# تحلیل جریان همرفت آزاد روی یک صفحه موجدار عمودی تکدما با مدل جدید شار

سید اسماعیل رضوی<sup>۱</sup> مجتبی پورحسین<sup>۲</sup> دانشکده مهندسی مکانیک دانشکده فنی مهندسی دانشگاه تبریز دریافت: ۸۸/۱۰/۲۱; تاریخ یذیرش:۹۰/۲/۱۲:

#### چکیدہ

در این تحقیق، انتقال گرمای همرفت آزاد از روی یک صفحه سینوسی عمودی دما ثابت با حل معادلات ناویر- استوکس، در رژیم جریان آرام و به روش حجم محدود تحلیل شده است. همچنین، مدل جدیدی بر پایهی فشار برای محاسبه شارهای جابهجایی ارائه شده است. نسخههای مرتبه اول و دوم این مدل پیشنهادی قادرند تا شارهای جابهجایی را با دقت خوبی بدون نیاز به اتلاف مصنوعی محاسبه نمایند. نتایج عددی به خوبی با نتایج سایر پژوهشگران مطابقت دارد. در این بررسی، پارامترهای تغییرکننده شامل عدد ریله و نسبت دامنه به طول موج صفحه سینوسی میباشند. نتایج نشان میدهد که فرکانس تغییر ضرایب انتقال گرمای محلی برای صفحه در فضای آزاد برابر فرکانس خود صفحه میباشد. در ضمن، با افزایش عدد ریله ضریب انتقال گرمای میانگین افزایش می یابد.

**واژههای کلیدی:** همرفت آزاد، معادلات ناویر - استوکس، فرض بوسینسک، صفحه موجدارسینوسی، روش حجم محدود، جریان آرام

# Investigation of Free Convection Flow over a Vertical Wavy Wall in Constant Temperature, Using a New Flux Model

**S.E. Razavi** Mech. Eng. Dep't. Tabriz Univ. M. Pour-Hossein Eng. Dep't. Tabriz Branch, Islamic Azad Univ.

(Received: 11 January 2010; Accepted: 2 May 2011)

## ABSTRACT

In this research, free convection heat transfer over vertical sinusoidal wall in constant temperature has been performed, using Navier-Stokes equations in laminar flow regime with finite volume method. Also, a new pressurebased model for the convective fluxes is offered, which minimizes the need for artificial dissipation. The first and second-order versions of the suggested model are unable to calculate the convective fluxes with a good accuracy. Numerical results are well adapted with the numerical or experimental results of other researchers. In this study, the variable parameters are Reyleigh number and the ratio of domain length to the sinusoidal wave length. The results show that the local heat transfer coefficient variation frequency for space is equal to the wall frequency. Meanwhile, with increasing the Reyleigh number, the average heat transfer coefficient increases.

Keywords: Free Convection, Navier-Stokes Equations, Boussinesq Approximation, Sinusoidal Wavy Wall, Finite Volume Method, Laminar Flow

razavi@tabrizu.ac.ir : دانشيار (نويسنده پاسخگو): ۱- دانشيار

۲-دانشجوی کارشناسی ارشد: mojtaba.porhosein@ gmail.com

#### فهرست علائم

#### ۱– مقدمه

مطالعه انتقال گرمای همرفت آزاد در بسیاری از زمینههای صنعتی و فرآیندهای طبیعی از اهمیت ویژهای برخوردار است. همرفت آزاد در مسائل بسیاری که انتقال گرما به روشهای

دیگر ممکن نیست، آهنگ انتقال گرما را محدود میکند. در این مواقع برای افزایش کارآیی، لازم است تا آهنگ انتقال گرما به روش همرفت آزاد افزایش یابد. فرآیند انتقال گرما به روش همرفت آزاد از روی صفحات عمودی زائدهدار در کاربردهای صنعتی به وفور دیده می شود. این صفحات مىتوانند به كمك المان هاى مختلفى زائدهدار شوند. يكى از رايجترين زمينهها بردهاى الكترونيكي درون قطعات رايانهاى است. گرمای دفع شده از روی این گونه مدارهای الکترونیکی بر عملکرد آنها تأثیر بهسزایی دارد. از دیگر مواردی که انتقال گرما بهروش همرفت آزاد در آن اتفاق میافتد، کندانسور یخچالهای خانگی است. در این دستگاهها، لولههای کندانسور را می توان مانند یک صفحه زائدهدار عمودی مدل کرد که همرفت آزاد در آن صورت می گیرد. صفحات سینوسی شکل، تمام صفحات زایدهدار دیگر را نیز شامل می شود و می تواند به عنوان تقریبی از هندسههای کاربردی دیگر که مطالعه انتقال گرمای همرفت آزاد از آنها مهم است، در نظر گرفته شوند. یک مثال آشنا در این زمینه می تواند پرههای خنک کننده ىاشد.

یاو<sup>(</sup> [۱] در سال ۱۹۸۲ به روش عددی انتقال گرمای همرفت آزاد را از روی صفحه سینوسی شکل بررسی کرد. وی محاسبات خود را برای Pr=1 انجام داد. نتایج عددی نشان داد که فرکانس تغییرات آهنگ انتقال گرمای محلی، دو برابر فرکانس صفحه سینوسی بوده و دامنه نوسانات عدد نوسلت محلی از پایین تا بالای صفحه به سبب رشد لایه مرزی گرمایی به تدریج گاهش می بابد. یاو و مولیک<sup>۲</sup> [۳] در سال ۱۹۸۹ مطالعهای عددی بر روی صفحات سینوسی انجام دادند. بررسی آنها بر روی جریان جابه جایی مختلط انجام شد. بهاوانی و برگلس<sup>۳</sup> [۲] با روش تداخل سنج نوری ماخ-زندر مطالعه تجربی بر روی آهنگ انتقال گرمای همرفت آزاد از روی صفحات سینوسی شکل را انجام دادند. آنها پارامترهایی مانند نسبت دامنه به طول موج صفحه و زاویه قرارگیری صفحه را تغییر داده و تأثیر آنها را بر آهنگ انتقال گرما

- 1- Yao
- 2- Moulic
- 3- Bhavani and Bergles

عددی یاو [1] بود. آنها مشاهده کردند که فرکانس تغییرات ضریب انتقال گرمای همرفت آزاد، با فرکانس صفحه سینوسی برابر است. نتایج تجربی نشان داد که بازدهی گرمای صفحات سینوسی شکل در نسبت دامنه به طول موجهای کوچک یا بازدهی صفحه تخت تفاوت چندانی ندارد. همچنین هرچه نسبت دامنه به طول موج صفحه افزایش می یابد آهنگ انتقال گرما از روی صفحه کاهش می یابد. اوستراچ<sup>†</sup> [۴] نیز در سال ۱۹۵۲ بهصورت تحلیلی معادلات ناویر- استوکس را برای سطح عمود موجدار حل نموده است. كومار<sup>6</sup> [۵] نيز با استفاده از روش المان محدود، همرفت آزاد را برای حجم بسته با دیوارهای متخلخل با سیستم شبکهبندی نامنظم تحلیل عددی نمود. مونیر و حسین [۸] در مورد همرفت آزاد در یک سیال با لزجت متغیر، در امتداد یک مخروط موجى شكل تحقيق كردند. كبير و حسين [۶] نيز همرفت آزاد سیالی را که لزجت، تابعی از دمای آن بود را بر روی صفحه موجدار عمودی مورد بررسی قرار دادهاند. یاو و مولیک [۷] تأثیر موجدار کردن سطح را بر روی لایه مرزی گرمایی در همرفت آزاد توضيح دادند. سرانجام ياو [۹] در سال ۲۰۰۵ مطالعه عددی بررسی انتقال گرمای همرفت آزاد از روی صفحات موجى با هندسه پيچيده انجام داد. مهمترين نتیجه گیری او این بود که آهنگ انتقال گرما از روی صفحات موجی شکل با هر نوع هندسهای از آهنگ انتقال گرمای صفحه تخت بيشتر است. اين وابسته به نسبت دامنه به طول موج صفحه است. از طرف دیگر آهنگ انتقال گرمای متوسط از روی صفحات سینوسی شکل به ازای واحد سطح یکسان نسبت به صفحه تخت عمودی کمتر است. اما آنچه در طراحی مبدل های گرمایی مهم است آهنگ کل انتقال گرما از روى صفحه مىباشد.

مطالعات گسترده قبلی که روی انتقال گرمای جابهجایی آزاد از صفحات موجی شکل انجام شده، نشاندهنده اهمیت این موضوع در صنایع و پدیدههای فیزیکی محیط اطراف است. در این تحقیق، انتقال گرمای جابهجایی آزاد از روی صفحه سینوسی شکل عمودی با استفاده از روش حجم

6- Munir

محدود و مدل جدید شار جابهجایی مورد بررسی قرار گرفته است.

۲- معادلات حاکم و گسستهسازی

شکل حجم محدود معادلات بیبعد حاکم در جریان همرفت آزاد به صورت زیر است:  $\frac{\partial}{\partial t} \int Wdvol. + \oint (Fdy - Gdx) = \oint (Rdy - Sdx) + \int Zdvol.$  (۱) که در آن، W, F, G, R, S, Z به صورت زیر محاسبه میشوند:



G و F و F و Z و Z و Z و Z و Z و Z و Z بردارهای شار لزج و Z بردارهای شار لزج و z جمله چشمه میباشند. لازم به ذکر است معالات پیوستگی و ممنتوم با تراکمپذیری مصنوعی به هم پیوند داده شدهاند. معادله (۱) روی المان چهار وجهی ABCD شکل I صادق است.

<sup>4-</sup> Ostrach

<sup>5-</sup> Kumar

$$\xi_{AB-T} = \frac{p_{i,j}}{p_{i,j} + p_{i,j+1}},$$
  

$$\xi_{AB-B} = \frac{p_{i,j-1}}{p_{i,j-1} + p_{i,j}},$$
  

$$\xi_{AB} = \frac{\xi_{AB-B} + \xi_{AB-T}}{2}.$$
  
( $\Delta$ )

در رابطه فوق، دقت  ${}_{AB}$  از مرتبه دوم میباشد. عامل وزنی شار  $(\xi)$ ، بر این پایه بنا نهاده شده است که فشار ماکروسکوپیک (p) به عنوان نیروی محرکه برای جریان میان دو سلول هم مرز عمل میکند. با توجه به مطالب فوق، برای سایر وجوه نیز میتوان روابط (۳) و (۵) را نوشت. برای گسستن مشتقهای مرتبه دوم (جملههای لزجت) در معادله حاکم (۲)، اگر  $\varphi$  تابعی از u, v در نظرگرفته شود، با فرض اینکه  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = S = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ 

$$\oint_{ABCD} (Rdy - Sdx) = \oint_{ABCD} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dy - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dx \right].$$
 (7)

$$\begin{split} \oint_{ABCD} (Rdy - Sdx) &= \sum_{k=1}^{4} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dy - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dx \right]_{k} \\ &= \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \Delta y - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \Delta x \right]_{AB} \\ &+ \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \Delta y - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \Delta x \right]_{BC} \\ &+ \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \Delta y - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \Delta x \right]_{CD} \\ &+ \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \Delta y - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \Delta x \right]_{DA}. \end{split}$$

$$(Y)$$

برای محاسبه جمله چشمه، لازم است انتگرال روی حجم یک سلول انجام گیرد. سادهترین تقریب درجه دو، جایگزینی انتگرال حجم کنترل با حاصل ضرب مقدار متوسط متغیر در حجم سلول بهصورت زیر است[۱۰]:



$$\sum_{K=1}^{4} \frac{(F\Delta y - G\Delta x)_{K}}{(R\Delta y - S\Delta x)_{K}} = \sum_{ABCD}^{4} \frac{(F\Delta y - S\Delta x)_{K}}{(F\Delta y - S\Delta x)_{K}} + \int_{ABCD} Zds.$$
(7)

$$\begin{split} \Delta y_{AB} &= y_B - Y_A \ , \\ \Delta x_{AB} &= x_B - x_A \ , \end{split} \tag{(7)} \\ F_{AB} &= \xi_{AB} \times F_{i,j} + (1 - \xi_{AB}) \times F_{i,j+1} \ , \\ G_{AB} &= \xi_{AB} \times G_{i,j} + (1 - \xi_{AB}) \times G_{i,j+1} \ . \\ \text{c, clehed begin} & AB \ \text{show one show on a show on a$$

$$\xi_{AB} = \frac{p_{i,j}}{p_{i,j} + p_{i,j+1}}.$$
 (f)

در این رابطه، <sub>AB</sub> از دقت مرتبه اول میباشد. با توجه به این رابطه، برای نوشتن روابط با دقت مرتبه بالاتر باید از سلولهای بیشتری به صورت زیر استفاده کرد: 

## ۵– نتایج عددی

برای بررسی صحت مدل شار جابهجایی ارائه شده و معتبرسازی کد عددی نوشته شده، انتقال گرمای جابهجایی آزاد بر روی یک صفحه موجدار سینوسی با 20.5 $\alpha$  در دمای ثابت انجام شده است. شکل **۲** تغییرات ضریب انتقال گرما موضعی را بر حسب فاصله از لبه یپائینی صفحه نشان می دهد. اختلاف دمای سطح با محیط در کار حاضر و کار تجربی هاوانی و برگلس به ترتیب ۳۰ و ۲۹/۸ درجه سلسیوس است. اختلاف متوسط ضریب انتقال گرمای بهدست آمده در کار حاضر و کار بهاوانی و برگلس (۲۹ می ا



دما ثابت با ۵.05 = ۲ برحسب طول منحنی در *CFL* = 0.1, Re = 513110

$$\int_{ABCD} Zds = \int_{ABCD} \frac{Gr}{Re^2} \theta ds = \frac{Gr}{Re^2} \bar{\theta}_{i,j} S_{ABCD},$$

$$Z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{Gr}{Re^2} \theta \end{bmatrix}.$$
(A)

پس از گسستهسازی همه جملههای معادله (۱) داریم: ۵*۵* ۵۷

$$A_{ABCD} \frac{\partial W_{i,j}}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \left( R_K \Delta y_k - S_K \Delta x_k \right) - \sum_{k=1}^{4} \left( F_K \Delta y_k - G_K \Delta x_k \right) + \frac{Gr}{\text{Re}^2} \bar{\theta}_{i,j} .$$
(9)

نوسانات عددی اغلب در قسمتهای با گرادیان بالا ایجاد میشوند. از آنجایی که در بیشتر حالات ریژتر کردن شبکه غیرعملی است یا نقاط مشکلزا در قسمتهای دور از نواحی مهم هستند[۵]. برای هموار شدن نوسانات، مککورماک و بالدوین روشی ابداع کردند که در آن از یک جمله هموارساز درجه چهارم در فرونشانی نوسانات به صورت زیر استفاده شده است: چهارم در فرونشانی نوسانات به صورت زیر استفاده شده است:  $D(u) = - \in \Delta t \left[ (\nabla \Delta)_x^2 + (\nabla \Delta)_y^2 \right] u$ 

برای گسستن مشتقهای زمانی، روش رانک-کوتای مرتبه پنجم (معادلات (۱۱)) به کار میرود. استفاده از این روش برای افزایش دقت و دامنه پایداری سیستم است[۱۰]:

$$W^{(m)} = W^{(0)} - \alpha_m \Delta t Q^{(m-1)} (W).$$
  

$$\alpha_m = 1/2, \ 1/2, \ 1, 1/6 \qquad (11)$$
  

$$m = 1, 2, 3, 4$$

+ شرایط مرزی  
به خاطر عدم لغزش سیال بر روی سطح جامد می توان نوشت:  
$$V_{wall} = ...$$
سرعت سیال در روی دیواره  $V_{wall} = ...$   
علاوه بر شرط فوق، شرط دیگری نیز صادق است که می تواند  
به طور مستقیم اعمال گردد. تنش برشی عمودی در روی  
به طور مستقیم اعمال گردد. تنش برشی عمودی در ایم:  
 $U_{s} = 0, V_{s} = 0, \theta_{s} = 0,$ 

$$P_{\rm s} = 1.5P_{\rm i,1} - 0.5P_{\rm i,2} , \qquad (17)$$

که در آن،  $P_{s}$ ، فشار روی سطح جامد میباشد و شرط عدم لغزش برای جریان و شرط دما ثابت برای انتقال گرما روی سطح جامد به کار رفته است. همچنین برای ناحیه دور داریم:

برنامهی نوشته شده ابتدا با شبکههایی با ابعاد برنامهی نوشته شده ابتدا با شبکههایی با ابعاد  $40 \times 50, 40 \times 60$  و  $80 \times 60$  اجرا شده و در نهایت شبکه  $80 \times 60$  انتخاب شد. شکل **۳** جوابهای بهدست آمده برای Nu موضعی صفحه سینوسی با مختلف انجام گرفته را نشان میدهد. همچنین در شکلهای مختلف انجام گرفته را نشان میدهد. همچنین در شکلهای ما- ۹ نیز دقت و سرعت روش ارائه شده در این مقاله، نسبت به روشهای دیگر نشان داده شده است. همچنین برای اطمینان بیشتر از صحت نتایج، مقایسهای با کار تجربی بهاوانی و برگلس[۲] بر روی صفحه موجدار سینوسی با نسبت دامنه به طول موج  $800 = \alpha$  انجام شده است.



شکل  $\mathbf{f}$  ضریب انتقال گرمای محلی را بر روی صفحه نمایش میدهد. شکلهای  $\mathbf{F} - \mathbf{\Delta}$  نتایج به دست آمده برای صفحات سینوسی با  $\mathbf{R}$ های مختلف را نشان میدهند. همان طور که در این شکلها مشاهده می شود، ضریب انتقال گرما رفتار پریودیک داشته و دوره تناوب این تغییرات، با فرکانس صفحه موجدار سینوسی برابر است. مکان بیشینه و کمینه ضریب انتقال گرما نیز با مکان برآمده و فرورفته صفحه سینوسی متناسب است. همچنین، تغییرات ضریب انتقال گرمای متناسب مفحه موجدار سینوسی بستگی داشته و با تغییرات شیب صفحه تغییر میکند. علت این امر، همان طور

که در شکل ۷ مشاهده می شود، نزدیک شدن خطوط جریان در فرو رفتگیها و دور شدن این خطوط در قلههای صفحه موجدار سینوسی است که باعث افزایش یا کاهش تبادل اندازه حرکت و به وجود آمدن رفتار پریودیک در تغییرات ضریب انتقال گرمای موضعی است.



شکل (۴): مقایسه ی بین ضریب انتقال گرمای محلی به دست آمده از کار عددی و تجربی برای صفحه سینوسی دما ثابت با  $\alpha = 0.05 = Ra$  و CFL = 0.05).









**شکل (۶**): ضریب انتقال گرمای محلی برای صفحات سینوسی مختلف در *Ra* = 565418 .

شکل ۸ مقایسهای بین ضریب انتقال گرمای متوسط برای صفحه تخت و سینوسی شکل در اعداد ریله مختلف ارائه می دهد. همان طور که مشاهده می شود، مقدار ضریب انتقال گرمای متوسط برای صفحه تخت از صفحه سینوسی کردن صفحه، آهنگ انتقال گرمای متوسط را نسبت به صفحه تخت با سطح تصویر شده یکسان کاهش می دهد. اما آن چه که در طراحی صفحات انتقال گرما مهم است، مقدار کل گرمای منتقل شده از صفحه می باشد. شکل ۹ مقدار کل انتقال گرمای همرفت از صفحات در فضای نامحدود را نشان می دهد. همان طور که در این نمودار مشاهده می شود مقدار کل انتقال گرمای همرفت از صفحه سینوسی شکل نسبت به صفحه تخت به دلیل افزایش سطح تبادل گرما، افزایش می یابد.

مقایسهی صفحه سینوسی شکل و صفحه تخت با سطح تصویر شده یکسان نشان می دهد که مقدار افزایش سطح تبادل گرما برای صفحات سینوسی شکل با نسبت دامنه به طول موج  $0.05 = \alpha$  برابر ٪/۲۸۸ خواهد بود. بنابراین افزایش مقدار انتقال گرمای جابه جایی کل از صفحه، به قیمت مصرف مواد بیشتر برای ساخت صفحات با نسبت دامنه به طول موج بزرگتر تمام خواهد شد.

www.SID.ir

۴- با موجدار کردن یک صفحه تخت عمودی، ضریب انتقال
 گرمای متوسط از آن کاهش و آهنگ کل گرمای دفع شده از
 آن افزایش مییابد و
 ۵- با افزایش نسبت طول موج به دامنه، ضریب انتقال گرمای
 کل نیز افزایش مییابد. میتوان علت این امر را در افزایش
 سطح تبادل گرما و تا حدودی افزایش برخورد ذرات سیال و
 تبادل اندازه حرکت بیشتر دانست.

# مراجع

- Yao, L.S. "Natural Convection along a Vertical Wavy Surface", Int. J. Heat Trans., Vol. 105, No. 3, pp. 465-469, 1982.
- Bhavani, S.H. and Bergles, A.E. "An Experimental Study of Laminar Natural Convection Heat Transfer from Wavy Surface", Int. J. Heat Trans., Vol. 96, No. 3, pp. 173-180, 1988.
- Moulic, S.G. and Yao, L.S. "Mixed Convection along a Wavy Surface", Int. J. Heat Trans., Vol. 111, No. 4, pp. 974-979, 1989.
- 4. Ostrach, S. "An Analysis of Laminar Free Convection Flow and Heat Transfer about a Flat Plate Parallel to Direction of the Generation Body Force", NACA Technical Note 2635, 1953.
- Kumar, B.V.R. "A Study of Free Convection Induced by a Vertical Wavy Surface with Heat Flux in a Porous Enclosure", Int. J. Heat Trans., Vol. 37, No. 5, pp. 493-510, 2000.
- Kabir, S.M. and Hossain, A. "Natural Convection of Fluid with Temperature Dependent Viscosity from Heated Vertical Wavy Surface", J. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP), Vol. 53, No. 1, pp. 48-52. 2002.
- Moulic, S.G. and Yao, L.S. "Natural Convection along a Wavy Surface with Uniform Heat Flux", Int. J. Heat Trans., Vol. 111, No. 4, pp. 1106-1108, 1989.
- 8. Munir, M.S. and Hossain, M.A. "Natural Convection of a Viscous Fluid with Viscosity Inversely Proportional to Linear Function of Temperature from a Vertical Wavy Cone", Int. J. Thermal Sci., Vol. 40, No.4, pp. 366-371, 2001.
- 9. Yao, L.S. "Natural Convection along a Vertical Complex Wavy Surface", Int. J. Heat and Mass Trans., Vol. 49, No's. 1-2, pp. 281-286, 2005.
- Razavi, S.A., Ghasemi, J., and Farzadi, A. "Flux Modeling in the Finite Volume Lattice Boltzman Approach", Int. J. Computational Fluid Dynamics, Vol. 23, No. 1, pp. 69-77, 2009.



### ۶- نتیجهگیری

در این مطالعه، انتقال گرمای همرفت آزاد از روی یک صفحه سینوسی عمودی دما ثابت، با حل معادلات ناویر-استوکس، در رژیم جریان آرام و به روش حجم محدود تحلیل شده و مدل جدیدی نیز بر پایهی فشار برای محاسبه شارهای جابهجایی ارائه گردید. نتایج حاصل عبارتند از : ۱- با اعمال روش تصحیح فشار دقت جوابها و همگرایی نسبت به روش میانگین گیری بهبود مییابد، ۲- فرکانس تغییرات ضریب انتقال گرما بر روی صفحه سینوسی شکل می شود مکانیزم جریان نزدیک شونده و دورشونده از سطح است،