

## بررسی اثر کاربرد هسته هدفمند بر کاهش پدیده تورق در ورق‌های ساندویچی کامپوزیتی در بارگذاری عرضی

کرامت ملک‌زاده فرد<sup>۱</sup>      علی نظری<sup>۲</sup>، علی مظفری<sup>۳</sup> و مسعود ابراهیمی<sup>۴</sup>

دانشکده مهندسی هوافضا

دانشکده مهندسی هوافضا

دانشگاه صنعتی مالک اشتر

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

( تاریخ دریافت: ۱۳۸۹/۱۱/۱۱؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۰/۹/۲۶ )

### چکیده

در تحقیق حاضر اثر کاربرد هسته هدفمند بر کاهش پدیده تورق در محل اتصال رویه‌ها به هسته میانی در ورق‌های ساندویچی کامپوزیتی در بارگذاری عرضی یکنواخت مورد بررسی قرار گرفته است. برای استخراج معادلات تعادل، از روش تغییراتی و اصل همپلتون استفاده شده و شرایط مرزی بر روی همه لبه‌ها به صورت ساده در نظر گرفته شده است. تئوری به‌کار رفته در رویه‌ها، تئوری برشی مرتبه اول است. جابه‌جایی‌های هسته در جهات مختلف با چندجمله‌ای‌هایی با ضرایب نامشخص طراحی شده‌اند. فرض شده که هسته قابلیت تحمل تنش‌های برشی و نرمال صفحه‌ای را دارد و اثرات آن‌ها در استخراج سامانه معادلات پانل در نظر گرفته شده است. خواص مواد هدفمند نیز با استفاده از تابع توانی در راستای ضخامت هسته طراحی شده است. همچنین، اثر هدفمند بودن هسته میانی بر میزان جابه‌جایی‌های هسته ورق ساندویچی در هر سه راستا، مورد بررسی قرار گرفته است. برای بررسی درستی نتایج، برنامه‌ای نیز در محیط APDL نرم‌افزار انسیس نوشته شد. تطابق قابل قبول نتایج حل تحلیلی و عددی نشان‌دهنده درستی محاسبات انجام شده است.

**واژه‌های کلیدی:** جدایش، پانل ساندویچی، هسته هدفمند، تئوری مرتبه بالای بهبودیافته

## The Effect of Applying Functionally Graded Core to Decrease Delamination of Composite Sandwich Panel under Transverse Load

K. Malekzadeh Fard      A. Nazari, A. Mozaffari, and M. Ebrahimi

Aerospace Eng. Dep't

Malek Ashtar Univ.

Aerospace Eng. Dep't

K.N. Toosi Univ.

(Received: 31 Jan., 2011; Accepted: 17 Dec., 2011)

### ABSTRACT

In this study effect of applying functionally graded core to decrease delamination of composite sandwich panel under transverse load is considered. The simply supported boundary conditions are applied on faces' edges. Hamilton's principle and functional method are used to derive equilibrium equations. First, shear deformation theory (FSDT) is used for faces. Core displacement in various directions is modeled by polynomial with indeterminate coefficients. The material properties of FGM are functionally graded in thickness direction according to volume fraction power law distribution. It is assumed that core is able to sustain shear and normal in-plane stresses. Finally, the effect of FGM core on the displacement of sandwich panel under load in three directions are considered. the numerical results of present analysis has been compared with the ANSYS results showing good agreements.

**Keywords:** Delamination, Sandwich Panel, FGM Core, Improved Higher Order sandwich Plate Theory

۱ - دانشیار (نویسنده پاسخگو): k.malekzadeh@gmail.com

۲ - کارشناس ارشد: nazariali23@yahoo.com

۳ - استادیار: mozaffari@kntu.ac.ir

۴ - کارشناس ارشد: masoudebrahimi@rocketmail.com

## ۱- مقدمه

در کامپوزیت‌های لایه‌ای، انتقال ناگهانی خصوصیات مواد از یک لایه به لایه دیگر باعث ایجاد تنش‌های نامطلوب بین لایه‌ای در فصل مشترک لایه‌ها می‌شود. این تنش‌ها می‌توانند باعث تغییر شکل پلاستیک، ایجاد ترک و حتی جدایش لایه‌ها شوند که این اثرات نامطلوب با به کار بردن مواد هدفمند برطرف خواهند شد.

FGM ها در واقع کامپوزیت‌های پیشرفته‌ای هستند که به صورت میکروسکوپی طراحی شده‌اند تا تغییرات فاصله‌ای تدریجی و پیوسته‌ای را در خصوصیات ماده ارائه دهند. به عبارت دیگر خواص ماده هدفمند از قبیل مدول یانگ، ضریب انبساط حرارتی و یا ضریب هدایت حرارتی طبق تابعی خاص در یک یا چند بعد تغییر می‌نماید. این کار با تغییر در کسر حجمی مواد تشکیل‌دهنده و ریزساختار آنها ممکن خواهد بود. مواد هدفمند با استفاده از خاصیت ذاتی خود مشخصه‌های مکانیکی و مکانیکی یک سازه را بهبود داده‌اند. مزیت استفاده از FGM ها در هسته سازه ساندویچی، کاهش گسیختگی و افزایش ظرفیت تحمل بار از راه حذف جهش‌های ناگهانی در تغییر خواص است.

تاکنون مطالعات فراوانی در مورد مواد هدفمند انجام شده است. مواد هدفمند در سال ۱۹۸۴ توسط کویزومی در لابراتوار هوافضای ژاپن به عنوان یک ماده برای روکش‌های حرارتی قابل استفاده در کاربردهای فضایی و راکتورهای گداخت معرفی شد.

فرستیگ<sup>۱</sup> و همکاران در سال ۲۰۰۳ ارتعاشات آزاد پانل‌های ساندویچی با هسته انعطاف‌پذیر را با استفاده از تئوری مرتبه بالا بررسی نمودند. آن‌ها برای رسیدن به فرمولاسیون از اصل همیلتون استفاده نمودند. برای رویه‌ها از تئوری کلاسیک و برای هسته از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی استفاده نموده و با دو طرح محاسبات را انجام دادند. در طرح اول تنش برشی در هسته و جابه‌جایی‌ها در رویه‌های بالا و پایین جزء مجهولات مسئله فرض شده و در طرح دوم یک توزیع چند جمله‌ای برای میدان جابه‌جایی در هسته در نظر گرفته شده است. مجهولات نیز ضرایب چند جمله‌ای به همراه جابه‌جایی‌های رویه‌های بالا و پایین هستند [۱].

ملک‌زاده و خلیلی تئوری بهبود یافته مرتبه بالای ورق-های ساندویچی را بر پایه تئوری مرتبه بالای فرستینگ ارائه دادند. آن‌ها برای رویه‌ها از تئوری برشی مرتبه اول استفاده نمودند. در این تئوری سهم نیروهای صفحه‌ای رویه‌های بالایی و پایینی ورق و عامل استهلاک معادل ورق ساندویچی نیز محاسبه و میرایی سامانه برای تحلیل ارتعاشات در نظر گرفته شد [۲].

ردی و پروان<sup>۲</sup> در سال ۱۹۹۸ به تحلیل ورق‌هایی از جنس مواد هدفمند که تحت بارهای استاتیکی و حرارتی قرار داشتند پرداختند. آنها در این تحقیق تغییر مکان‌ها را بزرگ فرض نموده و از رابطه کرنش - تغییر مکان غیر خطی فون کارمن استفاده نمودند [۳].

زنکور<sup>۳</sup> در سال ۲۰۰۵ به تحلیل گسترده ورق‌های FGM پرداخت و تنش‌ها، خمش، ارتعاشات آزاد و کمناش آن‌ها را بررسی نمود. او برای تحلیل خمش، یک حل دو بعدی بر اساس تئوری تغییر شکل برشی سینوسی ارائه داد. شرایط مرزی را به صورت ساده در نظر گرفت و بار بحرانی برای کمناش و چند فرکانس طبیعی ارتعاشات آزاد را به دست آورد. او همچنین اثر تغییر شکل‌های برشی عرضی، نسبت طول به عرض صفحات، نسبت عرض به ضخامت و توزیع کسر حجمی را بر روی خمش، تنش و ارتعاشات این صفحات بررسی نمود [۴].

رامیرز<sup>۴</sup> و همکاران در سال ۲۰۰۶ به تحلیل استاتیکی صفحات الاستیک ناهمسانگرد FGM با استفاده از روش لایه‌های مجزا پرداختند. آن‌ها یک حل تقریبی برای تحلیل استاتیکی سه بعدی ورق‌های الاستیک ناهمسانگرد ساخته شده از مواد FGM را ارائه دادند. هم‌چنین از روش ریتز برای حل معادلات استفاده نمودند و در تحقیق خود از دو نوع ماده FGM استفاده کردند که در یک حالت خواص مکانیکی را به صورت تابع توانی و در حالت دیگر خواص مکانیکی را به صورت تابعی از جهت‌گیری فیبرها در نظر گرفتند [۵].

2- Reedy

3- Zenkour

4- Ramirez

1- Frostig

نرمال و دیگری چرخش‌های برشی بود. آن‌ها نتایج عددی خود را برای خمش‌های عرضی محوری و تنش‌های برشی در ضخامت میانی تیرهای FGM تحت بارهای توزیع شده یکنواخت برای شرایط مرزی ساده به دست آوردند. هم‌چنین اثر درصد‌های حجمی مختلف از فلز-سرامیک را بر روی خمش و تنش بررسی نمودند [۹].

## ۲- فرضیات

در این پژوهش برای بررسی رویه‌ها، از تئوری برشی مرتبه اول و برای هسته از طرح دوم فرستیک استفاده شده است. جابجایی‌های استاتیکی در داخل هسته و در راستای ضخامت در شرایطی که بارگذاری کلی اعمال می‌شود به طور عمومی غیرخطی است و به جابجایی‌های رویه‌های بالایی و پایینی و تنش برشی عمودی در هسته وابسته است. غیرخطی بودن در این توزیع‌ها به طور جدی با تغییرات تنش‌های برشی عمودی در ارتباط است. به همین دلیل هنگامی که بارهای کاملاً گسترده روی رویه‌ها اعمال می‌شود، این غیرخطی بودن کوچک خواهد بود و بدون از دست دادن دقت، می‌توان به جای آن از توزیع خطی استفاده نمود. در طرح دوم جابه‌جایی‌ها در جهت‌های مختلف در هسته میانی به صورت چند جمله‌ای با ضرایب نامعلوم فرض می‌شوند. مزیت این روش این است که بارهای دینامیکی به طور مستقیم در معادلات حرکت هسته وارد می‌شوند و نیازی به فعل و انفعال با رویه‌های بالا و پایین ندارند. در این حالت مجهولات، جابه‌جایی‌های هسته و رویه‌ها هستند. در این پژوهش از اثرات دما، رطوبت و نرخ کرنش در تحلیل صرف‌نظر شده است. پانل ساندویچی مورد بررسی مستطیلی بوده و دارای دو رویه چند لایه کامپوزیتی و یک هسته میانی از جنس مواد هدفمند است. شرایط تکیه‌گاهی رویه‌های بالایی و پایینی اطراف لولا فرض شده و خواص هسته‌های هدفمند وابسته به مختصات در راستای ضخامت در نظر گرفته شده و بر اساس توابع کسر حجمی تغییر نموده است. هم‌چنین در این تحلیل برای اولین بار تنش‌های برشی و نرمال صفحه‌ای در هسته در نظر گرفته شده‌اند. سطح مشترک هسته با رویه‌ها به صورت اتصال کامل است که قابلیت تحمل تنش‌های برشی و عمودی را داشته باشد. در

باترا و چنگ<sup>۱</sup> خیز ورق‌های چند ضلعی FGM با شرایط تکیه‌گاهی ساده را به وسیله تئوری برشی مرتبه اول و تئوری برشی مرتبه سوم فرمول‌بندی نمودند. هم‌چنین آن‌ها نتایجی را برای کمناش و ارتعاشات یکنواخت ورق‌های FGM با شرایط تکیه‌گاهی ساده به دست آوردند که بر پایه تئوری ورق ردی بود [۶].

اندرسون<sup>۲</sup> حل تحلیلی سه بعدی برای کامپوزیت ساندویچی با هسته FGM تحت بارگذاری جانبی یک کره صلب را انجام داد. برای آزمودن اثرات هسته یک بارگذاری فشاری عرضی معلوم روی یک ناحیه مشخص اثر کرده و اثرات هسته هدفمند روی تنش‌های برشی و نرمال مورد سنجش قرار گرفت. نتایج این تحلیل نشان داد که هسته هدفمند همیشه تنش‌های برشی جانبی را کاهش نمی‌دهد اما در برخی از پانل‌ها با صفحات رویی نازک و یا نسبت‌های بزرگ طول به ضخامت، افزودن هسته هدفمند بسیار مفید خواهد بود [۷].

وو و مگوید<sup>۳</sup> یک حل تحلیلی برای خیز بزرگ ورق و پوسته نازک ساخته شده از مواد FGM که تحت بارهای مکانیکی جانبی و یک میدان دمایی قرار داشتند را ارائه نمودند. خواص ماده در راستای ضخامت آن به طور پیوسته بر مبنای تابع توانی کسر حجمی تغییر می‌کرد. آن‌ها برای یافتن معادلات از تئوری فون کارمن برای خیز بزرگ جانبی استفاده نمودند [۸].

راویکران کدولی و اختر<sup>۴</sup> در سال ۲۰۰۸ به تحلیل استاتیکی تیرهای FGM با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا پرداختند. آنها با مطالعه رفتار استاتیکی تیرهای فلزی - سرامیکی در دمای محیط، میدان تغییر مکان را بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا به دست آوردند و برای تحلیل خود از اصل انرژی پتانسیل کمینه استفاده نمودند و برای درصد‌های حجمی متفاوت از فلز - سرامیک با استفاده از قانون توزیع نمایی، خواص مکانیکی تحلیل خود را انجام دادند و دو ماتریس سختی به دست آوردند. یکی از ماتریس‌ها بازتاب‌دهنده اثر چرخش‌های

1- Chang &Batra

2-Anderson

3-Woo & Meguid

4- Ravikiran Kadoli and Akhtar

که در آن،  $\varepsilon_{ii}$  و  $\sigma_{ii}$  (X OR Y = i) به ترتیب تنش‌ها و کرنش‌های نرمال در جهات X و Y و اندیس‌های b، t و c به ترتیب معرف رویه‌های بالایی و پایینی و هسته میانی هستند.  $\gamma_{iz}^c$  و  $\tau_{iz}^c$  نیز به ترتیب تنش‌ها و کرنش‌های برشی قائم در هسته میانی بوده و  $\varepsilon_{zz}^c$  و  $\sigma_{zz}^c$  تنش‌ها و کرنش‌های نرمال در جهت قائم در هسته میانی هستند.  $\nu_c$  و  $\nu_b$  و  $\nu_t$  به ترتیب حجم‌های رویه‌های بالایی و پایینی و هسته میانی هستند.

### ۳-۲- بررسی تغییرات مرتبه اول انرژی حاصل از نیروهای خارجی

معادله تغییرات مرتبه اول انرژی حاصل از نیروهای خارجی پانل مورد بررسی، به صورت زیر است:

$$\delta U = \left( - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^a \int_0^b (q_t \delta w_0^t + q_b \delta w_0^b + \bar{n}_{xi} \delta u_0^i + \bar{n}_{yi} \delta v_0^i) dx dy dt \right) - \sum_{j=1}^2 \int_{t_1}^{t_2} \int_0^a \int_0^b (\bar{N}_{xxj}^t \delta u_0^t + \bar{N}_{xyj}^t \delta v_0^t + \bar{N}_{xxj}^b \delta u_0^b + \bar{N}_{xyj}^b \delta v_0^b) \delta D(x-x_j) dx dy dt \quad (3)$$

$$- \sum_{j=1}^2 \int_{t_1}^{t_2} \int_0^a \int_0^b (\bar{N}_{yyj}^t \delta u_0^t + \bar{N}_{xyj}^t \delta v_0^t + \bar{N}_{yyj}^b \delta u_0^b + \bar{N}_{xyj}^b \delta v_0^b) \delta D(y-y_j) dx dy dt.$$

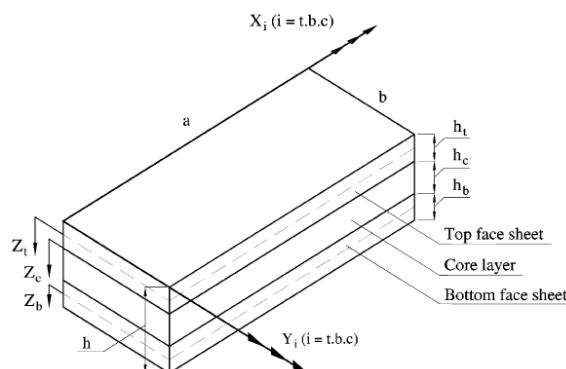
که در آن، qها بارهای دینامیکی عمودی توزیع شده روی رویه‌های بالایی و پایینی ورق و  $\bar{n}$ ها بارهای خارجی از نوع صفحه‌ای بوده که ماهیت تنش دارند و بر روی صفحات رویه‌های بالایی و پایینی ورق موجود هستند.  $\bar{N}_{xxj}^b$  و  $\bar{N}_{xxj}^t$  بارهای خارجی عمود بر لبه بر واحد طول در جهت محور Xها روی لبه‌های  $\begin{cases} x_2 = a \\ x_1 = 0 \end{cases}$  رویه‌های بالایی و پایینی هستند.

$\bar{N}_{yyj}^b$  و  $\bar{N}_{yyj}^t$  بارهای خارجی عمود بر لبه بر واحد طول در جهت محور Yها روی لبه‌های  $\begin{cases} y_2 = a \\ y_1 = 0 \end{cases}$  رویه‌های بالایی و پایینی هستند.

$\bar{N}_{xyj}^b$  و  $\bar{N}_{xyj}^t$  بارهای خارجی برشی صفحه‌ای بر لبه بر واحد طول در جهت محور Yها روی لبه‌های  $\begin{cases} y_2 = a \\ y_1 = 0 \end{cases}$  لبه‌های  $\begin{cases} y_2 = a \\ y_1 = 0 \end{cases}$  هستند و  $\delta_D(x-x_j)$  و  $\delta_D(y-y_j)$

عبارتند از توابع دلتای دیراک در مختصات بارگذاری  $(j=1,2)$ . هم‌چنین  $W_0, \nu_0, u_0$  به ترتیب تغییر مکان‌ها در جهت محورهای X و Y و Z روی رویه‌های بالایی و پایینی

این مقاله همه نیروها، ممان‌های اینرسی و تغییرشکل‌های برشی در هسته میانی و رویه‌ها در نظر گرفته شده است.



شکل (۱): ساختار پانل ساندویچی.

### ۳- طرح تحلیلی

معادلات دیفرانسیل ورق ساندویچی با هسته هدفمند به کمک روش انرژی و اصل همیلتون به دست آمده است. این روش هم‌زمان هم معادلات حاکم بر سامانه و هم معادلات شرایط مرزی سامانه را ارائه می‌دهد. اصل همیلتون به صورت زیر بیان شده است [۱]:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U + V - T) dt = 0, \quad (1)$$

که در آن، U انرژی پتانسیل (کرنشی)، V انرژی حاصل از نیروهای خارجی و T نشان‌دهنده انرژی جنبشی است.  $\delta$  اپراتور تغییرات مرتبه اول است و  $t_2 - t_1$  بازه زمانی انتگرال-گیری است. در تحلیل استاتیکی از اثرات انرژی جنبشی صرف‌نظر شده است. بنابراین جمله T از معادله (۱) حذف خواهد شد.

### ۳-۱- بررسی تغییرات مرتبه اول انرژی پتانسیل

معادله تغییرات مرتبه اول انرژی پتانسیل پانل مورد بررسی به صورت زیر است:

$$\delta U = \int_{t_1}^{t_2} \int_{V_t} (\sigma_{xx}^t \delta \varepsilon_{xx}^t + \sigma_{yy}^t \delta \varepsilon_{yy}^t + \tau_{xy}^t \delta \gamma_{xy}^t + \tau_{xz}^t \delta \gamma_{xz}^t + \tau_{yz}^t \delta \gamma_{yz}^t) dv \quad (2)$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \int_{V_b} (\sigma_{xx}^b \delta \varepsilon_{xx}^b + \sigma_{yy}^b \delta \varepsilon_{yy}^b + \tau_{xy}^b \delta \gamma_{xy}^b + \tau_{xz}^b \delta \gamma_{xz}^b + \tau_{yz}^b \delta \gamma_{yz}^b) dv$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \int_{V_c} (\sigma_{xx}^c \delta \varepsilon_{xx}^c + \sigma_{yy}^c \delta \varepsilon_{yy}^c + \sigma_{zz}^c \delta \varepsilon_{zz}^c + \tau_{xy}^c \delta \gamma_{xy}^c + \tau_{xz}^c \delta \gamma_{xz}^c + \tau_{yz}^c \delta \gamma_{yz}^c) dv.$$

برای هسته انعطاف‌پذیر عرضی در پانل ساندویچی و با در نظر گرفتن تغییر مکان‌ها و چرخش‌های کوچک روابط سینماتیکی کرنش‌ها به صورت رابطه (۷) خواهند بود:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx}^c = \frac{\partial u_c}{\partial x}, \\ \varepsilon_{yy}^c = \frac{\partial v_c}{\partial y}, \\ \varepsilon_{zz}^c = \frac{\partial w_c}{\partial z}, \\ \gamma_{xz}^c = \frac{\partial u_c}{\partial z} + \frac{\partial w_c}{\partial x}, \\ \gamma_{yz}^c = \frac{\partial v_c}{\partial z} + \frac{\partial w_c}{\partial y}, \\ \gamma_{xy}^c = \frac{\partial u_c}{\partial y} + \frac{\partial v_c}{\partial x}. \end{cases} \quad (7)$$

### ۳-۵- روابط سازگاری

از آنجا که رویه‌ها و هسته میانی کاملاً به هم چسبیده بوده و توابع کرنش در سطوح اتصال لایه‌ها پیوسته فرض شده‌اند، لذا شرایط سازگاری در محل اتصال هسته به رویه‌ها به صورت زیر بیان شده است [۱]:

$$\begin{cases} u_c \left( z_c = -\frac{h_c}{2} \right) = u_0^i + \frac{1}{2} h_t \psi_{xt}^i, \\ u_c \left( z_c = \frac{h_c}{2} \right) = u_0^b - \frac{1}{2} h_b \psi_{xb}^i, \\ v_c \left( z_c = -\frac{h_c}{2} \right) = v_0^i + \frac{1}{2} h_t \psi_{yt}^i, \\ v_c \left( z_c = \frac{h_c}{2} \right) = v_0^b - \frac{1}{2} h_b \psi_{yb}^i, \\ w_c \left( z_c = -\frac{h_c}{2} \right) = w_0^i, \\ w_c \left( z_c = \frac{h_c}{2} \right) = w_0^b. \end{cases} \quad (8)$$

با جای‌گذاری رابطه (۶) در رابطه (۸) و حل دو به دو معادلات خواهیم داشت:

$$\begin{cases} u_2 = \frac{(2(u_0^b + u_0^i) - h_b \phi_x^b + h_t \phi_x^i - 4u_0)}{h_c^2}, \\ u_3 = \frac{(4(u_0^b - u_0^i) - 2(h_b \phi_x^b + h_t \phi_x^i) - 4h_t u_1)}{h_c^3}, \\ v_2 = \frac{(2(v_0^b + v_0^i) - h_b \phi_y^b + h_t \phi_y^i - 4v_0)}{h_c^2}, \\ v_3 = \frac{(4(v_0^b - v_0^i) - 2(h_b \phi_y^b + h_t \phi_y^i) - 4h_t v_1)}{h_c^3}, \\ w_1 = \frac{(w_0^b - w_0^i)}{h_c}, \\ w_2 = \frac{2(w_0^b + w_0^i - 2w_0)}{h_c^2}. \end{cases} \quad (9)$$

هستند و از حاصل ضرب جمله‌های نیرو در عباراتی مثل  $z_j \psi_{xj}^j$  به علت نازک بودن رویه‌ها صرف‌نظر شده است.

### ۳-۳- روابط تغییر مکان‌ها و کرنش‌ها در رویه‌ها

در این مقاله برای بررسی رویه‌ها از تئوری برشی مرتبه اول استفاده شده و تغییر مکان‌ها و چرخش‌ها نیز کوچک در نظر گرفته شده‌اند. روابط تغییر مکان در رویه‌ها به صورت زیر می‌باشند [۱]:

$$\begin{cases} u_j(x, y, z, t) = u_0^j(x, y, t) + z_j \psi_x^j(x, y, t), \\ v_j(x, y, z, t) = v_0^j(x, y, t) + z_j \psi_y^j(x, y, t), \\ w_j(x, y, z, t) = w_0^j(x, y, t), \end{cases} \quad (4)$$

که در آن،  $\psi_x^j$  چرخش مقطع عرضی حول محور X در رویه‌های بالا و پایین،  $\psi_y^j$  چرخش مقطع عرضی حول محور Y در رویه‌های بالا و پایین،  $u_0^j(x, y, t)$  مؤلفه تغییر مکان در صفحه میانی رویه‌ها در جهت X،  $v_0^j(x, y, t)$  مؤلفه تغییر مکان در صفحه میانی رویه‌ها در جهت Y،  $w_0^j(x, y, t)$  مؤلفه تغییر مکان در صفحه میانی رویه‌ها در جهت Z و هم-چنین  $z_j$  مختصات قائم به سمت پایین می‌باشد. روابط مربوط به کرنش‌ها در رویه‌های بالا و پایین عبارتند از:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx}^i = \frac{\partial u_0^i}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_x^i}{\partial x}, \\ \varepsilon_{yy}^i = \frac{\partial v_0^i}{\partial y} + z \frac{\partial \phi_y^i}{\partial y}, \\ \varepsilon_{xy}^i = \frac{\partial u_0^i}{\partial y} + z \frac{\partial v_0^i}{\partial x} + z \left( \frac{\partial \phi_x^i}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y^i}{\partial x} \right). \end{cases} \quad (5)$$

### ۳-۴- روابط تغییر مکان‌ها و کرنش‌ها در هسته

در این تحلیل جابه‌جایی‌های هسته را با استفاده از طرح دوم فرستیک به صورت زیر در نظر گرفته شده است [۱]:

$$\begin{cases} u_c(x, y, z_c, t) = u_0(x, y, t) + z_c u_1(x, y, t) + z_c^2 u_2(x, y, t) + z_c^3 u_3(x, y, t), \\ v_c(x, y, z_c, t) = v_0(x, y, t) + z_c v_1(x, y, t) + z_c^2 v_2(x, y, t) + z_c^3 v_3(x, y, t), \\ w_c(x, y, z_c, t) = w_0(x, y, t) + z_c w_1(x, y, t) + z_c^2 w_2(x, y, t). \end{cases} \quad (6)$$

در رابطه فوق،  $z_c$  مختصات قائم به سمت پایین است و سایر جمله‌ها ضرایب مجهولی هستند که باید محاسبه شوند.

آن‌ها در اصل همیلتون، سامانه معادلات دیفرانسیل تحلیل استاتیکی ورق ساندویچی کامپوزیتی با هسته هدفمند به-دست آمده‌اند.

#### ۴- سامانه معادلات تحلیل استاتیکی ورق ساندویچی

##### کامپوزیتی با هسته انعطاف‌پذیر و مواد هدفمند

سامانه معادلات حاکم بر مسئله به صورت ۱۵ معادله به‌دست آمده است. پنج معادله مربوط به رویه بالا و پنج معادله مربوط به رویه پایین و پنج معادله مربوط به هسته به صورت زیر است:

$$\frac{\partial N'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N'_{xy}}{\partial y} + \frac{2}{h_c^2} \frac{\partial M'_{2xx}}{\partial x} + \frac{2}{h_c^2} \frac{\partial M'_{2xy}}{\partial y} + \frac{2}{h_c^2} \frac{\partial M'_{Q2xz}}{\partial z} - \frac{4}{h_c^3} \frac{\partial M'_{3xx}}{\partial x} - \frac{4}{h_c^3} \frac{\partial M'_{3xy}}{\partial y} - \frac{4}{h_c^3} \frac{\partial M'_{Q3xz}}{\partial z} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial N'_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial N'_{xy}}{\partial x} + \frac{2}{h_c^2} \frac{\partial M'_{2yy}}{\partial y} + \frac{2}{h_c^2} \frac{\partial M'_{2xy}}{\partial x} + \frac{2}{h_c^2} \frac{\partial M'_{Q2yz}}{\partial y} - \frac{4}{h_c^3} \frac{\partial M'_{3yy}}{\partial y} - \frac{4}{h_c^3} \frac{\partial M'_{3xy}}{\partial x} - \frac{4}{h_c^3} \frac{\partial M'_{Q3yz}}{\partial z} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial Q'_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q'_{yz}}{\partial y} - \frac{1}{h_c} \frac{\partial M'_{1z}}{\partial x} - \frac{1}{h_c} \frac{\partial M'_{Q1xz}}{\partial x} - \frac{1}{h_c} \frac{\partial M'_{Q1yz}}{\partial y} + \frac{2}{h_c^2} \frac{\partial M'_{2z}}{\partial x} + \frac{2}{h_c^2} \frac{\partial M'_{Q2xz}}{\partial x} + \frac{2}{h_c^2} \frac{\partial M'_{Q2yz}}{\partial y} = q, \quad (14)$$

$$\frac{\partial M'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M'_{xy}}{\partial y} - Q'_{xz} + \frac{h_l}{h_c^2} \frac{\partial M'_{2xx}}{\partial x} + \frac{h_l}{h_c^2} \frac{\partial M'_{2xy}}{\partial y} + \frac{h_l}{h_c^2} \frac{\partial M'_{Q2xz}}{\partial z} - \frac{2h_l}{h_c^3} \frac{\partial M'_{3xx}}{\partial x} - \frac{2h_l}{h_c^3} \frac{\partial M'_{3xy}}{\partial y} - \frac{2h_l}{h_c^3} \frac{\partial M'_{Q3xz}}{\partial z} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial M'_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial M'_{xy}}{\partial x} - Q'_{yz} + \frac{h_l}{h_c^2} \left( \frac{\partial M'_{2yy}}{\partial y} + \frac{\partial M'_{2xy}}{\partial x} + \frac{\partial M'_{Q2yz}}{\partial z} \right) - \frac{2h_l}{h_c^3} \left( \frac{\partial M'_{3yy}}{\partial y} + \frac{\partial M'_{3xy}}{\partial x} + \frac{\partial M'_{Q3yz}}{\partial z} \right) = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial N^b_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N^b_{xy}}{\partial y} + \frac{2}{h_c^2} \frac{\partial M^c_{2xx}}{\partial x} + \frac{2}{h_c^2} \frac{\partial M^c_{2xy}}{\partial y} + \frac{2}{h_c^2} \frac{\partial M^c_{Q2xz}}{\partial z} + \frac{4}{h_c^3} \frac{\partial M^c_{3xx}}{\partial x} + \frac{4}{h_c^3} \frac{\partial M^c_{3xy}}{\partial y} + \frac{4}{h_c^3} \frac{\partial M^c_{Q3xz}}{\partial z} = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial N^b_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial N^b_{xy}}{\partial x} + \frac{2}{h_c^2} \left( \frac{\partial M^c_{2yy}}{\partial y} + \frac{\partial M^c_{2xy}}{\partial x} + \frac{\partial M^c_{Q2yz}}{\partial y} \right) + \frac{4}{h_c^3} \left( \frac{\partial M^c_{3yy}}{\partial y} + \frac{\partial M^c_{3xy}}{\partial x} + \frac{\partial M^c_{Q3yz}}{\partial z} \right) = 0, \quad (18)$$

با استفاده از روابط (۹) تعداد مجهولات در هسته میانی کاهش یافته است.

برای به‌دست آوردن سامانه معادلات دیفرانسیل تحلیل استاتیکی ورق ساندویچی کامپوزیتی با هسته هدفمند، انتگرال‌هایی به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\left\{ \begin{aligned} [N^i_{xx}, M^i_{xx}] &= \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} (1, Z_i) \sigma^i_{xx} dz_i, \\ [N^i_{yy}, M^i_{yy}] &= \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} (1, Z_i) \sigma^i_{yy} dz_i, \\ [N^i_{xy}, M^i_{xy}] &= \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} (1, Z_i) \tau^i_{xy} dz_i, \\ [N^i_{xz}, M^i_{xz}] &= \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \tau^i_{xz} dz_i, \\ [N^i_{yz}, M^i_{yz}] &= \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \tau^i_{yz} dz_i, \end{aligned} \right. \quad (10)$$

انتگرال‌های تعریف شده برای هسته هدفمند عبارتند از:

$$\left\{ \begin{aligned} [N^c_{xx}, N^c_{yy}, N^c_{xy}] &= \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} (\sigma^c_{xx}, \sigma^c_{yy}, \tau^c_{xy}) dz_c, \\ [M^c_{nxx}, M^c_{myy}, M^c_{mxy}] &= \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} Z_c^n (\sigma^c_{xx}, \sigma^c_{yy}, \tau^c_{xy}) dz_c, \\ [Q^c_{xz}, Q^c_{yz}] &= \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} (\tau^c_{xz}, \tau^c_{yz}) dz_c, \\ [M^c_{Qnxz}, M^c_{Qmyz}] &= \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} Z_c^n (\tau^c_{xz}, \tau^c_{yz}) dz_c, \\ [R^c_z, M^c_{nz}] &= \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} (1, Z_c^n) \sigma^c_{zz} dz_c. \end{aligned} \right. \quad (11)$$

با جای‌گذاری روابط مربوط به تغییر مکان‌ها و کرنش‌های رویه‌ها و هسته میانی در معادلات انرژی پتانسیل و استفاده از روابط به‌دست آمده از شرایط سازگاری (۹) و همچنین استفاده از انتگرال‌های تعریف شده (۱۰-۱۱) و جای‌گذاری

۵- طراحی نیروهای عرضی

نیروهای اعمالی به پانل نیز با استفاده از سری فوریه و به صورت رابطه (۲۷) نمایش داده شده‌اند:

$$P(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn} (\sin \alpha_m x) (\sin \beta_n y), \quad (27)$$

که برای بارگذاری‌های مختلف فقط جمله  $P_{mn}$  تغییر می‌کند. برای بارگذاری گسترده، جمله  $P_{mn}$  به صورت معادله زیر است:

$$\begin{cases} P_{mn} = \frac{16P_0}{mn\pi^2} \text{for } (m, n = 1, 3, 5, \dots), \\ P_{mn} = 0 \text{for } (m, n = 2, 4, 6, \dots). \end{cases} \quad (28)$$

برای بارگذاری متمرکز جمله  $P_{mn}$  نیز به صورت معادله زیر است:

$$\begin{cases} P_{mn} = \frac{4p}{ab} \left( \sin \frac{m\pi x_1}{a} \right) \left( \sin \frac{n\pi y_1}{b} \right) \text{for } (m, n = 1, 3, 5, \dots), \\ P_{mn} = 0 \text{for } (m, n = 2, 4, 6, \dots). \end{cases} \quad (29)$$

۶- پاسخ تحلیل استاتیکی

با استفاده از روابط تنش و کرنش در رویه‌ها و هسته میانی و جایگذاری این روابط در معادلات ۱۲ تا ۲۵ و استفاده از روابط سازگاری، ۱۵ معادله بر حسب جابه‌جائی‌ها و چرخش‌های رویه‌ها و هسته میانی به دست آمده که به علت حجیم بودن معادلات مربوطه از ارائه آنها خودداری شده است. برای به دست آوردن پاسخ تحلیل استاتیکی ورق با تکیه‌گاه ساده از روش حل با سری فوریه استفاده شده است:

$$(30)$$

$$\begin{bmatrix} u_0^i(x, y, t) \\ v_0^i(x, y, t) \\ w_0^i(x, y, t) \\ \varphi_x^i(x, y, t) \\ \varphi_y^i(x, y, t) \\ u_k(x, y, t) \\ v_k(x, y, t) \\ w_l(x, y, t) \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} C_{u_0^i}^{mn} \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \\ C_{v_0^i}^{mn} \sin(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \\ C_{w_0^i}^{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \\ C_{\varphi_x^i}^{mn} \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \\ C_{\varphi_y^i}^{mn} \sin(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \\ C_{u_k}^{mn} \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \\ C_{v_k}^{mn} \sin(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \\ C_{w_l}^{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \end{bmatrix}$$

$$(19)$$

$$\frac{\partial Q_{xz}^b}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}^b}{\partial y} + \frac{1}{h_c} \left( \frac{\partial M_{1z}^c}{\partial x} + \frac{\partial M_{Q1xz}^c}{\partial x} + \frac{\partial M_{Q1yz}^c}{\partial y} \right) + \frac{2}{h_c^2} \left( \frac{\partial M_{2z}^c}{\partial x} + \frac{\partial M_{Q2xz}^c}{\partial x} + \frac{\partial M_{Q2yz}^c}{\partial y} \right) = q_b,$$

$$(20)$$

$$\frac{\partial M_{xx}^b}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^b}{\partial y} - Q_{xz}^b - \frac{h_b}{h_c^2} \frac{\partial M_{2xx}^c}{\partial x} - \frac{h_b}{h_c^2} \frac{\partial M_{2xy}^c}{\partial y} - \frac{h_b}{h_c^2} \frac{\partial M_{Q2xz}^c}{\partial z} - \frac{2h_b}{h_c^3} \frac{\partial M_{3xx}^c}{\partial x} - \frac{2h_b}{h_c^3} \frac{\partial M_{3xy}^c}{\partial y} - \frac{2h_b}{h_c^3} \frac{\partial M_{Q3xz}^c}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial M_{yy}^b}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}^b}{\partial x} - Q_{yz}^b - \frac{h_b}{h_c^2} \left( \frac{\partial M_{2yy}^c}{\partial y} + \frac{\partial M_{2xy}^c}{\partial x} + \frac{\partial M_{Q2yz}^c}{\partial z} \right)$$

$$(21)$$

$$- \frac{2h_b}{h_c^3} \left( \frac{\partial M_{3yy}^c}{\partial y} + \frac{\partial M_{3xy}^c}{\partial x} + \frac{\partial M_{Q3yz}^c}{\partial z} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial N_{xx}^c}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^c}{\partial y} + \frac{\partial Q_{xz}^c}{\partial z} - \frac{4}{h_c^2} \left( \frac{\partial M_{2xx}^c}{\partial x} + \frac{\partial M_{2xy}^c}{\partial y} + \frac{\partial M_{Q2xz}^c}{\partial z} \right) = 0,$$

$$(22)$$

$$\frac{\partial M_{1xx}^c}{\partial x} + \frac{\partial M_{1xy}^c}{\partial y} + \frac{\partial M_{Q1xz}^c}{\partial z} - \frac{4}{h_c^2} \left( \frac{\partial M_{3xx}^c}{\partial x} + \frac{\partial M_{3xy}^c}{\partial y} + \frac{\partial M_{Q3xz}^c}{\partial z} \right) = 0,$$

$$(23)$$

$$\frac{\partial N_{yy}^c}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}^c}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}^c}{\partial z} - \frac{4}{h_c^2} \left( \frac{\partial M_{2yy}^c}{\partial y} + \frac{\partial M_{2xy}^c}{\partial x} + \frac{\partial M_{Q2yz}^c}{\partial z} \right) = 0,$$

$$(24)$$

$$\frac{\partial M_{1yy}^c}{\partial y} + \frac{\partial M_{1xy}^c}{\partial x} + \frac{\partial M_{Q1yz}^c}{\partial z} - \frac{4}{h_c^2} \left( \frac{\partial M_{3yy}^c}{\partial y} + \frac{\partial M_{3xy}^c}{\partial x} + \frac{\partial M_{Q3yz}^c}{\partial z} \right) = 0,$$

$$(25)$$

$$\frac{\partial R_z^c}{\partial x} + \frac{\partial Q_{xz}^c}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}^c}{\partial y} - \frac{4}{h_c^2} \left( \frac{\partial M_{2z}^c}{\partial x} + \frac{\partial M_{Q2xz}^c}{\partial x} + \frac{\partial M_{Q2yz}^c}{\partial y} \right) = 0.$$

$$(26)$$

که در آن،  $j=t, b$  و  $k=0, 1$  و  $l=0$ .

رویه بالا:

$$\begin{aligned} E_1 &= 172.7 \text{ (GPa)}, E_2 = 7.2 \text{ (GPa)}, \\ \nu &= 0.3 \\ \rho &= 1566 \text{ (kg / m}^3\text{)}, \\ G_{12} &= G_{13} = G_{23} = 3.76 \text{ (GPa)}, \end{aligned}$$

رویه پایین:

$$\begin{aligned} E_1 &= 24.51 \text{ (GPa)}, E_2 = 7.77 \text{ (GPa)} \\ \nu &= 0.3, \\ \rho &= 1800 \text{ (kg / m}^3\text{)}, \\ G_{12} &= G_{13} = G_{23} = 3.34 \text{ (GPa)}, \end{aligned}$$

هسته:

$$\begin{aligned} E_1 &= 172.7 \text{ (GPa)}, E_2 = 24.51 \text{ (GPa)}, \\ G_1 &= 3.76 \text{ (GPa)}, G_2 = 3.34 \text{ (GPa)}, \\ \nu &= 0.3, \\ \rho_1 &= 1566 \text{ (kg / m}^3\text{)}, \\ \rho_2 &= 1800 \text{ (kg / m}^3\text{)}. \end{aligned}$$

در این قسمت برای بررسی درستی نتایج حاصل از حل تحلیلی برای بارگذاری گسترده، مقایسه‌ای با نتایج حاصل از حل اجزاء محدود که توسط نرم‌افزار انسیس صورت گرفته انجام شده است. همان‌گونه که در جدول ۱ نشان داده شده است نتایج هم‌پوشانی قابل قبولی با یکدیگر دارند.

#### ۸- بررسی تنش برشی $\tau_{xz}^c$

در شکل ۴ تغییرات تنش برشی در راستای ضخامت هسته هدفمند ورق ساندویچی نشان داده شده است. همان‌طور که در این شکل ملاحظه می‌شود تنش‌های برشی در محل اتصال هسته به رویه‌ها بیش‌ترین مقدار را داشته و با دور شدن از محل اتصال، مقدار این تنش‌ها کاهش می‌یابد. در شکل ۵ نیز اثر کاربرد هسته هدفمند بر کاهش تنش برشی نشان داده شده است.

در این معادلات، ضرایب مجهول  $C_{u_0}^{mn}$ ،  $C_{w_l}^{mn}$ ،  $C_{v_k}^{mn}$ ،  $C_{u_k}^{mn}$ ،  $C_{\phi_y^i}^{mn}$ ،  $C_{\phi_x^i}^{mn}$ ،  $C_{w_0^i}^{mn}$ ،  $C_{v_0^i}^{mn}$  تغییر مکان‌های صفحه‌ای و عرضی و چرخش در رویه‌ها و هسته میانی هستند. با جایگذاری روابط (۳۰) در معادلات به دست آمده، ۲۲۵ ضریب ماتریس سفتی به دست خواهد آمد که در ادامه اولین (رابطه (۳۱)) و آخرین (رابطه (۳۲)) درایه ماتریس سفتی به عنوان نمونه ارائه شده و به علت زیاد بودن تعداد این ضرایب از ارائه تمامی آنها خودداری شده است.

(۳۱)

$$K(1,1) = \begin{bmatrix} -\alpha_m^2 \left[ A_{11}' + \frac{4}{h_c^4} e_4^{cx} + \frac{16}{h_c^5} e_5^{cx} + \frac{16}{h_c^6} e_6^{cx} \right] - \beta_n^2 \left[ A_{66}' + \frac{4}{h_c^4} g_4^{cy} + \frac{16}{h_c^5} g_5^{cy} + \frac{16}{h_c^6} g_6^{cy} \right] \\ - \left[ \frac{16}{h_c^4} g_2^{cx} - \frac{96}{h_c^5} g_3^{cx} + \frac{144}{h_c^6} g_4^{cx} \right] \end{bmatrix}$$

$$K(15,15) = \beta \left[ \frac{8}{h_c^2} g_1^{cyz} - \frac{32}{h_c^4} g_3^{cyz} \right] \quad (32)$$

برای حل مسئله می‌توان با استفاده از معادلات و کمک از حل ناویر، سامانه معادلات دیفرانسیل مربوط به تحلیل استاتیکی را بر حسب توابع تغییر مکان‌های صفحه‌ای و عرضی و چرخش در رویه‌ها و هسته میانی به صورت زیر نوشت:

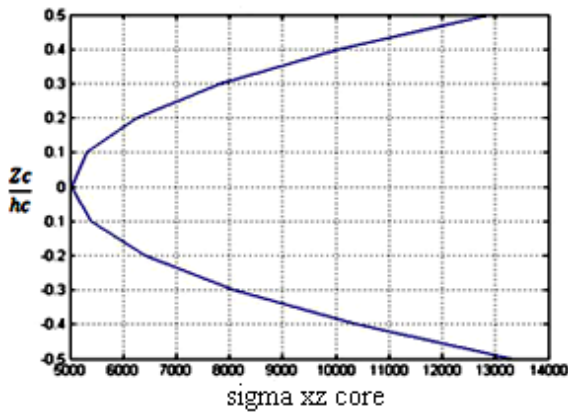
$$[K][X^*] = [F]. \quad (33)$$

با حل معادله (۳۳) ضرایب مجهول به دست آمده و می‌توان خیز و جابه‌جائی‌های ورق ساندویچی با رویه‌های کامپوزیتی و هسته هدفمند را به دست آورد.

#### ۷- بررسی درستی نتایج

ورق ساندویچی مربعی با رویه‌های کامپوزیتی و هسته هدفمند و با خواص هندسی  $\frac{a}{h} = 10$ ،  $\frac{h_c}{h} = 0.9$ ،  $\frac{a}{b} = 1$  در نظر گرفته شده است. ترتیب لایه چینی به صورت (0/90/0/CORE/0/90/0) است و خواص مکانیکی مواد رویه‌ها و هسته عبارت است از:





شکل (۴): نحوه تغییر  $\sigma_{xz}^c$  در راستای ضخامت هسته هدفمند در ورق مربعی در  $x/a=0.5$  و  $y/b=0.5$ .

تنش  $\sigma_{xz}^c$  تنش بسیار مخربی است که یکی از اصلی ترین دلایل به وجود آمدن جدایش رویه ها از هسته بوده و استحکام سازه ساندویچی را به شدت کاهش خواهد داد.

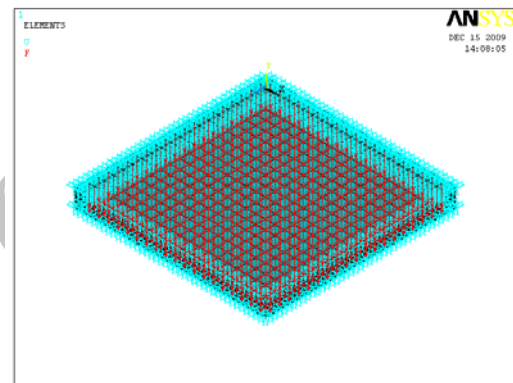
همان طور که در شکل ۵ ملاحظه می شود استفاده از هسته هدفمند باعث کاهش بسیار زیاد این تنش شده که در پایان منجر به افزایش مقاومت سازه در برابر جدایش خواهد شد. شکل ۶ اثر وجود هسته هدفمند بر تغییرات تنش  $\sigma_{xz}^c$  در محل اتصال هسته به رویه بالا نشان می دهد. همان گونه که ملاحظه می شود وجود هسته هدفمند باعث کاهش بسیار زیاد تنش های محل اتصال و افزایش توان پانل ساندویچی در تحمل بارگذاری شده است.

#### ۹- بررسی تنش $\sigma_{zz}^c$

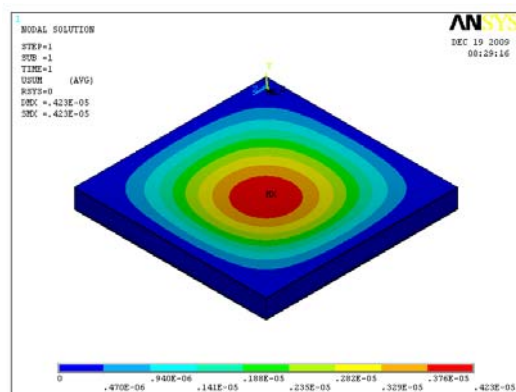
در شکل ۷ تغییرات تنش  $\sigma_{zz}^c$  در راستای ضخامت هسته هدفمند ورق ساندویچی تحت بار گسترده نشان داده شده است. در شکل ۸ اثر وجود هسته هدفمند بر کاهش  $\sigma_{zz}^c$  ورق ساندویچی تحت بار متمرکز نشان داده شده است. تنش  $\sigma_{zz}^c$  تنشی است که در اثر جابه جایی در راستای ضخامت هسته به وجود آمده است. بنابراین با استفاده از هسته هدفمند و سفت تر شدن هسته، از میزان جابه جایی در راستای ضخامت هسته کاسته شده و در نتیجه مقدار این تنش نیز کاهش یافته است.

جدول (۱): بیش ترین خیز پانل ساندویچی در بارگذاری گسترده از دو روش تحلیلی و عددی.

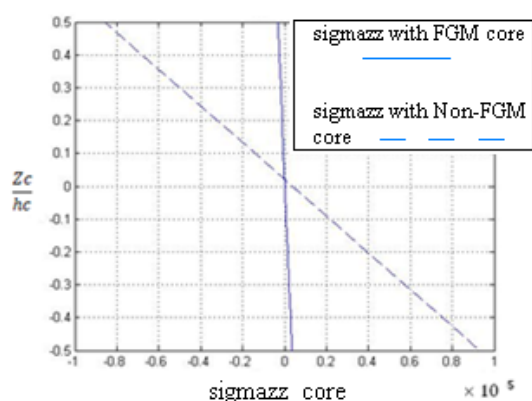
بیش ترین خیز محاسبه شده از روش عددی (متر $\times 10^{-6}$ )	بیش ترین خیز محاسبه شده از روش تحلیلی (متر $\times 10^{-6}$ )	بار گسترده اعمالی به مرکز رویه بالایی ورق
۰/۸۴۶	۰/۸۱۸	۲,۰۰۰
۲/۵۴	۲/۴۵۵	۶,۰۰۰
۴/۲۳	۴/۰۹۴	۱۰,۰۰۰
۵/۹۲	۵/۷۲۷	۱۴,۰۰۰
۸/۴۶	۸/۱۸	۲۰,۰۰۰



شکل (۲): ورق ساندویچی پس از مش زدن و اعمال بار گسترده.



شکل (۳): ورق ساندویچی پس از حل تحت بار گسترده.



شکل (۸): اثر هسته هدفمند بر کاهش تنش برشی  $\sigma_{zz}^c$  در راستای ضخامت هسته در ورق مربعی در  $x/a=0/5$  و  $y/b=0/5$

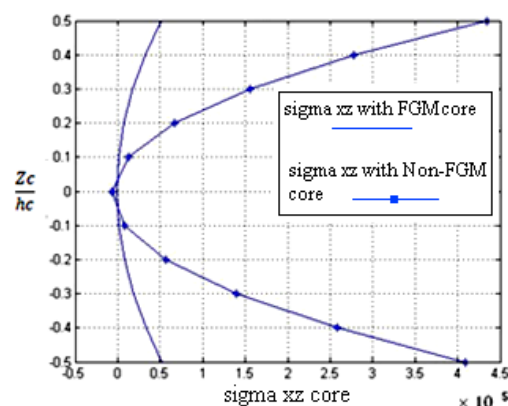
در شکل ۹ تغییرات  $\sigma_{zz}^c$  در نقاط اتصال هسته به رویه‌های بالا و پایین و مرکز هسته نمایش داده شده است. همان‌طور که قبلاً نیز اشاره شد  $\sigma_{zz}^c$  بر اثر جابه‌جائی در راستای ضخامت هسته به وجود آمده است. از آنجائیکه در این مثال بارگذاری بر روی رویه بالا پانل اعمال شده، بنابراین بیش-ترین مقدار تنش در محل اتصال هسته به رویه بالا ایجاد خواهد شد.

#### ۱۰- بررسی تنش $\tau_{xy}^c$

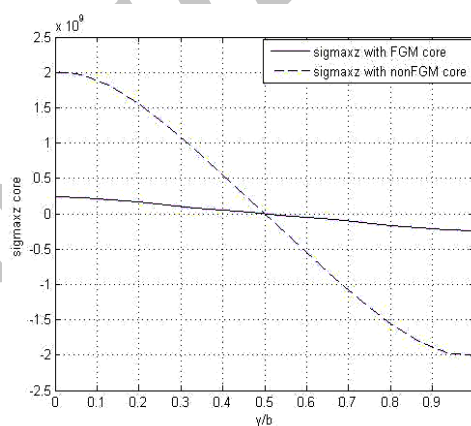
در شکل ۱۰ اثر وجود هسته هدفمند بر کاهش  $\tau_{xy}^c$  در راستای ضخامت هسته ورق ساندویچی نشان داده شده است. در شکل ۱۱ تغییرات  $\tau_{xy}^c$  در نقاط اتصال هسته به رویه بالا و پایین و مرکز هسته نمایش داده شده است.

#### ۱۱- بررسی جابه‌جائی هسته Wc

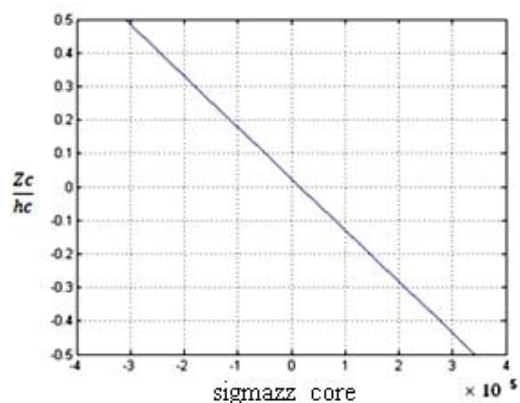
در شکل ۱۲ تغییرات جابه‌جائی هسته Wc تحت دو نوع بارگذاری متمرکز و گسترده در راستای ضخامت هسته نشان داده شده است. همان‌طور که در این شکل ملاحظه می‌شود تغییرات جابه‌جائی هسته در راستای ضخامت متقارن نیست. این امر به این دلیل است که مدول الاستیسیته در راستای ضخامت هسته تغییر کرده و در نتیجه خیز در نزدیکی رویه بالا کمتر از میزان خیز در نزدیکی رویه پایین است. در شکل ۱۳ اثر کاربرد هسته هدفمند بر کاهش تغییرات Wc تحت بارگذاری متمرکز نشان داده شده است.



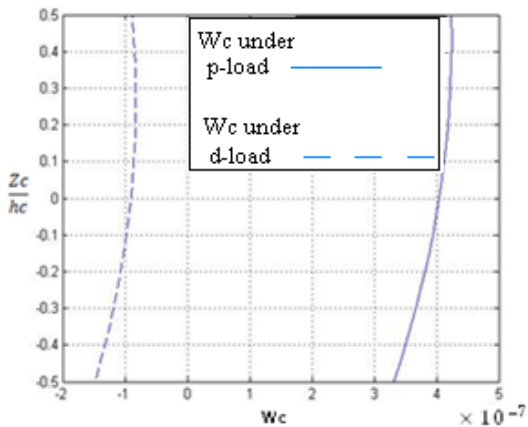
شکل (۵): اثر هسته هدفمند بر کاهش تنش برشی  $\sigma_{zz}^c$  در راستای ضخامت هسته در ورق مربعی در  $x/a=0/5$  و  $y/b=0/5$



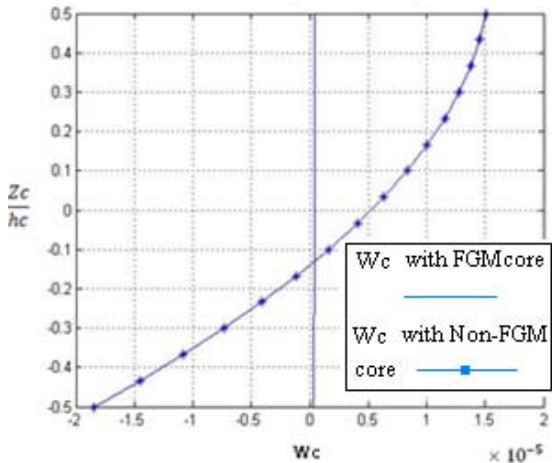
شکل (۶): اثر هسته هدفمند بر کاهش تنش برشی  $\sigma_{zz}^c$  در محل اتصال هسته به رویه بالا در ورق مربعی در  $x/a=0/5$



شکل (۷): نحوه تغییر  $\sigma_{zz}^c$  در راستای ضخامت هسته هدفمند در ورق مربعی در  $x/a=0/5$  و  $y/b=0/5$



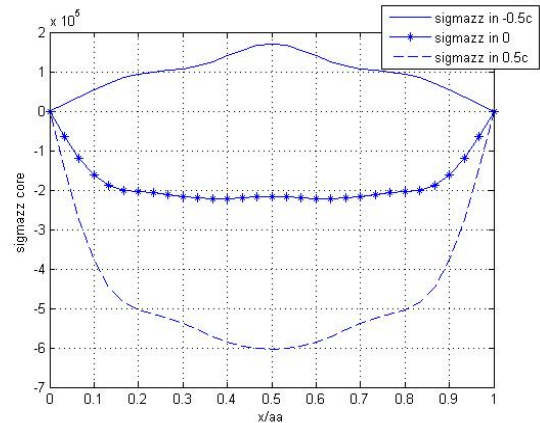
شکل (۱۲): نحوه تغییر جابه‌جایی  $W_c$  تحت اثر بارگذاری متمرکز و گسترده در راستای ضخامت هسته در ورق مربعی در  $x/a=0.5$  و  $y/b=0.5$ .



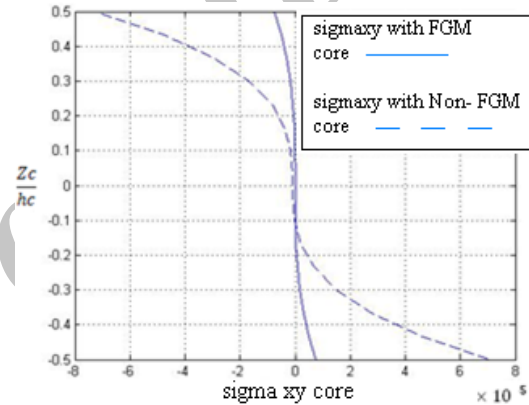
شکل (۱۳): اثر کاربرد هسته هدفمند بر نحوه تغییر جابه‌جایی  $W_c$  تحت بارگذاری گسترده.

## ۱۲- بررسی جابه‌جایی صفحه‌ای هسته ورق ساندویچی در جهت $x$

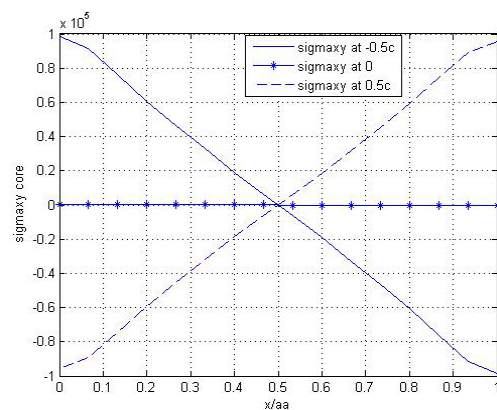
در شکل ۱۴ تغییرات جابه‌جایی هسته  $U_c$  تحت دو نوع بارگذاری متمرکز و گسترده در راستای ضخامت هسته ورق ساندویچی نشان داده شده است. همان‌طور که در این شکل ملاحظه می‌شود میزان جابه‌جایی  $U_c$  وابسته به نوع بارگذاری بوده و در حالتی که بارگذاری به صورت نقطه‌ای اعمال شده تغییرات  $U_c$  بسیار بیشتر از حالتی است که پانل تحت بارگذاری گسترده معادل با بار نقطه‌ای قرار دارد.



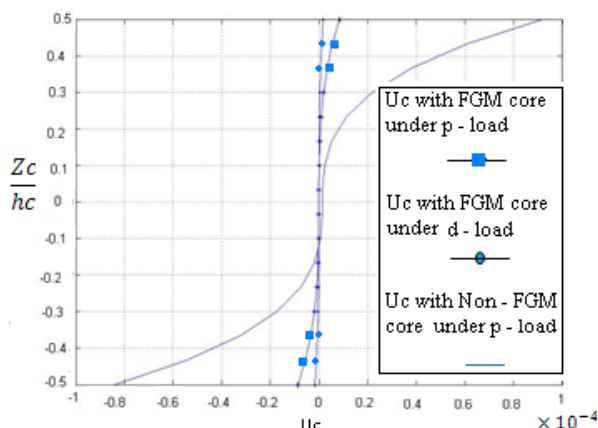
شکل (۹): تغییر  $\sigma_{zz}^c$  در محل اتصال هسته به رویه بالا و پایین و مرکز هسته.



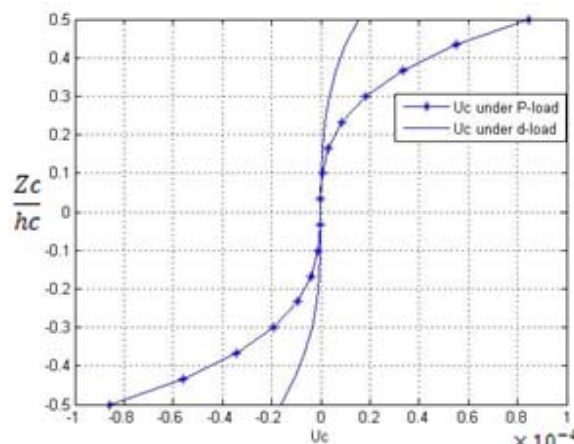
شکل (۱۰): اثر هسته هدفمند بر کاهش تنش برشی  $\sigma_{zz}^c$  در راستای ضخامت هسته در ورق مربعی در  $x/a=0.5$  و  $y/b=0.5$ .



شکل (۱۱): تغییر  $\tau_{xy}^c$  در محل اتصال هسته به رویه بالا و پایین و مرکز هسته در ورق مربعی در  $y/b=0.5$ .



شکل (۱۶): نحوه تغییر جابه‌جائی  $U_c$  تحت اثر بارگذاری متمرکز و گسترده با وجود هسته FGM و هسته NON-FGM در راستای ضخامت هسته در ورق مربعی در  $x/a=0/5$  و  $y/b=0/5$



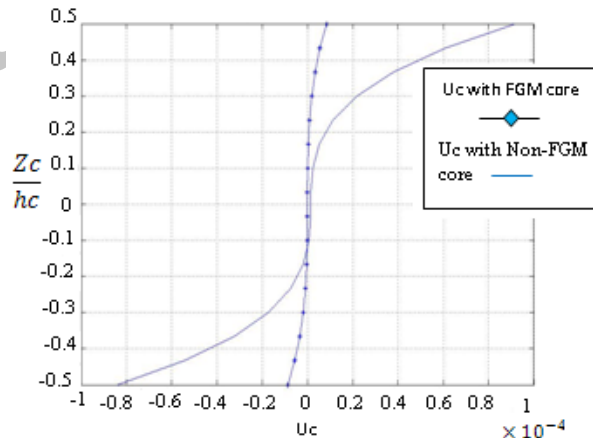
شکل (۱۴): نحوه تغییر جابه‌جائی  $U_c$  تحت اثر بارگذاری متمرکز و گسترده در راستای ضخامت هسته در ورق مربعی در  $x/a=0/5$  و  $y/b=0/5$

در شکل‌های ۱۶-۱۵ نیز اثر کاربرد هسته هدفمند بر روی تغییرات جابه‌جائی  $U_c$  نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل مشخص است کاربرد هسته هدفمند باعث کاهش قابل ملاحظه تغییرات  $U_c$  شده است.

### ۱۳- بررسی جابه‌جائی صفحه‌ای هسته ورق ساندویچی در جهت $y$

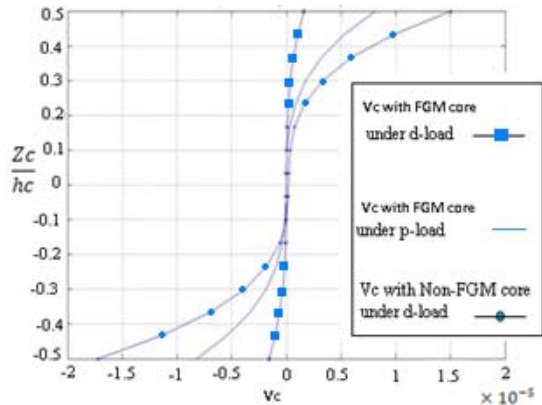
در شکل ۱۷ تغییرات جابه‌جائی هسته  $V_c$  تحت دو نوع بارگذاری متمرکز و گسترده در راستای ضخامت هسته ورق ساندویچی نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل ملاحظه می‌شود میزان جابه‌جایی  $V_c$  وابسته به نوع بارگذاری بوده و در حالتی که بارگذاری به صورت نقطه‌ای است تغییرات  $V_c$  بسیار بیشتر از حالتی است که پانل تحت بارگذاری گسترده معادل با بار نقطه‌ای قرار دارد.

همان‌طور که در شکل‌های ۱۷-۱۴ نشان داده شده کاملاً  $x$  و  $y$  تغییرات جابه‌جائی‌های صفحه‌ای در جهت‌های شبیه یکدیگر هستند. در شکل ۱۸ نیز اثر کاربرد هسته نشان داده شده  $V_c$  هدفمند بر روی تغییرات جابه‌جائی است. همان‌طور که از شکل مشخص است کاربرد هسته خواهد شد.  $V_c$  هدفمند باعث کاهش قابل ملاحظه تغییرات در شکل ۱۹ نحوه تغییرات جابه‌جائی هسته  $V_c$  تحت دو نوع بارگذاری متمرکز و گسترده در راستای ضخامت هسته و همچنین اثر کاربرد هسته هدفمند بر جابه‌جائی هسته  $V_c$  نشان داده شده است.



شکل (۱۵): اثر کاربرد هسته هدفمند بر نحوه تغییر جابه‌جائی  $U_c$  تحت اثر بارگذاری گسترده در راستای ضخامت هسته در ورق مربعی در  $x/a=0/5$  و  $y/b=0/5$

بیشتر نوع هسته بر روی تغییرات  $V_c$  و  $U_c$  نسبت به نوع بارگذاری اعمالی است.

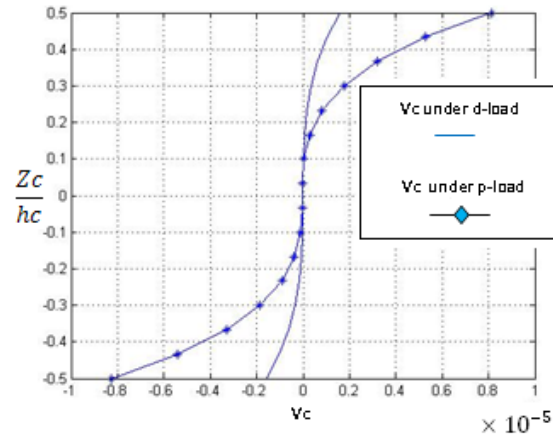


شکل (۱۹): نحوه تغییر جابه‌جایی  $V_c$  تحت اثر بارگذاری متمرکز و گسترده با وجود هسته FGM و هسته NON-FGM در راستای ضخامت هسته در ورق مربعی در  $x/a=0/5$  و  $y/b=0/5$ .

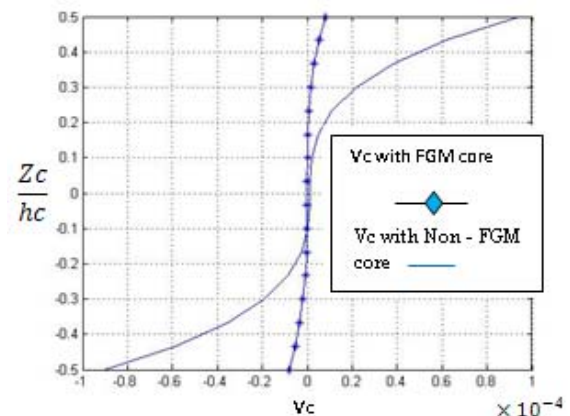
#### ۱۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله، اثر کاربرد هسته هدفمند بر کاهش پدیده تورق در محل اتصال رویه‌ها به هسته میانی در ورق‌های ساندویچی کامپوزیتی در بارگذاری عرضی یکنواخت مورد بررسی قرار گرفته است. معادلات تعادل، از روش تغییراتی و اصل همیلتون استخراج شده و شرایط مرزی بر روی همه لبه‌ها به صورت ساده در نظر گرفته شده است. جابه‌جایی‌های هسته در جهات مختلف با چندجمله‌ای‌هایی با ضرایب نامشخص طراحی شده‌اند. فرض شده است که هسته قابلیت تحمل تنش‌های برشی و نرمال صفحه‌ای را دارد و اثرات آن‌ها در استخراج سامانه معادلات پانل در نظر گرفته شده است. خواص مواد هدفمند نیز با استفاده از تابع توانی در راستای ضخامت هسته طراحی شده است. همچنین، اثر هدفمند بودن هسته میانی بر میزان جابه‌جایی‌های هسته ورق ساندویچی در سه راستا به صورت تحلیلی و عددی مورد بررسی قرار گرفته و نتایج زیر حاصل شده است:

۱- تنش برشی  $\tau_{xz}^c$  یکی از اصلی‌ترین دلایل به وجود آمدن جدایش رویه‌ها از هسته است و استحکام سازه ساندویچی را به شدت کاهش خواهد داد. استفاده از هسته هدفمند باعث



شکل (۱۷): نحوه تغییر جابه‌جایی  $V_c$  تحت اثر بارگذاری متمرکز و گسترده در راستای ضخامت هسته در ورق مربعی در  $x/a=0/5$  و  $y/b=0/5$ .



شکل (۱۸): اثر کاربرد هسته هدفمند بر نحوه تغییر جابه‌جایی  $V_c$  تحت اثر بارگذاری گسترده در راستای ضخامت هسته در ورق مربعی در  $x/a=0/5$  و  $y/b=0/5$ .

نکته جالبی که در شکل ۱۹ مشاهده می‌شود این است که در حالت بارگذاری گسترده اعمالی بر روی پانلی دارای هسته NON-FGM، تغییرات  $V_c$  بیشتر از حالتی است که بار متمرکز معادل با بار گسترده بر روی پانلی با هسته هدفمند اعمال شده است؛ در صورتی که با وجود هسته‌های یکسان بار متمرکز باعث تغییرات بسیار بزرگتری نسبت به بار گسترده در  $V_c$  خواهد شد. این امر نشان‌دهنده اثر



2. Malekzadeh, K., Khalili, M.R., and Mittal, R.K., "Local and Global Damped Vibrations of Plate with a Viscoelastic Soft Flexible Core: An Improved High-order Approach", *J. Sandwich Struct. and Mat.*, Vol. 7, No. 5, pp. 431-456, 2005.
3. Reedy, J.N. Wang, C.M., and Kitipornchai, "Axisymmetric Bending of Functionally Graded Circular and Annular Plates", *European J. Mech. Solids*, Vol. 18, No. 2, pp. 185-199, 1999.
4. Zenkour, A.M. "A Comprehensive Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates: part I: Deflection and Stresses", *Int. J. Solids and Structures*, Vol. 42, pp. 5224-5242, 2005.
5. Ramirez, F., Paul, R., and Ernián, H. "Static Analysis of Functionally Graded Elastic Anisotropic Plates, Using a Discrete Layer Approach", *Composite: Part B*, Vol. 37, No. 1, pp. 10-20, 2006.
6. Chang, Z.Q. and Batra, R.C. "Exact Correspondence between Eigenvalues of Membrane and Functionally Graded Simply Supported Polygonal Plates", *J. Sound and Vibrations*, Vol. 229, No. 5, pp. 879-895, 2000.
7. Anderson, T.A. "A 3-D Elasticity Solution for a Sandwich Composite with Functionally Graded Materials Core Subjected to Transverse Loading by a Rigid Sphere, *Composite Structure*, Vol. 60, pp. 265-274, 2003.
8. Woo, J. and Meguid, S.A. "Non-linear Analysis of Functionally Graded Plates and Shallow Shells", *Int. J. Solids and Structures*, Vol. 38, No. 5, pp. 7409-7421, 2001.
9. Kadoli, R., Akhtar, K., and Ganesan, N. "Static Analysis of Functionally Graded Beam, Using High Order Shear Deformation Theory", *App. Math. Modeling*, Vol. 32, No. 3, pp. 2509-2525, 2008.

کاهش بسیار زیاد تنش برشی شده در نهایت منجر به افزایش مقاومت سازه در برابر جدایش خواهد شد،

۲- تنش  $\sigma_{zz}^c$  در اثر جابه‌جائی در راستای ضخامت هسته به وجود آمده است. بنابراین با به کار بردن هسته هدفمند و سفت‌تر شدن هسته از میزان جابه‌جائی در راستای ضخامت هسته کاسته شده و در نتیجه مقدار این تنش نیز کاهش خواهد یافت،

۳- تنش  $\tau_{xy}^c$  بر اثر اختلاف کرنش لایه‌ها ایجاد شده که با کاربرد هسته هدفمند به علت سفتی بالاتر اختلاف کرنش‌ها در وجه مشترک کمتر شده و در نتیجه این تنش نیز کاهش خواهد یافت،

۴- با کاربرد هسته هدفمند، تغییرات ناگهانی در خصوصیات مواد از یک لایه به لایه دیگر از بین رفته و در نتیجه تنش‌های نامطلوب بین لایه‌ای در فصل مشترک لایه‌ها به شدت کاهش یافته است. این امر استفاده از این مواد را در هسته سازه‌های ساندویچی توجیه‌پذیر می‌نماید و

۵- هسته‌های هدفمند نسبت به هسته‌های فومی تحت بارگذاری یکسان دچار خیز به مراتب کمتری شده‌اند. این شرایط در مورد جابه‌جائی‌های صفحه‌ای در جهات X و Y نیز صادق است.

#### مراجع

1. Frostig, Y. and Thomsen, O.T. "High-order Free Vibrations of Sandwich Panels with Flexible Core", *J. Solid and Structure*, Vol. 41, No's. 5-6, pp. 1697- 1724, 2004.