}}^{(i-1)} + \bar{\mathbf{k}}_c^{(i-1)}) \Delta \bar{\mathbf{u}}^{(i)} - \bar{\mathbf{f}}_c' + \bar{\mathbf{r}}^{(i-1)}, \\ & \quad + \bar{\mathbf{f}}_c^{(i-1)} = 0, \quad (25) \end{aligned}$$

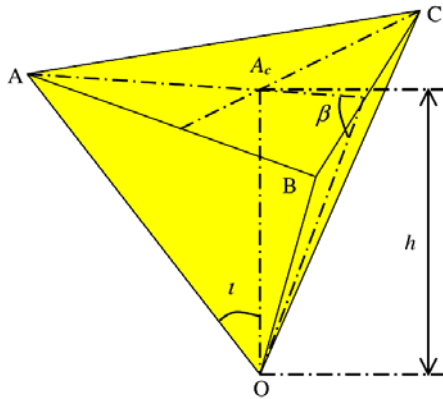
که در آن، ($\bar{\mathbf{r}}^{(i-1)} = \bar{\mathbf{k}}^{(i-1)} \bar{\mathbf{u}}^{(i-1)}$) بردار نیروی گرهی متناسب با تنش‌های المانی است. بردار نیروی تماس مورد نیاز و ماتریس سختی تماس برای حل معادله تعادلی فوق به سه صورت زیر بیان شده است:

I. شرایط چسبندگی برای قانون کولمب کلاسیک:

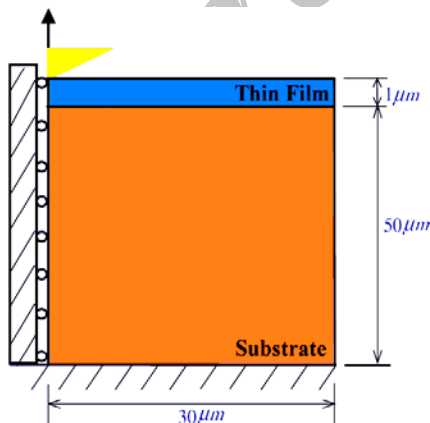
$$\bar{\mathbf{f}}_c^{(i-1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_n (\mathbf{g}_n^{(i-1)} + \theta_n) \\ \mathbf{r}_t \mathbf{f}_t \end{bmatrix}, \quad (26)$$

ابعاد ۲۰ میلی‌متر طول و عرض و ۶ میلی‌متر ارتفاع انتخاب شدند. سرعت فروروی فرورونده در نمونه‌ها برابر با مقدار ثابت ۵ نانومتر بر ثانیه بوده است.

با استفاده از ضریب پواسون ثابت 0.3 می‌توان معادلات مربوطه اسندن را به‌طور مستقیم به منحنی‌های بار جابه‌جایی برآزش داد. آنگاه مدول الاستیسیته فیلم پلیمری پلی‌ونیل استات را محاسبه نمود [۱۲]. پس از بدست آوردن مدول مورد نیاز، فرآیند فروروی یک فرورونده برکویچ در لایه پلیمری پلی‌ونیل استات به صورت شکل ۵ شبیه‌سازی و با فرمول‌بندی المان‌های محدود ارائه شده مورد ارزیابی قرار گرفته است.



شکل (۴): طرح کلی نمونه طراحی شده یک نانو فرورونده برکویچ.



شکل (۵): طراحی المان‌های محدود هندسه فرآیند فروروی نانو.

۸- الگوریتم عددی

در اینجا به اختصار، مراحل الگوی فرمول‌بندی بهبودیافته لاگرانژ الحاقی مورد استفاده ارائه می‌شود:

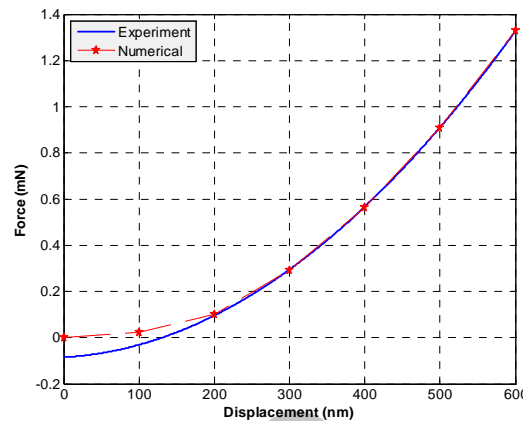
- آغاز حلقه نمو بار،
- آغاز حلقه الحاق، که با استفاده از بهنگام‌سازی عوامل روش لاگرانژ الحاقی انجام می‌شود،
- حل معادله نموی (۳۲)، برای جابه‌جایی به صورت تکرار شونده تا محصول همگرایی که این مرحله، معادل با مراحل کمینه‌سازی کنش‌مند لاگرانژ الحاقی (۲۰) برای گره‌های عامل مرحله اول و حل معادله تعادل (۲۵) برای گره‌های مرحله دوم است،
- اگر قیود تماس برای گره‌های عامل مرحله اول با دقت مطلوبی ارضا شوند، این گره‌ها به‌طور دقیق در نقاط تماس ابتدایی‌شان قرار دارند. سپس شرایط اصطکاکی این گره‌ها باید بررسی شوند. اگر قیود تماس برای گره‌های عامل مراحل اول و دوم با دقت مطلوبی ارضا شوند، حلقه الحاق باید شکسته شود و به مرحله اول بازگردد تا بار، نمو یابد. در غیر این صورت، باید فرآیند ادامه یابد،
- به‌هنگام‌سازی عوامل لاگرانژ الحاقی با یک فرآیند خودکار برای گره‌هایی که توسط قیود تماس هنوز با دقت مطلوبی ارضا نشده‌اند،
- پایان حلقه الحاق و
- پایان حلقه نمو بار.

۹- نتایج تحلیل فرآیند فروروی نانو

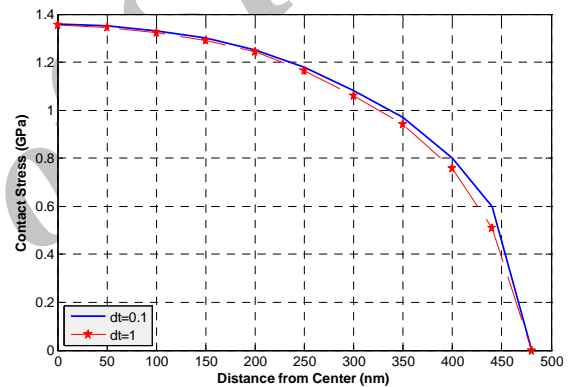
در اینجا مسئله تماسی فرآیند فروروی یک فرورونده نانو برکویچ در یک نیم‌فضای صفحه‌ای دو بعدی متشکل از یک فیلم نازک پلی‌ونیل استات به عنوان پوشش الاستیک و یک لایه زیرین صلب مورد بررسی قرار گرفته است. از فرورونده‌های برکویچ ساخته شده از الماس با نوک هرمی سه وجهی که نمای طرح‌وار آن در شکل ۴ نشان داده شده مورد استفاده قرار گرفته است. نانو فرورونده‌های برکویچ مانند انواع مخروطی با زاویه نیم مخروطی $70/3$ درجه هستند. لایه نازک پلیمری پلی‌ونیل استات کاربردهای فراوانی به عنوان رزین پوششی دارد. نمونه‌هایی از پلی‌ونیل استات به

در ابتدا ضریب اصطکاک برابر با $0/2$ انتخاب شد. پس از گسسته‌سازی المان‌های محدود و سپس حل فرمول‌بندی عددی، منحنی نیرو - جابه‌جایی غیرخطی آن بدست آمد. در شکل ۶ منحنی نیرو - جابه‌جایی متوسط تحت آزمایش‌های فروری نانو با یک نرخ جابه‌جایی ثابت نشان داده شده و با منحنی نیرو - جابه‌جایی حاصل از حل فرمول‌بندی عددی مقایسه شده است. همان طور که در این شکل دیده می‌شود تفاوت چندانی بین این دو منحنی (به استثنای ابتدای آن) وجود ندارد که این تفاوت ابتدایی نیز به دلیل شرایط مقیاسی آزمایش و نمونه‌ها بوده و قابل صرف نظر کردن می‌باشد. در شکل ۷ نیز نحوه توزیع تنش نرمال تماسی در میانجی بین فرورونده و سطح لایه پلی‌ونیل استات به ازای دو طول گام بار متفاوت $0/1$ و 1 نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود بیشینه تنش تماسی حدود $1/4$ گیگا پاسکال در مرکز ناحیه فروری می‌باشد. تنش تماسی با یک فرآیند کاهش در فاصله حدود 500 نانومتری از مرکز ناحیه مشترک تماسی به مقدار صفر رسیده است. بیش‌ترین فشار تماسی در مرکز ناحیه تماس می‌باشد. نتایج مناسب‌تری با افزایش گام بدست خواهد آمد. جابه‌جایی مماسی در ارتباط مستقیم با اصطکاک است که اثر اصطکاک بر آن در اینجا مورد بررسی قرار گرفته است. در شکل ۸ اثر میزان اصطکاک بر جابه‌جایی مماسی یکی از گره‌های فیلم به ازای تعداد گام‌های بار متفاوت قابل مشاهده است. در شرایط هموار بدون اصطکاک به‌طور تقریبی تعداد گام بی اثر بوده و میزان جابه‌جایی مماسی تماسی یکسان خواهد بود. با افزایش تعداد گام‌های بار برابری کاملی با حل تحلیلی [۸] وجود دارد. همان‌طور که مشاهده می‌شود تعداد گام در اصطکاک‌های پایین، اثر کمی بر جابه‌جایی و نیروی مماسی دارد و تعداد گام‌های بیش‌تر با افزایش میزان اصطکاک به حل تحلیلی دارای همگرایی بالاتری هستند.

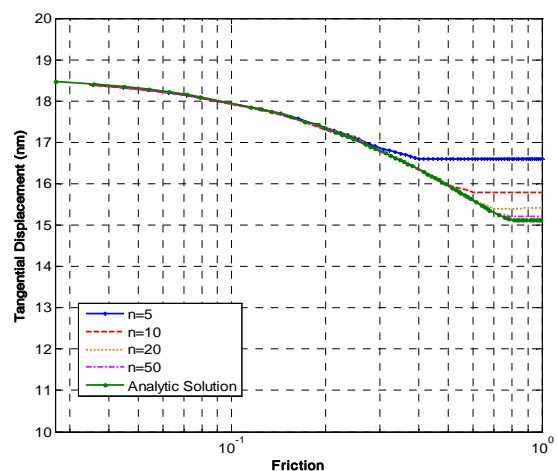
در ادامه فرآیند فروری نانو یک فروروندی کروی با شعاع 5 میکرومتر در لایه پلیمری پلی‌ونیل استات شبیه‌سازی شده و با فرمول‌بندی المان‌های محدود مورد ارزیابی قرار گرفته است. در این قسمت، ضریب اصطکاک برابر با $0/2$ انتخاب شده است. در شکل ۹ چگونگی توزیع



شکل (۶): مقایسه منحنی نیرو - جابه‌جایی حاصل از حل عددی با منحنی متوسط حاصل از آزمایش‌های فروری نانو.



شکل (۷): نحوه توزیع تنش نرمال تماس بر فیلم پلی‌ونیل استات در ناحیه تماس به ازای دو گام متفاوت.



شکل (۸): اثر میزان اصطکاک بر جابه‌جایی مماسی یکی از گره‌های فیلم پلیمری به ازای تعداد گام‌های باری متفاوت.

بهبودیافته و فرمول‌بندی عددی پنالتی مقایسه شده است. همان‌طور که در این شکل نیز مشاهده می‌شود تفاوت چندانی بین منحنی تجربی و منحنی لاگرانژ الحاقی بهبودیافته وجود ندارد ولی فرمول‌بندی عددی پنالتی، تفاوت مشهودی را با واقعیت دارد.

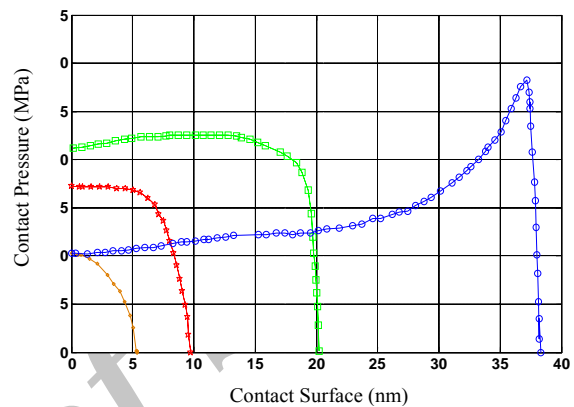
روش‌های مرسوم لاگرانژ و پنالتی قابلیت‌های ابتدایی و با قابلیت اطمینان پایینی را در ارضای قیود تماس دارا هستند. در واقع، رهیافت بهینه‌سازی لاگرانژ الحاقی ترکیب این دو روش مرسوم به منظور رسیدن به همگرایی مناسب‌تر با واقعیت است.

۱۰- نتیجه‌گیری

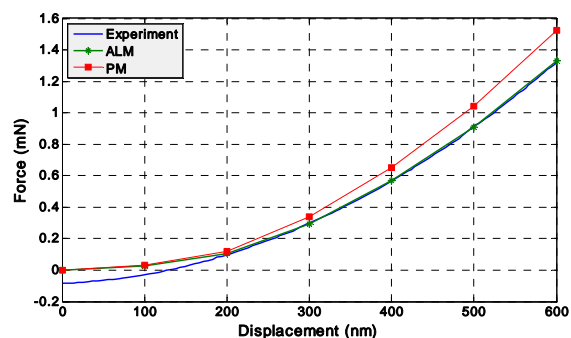
در سال‌های اخیر مسائل تماسی و ضربه در مکانیک جامدات محاسباتی به دلیل اهمیت غیرقابل توصیف در طراحی و تحلیل‌های مهندسی به عنوان یک سطح تحقیق فعال، مطرح بوده است. پدیده تماس در اثر برهم‌کنش‌های تماسی بین اجزاء مکانیکی رخ می‌دهد که بارهای مکانیکی نیز از چنین برهم‌کنش‌هایی ناشی می‌شوند. این امر بیانگر اهمیت مسائل تماسی در طراحی و تحلیل مهندسی هستند. با این وجود به دلیل فرمول‌بندی‌های پیچیده، پدیده‌های تماسی به ندرت در فرآیندهای طراحی مرسوم مورد نظر قرار می‌گیرند و اغلب در تحلیل‌های با دقت بالا اهمیت دارند.

هدف مطالعه حاضر توسعه یک طرح محاسباتی نمودی - انطباقی بر مبنای الگویی غیرخطی برای محاسبه‌ی تنش‌های شبه‌استاتیک تماسی در سامانه‌های الاستیک بوده است. بر اساس شرایط سینماتیکی و هندسی پیکره‌های در حال تماس، از یک رهیافت لاگرانژ الحاقی بهبودیافته جدید استفاده شده است. این فرآیند حل جدید بر دشواری‌های تعیین دو عامل اصلی پنالتی و تعداد گام‌های بار نمودی که در روش‌های مرسوم توسط کاربر تعیین می‌شده‌اند غلبه نموده است. الگوریتم استفاده شده در مثال کاربردی بیان شده برای شرایط اصطکاک چسبندگی و لغزشی به خوبی همگرا گردید و مورد تحلیل قرار گرفت. همگرایی حل در این مثال‌ها با گام گذاری بار خودکار و پیش‌گویی بار تماس به دست آمد.

فشار تماسی در میانجی بین فرورونده‌ی کروی و رویه لایه پلی‌ونیل استات پلیمری به ازای تعداد گام‌های باری متفاوت نشان داده شده است. منحنی با مشخصه‌ی (-•-) که دارای بیش‌ترین تعداد گام (۴۰۰) است همبستگی کاملی با حل تحلیلی دارد. دوباره با افزایش تعداد گام‌ها همگرایی بهتری بدست آمده است.



شکل (۹): چگونگی توزیع فشار تماسی در میانجی تماسی به ازای تعداد گام‌های بار متفاوت.



شکل (۱۰): مقایسه منحنی نیرو - جابه‌جایی حاصل از فرمول‌بندی عددی ارایه شده با منحنی‌های حاصل از آزمایش فروروی و فرمول‌بندی پنالتی.

در انتها نیز اعتبار فرمول‌بندی لاگرانژ الحاقی بهبودیافته با روش مرسوم پنالتی مورد بررسی قرار گرفته است. در شکل ۱۰ منحنی نیرو - جابه‌جایی متوسط تحت آزمایش‌های فروروی نانو نشان داده شده که با منحنی نیرو - جابه‌جایی حاصل از حل فرمول‌بندی عددی لاگرانژ الحاقی

مراجع

9. Baba, A.A., Radi, B., and Gelin, J.C. "An Augmented Lagrangian Treatment of the Metal Forming Process", *Math. and Comp. Modelling*, Vol. 32, No. 10, pp. 1171–1179, 2000.
10. Mijar, A.R. and Arora, J.S. "An Augmented Lagrangian Optimization Method for Contact Analysis Problems, Formulation and Algorithm", *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 28, No's. 2–3, pp. 99–112, 2004.
11. Assie, A.E., Eltahir, M.A., and Mahmoud, F.F. "Modeling of Viscoelastic Contact–Impact Problems", *Appl. Math. Modelling*, Vol. 34, No. 9, pp. 2336–2352, 2010.
12. Ashrafi, H. and Farid, M. "A Computational Matrix Inversion Approach for Analysis of Contact Problems between any Rigid Nano-indenter and Viscoelastic Bodies", *Mech. Aerospace J.*, Vol. 5, No. 4, pp. 33-42, 2010 (In Persian).
13. Ashrafi, H., Mahzoon, M., and Shariyat, M. "A New Mathematical Modelling of Contact Treatment between an Orthotropic Material and a Rigid Indenter", *Iranian J. Mat. Sci. and Eng.*, Vol. 9, No. 1, pp. 29-41, 2012.
14. Malvern, L.E. "Introduction to the Mechanics of Continuous Medium", Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1969.
15. Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L. "The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics", 6th Ed., Elsevier Butterworth-Heinemann, Oxford, 2005.
16. Wriggers, P. "Computational Contact Mechanics", John Wiley and Sons, New York, 2004.
17. Jahn, J. "Introduction to the Theory of Non-linear Optimization", Springer, New York, 2007.
18. Galin, L.A. "Contact Problems", Springer, New York, 2008.
1. Laursen, T.A. "Computational Contact and Impact Mechanics", Springer, New York, 2002.
2. Oden, J.T. and Kikuchi, N. "Contact Problems in Elasticity, a Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods", SIAM, Philadelphia, 1988.
3. Alart, P. and Curnier, A. "A Mixed Formulation for Frictional Contact Problems Prone to Newton Like Solution Methods", *Comp. Methods in Appl. Mech. and Eng.*, Vol. 92, No. 3, pp. 353–375, 1991.
4. Simo, J.C., Wriggers, P., and Taylor, R.L. "A Perturbed Lagrangian Formulation for the Finite Element Solution of Contact Problems", *Comp. Methods in Appl. Mech. and Eng.*, Vol. 50, No. 2, pp. 163–180, 1985.
5. Simo, J.C. and Laursen, T.A. "An Augmented Lagrangian Treatment of Contact Problems Involving Friction", *Comp. and Struct.*, Vol. 42, No. 1, pp. 97–116, 1992.
6. Zavarise, G., Wriggers, P., and Schrefler, B.A. "On Augmented Lagrangian Algorithms for Thermo-mechanical Contact Problems with Friction", *Int. J. Num. Methods in Eng.*, Vol. 38, No. 17, pp. 2929–2949, 1995.
7. Auricchio, F. and Sacco, E. "Augmented Lagrangian Finite Elements for Plate Contact Problems", *Int. J. Num. Methods in Eng.*, Vol. 39, No. 24, pp. 4141–4158, 1996.
8. Pietrzak, G. and Curnier, A. "Large Deformation Frictional Contact Mechanics; Continuum Formulation and Augmented Lagrangian Treatment", *Com. Methods in App. Mech. and Eng.*, Vol. 177, No. 1, pp. 351–381, 1999.