

بررسی تحلیلی انتقال حرارت هدایتی در لمینیت‌های کامپوزیتی استوانه‌ای گرافیت اپوکسی

محمد حسن کیهانی^۱، محمود نوروزی^۲ و امین امیری دلوئی^۳

دانشکده مهندسی مکانیک

دانشگاه صنعتی شاهرود

(تاریخ دریافت: ۸۹/۳/۲۴؛ تاریخ پذیرش: ۸۹/۱۰/۵)

چکیده

در مطالعه حاضر، یک حل تحلیلی دقیق برای انتقال حرارت پایدار دوبعدی در لمینیت‌های کامپوزیتی استوانه‌ای ساخته شده از گرافیت اپوکسی ارائه گردیده است. این لمینیت‌ها استوانه‌ای بوده و در هر لایه الیاف به دور استوانه پیچیده شده‌اند. ابتدا تبدیل فوریه مناسب با استفاده از تئوری اشتراک - لیوویل ساخته شده است. ضرائب سری به وسیله حل دستگاه معادلات مرتبط با شرایط مرزی داخل و بیرون استوانه و همچنین پیوستگی دما و شار حرارت در مرز بین لایه ها به دست آمده است، برای حل دستگاه معادلات حاصل از الگوریتم توماس استفاده شده است. در این مقاله، اثر تغییر زاویه الیاف روی توزیع درجه حرارت تحت شرایط مرزی کلی مورد بررسی قرار گرفته و نشان داده شده است که توزیع درجه حرارت برای هر لایه کامپوزیتی با زاویه الیاف دلخواه بین توزیع درجه حرارت برای زوایای $\theta = 0^\circ$ و $\theta = 90^\circ$ قرار دارد.

واژه‌های کلیدی: حل دقیق، لمینیت کامپوزیتی، انتقال حرارت هدایتی، استوانه، تبدیل فوریه

Analytical Investigation of Heat Conduction in Graphite-Epoxy Cylindrical Composite Laminates

M.H. Kayhani, M. Norouzi, and A. Amiri-Delouei

Mech. Eng. Dep't.

Shahrood Univ. of Tech.

(Received: 14 June 2010; Accepted: 26 Dec. 2010)

ABSTRACT

In this study, an exact analytical solution for two-dimensional steady-state conductive heat transfer in cylindrical composite laminates made of graphite-epoxy is presented. These laminates are in cylindrical shape and fibers have been winded around the cylinder in each layer. First, the appropriate Fourier transformation has been obtained using Sturm-Liouville theorem. Coefficients of series are achieved by solving a set of equations related to the thermal boundary conditions at inside/outside of the cylinder and temperature/heat flux continuity at the boundaries located between the layers. The solution of this set of equations is calculated using Thomas algorithm. In this article, the effect of fibers' angle on temperature distribution of composite laminate is investigated under general boundary conditions. Here, we show that the temperature distribution for any composite laminates is between temperature distribution for laminates with fiber angles equal to the $\theta = 0^\circ$ and $\theta = 90^\circ$.

Keywords: Exact Solution, Composite Laminate, Heat Conduction, Cylinder, Fourier Transformation

۱- دانشیار (نویسنده پاسخگو): h_kayhani@shahroodut.ac.ir

۲- استادیار: mnorouzi@shahroodut.ac.ir

۳- دانشجوی دکتری: a.a.delouei@shahroodut.ac.ir

۱- مقدمه

الیاف کربن، نسل جدیدی از الیاف پر استحکام است. این مواد از پرولیز کنترل شده گونه‌هایی از الیاف مناسب تهیه می‌شوند به‌صورتی که بعد از پرولیز حداقل ۹۰ درصد کربن باقی بماند. در آغاز دهه ۶۰ میلادی، تولید موفق تجاری الیاف کربن، با اهداف نظامی و به‌ویژه برای کاربرد در هواپیماهای جنگی آغاز شد. در دهه‌های اخیر، الیاف کربن در موارد غیرنظامی بسیاری همچون هواپیماهای مسافربری و باربری، خودروسازی، ساخت قطعات صنعتی، صنایع پزشکی، صنایع تفریحی-ورزشی و موارد دیگر، کاربردهای روزافزونی یافته است. این الیاف در کامپوزیت‌های با زمینه سبک مانند انواع رزین‌ها نیز استفاده می‌شوند. کامپوزیت‌های الیاف کربن در مواردی که استحکام و سختی بالا به همراه وزن کم و ویژگی استثنایی مقاومت به خوردگی مد نظر باشند، تنها گزینه پیش روست. همچنین هنگامی که مقاومت در دمای بالا، خنثی بودن از لحاظ شیمیایی و ویژگی ضربه‌پذیری بالا نیز انتظار برود، باز هم کامپوزیت‌های کربنی بهترین انتخاب هستند. با توجه به این ویژگی‌ها، پهنه گسترده موارد کاربرد این مواد در زمینه‌های گوناگون فن‌آوری به سادگی قابل تصور است. تحقیقات انجام شده روی مواد کامپوزیتی اکثراً رفتار آن‌ها تحت بارگذاری‌های مکانیکی و دمایی را بررسی نموده‌اند [۱-۴] و کمتر به انتقال حرارت در این مواد پرداخته شده است.

نخستین فعالیت‌های انجام شده در مورد انتقال حرارت مواد غیر ایزوتروپ مربوط به انتقال حرارت یک‌بعدی در کریستال‌های غیر ایزوتروپ می‌باشد [۵-۶]. ما و چنگ^۱ [۷]، حل تحلیلی انتقال حرارت هدایتی در محیط‌های چندلایه غیر ایزوتروپیک را مورد بررسی قرار داده‌اند. آن‌ها با استفاده از یک تبدیل مختصات خطی مسئله انیزوتروپ را به شکل ساده ایزوتروپ تبدیل نموده و مسئله را حل کرده‌اند. در زمینه انتقال حرارت در مواد کامپوزیتی نیز فعالیت‌هایی صورت گرفته است که در ادامه به‌صورت مختصر بیان می‌گردد. کالکارانی و بردی^۲ [۸] یک مدل برای هدایت گرمایی در کامپوزیت‌های کربن- لایه‌ای ارائه داده‌اند. مدل

ارائه شده بر مبنای درصد حجمی ماتریس و الیاف استوار است و با استفاده از آن ضریب انتقال حرارت در جهت الیاف و عمود بر جهت الیاف تخمین زده شده است. ونگ^۳ و دیگران [۹] با استفاده از یک حل عددی سه‌بعدی اثرات رشته‌های کربن در بالا بردن هدایت گرمایی در لمینیت‌های کامپوزیتی را مورد بررسی قرار داده و نتایج حاصل را با داده‌های تجربی مقایسه کرده‌اند. آن‌ها نشان داده‌اند که این روش به پارامترهای تجربی که در هر آزمایش مورد به مورد تغییر می‌کند وابسته نیست. جانسون و لسنیک^۴ کاربرد روش‌های پایه‌ای (MFS) در انتقال حرارت هدایتی مواد چند لایه را مد نظر قرار داده و این روش را برای تخمین عددی شار حرارتی در مواد لایه‌ای گسترش داده‌اند [۱۰]. سان و ویچمن^۵ یک راه حل تئوری برای مسائل انتقال حرارت یک‌بعدی در ورقه‌های کامپوزیتی سه لایه معرفی کرده‌اند. حل ارائه شده بر مبنای روابط متعامد بین توابع ویژه خاص استوار است، آن‌ها در ادامه نتایج به‌دست آمده را با حل عددی به روش اجزاء محدود مقایسه نموده‌اند. [۱۱] کاراگرقیس و لسنیک^۶ یک حل پایه‌ای برای هدایت حرارتی در مواد کامپوزیتی (لایه‌ای) با ضریب هدایت وابسته به دما با استفاده از روش حل پایه‌ای ارائه داده‌اند. شرایط مرزی اعمال شده در مسئله آن‌ها شامل اثر هم‌زمان جابه‌جایی و تشعشع بوده است [۱۲]. حاجی شیخ و همکاران یک فرمولاسیون ریاضی برای میدان دما در حالت پایدار در اجسام چند لایه و چند بعدی به‌دست آورده‌اند. آن‌ها اثبات نموده‌اند که مقادیر ویژه برای حالتی که لایه‌ها همگن باشد حقیقی است در حالی که برای حالت اورتوتروپ این مقادیر می‌توانند موهومی باشند [۱۳]. گو^۷ توسعه توزیع درجه حرارت در لمینیت‌های ماتریس پلیمری ضخیم را بررسی کرده و آن را با نتایج به‌دست آمده از حل عددی مقایسه نموده‌اند. در این بررسی از فرمولاسیون المان محدود مسائل انتقال حرارت گذرا برای مواد کامپوزیتی با ماتریس پلیمری استفاده شده است، معادلات، شامل تولید انرژی داخلی ناشی از واکنش‌های شیمیایی گرمازا هستند [۱۴].

3- Wang

4- Johansson and Lesnic

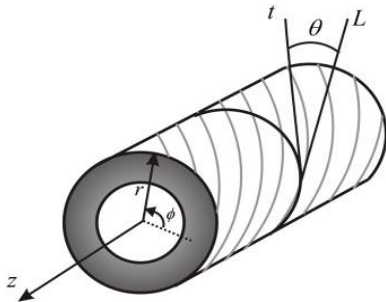
5- Sun and Wichman

6- Karageorghis and Lesnic

7- Guo

1- Ma and Chang

2- Kulkarani and Brady



شکل (۱): جهت الیاف در یک لمینیت استوانه‌ای.

۲- هدایت در مواد مرکب

در این قسمت به صورت مختصر تئوری انتقال حرارت در مواد مرکب مورد بررسی قرار گرفته است [۱۷]. رابطه‌ی فوریه برای انتقال حرارت در مواد اورتوتروپ به صورت کلی زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

که در این رابطه، q شار حرارتی، k_{ij} ضرایب انتقال حرارت هدایتی و T دماست. روابط بین این ضرایب انتقال حرارت به صورت مفصل در مراجع [۱۷ و ۱۸] ذکر گردیده است. از آنجا که لمینیت‌های کامپوزیتی از چیدن لایه‌های مختلف با راستای الیاف متفاوت ساخته می‌شوند، از دو دستگاه مختصات اصلی (x_1, x_2, x_3) و فرعی (x, y, z) برای بررسی خواص در مواد مرکب استفاده می‌شود [۱۹]. به طوری که محور x_1 در راستای الیاف، محور x_2 عمود بر راستای الیاف در صفحه لایه کامپوزیتی و محور x_3 عمود بر صفحه لایه قرار دارند، نحوه‌ی قرارگیری این دستگاه‌های مختصات در شکل ۲ نشان داده شده است. حال با توجه به تعریف دستگاه مختصات مرجع (دستگاه فرعی) می‌توان کمیت‌های فیزیکی را در جهت‌های ثابت بررسی نمود.

بهادر و بارکهن^۱ یک حل تحلیلی، برای توزیع دما و نرخ انتقال حرارت در بین فین‌های استوانه‌ای با ضرائب هدایت گرمایی اورتوتروپ ارائه داده و نتایج را با حل عددی به روش اجزاء محدود مقایسه نموده‌اند. از حل ارائه شده می‌توان برای بررسی انتقال حرارت در استوانه‌های اورتوتروپیک تک‌لایه با شرایط خاص ارائه شده، استفاده نمود [۱۵]. کیهانی و دیگران حل تحلیلی هدایت در لمینیت‌های کامپوزیتی استوانه‌ای در جهت‌های شعاعی و زاویه‌ای را مورد بررسی قرار داده‌اند. این حل تنها برای لوله‌های کامپوزیتی و مخازنی با نسبت طول به شعاع زیاد معتبر است [۱۶].

در مقاله‌ی حاضر، یک حل تحلیلی دقیق برای انتقال حرارت هدایتی در لمینیت‌های کامپوزیتی استوانه‌ای از جنس گرافیت-اپوکسی ارائه گردیده است. شکل ۱ هندسه‌ی لمینیت استوانه‌ای به کار گرفته شده را نشان می‌دهد. مطابق این شکل، رشته‌ها به دور استوانه پیچیده شده‌اند و راستای رشته‌ها در هر لایه می‌تواند با لایه‌های دیگر متفاوت باشد، بر خلاف کار قبلی ارائه شده توسط کیهانی و دیگران [۱۶]. در این تحقیق بر روی انتقال حرارت متقارن محوری در لمینیت‌های کامپوزیتی استوانه‌ای با در نظر گرفتن هدایت در جهت طولی و شعاعی تمرکز کرده‌ایم.

شرایط مرزی حرارتی اعمال شده به صورت کلی و شامل اثرات هدایت، جابه‌جایی و تشعشع در مرزهاست. یافتن کلی‌ترین حل ممکن بر مبنای شرایط مرزی پیچیده یکی از مهم‌ترین نوآوری‌های مطالعه‌ی حاضر می‌باشد.

با استفاده از تئوری اشترم-لیوویل تبدیل فوریه مناسب به دست آمده، سپس با استفاده از این تبدیل معادله دیفرانسیل جزئی هدایت در استوانه به یک معادله‌ی معمولی مرتبه دو تبدیل شده است.

به دلیل تغییر زاویه الیاف در هر لایه، یک دستگاه معادلات برای ضرایب تبدیل فوریه بر اساس شرایط مرزی داخل و خارج استوانه و همچنین پیوستگی شار و دما در مرز بین لایه‌ها به دست می‌آید. این دستگاه معادلات با استفاده از الگوریتم توماس حل شده است.

هالپین^۱ [۲۰] نشان داد که ضرائب انتقال حرارت (یا سایر پارامترهای فیزیکی جهت دار ماده)، بر اساس روابط زیر با خطای کمتر از ۲٪ قابل محاسبه هستند:

$$k_{11} = \nu_f k_f + \nu_m k_m, \quad (۴)$$

$$k_{22} = k_m \frac{1 + \zeta \eta \nu_f}{1 - \eta \nu_f}.$$

که در این روابط، k_f ضریب هدایت حرارتی الیاف، k_m ضریب هدایت حرارتی ماده زمینه، ν_f درصد حجمی الیاف و ν_m درصد حجمی ماده زمینه است. کمیت‌های η و ζ نیز از روابط زیر به دست می‌آیند:

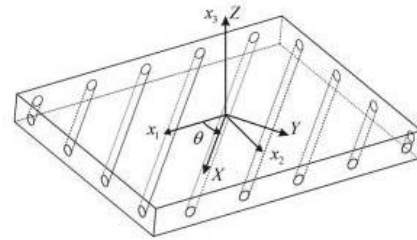
$$\eta = \frac{\frac{k_f}{k_m} - 1}{\frac{k_f}{k_m} + \zeta} \quad (۵)$$

$$\zeta = \frac{1}{4 - 3\nu_m},$$

۳- مدل‌سازی و معادلات حاکم

همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده است، الیاف در هر لایه به دور استوانه در جهت‌های مشخص پیچیده شده‌اند و r ، φ و z مولفه‌های دستگاه مختصات فرعی (مرجع) هستند. اگر L خط مماس بر استوانه در جهت الیاف و t نیز خط مماس بر استوانه در جهت φ باشد در این صورت زاویه الیاف θ به صورت زاویه بین دو خط L و t تعیین می‌شود. دستگاه مختصات فرعی رابطه فوریه در یک ماده اورتوتروپ به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{Bmatrix} q_r \\ q_\varphi \\ q_z \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \bar{k}_{11} & \bar{k}_{12} & \bar{k}_{13} \\ \bar{k}_{21} & \bar{k}_{22} & \bar{k}_{23} \\ \bar{k}_{31} & \bar{k}_{32} & \bar{k}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial r} \\ r \frac{\partial T}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (۶)$$



شکل (۲): دستگاه‌های مختصات اصلی و فرعی.

در هر لایه، بین دستگاه مختصات اصلی و فرعی به اندازه زاویه θ انحراف وجود دارد و محور x_3 دستگاه مختصات اصلی با محور Z دستگاه مختصات فرعی هم جهت است. در دستگاه مختصات اصلی رابطه فوریه برای یک ماده مرکب به صورت زیر است:

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix}_{om} \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (۲)$$

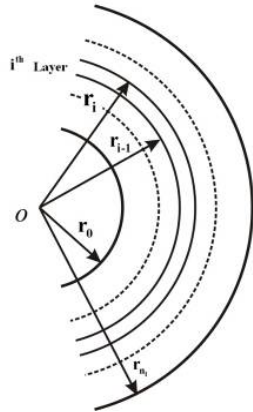
با استفاده از یک دوران به اندازه θ می‌توان از محور مختصات فرعی به اصلی رسید. به طوری که اگر ضرائب انتقال حرارت در جهات اصلی با $[k]$ و در جهات فرعی با $[\bar{k}]$ نشان داده شود، داریم:

$$\begin{aligned} \bar{k}_{11} &= m_l^2 k_{11} + n_l^2 k_{22}, \\ \bar{k}_{22} &= n_l^2 k_{11} + m_l^2 k_{22}, \\ \bar{k}_{33} &= k_{22}, \\ \bar{k}_{12} &= \bar{k}_{21} = m_l n_l (k_{11} - k_{22}), \\ \bar{k}_{13} &= \bar{k}_{31} = 0, \\ \bar{k}_{23} &= \bar{k}_{32} = 0. \end{aligned} \quad (۳)$$

در این روابط، $\cos \theta$ با m_l و $\sin \theta$ با n_l نشان داده شده است. ضرائب انتقال حرارت در مختصات اصلی از انجام آزمایش روی یک لمینا در جهت الیاف و عمود بر جهت الیاف به دست می‌آیند، اما در نبود امکانات آزمایشگاهی می‌توان از روابط خاص ارائه شده برای این مواد استفاده نمود.

$$T^{(i)} = T^{(i+1)}, \quad (11)$$

$$-k_{22} \frac{\partial T^{(i)}}{\partial r} = -k_{22} \frac{\partial T^{(i+1)}}{\partial r}.$$



شکل (۳): چیدمان لایه‌ها در لمینیت استوانه‌ای.

۴- حل تحلیلی برای شرایط مرزی کلی

در این قسمت با استفاده از تبدیل فوریه یک حل تحلیلی برای معادله (۹) ارائه شده است. شرایط مرزی کلی در حالت پارامتری به صورت زیر نوشته می شوند:

$$\begin{aligned} k_{11} \frac{\partial T(r, 0)}{\partial z} &= h_1 (T(r, 0) - T_{\infty,1}) + q_1''(r), \\ -k_{22} \frac{\partial T(r, L)}{\partial r} &= h_2 (T(r, L) - T_{\infty,2}) + q_2''(r), \end{aligned} \quad (12)$$

$$k_{22} \frac{\partial T(r_{in}, z)}{\partial r} = h_3 (T(r_{in}, z) - T_{\infty,3}) + q_3''(z),$$

$$k_{22} \frac{\partial T(r_{out}, z)}{\partial r} = h_4 (T(r_{out}, z) - T_{\infty,4}) + q_4''(z).$$

که در روابط بالا، h و T_{∞} به ترتیب نمایانگر ضریب جابه‌جایی و دمای محیط در راستاهای مختلف هستند. با توجه به شرایط مرزی کلی مسئله، ابتدا لازم است با استفاده از قضیه اشترم-لیوویل تبدیل فوریه مناسب استخراج گردد [۲۱]. با اعمال قضیه اشترم-لیوویل در راستای محور z تابع ویژه مرتبط با مسئله به دست خواهد آمد:

با اعمال معادله‌ی موازنه‌ی انرژی برای یک المان استوانه‌ای رابطه انتقال حرارت به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} &\bar{k}_{11} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \bar{k}_{22} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \bar{k}_{33} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \\ &+ (\bar{k}_{12} + \bar{k}_{21}) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi \partial r} + (\bar{k}_{13} + \bar{k}_{31}) \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial z} \\ &+ \frac{k_{13}}{r} \frac{\partial T}{\partial z} + (\bar{k}_{23} + \bar{k}_{32}) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi \partial z} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}. \end{aligned} \quad (7)$$

همان‌طور که در شکل ۱ مشهود است، زاویه ییاف نسبت به محور φ تعریف شده است. از آنجا که φ مولفه دوم دستگاه مختصات (r, φ, z) است، بنابراین ضرائب انتقال حرارت رابطه (۳) بایستی بازآرایی شوند. زیرا در رابطه (۳) زاویه ییاف نسبت به مؤلفه اول دستگاه مختصات تعریف شده است. بنابراین ضرائب اصلاح شده به صورت زیر در می‌آیند:

$$\begin{aligned} \bar{k}_{11} &= k_{22}, \\ \bar{k}_{22} &= m_i^2 k_{11} + n_i^2 k_{22}, \\ \bar{k}_{33} &= n_i^2 k_{11} + m_i^2 k_{22}, \\ \bar{k}_{12} &= \bar{k}_{21} = 0, \\ \bar{k}_{13} &= \bar{k}_{31} = 0, \\ \bar{k}_{23} &= \bar{k}_{32} = m_i n_i (k_{11} - k_{22}). \end{aligned} \quad (8)$$

با جای‌گذاری این ضرائب در رابطه (۷) و در نظر گرفتن انتقال حرارت پایدار دوبعدی در جهات r و z ، معادله انتقال حرارت در لمینیت استوانه‌ای به شکل ساده‌تر زیر تبدیل خواهد شد:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \quad (9)$$

که در آن، مقدار μ برابر است با:

$$\mu = \sqrt{\frac{k_{22}}{n_i^2 k_{11} + m_i^2 k_{22}}}. \quad (10)$$

لازم به توضیح است که مقدار μ با تغییر زاویه ییاف در هر لایه تغییر خواهد نمود. در شکل ۳ لایه‌ها در یک لمینیت استوانه‌ای نشان داده شده است، اگر $r = r_i$ مرز بین دو لایه i و $i+1$ باشد، با توجه به پیوستگی دما و شار حرارت داریم:

تعریف می‌شوند:

$$G_1(n) = F(q_3''(z) + h_3 T_{\infty 3}), \quad (20)$$

$$G_2(n) = F(q_4''(z) + h_4 T_{\infty 4}).$$

اگر طرف راست معادله (۱۸) را مساوی $h(r, n)$ در نظر بگیریم، جواب کلی معادله در هر لایه از لمینیت کامپوزیتی به صورت زیر خواهد بود:

$$U^{(i)}(r, n) = a_n^{(i)} I_0\left(\frac{\lambda_n}{\mu_i} r\right) + b_n^{(i)} K_0\left(\frac{\lambda_n}{\mu_i} r\right) + w^{(i)}(r, n), \quad (21)$$

که در آن، $w(r, n)$ پاسخ غیر همگن معادله (۱۸) می‌باشد و در حالت کلی برابر است با:

$$w^{(i)}(r, n) = I_0\left(\frac{\lambda_n}{\mu_i} r\right) \times \int_{r_0}^{r_{n_i}} r \times K_0\left(\frac{\lambda_n}{\mu_i} r\right) \times h(r, n) + K_0\left(\frac{\lambda_n}{\mu_i} r\right) \times \int_0^{r_{n_i}} r \times I_0\left(\frac{\lambda_n}{\mu_i} r\right) \times h(r, n) dr. \quad (22)$$

در روابط بالا I_0 و K_0 به ترتیب توابع بسل اصلاح شده نوع اول و دوم از مرتبه صفر هستند. در نهایت با اعمال شرایط مرزی داخلی و خارجی در جهت r و پیوستگی دما و شار حرارت در مرز بین لایه‌ها ضرایب a_n و b_n به دست می‌آیند، با توجه به معادله (۱۹) داریم:

$$a_n^{(1)} \left[h_3 I_0\left(\frac{\lambda_n}{\mu_1} r_0\right) + k_{22} \frac{\lambda_n}{\mu_1} I_1\left(\frac{\lambda_n}{\mu_1} r_0\right) \right] + b_n^{(1)} \left[h_3 K_0\left(\frac{\lambda_n}{\mu_1} r_0\right) - k_{22} \frac{\lambda_n}{\mu_1} K_1\left(\frac{\lambda_n}{\mu_1} r_0\right) \right] = G_1(n) - w^{(1)}(r_0, n). \quad (23)$$

به طور مشابه برای شرایط مرزی معادله (۱۹) داریم:

$$a_n^{(n_i)} \left[h_4 I_0\left(\frac{\lambda_n}{\mu_{n_i}} r_{n_i}\right) + k_{22} \frac{\lambda_n}{\mu_{n_i}} I_1\left(\frac{\lambda_n}{\mu_{n_i}} r_{n_i}\right) \right] + b_n^{(n_i)} \left[h_4 K_0\left(\frac{\lambda_n}{\mu_{n_i}} r_{n_i}\right) - k_{22} \frac{\lambda_n}{\mu_{n_i}} K_1\left(\frac{\lambda_n}{\mu_{n_i}} r_{n_i}\right) \right] = G_1(n) - w^{(n_i)}(r_{n_i}, n). \quad (24)$$

حال شرایط مرزی مربوط به رابطه (۱۱) را در فصل مشترک بین دو لایه مجاور اعمال می‌نماییم. با توجه به رابطه (۱۱) برای پیوستگی دما داریم:

$$\phi_n = (h_1 \sin(\lambda_n z) + k_{11} \lambda_n \cos(\lambda_n z)), \quad (13)$$

که λ_n از حل معادله زیر حاصل می‌شود:

$$(h_1 k_{11} + h_2 k_{11}) \lambda_n \cos(\lambda_n L) + (h_2 h_1 - k_{11}^2 \lambda_n^2) \sin(\lambda_n L) = 0. \quad (14)$$

حال با جای گذاری در رابطه اشترم-لیوویل تبدیل فوریه تابع دلخواه $f(z)$ به صورت زیر استخراج می‌شود [۲۱]:

$$F(f) = \frac{4\lambda_n}{A_n^2} \int_0^L f(z) \left[\begin{array}{l} h_1 \sin(\lambda_n z) \\ + k_{11} \lambda_n \cos(\lambda_n z) \end{array} \right] dz, \quad (15)$$

که در آن، A_n برابر است با:

$$A_n = \sqrt{(-h_1^2 + (k_{11} \lambda_n)^2) \sin(2\lambda_n L) - 2h_1 k_{11} \lambda_n \times \cos(2\lambda_n L) + 2\lambda_n (h_1^2 + (k_{11} \lambda_n)^2) L + 2h_1 k_{11} \lambda_n}. \quad (16)$$

در ادامه با توجه به تبدیل فوریه به دست آمده (معادله (۱۵)) و استفاده از انتگرال جزء به جزء، مشتق دوم نسبت به z به صورت زیر به دست می‌آید:

$$F(f'') = -\lambda_n^2 F(f) + \left(\frac{2\lambda_n}{A_n} \right)^2 \left[\frac{-h_1}{(h_2 \cos(\lambda_n L) - k_{11} \lambda_n \sin(\lambda_n L))} \times (q_1''(r) + h_1 T_{\infty 1}) + q_2''(r) + h_2 T_{\infty 2} \right]. \quad (17)$$

حال اگر این تبدیل فوریه را بر روی معادله (۹) اعمال نماییم، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \left(\frac{\lambda_n^2}{\mu} \right) U = \left(\frac{2\lambda_n^2}{A_n^2 \mu} \right) \times \left[\frac{h_1}{(h_2 \cos(\lambda_n L) - k_{11} \lambda_n \sin(\lambda_n z))} \times (q_2''(r) + h_2 T_{\infty 2}) - (q_1''(r) + h_1 T_{\infty 1}) \right]. \quad (18)$$

همچنین شرایط مرزی در جهت r (معادله (۱۲)) به صورت زیر تغییر خواهند کرد:

$$h_3 U(r_0, z) + k_{22} \frac{\partial U(r_0, z)}{\partial r} = G_1(z) \quad (19)$$

$$h_4 U(r_{n_i}, z) + k_{22} \frac{\partial U(r_{n_i}, z)}{\partial r} = G_2(z),$$

که در آن، $U(r, n)$ نمایانگر تبدیل فوریه تابع دما $F(T(r, z))$ می‌باشد و $G_1(n)$ و $G_2(n)$ به صورت زیر

$$N_n^{(n_i)} = \frac{G_2(n) - w^{(n_i)}(r_{n_i}, n)}{h_4 K_0 \left(\frac{\lambda_n r_{n_i}}{\mu_{n_i}} \right) - k_{22} \frac{\lambda_n}{\mu_{n_i}} K_1 \left(\frac{\lambda_n r_{n_i}}{\mu_{n_i}} \right)},$$

$$\left\{ \begin{aligned} \beta_n^{(i+1)} &= \frac{\pi_i}{\chi_i - \alpha_n^{(i+1)}} \\ M_n^{(i+1)} &= \frac{E_i - N_n^{(i+1)}}{\chi_i - \alpha_n^{(i+1)}} \\ \alpha_n^{(i)} &= \frac{\gamma_i}{\psi_i - \beta_n^{(i+1)}} \\ N_n^{(i)} &= \frac{F_i - M_n^{(i+1)}}{\psi_i - \beta_n^{(i+1)}} \end{aligned} \right. \quad 1 < i < n_i - 1,$$

$$M_n^{(1)} = \frac{\left[G_1(n) - w^{(1)}(r_0, n) - N_n^{(1)} \left(h_3 k_0 \left(\frac{\lambda_n r_0}{\mu_1} \right) - k_{22} \frac{\lambda_n}{\mu_1} K_1 \left(\frac{\lambda_n r_0}{\mu_1} \right) \right) \right]}{\left[h_3 I_0 \left(\frac{\lambda_n r_0}{\mu_1} \right) + k_{22} \frac{\lambda_n}{\mu_1} I_1 \left(\frac{\lambda_n r_0}{\mu_1} \right) \right] - \alpha_n^{(1)} \left(h_3 k_0 \left(\frac{\lambda_n r_0}{\mu_1} \right) - k_{22} \frac{\lambda_n}{\mu_1} K_1 \left(\frac{\lambda_n r_0}{\mu_1} \right) \right)}$$

برای اجتناب از پیچیدگی و طولانی شدن عبارات فوق، ضرایب $\pi_i, \chi_i, \gamma_i, \psi_i, E_i$ و F_i به صورت زیر جداگانه ارائه شده‌اند:

$$\pi_i = \frac{\left[-I_0 \left(\frac{\lambda_n r_i}{\mu_i} \right) K_1 \left(\frac{\lambda_n r_i}{\mu_i} \right) - I_1 \left(\frac{\lambda_n r_i}{\mu_i} \right) K_0 \left(\frac{\lambda_n r_i}{\mu_i} \right) \right]}{\frac{\mu_i}{\mu_{i+1}} I_0 \left(\frac{\lambda_n r_i}{\mu_i} \right) K_1 \left(\frac{\lambda_n r_i}{\mu_{i+1}} \right) + I_1 \left(\frac{\lambda_n r_i}{\mu_i} \right) K_0 \left(\frac{\lambda_n r_i}{\mu_{i+1}} \right)}, \quad (29)$$

$$\chi_i = \frac{\left[-\frac{\mu_i}{\mu_{i+1}} I_0 \left(\frac{\lambda_n r_i}{\mu_i} \right) I_1 \left(\frac{\lambda_n r_i}{\mu_{i+1}} \right) + I_0 \left(\frac{\lambda_n r_i}{\mu_{i+1}} \right) I_1 \left(\frac{\lambda_n r_i}{\mu_i} \right) \right]}{\frac{\mu_i}{\mu_{i+1}} I_0 \left(\frac{\lambda_n r_i}{\mu_i} \right) K_1 \left(\frac{\lambda_n r_i}{\mu_{i+1}} \right) + I_1 \left(\frac{\lambda_n r_i}{\mu_i} \right) K_0 \left(\frac{\lambda_n r_i}{\mu_{i+1}} \right)}, \quad (30)$$

$$\gamma_i = \frac{I_0 \left(\frac{\lambda_n r_i}{\mu_i} \right)}{\chi_i \times K_0 \left(\frac{\lambda_n r_i}{\mu_{i+1}} \right) - I_0 \left(\frac{\lambda_n r_i}{\mu_{i+1}} \right)}, \quad (31)$$

$$\left. \begin{aligned} a_n^{(i)} I_0 \left(\frac{\lambda_n r_i}{\mu_i} \right) + b_n^{(i)} K_0 \left(\frac{\lambda_n r_i}{\mu_i} \right) - a_n^{(i+1)} I_0 \left(\frac{\lambda_n r_i}{\mu_{i+1}} \right) + b_n^{(i+1)} K_0 \left(\frac{\lambda_n r_i}{\mu_{i+1}} \right) = \end{aligned} \right. \quad (25)$$

و با توجه به رابطه (۱۱) برای پیوستگی شار حرارت داریم:

$$\left. \begin{aligned} a_n^{(i)} \frac{\lambda_n}{\mu_i} I_1 \left(\frac{\lambda_n r_i}{\mu_i} \right) + b_n^{(i)} \frac{\lambda_n}{\mu_i} K_1 \left(\frac{\lambda_n r_i}{\mu_i} \right) - a_n^{(i+1)} \frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} I_1 \left(\frac{\lambda_n r_i}{\mu_{i+1}} \right) + b_n^{(i+1)} \frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} K_1 \left(\frac{\lambda_n r_i}{\mu_{i+1}} \right) = \end{aligned} \right. \quad (26)$$

$$\frac{\partial w^{(i+1)}(r_i, n)}{\partial r} - \frac{\partial w^{(i)}(r_i, n)}{\partial r},$$

که در آن، I_1 و K_1 به ترتیب توابع بسل اصلاح شده نوع اول و دوم از مرتبه یک هستند. حال برای تعیین ضرایب $a_n^{(i)}$ و $b_n^{(i)}$ بایستی در هر n و برای تمامی لایه‌ها، دستگاه مختصات شامل روابط (۲۳-۲۶) حل شوند. دستگاه معادلات حاصل، یک دستگاه پنج قطری است، که در مقاله حاضر با استفاده از الگوریتم توماس، ماتریس ضرایب پنج قطری مذکور به یک ماتریس دو قطری تبدیل شده که درایه‌های روی قطر اصلی، همگی مساوی یک هستند. در ادامه، با استفاده از روابط بین سطرها در دستگاه معادلات به دست آمده، روابط بازگشتی زیر برای محاسبه a_n و b_n به ازاء مقادیر مختلف n حاصل شده است:

$$\left. \begin{aligned} a_n^{(1)} &= M_n^{(1)}, \\ \begin{cases} b_n^{(i)} &= N_n^{(i)} - \alpha_n^{(i)} \cdot a_n^{(i)} \\ a_n^{(i+1)} &= M_n^{(i+1)} - \beta_n^{(i+1)} \cdot b_n^{(i)} \end{cases} \end{aligned} \right. \quad (27)$$

$b_n^{(n_i)} = N_n^{(n_i)} - \alpha_n^{(n_i)} \cdot a_n^{(n_i)}$,
که در آن، $1 < i < n_i - 1$ است و ضرایب α_n, β_n, N_n و M_n برای هر لایه از روابط زیر پیروی می‌کنند:

$$\alpha_n^{(n_i)} = \frac{h_4 I_0 \left(\frac{\lambda_n r_{n_i}}{\mu_{n_i}} \right) + k_{22} \frac{\lambda_n}{\mu_{n_i}} I_1 \left(\frac{\lambda_n r_{n_i}}{\mu_{n_i}} \right)}{h_4 K_0 \left(\frac{\lambda_n r_{n_i}}{\mu_{n_i}} \right) - k_{22} \frac{\lambda_n}{\mu_{n_i}} K_1 \left(\frac{\lambda_n r_{n_i}}{\mu_{n_i}} \right)}, \quad (28)$$

۵- نتایج و بحث

از جمله معمولترین شرایط مرزی متقارن محوری، می‌توان به انتقال حرارت در پین فین‌ها، لوله‌های کامپوزیتی و مخازن اشاره نمود. در این بخش از حل پین فین‌ها برای صحنه‌گذاری و مقایسه نتایج به‌دست آمده با کار دیگران استفاده شده است.

در مورد بحث توزیع درجه حرارت متقارن محوری در لوله‌ها می‌توان به انتقال حرارت در لوله خنک‌کن راکتور هسته‌ای اشاره کرد. معادله شار حرارت در این نوع لوله‌ها را بایستی به‌صورت زیر در نظر گرفت:

$$\dot{q}_o'' = a + b \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) \quad (38)$$

که در آن، L طول لوله، x فاصله در امتداد لوله، a و b دو عدد ثابت وابسته به نوع مسئله هستند [۲۲].

مطالعاتی در زمینه حل تحلیلی انتقال حرارت در مواد غیر ایزوتروپ انجام شده است. از جمله مقاله بهادر و بارکهن [۱۵] که در آن یک حل تحلیلی برای انتقال حرارت در پین فین‌های اورتوتروپیک آن هم در شرایط مرزی خاص و ساده ارائه داده‌اند. حل آن‌ها را می‌توان برای بررسی صحت جواب‌های به‌دست آمده در تحقیق حاضر استفاده نمود. یک استوانه‌ای توپر به طول ۵ و قطر ۰٫۹ سانتی‌متر به عنوان پره مورد نظر مدل شده و شرایط مرزی عایق و دما ثابت در دو انتهای استوانه و شرط مرزی جابه‌جایی در سطح جانبی اعمال شده است. آن‌ها نرخ سرد شدن پره را بر حسب پارامترهای مختلفی مثل نسبت هدایت $k^* = k_{22}/k_{11}$ (با شرط $k_{rr} = 20w/m.k$) و ... رسم نموده‌اند. برای حل ارائه شده در مقاله‌ی حاضر چنانچه زاویه الیاف در تمامی لایه‌ها 90° درجه باشد، راستای الیاف در جهت z قرار گرفته و انتقال حرارت مشابه یک استوانه اورتوتروپ با ضرایب هدایت $k_{zz} = k_{11}$ و $k_{rr} = k_{22}$ خواهد بود. همان‌گونه که از شکل ۴ بر می‌آید نتایج حاصل از حل حاضر در حالت $\theta = 90^\circ$ کاملاً بر نتایج بهادر و بارکهن [۱۵] منطبق است.

در ادامه، سعی شده است با یک مثال مشخص که تقریباً دربرگیرنده همه ضرایب به‌دست آمده در بخش (۴) می‌باشد، انتقال حرارت دوبعدی پایدار در یک مخزن استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه بررسی شود، در این راستا اثر تغییر زاویه

$$\psi_i = \frac{\pi_i \times K_0 \left(\frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i \right) + K_0 \left(\frac{\lambda_n}{\mu_i} r_i \right)}{\chi_i \times K_0 \left(\frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i \right) - I_0 \left(\frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i \right)}, \quad (32)$$

$$E_i = \pi_i \left[\left(\frac{\partial w^{(i+1)}(r_i, n)}{\partial r} - \frac{\partial w^{(i)}(r_i, n)}{\partial r} \right) - \left[\frac{\lambda_n}{\mu_i} \left(w^{(i+1)}(r_i, n) - w^{(i)}(r_i, n) \right) I_1 \left(\frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i \right) \right] \right], \quad (33)$$

$$F_i = \frac{E_i \times K_0 \left(\frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i \right) - w^{(i+1)}(r_i, n) - w^{(i)}(r_i, n)}{\chi_i \times K_0 \left(\frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i \right) - I_0 \left(\frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i \right)}. \quad (34)$$

علاوه بر این، باید خاطر نشان کرد که در مورد استوانه‌های توپر نیاز به اعمال تعدادی تغییرات وجود دارد که در ادامه بحث مورد بررسی قرار می‌گیرد. روابط مربوط به استوانه توپر با در نظر گرفتن شرط تقارن ($\frac{\partial T}{\partial r} = 0$) در مرکز استوانه به‌دست آمده‌اند. در این صورت معادله (۲۸) به‌صورت زیر تغییر خواهد نمود:

$$M_n^{(1)} = \frac{N_n^{(1)}}{\alpha_n^{(1)}}. \quad (35)$$

این تغییر باعث صفر شدن ضریب $b_n^{(1)}$ می‌شود. بر این اساس رابطه (۲۷) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{cases} a_n^{(1)} = M_n^{(1)}, \\ b_n^{(1)} = 0, \\ \begin{cases} b_n^{(i)} = N_n^{(i)} - \alpha_n^{(i)} a_n^{(i)}, \\ a_n^{(i)} = M_n^{(i)} - \beta_n^{(i)} b_n^{(i)}, \end{cases} \end{cases} \quad (36)$$

$$b_n^{(n_i)} = N_n^{n_i} - \alpha_n^{(n_i)} a_n^{(n_i)},$$

که در آن، $1 < i < n_i - 1$ می‌باشد. در نهایت با مشخص شدن ضرایب a_n و b_n برای هر لایه می‌توان توزیع درجه حرارت در هر لایه را با استفاده از تبدیل معکوس مشخص نمود.

$$T^{(i)}(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} (U^{(i)}(r, n) \times \phi_n(z)) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^{(i)} I_0 \left(\frac{\lambda_n}{\mu_i} r \right) + b_n^{(i)} K_0 \left(\frac{\lambda_n}{\mu_i} r \right) + w^{(i)}(r, n) \right) \times (a_1 \sin(\lambda_n z) - b_1 \lambda_n \cos(\lambda_n z)). \quad (37)$$

جدول (۱): خواص الیاف و ماده زمینه برای ماده مرکب در نظر گرفته شده [۲۳].

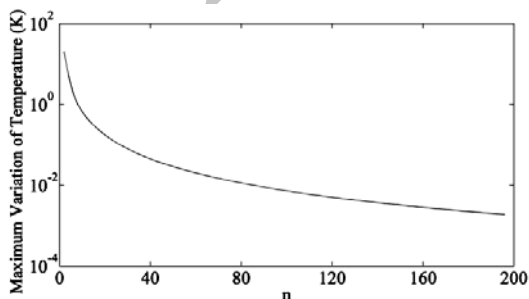
اپوکسی	جنس ماده زمینه
گرافیت	جنس الیاف
۰/۱۹	ضریب هدایت ماده زمینه ($w/m.k$)
۱۴/۷۴	ضریب هدایت الیاف ($w/m.k$)
۱۶۱۳	ظرفیت گرمایی ماده زمینه ($J/Kg.K$)
۷۰۹	ظرفیت گرمایی الیاف ($J/Kg.K$)

جدول (۲): خواص ماده مرکب کولار/ اپوکسی [۲۳].

۱۱/۱	k در جهت موازی الیاف ($w/m.k$)
۰/۸۷	k در جهت عمود بر الیاف ($w/m.k$)
۷۵	درصد حجمی الیاف
۴۵۰	نقطه ذوب (k)
۹۳۵	ظرفیت گرمایی ($J/Kg.K$)
۱۴۰۰	چگالی (Kg/m^3)

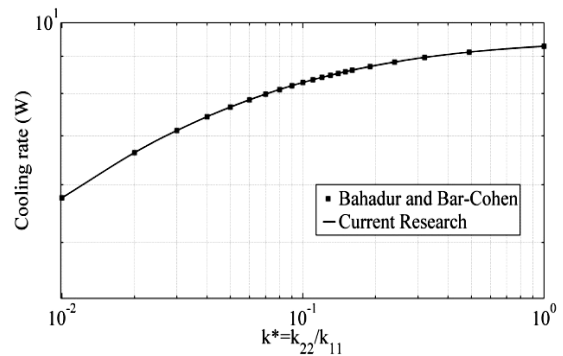
جدول (۳): هندسه و شرایط مرزی.

۰/۵	قطر داخلی (m)
۱	قطر خارجی (m)
۱	طول استوانه (m)
۸۰۰	شار گرمایی داخلی (w/m^2)
۱۵۰	ضریب جابه‌جایی طولی ($w/m^2.k$)
۱۰۰	ضریب جابه‌جایی جانبی ($w/m^2.k$)
۵۰	ضریب جابه‌جایی داخلی ($w/m^2.k$)
۳۰۰	دمای محیط (k)
۳۲۰	دمای محیط داخلی (k)



شکل (۵): حداکثر تغییرات دما بر حسب جملات سری در یک لمینیت تک‌لایه ($\theta = 90^\circ$).

الیاف بر توزیع درجه حرارت در یک لمینیت تک‌لایه و هم چنین در چیدمان‌های مختلف برای لمینیت‌های چندلایه بررسی گردیده است.

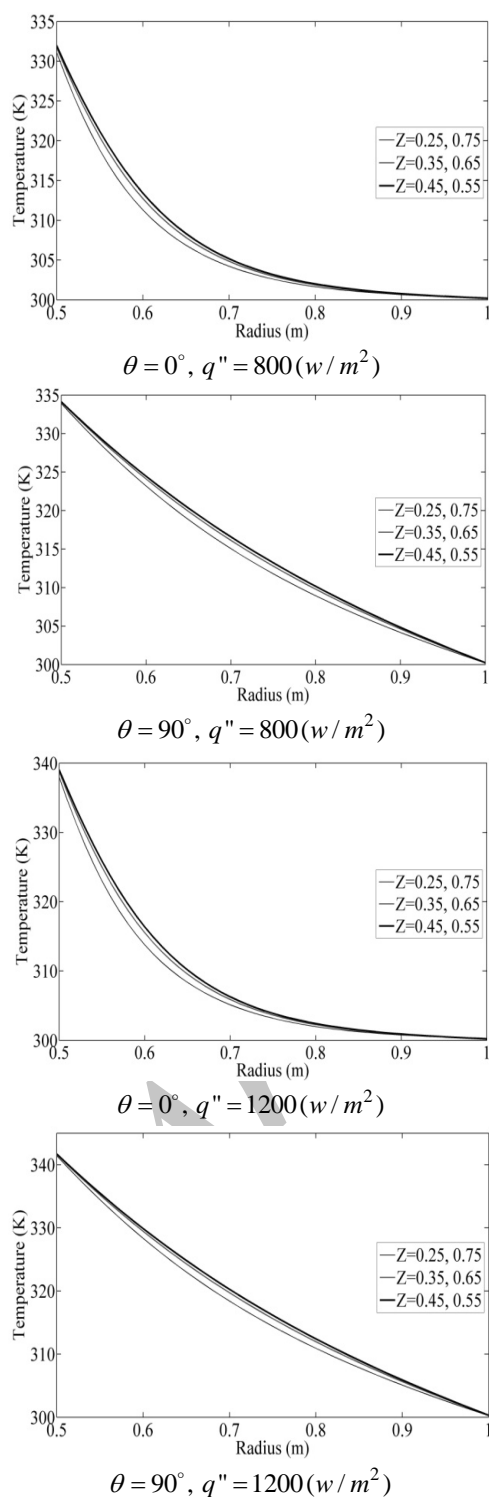


شکل (۴): نرخ سرد شدن پین فین بر حسب نسبت هدایت.

برای هر چه بهتر نشان دادن اثر تغییر خواص در جهت الیاف و جهت عمود بر آن از گرافیت-اپوکسی به عنوان ماده کامپوزیتی استفاده شده است. زیرا ضریب هدایت حرارتی گرافیت-اپوکسی در جهت الیاف ۱۲/۷۶ برابر بزرگ تر از مقدار آن در جهت عمود بر الیاف است که این امر به دلیل هدایت گرمایی بالای گرافیت در مقایسه با اپوکسی به عنوان یک عایق است. بعضی خواص فیزیکی و گرمایی الیاف و ماتریس در جدول ۱ نشان داده شده است. هم چنین، جدول ۲ خواص کامپوزیت ساخته شده از این مواد را بیان می‌کند. برای بررسی اثر تغییر زاویه روی توزیع درجه حرارت در این مواد از یک لمینیت کامپوزیتی یک لایه (یا لمینیت چندلایه با زاویه الیاف مساوی) با مشخصات و شرایط مرزی نشان داده شده در جدول ۳ استفاده شده است.

در شکل ۵ حداکثر تغییرات دما به ازاء تعداد جملات سری معرفی شده با رابطه (۳۷)، نشان داده شده است. این نمودار برای یک لمینیت با زاویه الیاف 90° درجه رسم شده است. با توجه به شکل ۵ این سری به ازاء ۲۰۰ جمله اول سریعاً همگرا شده و تغییرات به کمتر از ۰/۰۱ می‌رسد که تقریب خوبی برای محاسبات مهندسی به‌شمار می‌رود.

داخلی به سمت سطح بیرونی کاهش می‌یابد.



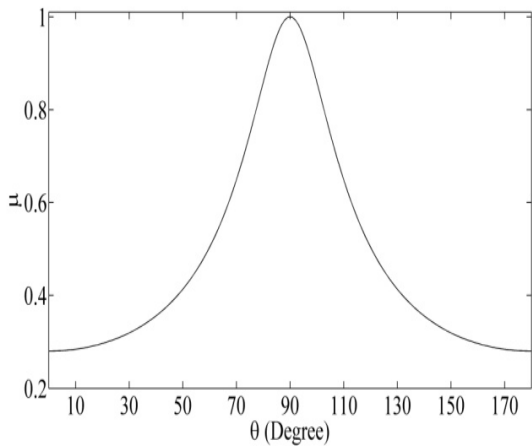
شکل (۶): توزیع دما در یک لمینیت تک لایه تحت شار حرارتی و زوایای الیاف مختلف در مقطع طولی $Z = 0.4$.

در مقاله حاضر نتایج به ازاء ۲۰۰ جمله اول سری نشان داده شده است. به‌طور کلی هر چه نسبت r/L کمتر باشد به تعداد جملات بیشتری برای هم‌گرایی جواب‌های سری نیاز است. به عنوان مثال، جواب‌ها برای لایه‌های بیرونی لمینیت سریع‌تر همگرا خواهند گردید. اما در هر صورت محاسبه ۲۰۰ جمله سری در تمامی موارد کفایت می‌نماید. مشکلی که در مورد توابع سری مانند بسل، لژاندر و ... بروز می‌نماید واگرا شدن این توابع به ازاء جملات زیاد است که در مسئله حاضر این واگرایی در حدود ۲۵۰ جمله رخ می‌دهد. این مشکل ناشی از خطای حاصل از بروز خطای محاسباتی در تخمین این توابع در مقادیر بزرگ است.

شکل ۶ توزیع درجه حرارت را به ازاء مقادیر مختلف شار حرارت q'' ، در یک لمینیت یک لایه با زوایای الیاف صفر و 90° درجه در مقاطع طولی مختلف نشان می‌دهد. همچنین شکل‌های ۷-۸ کانتورهای به‌دست آمده برای توزیع درجه حرارت در دو مقطع طولی مختلف، برای یک لمینیت تک لایه با زوایای الیاف صفر و 90° درجه را نمایش می‌دهند. این کانتورها به منظور مقایسه الگوهای مختلف توزیع دما در چیدمان‌های مختلف و شارهای حرارتی گوناگون ارائه گردیده‌اند. از آن‌جا که مسئله مورد بررسی دارای شرایط مرزی متقارن محوری است لذا به منظور مقایسه بهتر، این کانتورها به صورت قطاع‌های شعاعی نشان داده شده‌اند. با توجه به متقارن بودن شرایط مرزی در جهت طولی توزیع دما در این راستا متقارن خواهد بود. هنگامی که زاویه الیاف صفر درجه است، راستای الیاف در جهت ϕ قرار می‌گیرد و در نتیجه توزیع دما مشابه یک استوانه ایزوتروپ با ضریب هدایت $k_{22} = k_{zz}$ است و یا به عبارتی دیگر $k_{rr} = k_{zz} = k_{22}$.

همان گونه که در شکل ۶ نشان داده شده است، با توجه به شرایط مرزی در نظر گرفته شده، حداکثر دما در سطح داخلی استوانه رخ خواهد داد. همچنین برای حالتی که زاویه الیاف 90° درجه است، مقادیر دمایی بالاتر از حالتی است که زاویه الیاف صفر درجه است و در نتیجه میزان دمای متوسط لمینیت بیشتر خواهد بود که در ملاحظات طراحی بایستی لحاظ گردد. با توجه به کانتورهای مقایسه‌ای ۷ و ۸، به وضوح مشاهده می‌شود که در حالتی که زاویه الیاف 90° درجه است توزیع دما شبه‌خطی بوده و به‌صورت یکنواخت‌تری از سطح

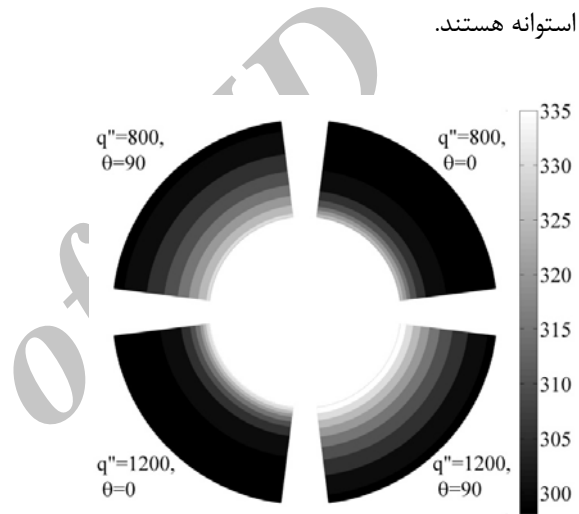
شکل ۹ تغییرات ماکزیمم دمای بی بعد نسبت به زاویه الیاف را نشان می دهد. از آنجا که دمای محیط داخلی استوانه بزرگتر از دمای محیط اطراف در نظر گرفته شده است ($T_{\infty} - T_{sur} < 0$)، مقادیر دمای بی بعد منفی به دست خواهد آمد. افزایش زاویه الیاف از صفر تا 90° درجه باعث می شود که ضریب انتقال حرارت در جهت r کاهش یابد. از طرف دیگر همان گونه از شکل ۹ بر می آید، هنگامی که زاویه الیاف به 90° درجه نزدیک می شود مقدار μ افزایش می یابد که این امر موجب کاهش گرادیان دما در جهت z می شود (معادله (۹)). بنابراین همان گونه که در شکل ۱۰ مشاهده می شود، با افزایش زاویه الیاف از صفر تا 90° درجه مقدار حداکثر دمای بی بعد در لمینیت افزایش خواهد یافت، به طوری که برای شارهای حرارتی $800, 400$ و 1200 W/m^2 به ترتیب افزایش دمای $1,7891$ ، $2,3002$ و $2,8114$ سانتیگراد در لایه ها مشاهده می شود. برای سایر حالت های جهت گیری الیاف در یک لمینیت کامپوزیتی، توزیع دما بین حالت هایی است که زاویه مساوی صفر و 90° درجه است.



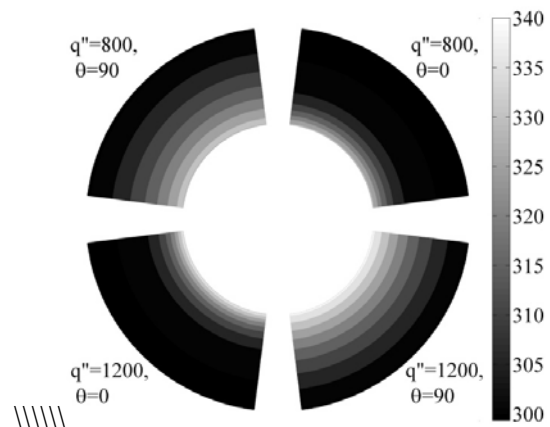
شکل (۹): تغییرات ضریب μ بر حسب زاویه الیاف (θ).

شکل های ۱۱ - ۱۲ توزیع درجه حرارت در یک لمینیت کامپوزیتی پنج لایه با آرایش الیاف شبه ایزوتروپ را تحت شارهای حرارتی متفاوت نشان می دهد. قطر داخلی مساوی $0,5 \text{ m}$ و ضخامت لایه ها $0,1 \text{ m}$ در نظر گرفته شده است. شرایط مرزی حرارتی و جنس کامپوزیت مشابه حالت لمینیت

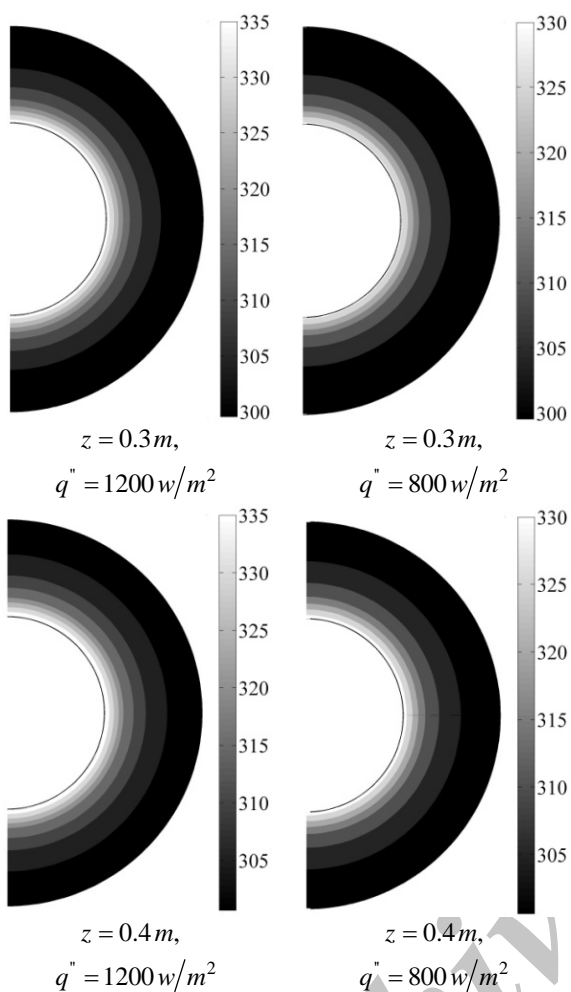
در شکل ۹ تغییرات ضریب μ (رابطه (۱۰)) نسبت به زاویه الیاف نشان داده شده است. با توجه به شکل ۹ این مقادیر نسبت به زاویه 90° متقارن بوده و در این زاویه ماکزیمم بوده و دارای پیرویی مساوی 180° می باشند. در این تحقیق، برای بررسی اثر تغییر زاویه بر روی دمای لمینیت، پارامتر دمای بی بعد به صورت $\left[\frac{(T - T_{\infty, in})}{(T_{\infty, out} - T_{\infty, in})} \right]$ تعریف شده است، که $T_{\infty, out}$ و $T_{\infty, in}$ به ترتیب دمای محیط در داخل و خارج استوانه هستند.



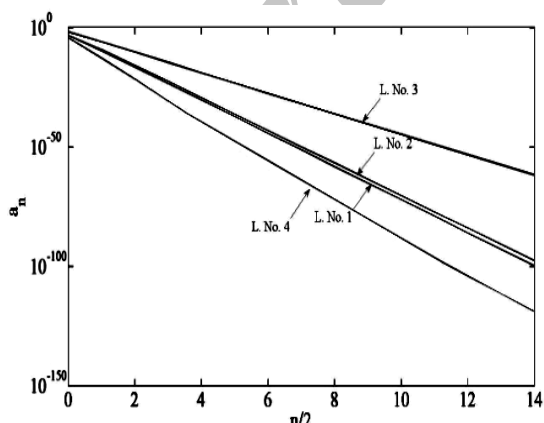
شکل (۷): کانتورهای توزیع دما در یک لمینیت تک لایه برای زوایای الیاف و شار حرارت مختلف در $z = 0,3$.



شکل (۸): کانتورهای توزیع دما در یک لمینیت تک لایه برای زوایای الیاف و شار حرارت مختلف در $z = 0,4$.

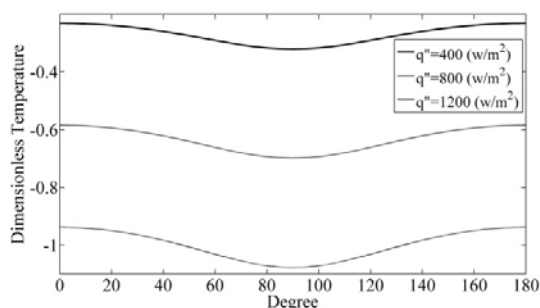


شکل (۱۲): کانتورهای توزیع دما در یک لمینیت شبه ایزوتروپ.

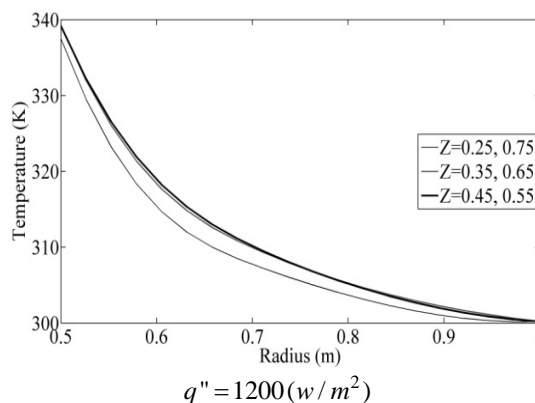
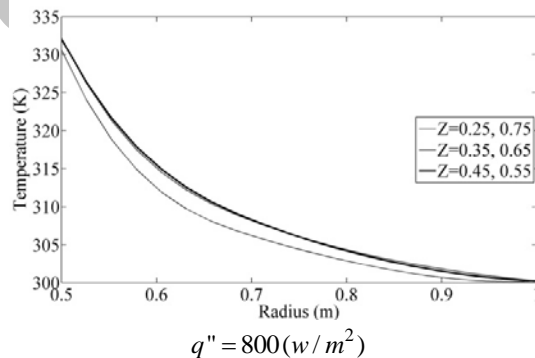


شکل (۱۳): توزیع جمله a_n سری فوریه بر حسب $n/2$ در لمینیت استوانه‌ای شبه ایزوتروپ.

تک‌لایه است. در لمینیت‌های شبه ایزوتروپ، آرایش الیاف به صورت $[0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ]$ در نظر گرفته می‌شود. با مقایسه بین نمودارهای به‌دست آمده برای توزیع دما در حالت تک‌لایه و چندلایه، مشخص می‌شود که توزیع دما در این حالت بین حالتی است که زوایای الیاف برای تمام لایه‌ها صفر و 90° باشد.



شکل (۱۰): حداکثر توزیع دمای نسبی بر حسب زاویه الیاف (θ) تحت شارهای حرارتی متفاوت.



شکل (۱۱): کانتورهای توزیع دما در یک لمینیت شبه ایزوتروپ برای شارهای حرارتی مختلف.

۱- به دلیل اعمال شرایط مرزی کلی، حل تحلیلی حاضر می‌تواند برای محدوده وسیعی از شرایط گرمایی در لوله‌ها، مخازن و پره‌ها به کار رود،

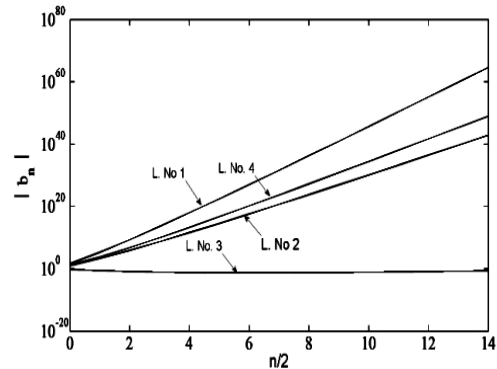
۲- هنگامی که زاویه الیاف 90° درجه است، توزیع دما یکنواخت‌تر از سایر حالات است. اما هنگامی که زاویه الیاف صفر درجه است، حداکثر و حداقل دما در لایه‌ها کمتر است که در بحث طراحی بایستی لحاظ گردد،

۳- برای سایر چیدمان‌های الیاف، توزیع دما بین حالتی قرار می‌گیرد که زاویه الیاف صفر و 90° درجه است و

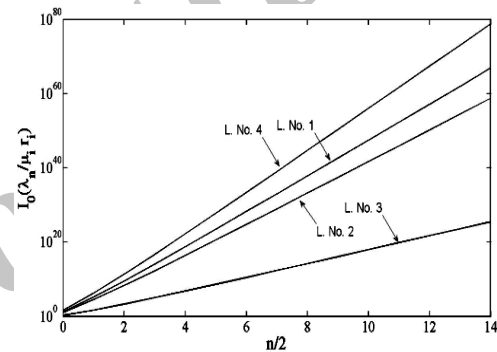
۴- بسته به هدف طراحی، می‌توان از آرایش‌های مختلف الیاف در لمینیت کامپوزیتی بهره برد. به عنوان مثال اگر هدف کاهش تنش‌های حرارتی در لمینیت باشد، می‌توان با تنظیم مناسب جهت الیاف در هر لایه، گرادیان دما را کاهش داده و به توزیع دمایی یکنواخت‌تری دست یافت. البته مورد آخر تنها در حالتی صحیح است که جنس تمامی لایه‌ها در لمینیت مورد نظر یکسان باشد. در حالتی که جنس ماده الیاف، زمینه و رزین و همچنین میزان درصد حجمی تراکم الیاف کامپوزیتی لایه به لایه تغییر کند، امکان بروز حالت‌های بهینه دیگر وجود خواهد داشت.

مراجع

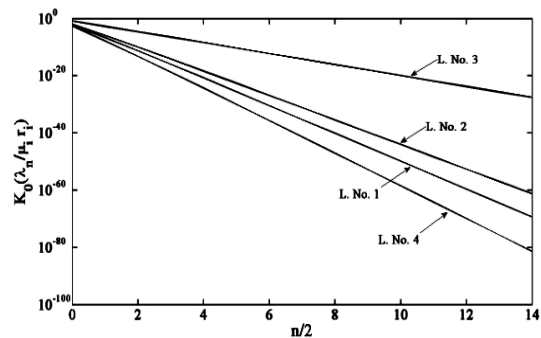
1. Chao, C.K., Che F.M., and Shen, M.H. "An Exact Solution for Thermal Stresses in a Three-Phase Composite Cylinder under Uniform Heat Flow", *Int. J. Solids and Struct.*, Vol. 44, No. 2, pp. 926-94, 2007.
2. Pradeep, V. and Ganesan, N. "Thermal Buckling and Vibration Behavior of Multi-Layer Rectangular Viscoelastic Sandwich Plates", *J. Sound and Vib.*, Vol. 310, No. 1, pp. 169-183, 2008.
3. Eslami-Farsani, R., Shokuhfar, A., and Sedghi, A. "An Investigation of the Physical and Mechanical Properties of Carbon Fiber Fabricated from Commercial and Special Polyacrylonitrile Fibers", *Mech. & Aerospace Eng. J.*, Vol. 1, No. 2, pp. 87-94, 2005(In Persian).
4. Darvizeh, M., Darvizeh, A., Shaterzadeh, A.R., and Ansari, R. "Thermal Buckling Analysis of Moderately Thick Composite Cylindrical Shells under Axisymmetric Thermal Loading", *Mech. &*



شکل (۱۴): توزیع جمله b_n سری فوریه بر حسب $n/2$ در لمینیت استوانه‌ای شبه ایزوتروپ.



شکل (۱۵): توزیع جمله $I_0(\lambda_n r_i / \mu_i)$ بر حسب $n/2$ در لمینیت استوانه‌ای شبه ایزوتروپ.



شکل (۱۶): توزیع جمله $K_0(\lambda_n r_i / \mu_i)$ بر حسب $n/2$ در لمینیت استوانه‌ای شبه ایزوتروپ.

۶- نتیجه‌گیری

تحقیق حاضر، یک حل دقیق تحلیلی برای توزیع دمایی پایدار دوبعدی (r, z) با شرایط مرزی کلی ارائه می‌دهد. مهم‌ترین نتایج این مطالعه به شرح زیر است:

- Bodies”, *Int. J. Heat and Mass Trans.*, Vol. 46, No. 5, pp. 2363-2379, 2003.
14. Guo, Z.S. “Temperature Distribution of Thick Thermo Set Composites”, *J. Model Simulation Mater. Sci. Eng.*, Vol. 12, No. 1, pp. 443-452, 2004.
 15. Bahadur, R. and Bar-Cohen, A. “Orthotropic Thermal Conductivity Effect on Cylindrical Pin Fin Heat Transfer”, *Int. J. Heat and Mass Trans.*, Vol. 50, No. 2, pp. 1155-1162, 2007.
 16. Kayhani, M.H., Shariati, M., Nourozi, M., and Karimi-Demneh, M., “Exact Solution of Conductive Heat Transfer in Cylindrical Composite Laminate”, *Int. J. Heat and Mass Trans.*, Vol. 46, No. 1, pp.83-94, 2009.
 17. Ozisik, M.N. “Heat Conduction”, Wiley, New York, 1993.
 18. Fung, Y. “Foundation of Solid Mechanics”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1965.
 19. Herakovich, C.T. “Mechanics of Fibrous Composites”, Wiley, New York, 1998.
 20. Halpin, J.C. “Primer on Composite Materials Analysis”, CRC Press, Boca Raton, 1992.
 21. Myint-U, T. and Debnath, L. “Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers”, Birkhauser Boston, 2007.
 22. Kays, W.M., Crawford, M.E., and Weigand, B., “Convective Heat and Mass Transfer”, 4th Ed. McGraw-Hill, 2005.
 23. Touloukian, Y.S. and Ho, C.Y. “Thermophysical Properties of Matter”, Plenumpress, New York, pp.740, 1972.
 - Aerospace Eng. J., Vol. 3, No. 2, pp. 99-107, 2007(In Persian).
 5. Wooster, W.A. “A Textbook in Crystal Physics”, Cambridge Univ. Press, London, 1957.
 6. Nye, J.F. “Physical Properties of Crystals”, Clarendon Press, London, 1957.
 7. Chingma, C.H. and Wenchang, S.H. “Analytical Exact Solutions of Heat Conduction Problems for Anisotropic Multilayered Media”, *Int. J. Heat and Mass Trans.*, Vol. 47, No. 4, pp. 1643-1655, 2004.
 8. Kulkarani, M.R. and Brady, R.P. “A Model of Global Thermal Conductivity in Laminated Carbon-Carbon Composites”, *Comp. Sci. and Tech.*, Vol. 57, No. 1, pp.277-285, 1997.
 9. Wang, M., Kang, Q., and Pa, N. “Thermal Conductivity Enhancement of Carbon Fiber Composites”, *Appl. Thermal Eng.*, Vol. 29, No. 1, pp. 418-421, 2009.
 10. Johanson, B.T. and Lesnic, D. “A Method of Fundamental Solutions for Transient Heat Conduction in Layered Materials”, *Eng. Analysis with Boundary Elements*, Vol. 33, No. 3, pp. 1362-1367, 2009.
 11. Sun, Y. and Wichman I.S. “On Transient Heat Conduction in a One-dimensional Composite Slab”, *Int. J. Heat and Mass Trans.*, Vol. 47, No. 3, pp. 1555-1559, 2004.
 12. Karageorghis, A. and Lesnic, D. “Steady State Nonlinear Heat Conduction in Composite Materials”, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 197, No. 5, pp. 3122-3137, 2008.
 13. Haji-Sheikh, A., Beck, J.V., and Agonater, D. “Steady State Heat Conduction in Multi-layer