

# مدل‌سازی میرایی ترموالاستیک در ارتعاشات مدهای حجمی تشدیدگر حلقوی میکرومکانیکی با استفاده از روش انرژی

ابوالفضل بیجاری<sup>۱</sup> و سید حسین کشمیری<sup>۲</sup> محمد رضا زنگویی مطلق<sup>۳</sup>

گروه برق، دانشکده مهندسی گروه مکانیک، دانشکده مهندسی

دانشگاه فردوسی مشهد

(تاریخ دریافت: ۸۹/۰۹/۰۸؛ تاریخ پذیرش: ۹۱/۴/۱۸)

## چکیده

در این مقاله، میرایی ترموالاستیک در ارتعاشات مدهای حجمی تشدیدگر حلقوی میکرومکانیکی با استفاده از روش انرژی، مدل‌سازی و بررسی می‌شود. در این روش، با فرض ناچیز بودن کوپلینگ ترموالاستیک، ابتدا فرکانس‌های تشدید و جابه‌جایی‌های الاستیک در مدهای حجمی، بر پایه‌ی روابط تنش سطحی دو بعدی محاسبه و سپس مقدار اتلاف ناشی از میرایی ترموالاستیک توسط روابط ترموالاستیسیته‌ی خطی کوپل نشده، تحت شرایط آدیاباتیک محاسبه می‌شود. درستی روابط به‌دست آمده، با مقایسه‌ی نتیجه‌های تحلیلی با نتیجه‌های شبیه‌سازی دو تحلیل مدی و هارمونیک نرم‌افزار ANSYS تأیید می‌شود. نتیجه‌ها نشان می‌دهد، که با افزایش نسبت شعاع خارجی به شعاع داخلی حلقه، درصد خطای نسبی نتیجه‌های تحلیلی کاهش می‌یابد. همچنین اثرات فرکانس تشدید و ابعاد حلقه بر ضریب کیفیت ترموالاستیک در شکل مدهای حجمی مختلف بررسی و بحث می‌شوند، به طوری که تحلیل انجام شده، دید خوبی را در زمینه‌ی طراحی تشدیدگرهای حلقوی میکرومکانیکی با ضریب کیفیت بالا، برای کاربردهای مخابراتی و حسگری فراهم می‌کند.

**واژه‌های کلیدی:** میرایی ترموالاستیک، تشدیدگر حلقوی میکرومکانیکی، ضریب کیفیت، مدهای حجمی، روش انرژی

## Modeling of Thermoelastic Damping in Bulk-Mode Vibrations of Micromechanical Ring Resonator Using Energy Method

A. Bijari and S.H. Keshmiri

Elect. Eng. Dep't

M.R. Zangoee Motlagh

Mech. Eng. Dep't

Ferdowsi Univ. of Mashhad

(Received: 29, November, 2010; Accepted: 8, July, 2012)

### ABSTRACT

In this paper, thermoelastic damping in bulk-mode vibrations of the micromechanical ring resonator is modeled using the energy method. Assuming that the thermoelastic coupling is very weak, the resonance frequencies and elastic displacements are first calculated using two-dimensional plane stress equations. An analytical expression for thermoelastic quality factor is then derived based on uncoupled linear thermoelasticity under adiabatic conditions. The validity of the derived expressions is demonstrated by comparing the analytical results with simulation results of modal and harmonic analysis using ANSYS software. Results show that the relative error of the analytical results decreases with increasing the ratio of the outer-to-inner ring radius. Moreover, the effects of resonance frequency and ring geometry on thermoelastic quality factor in various mode shapes of bulk-mode vibrations are discussed. The present analysis is applied as an appropriate tool to design bulk-mode ring resonators with high quality factor.

**Keywords:** Thermoelastic Damping, Micromechanical Ring Resonator, Quality Factor, Bulk-modes, Energy Method

۱- دانشجوی دکتری: a.bijari@gmail.com

۲- استاد (نویسنده پاسخگو): keshmiri@um.ac.ir

۳- دانشجوی دکتری

## ۱- مقدمه

[۱۱-۱۳] و تجربی [۱۷-۱۴] فراوانی بر اساس تئوری زهر و حل دقیق رابطه‌های ترموالاستیسیته خطی کوپل شده<sup>۱۱</sup> حاکم بر تشدیدگرهای تیر انجام شده است، به طوری که ضریب کیفیت ترموالاستیک ( $Q_{TED}$ ) محاسبه شده، توسط لیفشیتز<sup>۱۲</sup> و رویکرز<sup>۱۳</sup> (LR) [۱۱] بسته به ابعاد و فرکانس اضافه تشدیدگر تیر، در حدود ۲ تا ۲۰ درصد با ضریب کیفیت زهر متفاوت است. در مورد دیگر ساختارهای تشدیدگرهای میکرومکانیکی، ونگ<sup>۱۴</sup> و همکارانش [۱۸] و هائو<sup>۱۵</sup> و همکارانش [۱۹] با استفاده از روش LR،  $Q_{TED}$  را برای تشدیدگرهای حلقوی مد خمشی محاسبه کرده و وابستگی آن به ابعاد حلقه را نشان داده‌اند. همچنین، سان<sup>۱۶</sup> و همکارانش [۲۰-۲۱] رابطه‌ی دقیقی را برای میرایی ترموالاستیک در مدهای ارتعاشی غیرهم‌سطح تشدیدگر صفحه‌ی دایروی<sup>۱۷</sup> استخراج کرده‌اند و نشان داده‌اند که میرایی ترموالاستیک در این تشدیدگرها، مهم‌ترین مکانیزم میرایی در دمای اتاق است. تانویر<sup>۱۸</sup> و همکارانش [۲۲] اثر ابعاد و شرایط حرارتی سطحی مختلف را بر روی  $Q_{TED}$  تشدیدگرهای تیر با سطح مقطع حلقوی، بررسی کرده و نشان داده‌اند که، در شرایط آدیاباتیک نسبت به شرایط هم‌دما<sup>۱۹</sup>، می‌توان به  $Q_{TED}$  بالاتری در فرکانس‌های بالا دست یافت.

با مروری بر تحقیقات انجام شده مشخص می‌شود که تاکنون میرایی ترموالاستیک در مدهای حجمی تشدیدگر حلقوی میکرومکانیکی بررسی نشده است، در صورتی که این تشدیدگرها امروزه در برخی از مدهای حجمی مرتبه دوم کاربرد گسترده‌ای در قطعات مخابراتی بی‌سیم و حسگرها پیدا کرده‌اند. از این رو در این مقاله، میرایی ترموالاستیک در ارتعاشات مدهای حجمی تشدیدگر حلقوی با استفاده از روش انرژی و بر پایه‌ی روابط تنش سطحی<sup>۲۰</sup> و انتقال حرارت دوبعدی، محاسبه و درستی آن توسط تحلیل هارمونیک

امروزه یکی از چالش‌های موجود در طراحی تشدیدگرهای میکرومکانیکی، دستیابی به تشدیدگرهایی با ضریب کیفیت بالا برای کاربردهای مخابراتی و حسگری است؛ زیرا افزایش ضریب کیفیت تأثیر مستقیمی بر بهبود عملکرد قطعات الکترونیکی نظیر فیلترها، نوسان‌سازها<sup>۱</sup> [۲-۱] و نیز افزایش حساسیت و کاهش نسبت سیگنال به نویز حسگرها دارد [۳-۴]. از میان تشدیدگرهای<sup>۲</sup> میکرومکانیکی، تشدیدگرهای حلقوی مد حجمی<sup>۳</sup> به دلیل سختی<sup>۴</sup> ساختاری بالای مدهای حجمی نسبت به تشدیدگرهای تیر مد خمشی<sup>۵</sup>، نیاز چندانی به کوچک‌سازی ابعاد ساختار در حوزه‌ی نانومتر برای دستیابی به فرکانس‌های تشدید بالا ندارد و از طرفی این تشدیدگرها با برخورداری از نقاط شبه‌گره<sup>۶</sup> در برخی از مدهای حجمی نامتقارن<sup>۷</sup>، نسبت به سایر تشدیدگرهای مد حجمی از اتلاف تکیه‌گاه<sup>۸</sup> کمتری نیز برخوردار هستند، و به همین دلایل در سیستم‌های میکروالکترومکانیکی (MEMS) توسعه‌ی فراوانی یافته‌اند [۵-۶]. امروزه با طراحی دقیق و جانمایی بهینه تیرهای تکیه‌گاه در تشدیدگرهای حلقوی مد حجمی و نیز بسته‌بندی<sup>۹</sup> این تشدیدگرها در شرایط خلأ بالا، دو مکانیزم میرایی خارجی نظیر اتلاف تکیه‌گاه و میرایی هوا تا حد زیادی کاهش یافته‌اند [۶]؛ اما همچنان حد بالای ضریب کیفیت قابل دسترس در این تشدیدگرها، توسط مکانیزم میرایی ترموالاستیک تعیین می‌شود [۷-۸]. به همین دلیل، مدل‌سازی و پیش‌بینی دقیق این مکانیزم میرایی، برای طراحی تشدیدگرهایی با ضریب کیفیت بالا، از اهمیت بسیاری برخوردار است.

اولین تحلیل در مورد میرایی ترموالاستیک توسط زهر<sup>۱۰</sup> [۹-۱۰] در سال ۱۹۳۰ بر مبنای روابط پایه ترمودینامیک انجام شد. متعاقب آن در دهه‌های اخیر، تحقیقات تئوری

11- Coupled  
12- Lifshitz  
13- Roukes  
14- Wong  
15- Hao  
16- Sun  
17- Circular Plate  
18- Tunvir  
19- Isothermal  
20- Plane Stress

1- Oscillator  
2- Resonator  
3- Bulk-Mode  
4- Stiffness  
5- Flexural  
6- Quasi-Nodal  
7- Non-Axisymmetric  
8- Anchor Loss  
9- Packaging  
10- Zenner

ضریب پواسون و چگالی ماده‌ی ساختاری تشدیدگر هستند. بردار جابه‌جایی  $\mathbf{u}$  نیز شامل مؤلفه‌های جابه‌جایی‌های شعاعی ( $u$ ) و محیطی  $^{\theta}$  ( $v$ ) در مختصات قطبی است:

$$\mathbf{u} = u\mathbf{e}_r + v\mathbf{e}_\theta. \quad (3)$$

همچنین  $\nabla^2 = 1/r(\partial/\partial r) + \partial^2/\partial r^2 + 1/r^2(\partial^2/\partial \theta^2)$  عملگر لاپلاسین را در دستگاه مختصات قطبی مشخص می‌کند؛ و پارامترهای  $\alpha$ ،  $C_v$ ،  $\chi$  و  $\Theta$  نیز به ترتیب، نشان‌دهنده‌ی ضریب انبساط حرارتی، ظرفیت گرمایی در واحد حجم، ضریب پخش حرارتی و تغییر از دمای محیط ( $\Theta = T - T_a$ ) هستند. پارامتر  $\varepsilon$  انبساط حرارتی الاستیک<sup>۵</sup> نامیده شده است، که ناشی از تنش‌های مکانیکی و حرارتی بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۰]:

$$\varepsilon = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z. \quad (4)$$

که تحت شرایط تنش سطحی دو بعدی، مؤلفه‌های کرنش شعاعی ( $\varepsilon_r$ ) و محیطی ( $\varepsilon_\theta$ )، به صورت زیر بیان می‌شوند [۲۳]:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}. \quad (5)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}. \quad (6)$$

و مقدار مولفه‌ی  $\varepsilon_z$ ، با استفاده از قانون هوک<sup>۶</sup> و روابط حاکم بر تنش سطحی دوبعدی ( $\sigma_z = 0$ )، به صورت تابعی از تنش‌های شعاعی ( $\sigma_r$ ) و محیطی ( $\sigma_\theta$ ) محاسبه می‌شود [۲۳]:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_r + \nu\sigma_\theta) + \alpha\Theta. \quad (7)$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}[\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta - (1+\nu)\alpha\Theta]. \quad (8)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}[\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r - (1+\nu)\alpha\Theta]. \quad (9)$$

که در آن، با جایگزینی رابطه‌های (۸-۹) در رابطه‌ی (۷) مقدار مؤلفه  $\varepsilon_z$  بر حسب مؤلفه‌های کرنش شعاعی و محیطی به دست می‌آید:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{(1-\nu)}(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) + \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}\alpha\Theta. \quad (10)$$

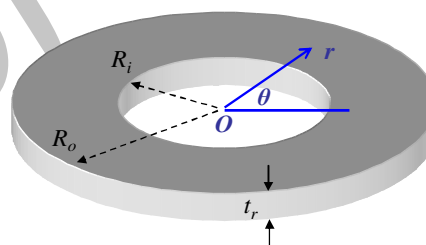
در نتیجه، با جایگزینی رابطه‌های (۱۰) و (۶-۵) در رابطه (۴)، مقدار انبساط حرارتی الاستیک محاسبه می‌شود:

نرم‌افزار ANSYS تأیید می‌شود. همچنین اثرات ابعاد حلقه، فرکانس تشدید و شکل مدهای حجمی بر ضریب کیفیت ترموالاستیک بررسی و بحث می‌شوند.

## ۲- فرضیات و روش تحلیل انرژی

برای تحلیل میرایی ترموالاستیک در ارتعاشات مدهای حجمی تشدیدگر حلقوی میکرومکانیکی، فرضیات ذیل برای کاهش پیچیدگی روابط الاستیک حاکم بر مدهای حجمی، در روش انرژی استفاده می‌شوند:

الف) همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده، با فرض بزرگ‌تر بودن پهنای حلقه از ضخامت ساختار ( $R_o - R_i \gg t_r$ )، تشدیدگر حلقوی را به صورت یک نوار حلقوی نازک<sup>۱</sup> با کناره‌های آزاد در نظر گرفته، و بنابراین از سیستم مختصات قطبی ( $r, \theta$ )، با مبدأ قرار گرفته در مرکز حلقه، و روابط تنش سطحی و انتقال حرارت دو بعدی استفاده می‌شود.



شکل (۱): طرح شماتیک تشدیدگر حلقوی با مختصات قطبی.

ب) ماده‌ی ساختاری تشدیدگر، جامد همگن<sup>۲</sup> و همسانگرد<sup>۳</sup> فرض شده و در نتیجه روابط ترموالاستیسیته کوپل شده در غیاب منابع گرمایی داخلی و نیروهای خارجی، به صورت زیر بیان می‌شوند [۲۳ و ۱۸]:

$$\frac{E}{1-\nu^2} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \frac{E}{2(1+\nu)} \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} - \frac{\alpha E}{1-\nu} \nabla \Theta = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} - \chi \nabla^2 \Theta = -\frac{E \alpha T_a}{C_v (1-\nu)} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}. \quad (2)$$

که  $E$ ،  $\nu$  و  $\rho$  به ترتیب، نشان‌دهنده‌ی ماژول الاستیسیته،

4- Circumferential  
5- Elastic Dilatation  
6- Hook

1- Thin Annular Plate  
2- Homogenous  
3- Isotropic

از رابطه‌ی (۱۵)، مقدار انرژی حرارتی تلف شده در اثر میرایی ترموالاستیک ( $\Delta W_{TED}$ ) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\Delta W_{TED} = -\frac{E\alpha}{(1-\nu)} \text{Re} \left\{ \int_{t_0}^V \int \Theta \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right) dv dt \right\}. \quad (16)$$

در نهایت، با توجه به تعریف کلی ضریب کیفیت مکانیکی، ضریب کیفیت ناشی از میرایی ترموالاستیک، به صورت زیر نتیجه می‌شود [۲۵]:

$$Q_{TED} = 2\pi \frac{W_{Ring}}{\Delta W_{TED}}. \quad (17)$$

که در آن،  $W_{Ring}$  بیشینه‌ی انرژی ارتعاشی ذخیره شده در یک دوره ارتعاش در تشدیدگر حلقوی میکرومکانیکی است، و با توجه به فرض (ج)، مقدار آن از محاسبه‌ی جابه‌جایی‌های الاستیک ایجاد شده در مدهای حجمی کوپل نشده نتیجه می‌شود.

### ۳- محاسبه‌ی جابه‌جایی‌های الاستیک در مدهای ارتعاشی کوپل نشده

با توجه به فرض‌های انجام شده در بخش قبل، معادله‌ی الاستیک کوپل نشده حاکم بر تشدیدگر حلقوی میکرومکانیکی در غیاب نیروهای خارجی، به صورت زیر بازنویسی می‌شود [۲۶]:

$$\frac{E}{1-\nu^2} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \frac{E}{2(1+\nu)} \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (18)$$

با حل رابطه‌ی (۱۸) به کمک تئوری هلمهولتز<sup>۲</sup> و روش جداسازی متغیرها و نیز در نظر گرفتن شرایط مرزی در مورد نوار حلقوی با کناره‌های آزاد، فرکانس‌های تشدید و مؤلفه‌های شعاعی و محیطی جابه‌جایی‌های الاستیک در مدهای حجمی نامتقارن، به صورت زیر محاسبه می‌شوند [۲۷]:

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{nm} e^{j\omega_{nm} t}, \quad v = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{nm} e^{j\omega_{nm} t}. \quad (19)$$

که،

$$U_{nm} = \frac{A_n}{k_{nm}} \left[ \frac{d}{dr} \left( J_n(k_{nm} r) + \frac{B_n}{A_n} Y_n(k_{nm} r) \right) + \frac{n}{r} \left( \frac{C_n}{A_n} J_n(h_{nm} r) + \frac{D_n}{A_n} Y_n(h_{nm} r) \right) \right] \cos(n\theta), \quad (20)$$

$$\varepsilon = \frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \alpha \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \Theta. \quad (11)$$

در میرایی ترموالاستیک، با ارتعاش ساختار در فرکانس تشدید، تغییرات کرنشی به وجود آمده منجر به ایجاد تغییرات دمایی و در نتیجه، جریان‌های گرمایی برگشت‌ناپذیر می‌شوند، به طوری که این جریان‌های گرمایی برگشت‌ناپذیر باعث افزایش آنتروپی و در نتیجه بخشی از انرژی ارتعاشی تشدیدگر به صورت انرژی حرارتی تلف می‌شود [۲۴]. در روش انرژی، مقدار این انرژی حرارتی ایجاد شده در یک دوره‌ی زمانی<sup>۱</sup> ارتعاش، با استفاده از قانون دوم ترمودینامیک و در نظر گرفتن فرض‌های (الف) و (ب)، به صورت زیر بیان می‌شود [۲۵]:

$$W_{thermal} = \int_{t_0}^V \int T_a \frac{\kappa \nabla^2 T}{T} dv dt. \quad (12)$$

که  $t_0$  و  $V$ ، به ترتیب دوره تناوب اصلی ارتعاش و حجم ساختاری تشدیدگر میکرومکانیکی هستند و پارامتر  $\kappa = \chi \cdot C_v$  ضریب هدایت حرارتی ماده‌ی ساختاری تشدیدگر نامیده می‌شود. با جایگزینی رابطه‌ی  $T = \Theta + T_a$  در رابطه‌ی (۱۲)، رابطه‌ی زیر نتیجه می‌شود:

$$W_{thermal} = \int_{t_0}^V \int \chi C_v \frac{\nabla^2 \Theta}{\left( 1 + \frac{\Theta}{T_a} \right)} dv dt. \quad (13)$$

و با توجه به کوچک بودن تغییر دمای ناشی از کوپلینگ ترموالاستیک در مقایسه با دمای محیط ( $\Theta \ll T_a$ ) و استفاده از بسط تیلور، رابطه‌ی (۱۳) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$W_{thermal} = \int_{t_0}^V \int \chi C_v \left( 1 - \frac{\Theta}{T_a} \right) \nabla^2 \Theta dv dt. \quad (14)$$

با جایگزینی رابطه‌ی (۲) در رابطه‌ی (۱۴)، رابطه زیر نتیجه می‌شود:

$$W_{thermal} = \int_{t_0}^V \int C_v \left( 1 - \frac{\Theta}{T_a} \right) \left( \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{E \alpha T_a}{C_v (1-\nu)} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right) dv dt. \quad (15)$$

چون با فرض ضعیف بودن کوپلینگ ترموالاستیک، تغییر دمای ایجاد شده در ساختار تشدیدگر میکرومکانیکی به صورت هارمونیک و با مدهای تشدید یکسان با جابه‌جایی‌ها و کرنش‌های الاستیک در نظر گرفته شده، و در نتیجه با استفاده

2- Helmholtz

1- Time Period

$$\begin{aligned}
m_{11} &= \left[ -n(n+1) + (h_{nm}R_o)^2 / 2 \right] J_n(k_{nm}R_o) + \\
& k_{nm}R_o J_{n-1}(k_{nm}R_o), \\
m_{12} &= \left[ -n(n+1) + (h_{nm}R_o)^2 / 2 \right] Y_n(k_{nm}R_o) + \\
& k_{nm}R_o Y_{n-1}(k_{nm}R_o), \\
m_{13} &= n(n+1)J_n(h_{nm}R_o) - nh_{nm}R_o J_{n-1}(h_{nm}R_o), \\
m_{14} &= n(n+1)Y_n(h_{nm}R_o) - nh_{nm}R_o Y_{n-1}(h_{nm}R_o), \\
m_{21} &= \left[ -n(n+1) + (h_{nm}R_i)^2 / 2 \right] J_n(k_{nm}R_i) + \\
& k_{nm}R_i J_{n-1}(k_{nm}R_i), \\
m_{22} &= \left[ -n(n+1) + (h_{nm}R_i)^2 / 2 \right] Y_n(k_{nm}R_i) + \\
& k_{nm}R_i Y_{n-1}(k_{nm}R_i), \\
m_{23} &= n(n+1)J_n(h_{nm}R_i) - nh_{nm}R_i J_{n-1}(h_{nm}R_i), \\
m_{24} &= n(n+1)Y_n(h_{nm}R_i) - nh_{nm}R_i Y_{n-1}(h_{nm}R_i), \\
m_{31} &= -n(n+1)J_n(k_{nm}R_o) + nk_{nm}R_o J_{n-1}(k_{nm}R_o), \\
m_{32} &= -n(n+1)Y_n(k_{nm}R_o) + nk_{nm}R_o Y_{n-1}(k_{nm}R_o), \\
m_{33} &= \left[ n(n+1) - (h_{nm}R_o)^2 / 2 \right] J_n(h_{nm}R_o) - \\
& h_{nm}R_o J_{n-1}(h_{nm}R_o), \\
m_{34} &= \left[ n(n+1) - (h_{nm}R_o)^2 / 2 \right] Y_n(h_{nm}R_o) - \\
& h_{nm}R_o Y_{n-1}(h_{nm}R_o), \\
m_{41} &= -n(n+1)J_n(k_{nm}R_i) + nk_{nm}R_i J_{n-1}(k_{nm}R_i), \\
m_{42} &= -n(n+1)Y_n(k_{nm}R_i) + nk_{nm}R_i Y_{n-1}(k_{nm}R_i), \\
m_{43} &= \left[ n(n+1) - (h_{nm}R_i)^2 / 2 \right] J_n(h_{nm}R_i) - \\
& h_{nm}R_i J_{n-1}(h_{nm}R_i), \\
m_{44} &= \left[ n(n+1) - (h_{nm}R_i)^2 / 2 \right] Y_n(h_{nm}R_i) - \\
& h_{nm}R_i Y_{n-1}(h_{nm}R_i),
\end{aligned} \tag{۲۶}$$

$$\begin{bmatrix} B_n / A_n \\ C_n / A_n \\ D_n / A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} m_{21} \\ m_{31} \\ m_{41} \end{bmatrix}. \tag{۲۷}$$

شکل ۳، نتیجه‌های شبیه‌سازی برخی از این شکل مدها در تحلیل مدی نرم‌افزار ANSYS با استفاده از المان سه‌بعدی Solid 186 را نشان می‌دهد. همان‌طور که در جدول ۱ مشاهده می‌شود، نتیجه‌های به‌دست آمده از تحلیل مدی نرم‌افزار ANSYS به‌خوبی با نتیجه‌های محاسبات تحلیلی منطبق بوده است و درستی استفاده از رابطه‌های الاستیک کوپل نشده و تنش سطحی دوطرفی را در محاسبه‌ی فرکانس‌های تشدید مدهای حجمی تشدیدگر حلقوی نشان می‌دهد.

$$\begin{aligned}
V_{nm} &= -\frac{A_n}{k_{nm}} \left[ \frac{n}{r} \left( J_n(k_{nm}r) + \frac{B_n}{A_n} Y_n(k_{nm}r) \right) + \right. \\
& \left. \frac{C_n}{A_n} \frac{d}{dr} \left( J_n(h_{nm}r) + \frac{D_n}{A_n} Y_n(h_{nm}r) \right) \right] \sin(n\theta), \tag{۲۱}
\end{aligned}$$

$$\omega_{nm} = k_{nm} \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}. \tag{۲۲}$$

در رابطه‌های فوق،  $J_n$  و  $Y_n$  به‌ترتیب توابع بسل نوع اول و دوم،  $\omega_{nm}$  فرکانس تشدید مد  $(n, m)$  هستند، که  $n$  و  $m$  به‌ترتیب نشان‌دهنده‌ی مرتبه‌ی محیطی و شعاعی شکل مد حجمی هستند. همچنین، پارامترهای  $h_{nm}$  و  $k_{nm}$  ثابت‌های مدی شکل مد حجمی  $(n, m)$  هستند و توسط رابطه‌ی (۲۳) به یکدیگر وابسته می‌شوند:

$$h_{nm} = k_{nm} \sqrt{\frac{2}{1-\nu}}. \tag{۲۳}$$

و مقادیر آنها از حل عددی رابطه‌ی (۲۴) محاسبه می‌شوند:

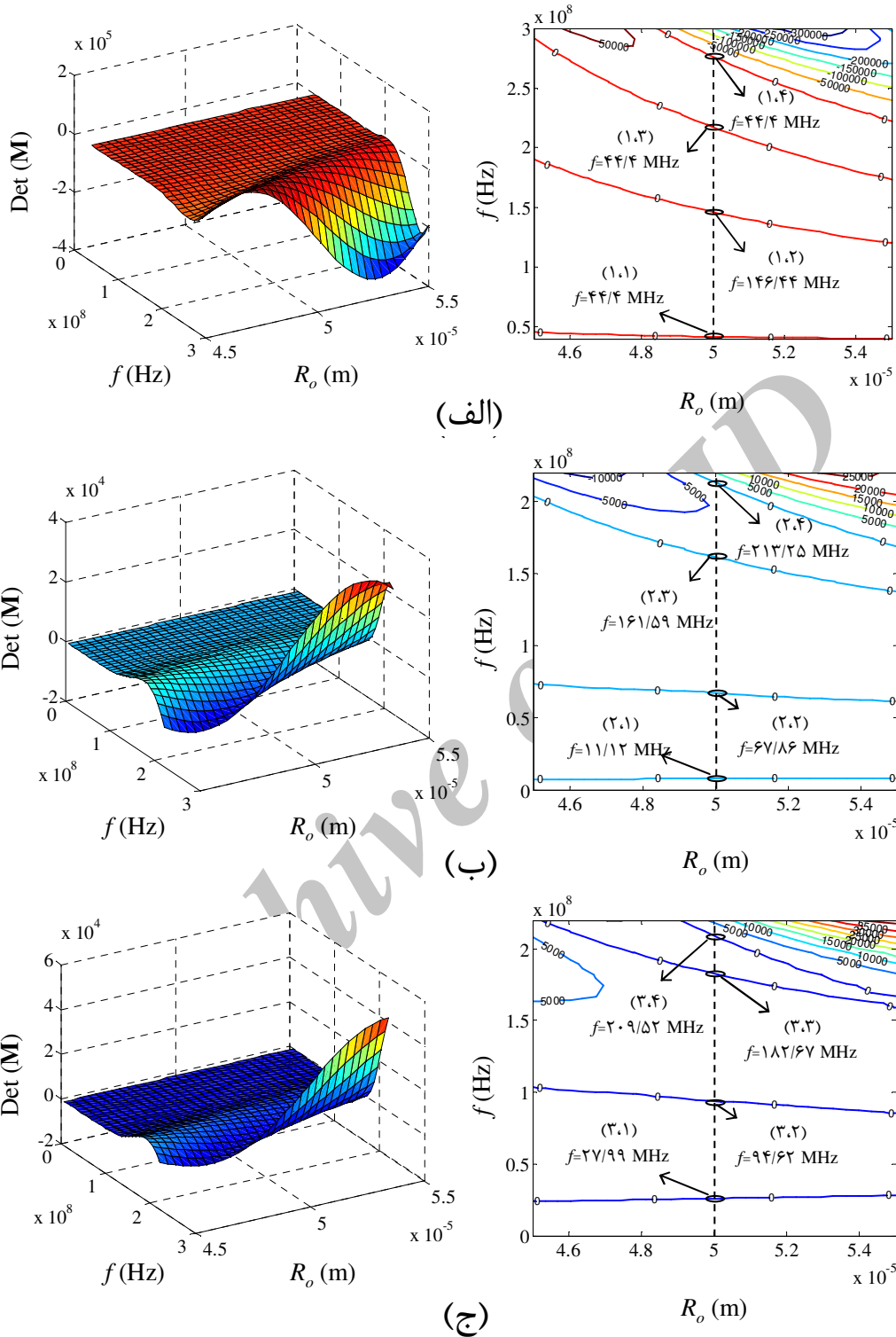
$$|\mathbf{M}| = 0. \tag{۲۴}$$

که عناصر ماتریس  $\mathbf{M}$  به‌صورت رابطه‌ی (۲۶) تعریف می‌شوند. با مشخص بودن فرکانس تشدید و ابعاد تشدیدگر حلقوی، ثابت‌های نسبی امواج الاستیک  $(B_n/A_n, C_n/A_n, D_n/A_n)$  را می‌توان از حل رابطه‌ی (۲۷) محاسبه کرد. البته هر تشدیدگر حلقوی با ابعاد مشخص دارای مدهای حجمی نامتقارن متعددی است؛ که با حل عددی رابطه‌ی (۲۴) توسط نرم‌افزار Matlab، فرکانس‌های تشدید این مدها مطابق شکل ۲ محاسبه می‌شوند.

اکنون با توجه به رابطه‌های (۲۲-۲۰)، بیشینه انرژی ارتعاشی ذخیره شده در مد حجمی  $(n, m)$  تشدیدگر حلقوی، از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود [۲۸]:

$$\begin{aligned}
W_{\text{Ring}} &= \frac{1}{2} \rho \omega_{nm}^2 r, \\
& \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_o} \left[ U_{nm}^2(r, \theta) + V_{nm}^2(r, \theta) \right] \cdot r dr d\theta. \tag{۲۵}
\end{aligned}$$

همچنین با استفاده از تحلیل مدی نرم‌افزار ANSYS و مش‌بندی ساختار تشدیدگر با المان سه‌بعدی Solid 186 یا المان دوطرفی Plane 42، می‌توان فرکانس‌های تشدید و شکل مدهای حجمی تشدیدگر حلقوی را مشاهده و درستی مقادیر به‌دست آمده از روش تحلیلی را بررسی کرد.



شکل (۲): محاسبه‌ی تحلیلی فرکانس‌های تشدید مد حجمی در تشدیدگر حلقوی پالی‌سیلیکونی با ابعاد  $R_i=30/5 \mu\text{m}$ ,  $R_o=50 \mu\text{m}$  و ضخامت  $t=2 \mu\text{m}$ .

۴- محاسبه‌ی تغییر دمای ایجاد شده در ساختار تشدیدگر

با توجه به رابطه‌ی (۱۶)، برای محاسبه‌ی مقدار انرژی حرارتی تلف شده در اثر میرایی ترموالاستیک ( $\Delta W_{TED}$ )، ابتدا انبساط حرارتی الاستیک محاسبه و سپس تغییر دمای ایجاد شده در ساختار تشدیدگر حلقوی میکرومکانیکی نتیجه می‌شود. برای این منظور و با توجه به فرض (ج)، تغییر دمای ایجاد شده در ساختار تشدیدگر به صورت هارمونیک و با مدهای تشدید یکسان با جابه‌جایی الاستیک تعریف می‌شود:

$$\Theta = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_{nm} e^{j\omega_{nm}t} \quad (28)$$

و با جایگزینی رابطه‌های (۲۸) و (۲۱-۲۰) در رابطه‌ی (۱۱)، انبساط حرارتی ایجاد شده در تشدیدگر حلقوی میکرومکانیکی به صورت زیر نتیجه می‌شود:

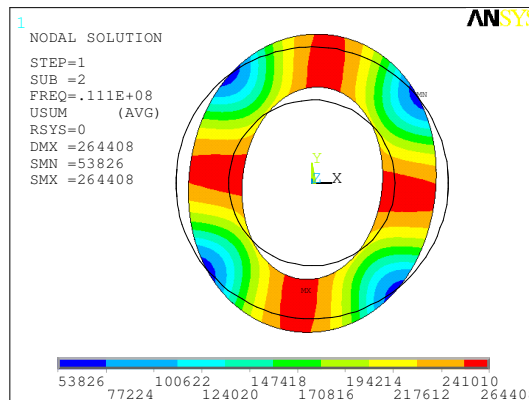
$$\varepsilon = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{nm} e^{j\omega_{nm}t} \quad (29)$$

که،

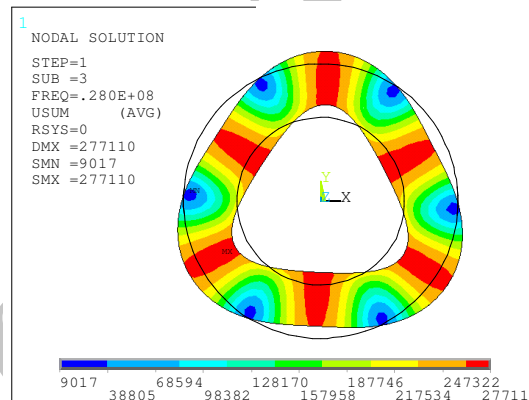
$$\varepsilon_{nm} = \alpha \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \Theta_{nm} - \left( \frac{1-2\nu}{1-\nu} \right) k_{nm} A_n \times \left( J_n(k_{nm}r) + \frac{B_n}{A_n} Y_n(k_{nm}r) \right) \cos(n\theta) \quad (30)$$

جدول (۲): خواص مکانیکی و حرارتی مواد پر کاربرد در تشدیدگرهای میکرومکانیکی ( $T_a=300\text{ K}$ )

واحد	سیلیکون [۲۰]	پالی‌سیلیکون [۲۵]	نیتريد سیلیکون [۱۴]
$E$	۱۶۵/۹	۱۵۷	۱۲۶
$\nu$	۰/۲۲	۰/۲۲	۰/۲۴
$\rho$	۲۳۳۰	۲۳۳۰	۳۴۴۰
$C_v$	$1/66 \times 10^{-6}$	$1/63 \times 10^{-6}$	$2/44 \times 10^{-6}$
$\alpha$	$2/59 \times 10^{-6}$	$2/6 \times 10^{-6}$	$3 \times 10^{-6}$
$\chi$	$9/39 \times 10^{-5}$	$5/51 \times 10^{-5}$	$13/1 \times 10^{-5}$
$\kappa$	۱۵۶	۹۰	۳۲۰



شکل مد (۲،۱)



شکل مد (۳،۱)

شکل (۳): شبیه‌سازی شکل مدهای حجمی تشدیدگر حلقوی پالی‌سیلیکونی توسط تحلیل مدی نرم‌افزار ANSYS در حلقه با ابعاد  $R_o=50\ \mu\text{m}$ ,  $R_i=30/5\ \mu\text{m}$  و  $t_r=2\ \mu\text{m}$

جدول (۱): مقایسه‌ی نتیجه‌های دو روش تحلیلی و شبیه‌سازی ANSYS در تشدیدگر حلقوی پالی‌سیلیکونی با ابعاد  $R_o=50\ \mu\text{m}$ ,  $R_i=30/5\ \mu\text{m}$  ضخامت  $t_r=2\ \mu\text{m}$

		$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	واحد
$n=1$	$k_{1m}$	۰/۳۲۳	۱/۰۹۳۵	۱/۶۲۳۵	۲/۰۶۷	$(\times 10^5)$
	$f_{\text{Theory}}$	۴۴/۱۴	۱۴۶/۴۴	۲۱۷/۴۲	۲۷۶/۸۲	MHz
	$f_{\text{FEM}}$	۴۴/۱۴	۱۴۶/۴۵	۲۱۷/۳۷	۲۷۷	MHz
$n=2$	$k_{2m}$	۰/۸۳	۰/۵۰۶	۱/۲۰۶۶	۱/۵۹۲۳	$(\times 10^5)$
	$f_{\text{Theory}}$	۱۱/۱۲	۶۷/۸۶	۱۶۱/۵۹	۲۱۳/۲۵	MHz
	$f_{\text{FEM}}$	۱۱/۱۲	۶۷/۸۵	۱۶۱/۵۹	۲۱۳/۲۲	MHz
$n=3$	$k_{3m}$	۰/۲۰۹	۰/۷۰۶	۱/۳۶۴	۱/۵۶۴۶	$(\times 10^5)$
	$f_{\text{Theory}}$	۲۷/۹۹	۹۴/۶۲	۱۸۲/۶۷	۲۰۹/۵۲	MHz
	$f_{\text{FEM}}$	۲۷/۹۹	۹۴/۶۱	۱۸۲/۶۵	۲۰۹/۶	MHz

به دلیل وجود شرایط آدیاباتیک در خلأ (با صرف نظر از تلفات تشعشعی) و در نتیجه، عدم وجود جریان‌های گرمایی میان کناره‌های داخلی و خارجی حلقه، مقادیر  $\Theta_{T1}$  و  $\Theta_{T2}$  از حل رابطه‌ی (۳۹) محاسبه می‌شوند:

$$\left. \frac{\partial \Theta_{nm}}{\partial r} \right|_{r=R_i} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Theta_{nm}}{\partial r} \right|_{r=R_o} = 0. \quad (39)$$

در نهایت، با جایگزینی رابطه‌های (۳۴) و (۳۰) در رابطه‌ی (۱۶)، مقدار انرژی تلف شده در اثر میرایی ترموالاستیک به دست می‌آید:

$$\Delta W_{TED} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ -\frac{2\pi j E \alpha_r}{(1-\nu)} \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_o} \Theta_{nm} \epsilon_{nm}^* r dr d\theta \right\}. \quad (40)$$

و با استفاده از روابط (۴۰) و (۲۵، ۲۲، ۱۷)، رابطه‌ی تحلیلی ضریب کیفیت ترموالاستیک در شکل مد حجمی  $(n, m)$  تشدیدگر حلقوی میکرومکانیکی نتیجه می‌شود:

$$Q_{TED} = \frac{-k_{nm}^2}{\alpha(1-\nu^2)} \frac{1}{\operatorname{Re}\{I_1 + I_2\}} \times \quad (41)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_o} \left[ U_{nm}^2(r, \theta) + V_{nm}^2(r, \theta) \right] r dr d\theta,$$

که

$$I_1 = j \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_o} \Theta_{nm} \left[ (2\nu - 1) k_{nm} A_n \times \left( J_n(k_{nm} r) + \frac{B_n}{A_n} Y_n(k_{nm} r) \right) \cos(n\theta) \right]^* r dr d\theta, \quad (42)$$

$$I_2 = j \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_o} \alpha(1+\nu) |\Theta_{nm}|^2 r dr d\theta. \quad (43)$$

اکنون با استفاده از روش‌های حل عددی در نرم‌افزار MATLAB، می‌توان مقدار  $Q_{TED}$  را برای شکل مدهای حجمی  $(n, m)$  در تشدیدگرهای حلقوی میکرومکانیکی با ابعاد و فرکانس‌های تشدید مختلف محاسبه کرد.

#### ۵- بررسی اثر ابعاد حلقه بر میرایی ترموالاستیک

همان‌طور که در مقدمه نیز بیان شد، تاکنون تحلیل‌های بسیاری بر پایه‌ی تئوری زرن در مورد میرایی ترموالاستیک و محاسبه‌ی ضریب کیفیت ناشی از آن در تشدیدگرهای تیر مد خمشی انجام شده‌اند، به‌طوری‌که در تمام این تحلیل‌ها،  $Q_{TED}$ ، به‌صورت رابطه‌ی تقریبی زیر پیش‌بینی شده است [۱۶]:

$$\frac{1}{Q_{TED}} = \left( \frac{E \alpha^2 T_a}{C_v} \right) \frac{2\pi f \tau_z}{1 + (2\pi f \tau_z)^2}. \quad (44)$$

با محاسبه‌ی انبساط حرارتی الاستیک، تغییر دمای ایجاد شده در مد حجمی  $(n, m)$  تشدیدگر حلقوی از جایگزینی رابطه‌ی (۳۰) در رابطه‌ی (۲)، محاسبه می‌شود:

$$\nabla^2 \Theta_{nm} - \frac{j\omega_{nm}}{\chi} \Theta_{nm} = \frac{j\omega_{nm} \Delta E}{\alpha \chi (1-\nu)} \left[ \alpha \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \Theta_{nm} - \left( \frac{1-2\nu}{1-\nu} \right) k_{nm} A_n \left( J_n(k_{nm} r) + \frac{B_n}{A_n} Y_n(k_{nm} r) \right) \cos(n\theta) \right]. \quad (31)$$

در رابطه‌ی فوق،  $\Delta E = (E \alpha^2 T_a) / C_v$  مقاومت رهاش نامیده می‌شود. با مرتب کردن این رابطه بر حسب پارامتر  $\Theta$ ، رابطه‌ی ذیل نتیجه می‌شود:

$$\nabla^2 \Theta_{nm} - \frac{j\omega_{nm}}{\chi} \left( 1 + \frac{\Delta E (1+\nu)}{(1-\nu)^2} \right) \Theta_{nm} = -\frac{j\Delta E \omega_{nm}}{\alpha \chi} \times \left( \frac{1-2\nu}{(1-\nu)^2} \right) \left( k_{nm} A_n \left( J_n(k_{nm} r) + \frac{B_n}{A_n} Y_n(k_{nm} r) \right) \cos(n\theta) \right). \quad (32)$$

با توجه به  $\Delta E (1+\nu) / (1-\nu)^2 \ll 1$  در مورد مواد ساختاری پرکاربرد در سیستم‌های میکروالکترومکانیکی (MEMS)، رابطه (۳۲) به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$\nabla^2 \Theta_{nm} - \frac{j\omega_{nm}}{\chi} \Theta_{nm} = -\frac{j\Delta E \omega_{nm}}{\alpha \chi} \frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)^2} \times \left( k_{nm} A_n \left( J_n(k_{nm} r) + \frac{B_n}{A_n} Y_n(k_{nm} r) \right) \cos(n\theta) \right). \quad (33)$$

با حل رابطه‌ی (۳۳)، پارامتر تغییر دما در شکل مد حجمی  $(n, m)$ ، به‌صورت مجموع جواب‌های عمومی  $(\Theta_{nm}^G)$  و خصوصی  $(\Theta_{nm}^S)$  محاسبه می‌شود:

$$\Theta_{nm} = \Theta_{nm}^G + \Theta_{nm}^S, \quad (34)$$

که،

$$\Theta_{nm}^G = (\Theta_{T1} J_n(k_{p1} r) + \Theta_{T2} K_n(k_{p2} r)) \cos(n\theta), \quad (35)$$

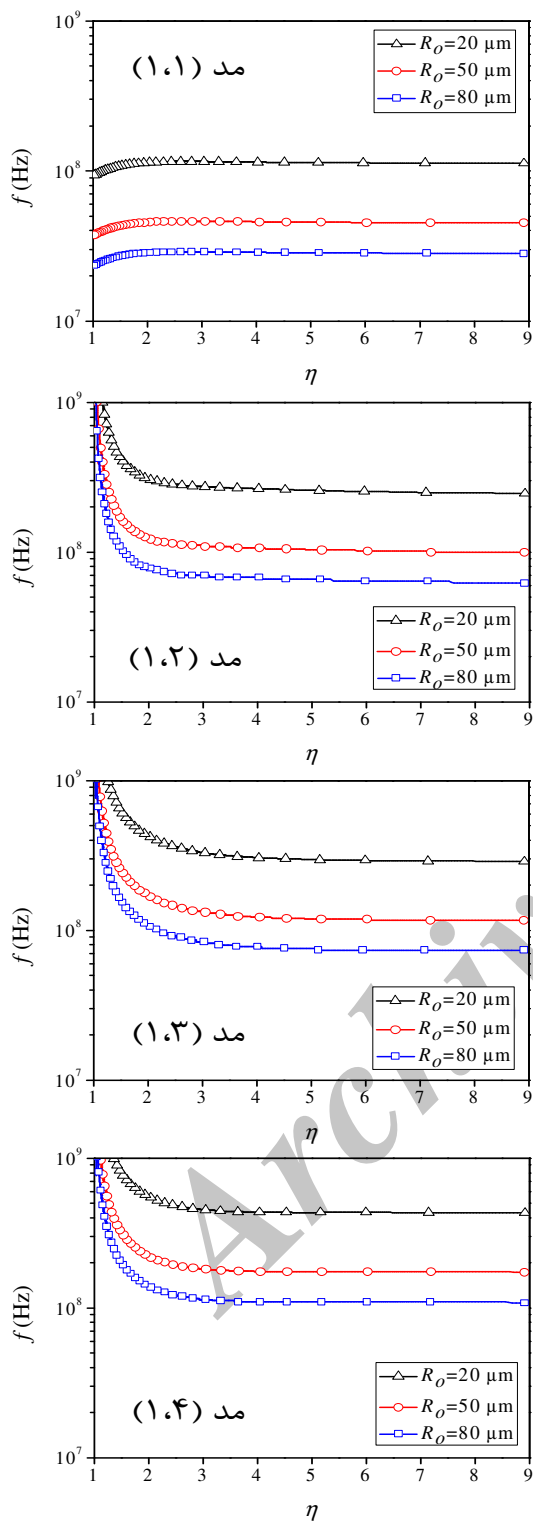
$$\Theta_{nm}^S = \Pi_{nm} A_n \left( J_n(k_{nm} r) + \frac{B_n}{A_n} Y_n(k_{nm} r) \right) \cos(n\theta). \quad (36)$$

که در رابطه‌های فوق،  $K_n$  تابع بسل اصلاح شده نوع دوم بوده و پارامترهای  $k_{p1}$ ،  $k_{p2}$  و  $\Pi_{nm}$  مقادیری مختلط هستند:

$$k_{p1} = (1-j) \sqrt{\frac{\omega_{nm}}{2\chi}}, \quad k_{p2} = (1+j) \sqrt{\frac{\omega_{nm}}{2\chi}}, \quad (37)$$

$$\Pi_{nm} = \frac{j\omega_{nm} \Delta E}{\alpha (\chi k_{nm}^2 + j\omega_{nm})} \frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)^2} k_{nm}. \quad (38)$$





شکل (۴): نمودار تغییرات فرکانس تشدید برحسب نسبت

شعاع خارجی به شعاع داخلی تشدیدگر حلقوی

پالی‌سیلیکونی در مدهای حجمی با مرتبه محیطی اول.

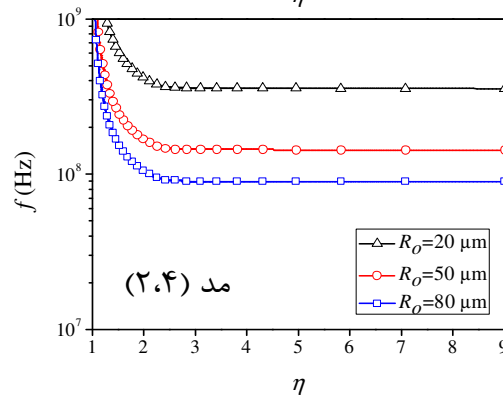
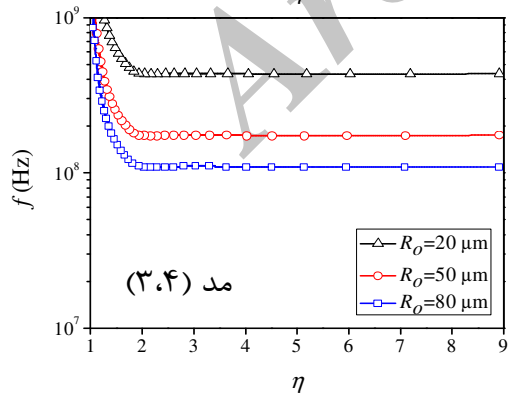
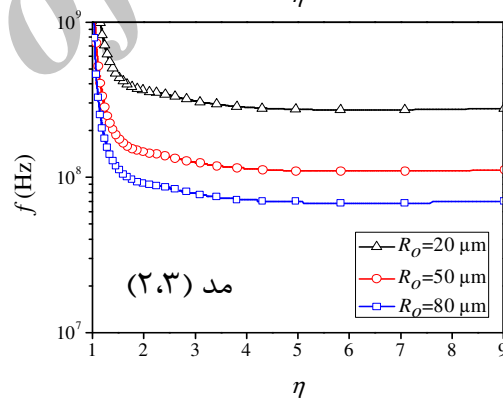
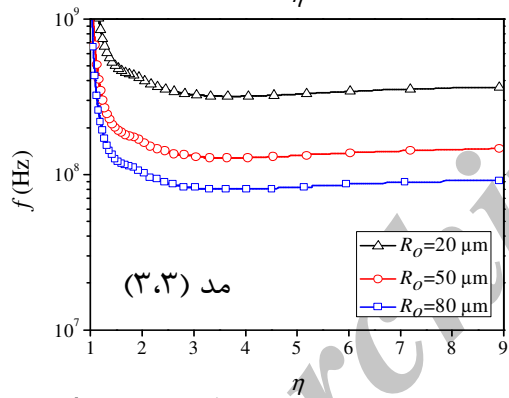
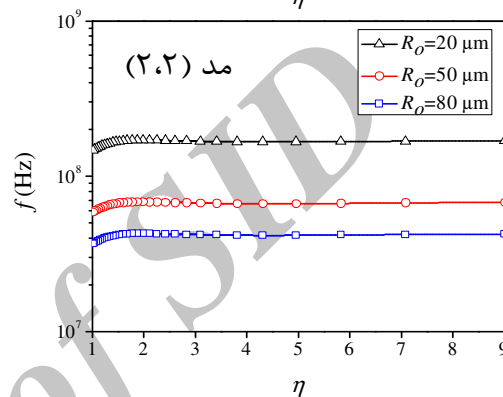
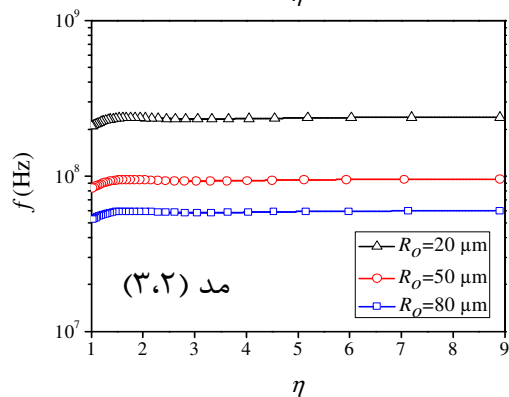
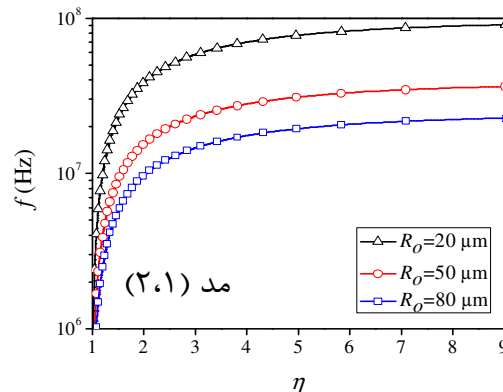
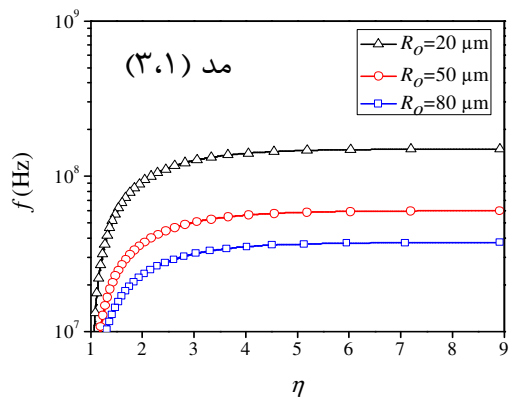
در رابطه‌ی فوق،  $f$  فرکانس تشدید مد خمشی و  $\tau_z$  زمان رهایش حرارتی<sup>۱</sup> نامیده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tau_z = \frac{d^2}{\pi^2 \chi} \quad (۴۵)$$

که در آن،  $d$  نشان‌دهنده‌ی طول مسیر حرارتی مؤثر است، و در مورد تشدیدگر تیر با پهنا  $w$ ، مقدار آن برابر پهنا  $w$  محاسبه شده است [۱۶ و ۹]. با توجه به رابطه‌ی (۴۴)، با نزدیکی یا دوری فرکانس تشدید تیر به فرکانس حرارتی  $(\omega_T = 1/\tau_z)$ ، کوپلینگ ترموالاستیک افزایش یا کاهش یافته و در نتیجه  $Q_{TED}$  تغییر می‌کند، به طوری که در این تشدیدگرها، به دلیل عدم وابستگی  $Q_{TED}$  به درازای تیر، با تغییر درازای تیر و در نتیجه تغییر فرکانس تشدید ساختار، به راحتی می‌توان رابطه‌ی میان  $Q_{TED}$  و فرکانس‌های تشدید ساختار را بررسی کرد.

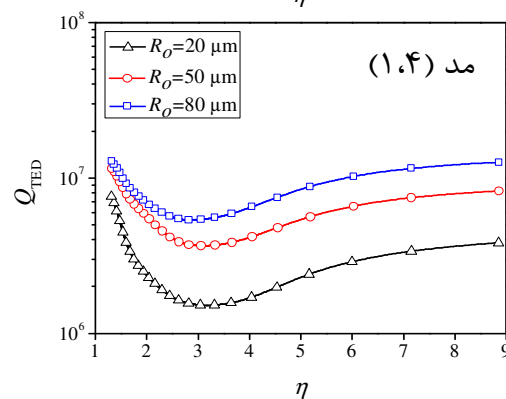
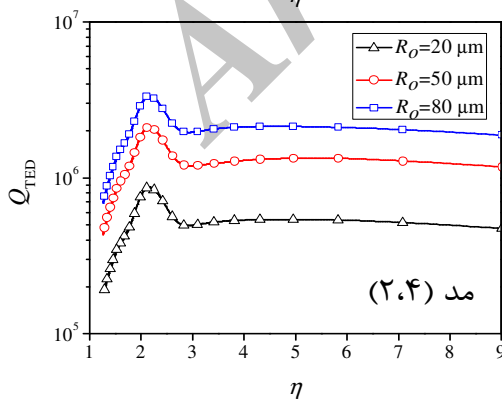
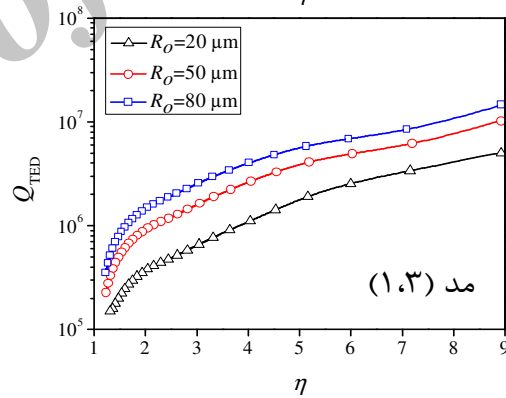
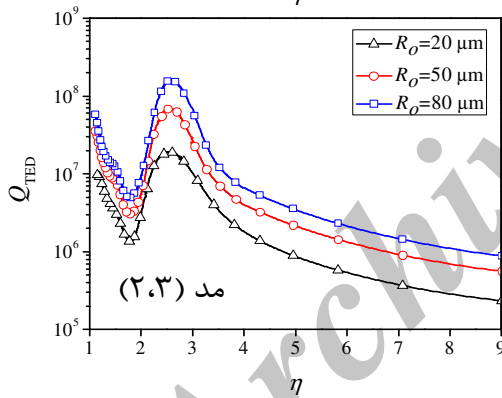
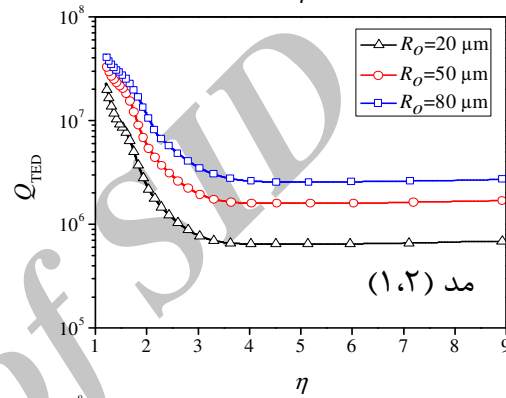
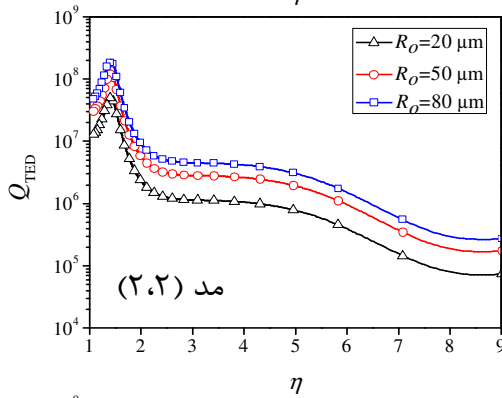
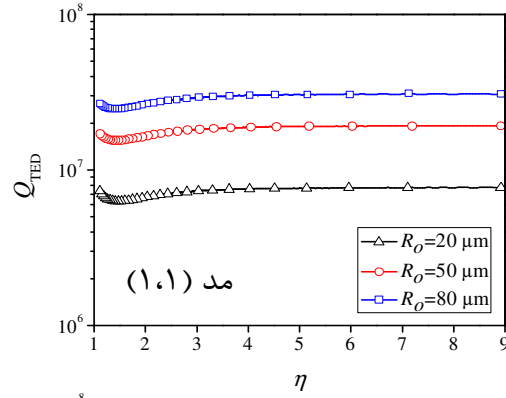
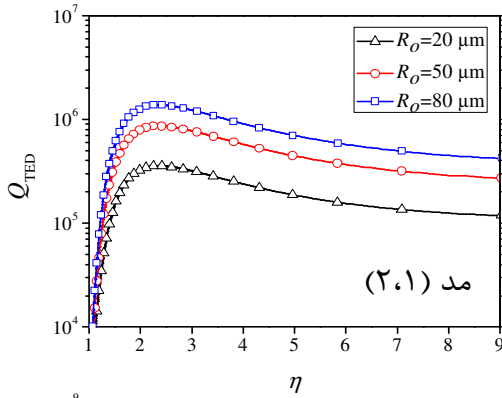
اما با توجه به رابطه‌ی (۴۱)،  $Q_{TED}$  در تشدیدگرهای حلقوی مد حجمی به تمام پارامترهای مؤثر در تعیین فرکانس تشدید ساختار، نظیر ابعاد حلقه و خواص ماده ساختاری، وابسته بوده و به همین دلیل، بررسی رابطه میان  $Q_{TED}$  و فرکانس‌های تشدید در این نوع تشدیدگرها پیچیده‌تر است. برای این منظور، ابتدا با استفاده از رابطه‌های (۲۴ و ۲۶) نمودار تغییرات فرکانس تشدید حلقه برحسب نسبت شعاع خارجی به شعاع داخلی آن ( $\eta = R_o/R_i$ ) محاسبه شده و سپس با استفاده از نتیجه‌های به دست آمده، اثرات ابعاد حلقه و فرکانس تشدید بر ضریب کیفیت ترموالاستیک بررسی می‌شوند. شکل‌های ۴-۶ به ترتیب نمودارهای تغییرات فرکانس تشدید برخی از مدهای حجمی با مرتبه محیطی اول، دوم و سوم را بر حسب  $\eta$  و در مقادیر مختلفی از شعاع خارجی نشان می‌دهند. همان‌طور که در این شکل‌ها مشاهده می‌شود، با افزایش شعاع خارجی حلقه در  $\eta$  ثابت، فرکانس تشدید کاهش یافته و همچنین در بیشتر شکل مدهای بررسی شده، میزان تغییرات فرکانس تشدید با شعاع خارجی حلقه، با کاهش  $\eta$  به شدت کاهش می‌یابد. اکنون به کمک داده‌های به دست آمده از این نمودارها، می‌توان تغییرات  $Q_{TED}$  با ابعاد حلقه را از رابطه‌ی (۴۱)، در دمای  $T_a = 300$  K محاسبه و مطابق شکل‌های ۷-۹ رسم کرد.

1- Thermal Relaxation Time



شکل (۶): نمودار تغییرات فرکانس تشدید بر حسب نسبت شعاع خارجی به شعاع داخلی تشدیدگر حلقوی پالی سیلیکونی در مدهای حجمی با مرتبه محیطی سوم.

شکل (۵): نمودار تغییرات فرکانس تشدید بر حسب نسبت شعاع خارجی به شعاع داخلی تشدیدگر حلقوی پالی سیلیکونی در مدهای حجمی با مرتبه محیطی دوم.



شکل (۸): نمودار تغییرات ضریب کیفیت ترموالاستیک با نسبت شعاع خارجی به شعاع داخلی تشدیدگر حلقوی پالی‌سیلیکونی در مدهای حجمی با مرتبه‌محیطی دوم.

شکل (۷): نمودار تغییرات ضریب کیفیت ترموالاستیک با نسبت شعاع خارجی به شعاع داخلی تشدیدگر حلقوی پالی‌سیلیکونی در مدهای حجمی با مرتبه‌محیطی اول.

همان‌طور که در شکل‌های ۹-۷ مشاهده می‌شود، با افزایش شعاع خارجی حلقه در  $\eta$  ثابت،  $Q_{TED}$  افزایش می‌یابد. همچنین در مدهای حجمی با مرتبه محیطی دوم ( $m=2$ )، نشان داده می‌شود که مدهای با مرتبه شعاعی اول ( $m=1$ ) و چهارم ( $m=4$ )، بالاترین میزان ضریب کیفیت ترموالاستیک را به ترتیب در  $\eta$  برابر با  $2/4$  و  $2/2$  از خود نشان می‌دهند، که با توجه به گسترش روزافزون این مدها در کاربردهای حسگری [۳] و مخابراتی [۶]، این نتیجه‌ها می‌تواند در طراحی تشدیدگرهایی با ضریب کیفیت بسیار بالا مؤثر باشد.

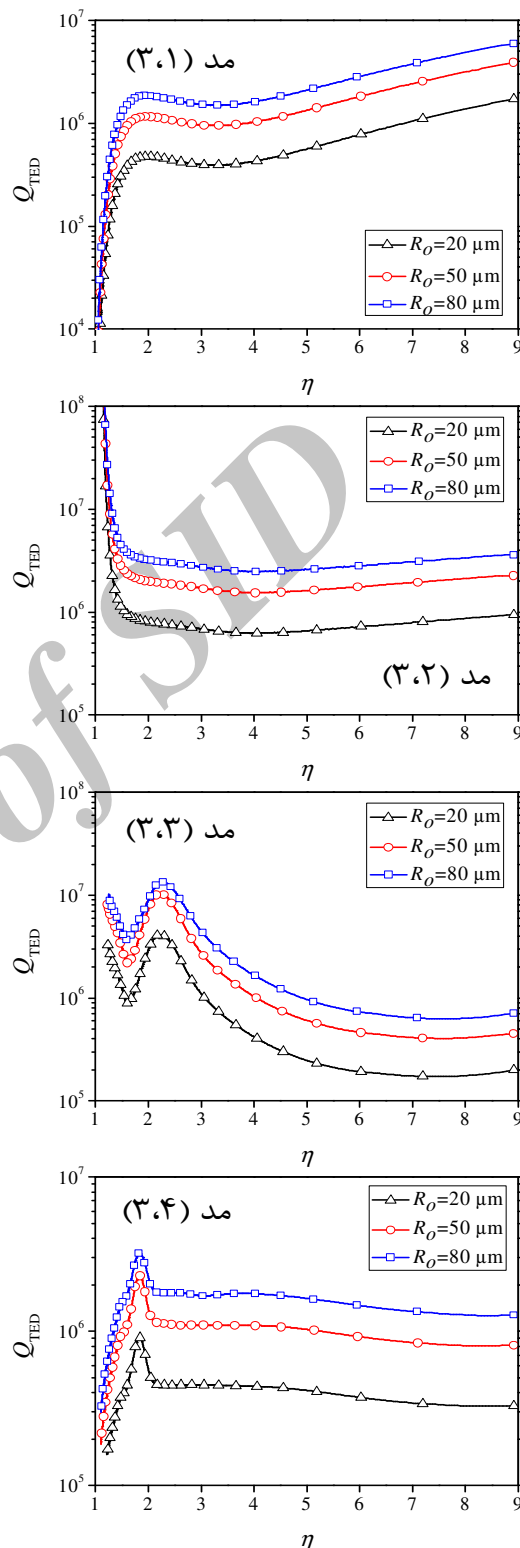
#### ۶- مقایسه‌ی نتیجه‌ها با روش المان محدود (ANSYS)

برای اطمینان از درستی نتیجه‌های به‌دست آمده از روش انرژی، از تحلیل هارمونیک نرم‌افزار ANSYS برای محاسبه ضریب کیفیت ترموالاستیک استفاده می‌شود. در این تحلیل، با مش‌بندی ساختار توسط المان‌های سه‌بعدی Solid 226 یا دو بعدی Plane 223 که دارای قابلیت تحلیل محیط‌های ساختاری-حرارتی هستند، ابتدا تحلیل هارمونیک پیرامون فرکانس تشدید شکل مد مورد نظر انجام شده و سپس با استفاده از داده‌های به‌دست آمده، مقدار  $Q_{TED}$  از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود [۲۹]:

$$Q_{TED} = \left( \sum_{j=1}^{N_e} \text{Re}(U_j) \right) \left( \sum_{j=1}^{N_e} \text{Im}(U_j) \right)^{-1} \quad (46)$$

که  $U_j$  انرژی کرنشی کل در هر المان و  $N_e$  تعداد المان‌های ایجاد شده در اثر مش‌بندی ساختار است. همچنین با این تحلیل می‌توان گرادین حرارتی ایجاد شده در شکل مدهای حجمی مورد نظر را مطابق شکل ۱۱، شبیه‌سازی کرد.

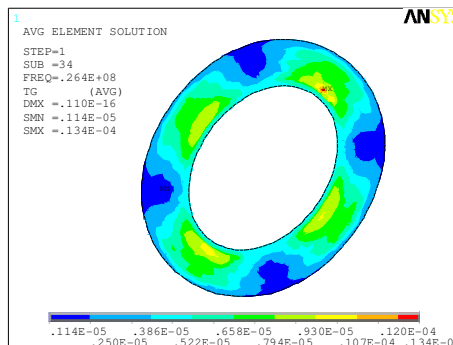
جدول ۳، نتیجه‌های به‌دست آمده از دو روش انرژی و المان محدود نرم‌افزار ANSYS را در تشدیدگرهای حلقوی با ابعاد متفاوت و مدهای حجمی با مرتبه محیطی اول، دوم و سوم، با یکدیگر مقایسه کرده و درصد خطای نسبی حاصل از این دو روش در محاسبه‌ی  $Q_{TED}$  را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در هر یک از مدهای حجمی با افزایش  $\eta$  درصد خطای نسبی نتیجه‌های حاصل از روش انرژی کاهش می‌یابد. همچنین، در  $\eta$  ثابت، با افزایش شعاع خارجی حلقه، درصد خطای نسبی کاهش بیشتری می‌یابد.



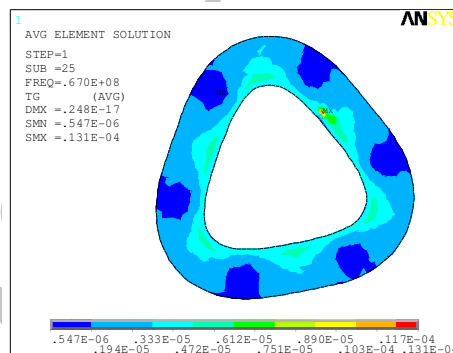
شکل (۹): نمودار تغییرات ضریب کیفیت ترموالاستیک با نسبت شعاع خارجی به شعاع داخلی تشدیدگر حلقوی پالی‌سیلکونی در مدهای حجمی با مرتبه محیطی سوم.

## ۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله، میرایی ترموالاستیک در مدهای حجمی تشدیدگر حلقوی میکرومکانیکی مورد بررسی قرار گرفته و رابطه تحلیلی ضریب کیفیت ترموالاستیک در شکل‌مدهای نامتقارن  $(n, m)$  با استفاده از روش انرژی و بر پایه‌ی رابطه‌های تنش سطحی و ترموالاستیسیته دو بعدی، ارائه شده است. همچنین اعتبار رابطه‌ی تحلیلی به‌دست آمده، با مقایسه‌ی نتیجه‌های این رابطه با روش المان محدود نرم‌افزار ANSYS تأیید شده است. نتیجه‌ها نشان می‌دهند که با افزایش  $n$  در هر یک از مدهای حجمی، نتیجه‌های حاصل از روش انرژی به نتیجه‌های حاصل از روش المان محدود نزدیک‌تر شده و در  $n$  ثابت، نتیجه‌های حاصل از روش تحلیلی در تشدیدگر حلقوی با شعاع خارجی بزرگ‌تر، از دقت بالاتری برخوردارند. اثرات ابعاد حلقه بر فرکانس تشدید و ضریب کیفیت ترموالاستیک بررسی شد و نتیجه‌ها نشان می‌دهند که با افزایش شعاع خارجی حلقه در  $n$  ثابت، فرکانس تشدید کاهش و ضریب کیفیت ترموالاستیک افزایش می‌یابد. همچنین در دو مد حجمی پرکاربرد  $(1, 2)$  و  $(2, 4)$ ، بالاترین میزان ضریب کیفیت ترموالاستیک به‌ترتیب در  $n$  برابر با  $2/4$  و  $2/2$  مشاهده شد، که با توجه به تعیین حد بالای ضریب کیفیت قابل دسترس در تشدیدگرهای میکرومکانیکی مد حجمی توسط مکانیزم میرایی ترموالاستیک، از این نتیجه‌ها می‌توان برای طراحی تشدیدگرهای حلقوی میکرومکانیکی با ضریب کیفیت بسیار بالا استفاده کرد.



شکل مد (۲،۱)



شکل مد (۳،۱)

شکل (۱۱): شبیه‌سازی گرادیان حرارتی ایجاد شده در شکل مدهای حجمی تشدیدگر حلقوی پالی سیلیکونی با ابعاد  $R_o=20 \mu\text{m}$ ,  $R_i=12/5$

**جدول (۳):** مقایسه مقادیر محاسبه شده برای ضریب کیفیت ترموالاستیک از دو روش انرژی و المان محدود نرم افزار ANSYS در برخی از شکل‌مدهای حجمی تشدیدگر حلقوی پالی سیلیکونی با ضخامت ساختاری  $t=2 \mu m$

مرتبه محیطی مد (n)	شعاع داخلی ( $\mu m$ )	شعاع خارجی ( $\mu m$ )	$\eta$	شکل مد (n,m)	فرکانس تشدید		ضریب کیفیت ترموالاستیک		درصد خطای نسبی $ \Delta Q/Q_{FEM} $
					$f_{Theory}$ (MHz)	$f_{FEM}$ (MHz)	$Q_{Theory}$	$Q_{FEM}$	
۱	۱۲/۵	۲۰	۱/۶	(۱.۱)	۱۰۹/۶۶	۱۰۹/۷۵	$6/36 \times 10^6$	$5/13 \times 10^6$	۲۴
				(۲.۱)	۳۷۷/۹۶	۳۷۷/۸۳	$7/61 \times 10^6$	$6/08 \times 10^6$	۲۵
				(۳.۱)	۵۶۵	۵۶۴/۸۸	$0/24 \times 10^6$	$0/18 \times 10^6$	۳۳
				(۴.۱)	۷۱۷/۷۲	۷۱۷/۹۳	$3/83 \times 10^6$	$3/22 \times 10^6$	۱۹
	۴	۲۰	۵	(۱.۱)	۱۱۳/۸۳	۱۱۳/۸۶	$7/64 \times 10^6$	$6/31 \times 10^6$	۱۸
				(۲.۱)	۲۵۷/۷۱	۲۵۷/۷۵	$0/64 \times 10^6$	$0/52 \times 10^6$	۱۲
				(۳.۱)	۲۹۶/۲۳	۲۹۶/۲۴	$1/72 \times 10^6$	$2/07 \times 10^6$	۱۷
				(۴.۱)	۴۳۳/۹۳	۴۳۳/۹۳	$2/29 \times 10^6$	$1/97 \times 10^6$	۱۶
	۱۶	۸۰	۵	(۱.۱)	۲۸/۴۵	۲۸/۴۶	$30/6 \times 10^6$	$26/61 \times 10^6$	۱۵
				(۲.۱)	۶۴/۴۱	۶۴/۴۳	$2/55 \times 10^6$	$2/34 \times 10^6$	۸
				(۳.۱)	۷۴/۰۵	۷۴/۰۶	$5/62 \times 10^6$	$5/01 \times 10^6$	۱۲
				(۴.۱)	۱۰۸/۴۸	۱۰۸/۴۸	$8/47 \times 10^6$	$7/72 \times 10^6$	۹
۲	۱۲/۵	۲۰	۱/۶	(۱.۲)	۲۶/۳۹	۲۶/۴۳	$0/19 \times 10^6$	$0/16 \times 10^6$	۲۲
				(۲.۲)	۱۶۹/۲	۱۶۹/۱۹	$15/11 \times 10^6$	$12/69 \times 10^6$	۱۸
				(۳.۲)	۴۱۳/۶۱	۴۱۳/۵۹	$2/29 \times 10^6$	$3/01 \times 10^6$	۲۴
				(۴.۲)	۵۵۴/۸۲	۵۵۴/۸۱	$0/43 \times 10^6$	$0/33 \times 10^6$	۳۰
	۴	۲۰	۵	(۱.۲)	۷۷/۴۱	۷۷/۴۴	$0/19 \times 10^6$	$0/21 \times 10^6$	۹
				(۲.۲)	۱۶۶/۶۳	۱۶۶/۶۵	$0/78 \times 10^6$	$0/89 \times 10^6$	۱۲
				(۳.۲)	۲۷۲/۵	۲۷۲/۵۱	$0/86 \times 10^6$	$0/73 \times 10^6$	۱۷
				(۴.۲)	۳۵۶/۷۴	۳۵۶/۷۶	$0/54 \times 10^6$	$0/63 \times 10^6$	۱۴
	۱۶	۸۰	۵	(۱.۲)	۱۹/۳۴	۱۹/۳۶	$0/69 \times 10^6$	$0/78 \times 10^6$	۱۱
				(۲.۲)	۴۱/۶۵	۴۱/۶۶	$3/04 \times 10^6$	$2/89 \times 10^6$	۵
				(۳.۲)	۶۸/۰۸	۶۸/۱۲	$3/45 \times 10^6$	$3/11 \times 10^6$	۱۱
				(۴.۲)	۸۹/۱۸	۸۹/۱۹	$2/14 \times 10^6$	$2/39 \times 10^6$	۱۰
۳	۱۲/۵	۲۰	۱/۶	(۱.۳)	۶۶/۹۵	۶۷/۰۲	$0/39 \times 10^6$	$0/33 \times 10^6$	۱۸
				(۲.۳)	۲۳۶/۲۴	۲۳۶/۲۶	$0/95 \times 10^6$	$0/76 \times 10^6$	۲۵
				(۳.۳)	۴۶۴/۲	۴۶۴/۱۱	$0/88 \times 10^6$	$1/12 \times 10^6$	۲۱
				(۴.۳)	۵۴۵/۳۲	۵۴۵/۳۵	$0/44 \times 10^6$	$0/36 \times 10^6$	۲۲
	۴	۲۰	۵	(۱.۳)	۱۴۵/۶۶	۱۴۵/۶۵	$0/56 \times 10^6$	$0/63 \times 10^6$	۱۱
				(۲.۳)	۲۳۵/۵۷	۲۳۵/۵۶	$0/65 \times 10^6$	$0/57 \times 10^6$	۱۴
				(۳.۳)	۳۲۷/۶۹	۳۲۷/۶۶	$0/24 \times 10^6$	$0/22 \times 10^6$	۹
				(۴.۳)	۴۳۱/۶۱	۴۳۱/۶۱	$0/41 \times 10^6$	$0/35 \times 10^6$	۱۷
	۱۶	۸۰	۵	(۱.۳)	۳۶/۴۱	۳۶/۴۱	$2/11 \times 10^6$	$2/31 \times 10^6$	۸
				(۲.۳)	۵۸/۸۷	۵۸/۸۹	$2/59 \times 10^6$	$2/72 \times 10^6$	۵
				(۳.۳)	۸۱/۹	۸۱/۹۱	$0/96 \times 10^6$	$0/89 \times 10^6$	۸
				(۴.۳)	۱۰۷/۸۹	۱۰۷/۹	$1/63 \times 10^6$	$1/44 \times 10^6$	۱۳

- 3229, 2006.
13. Duwel, A., Candler, R.N., Kenny, T.W., and Varghese, M. "Engineering MEMS Resonators with Low Thermoelastic Damping", *IEEE/ASME, J. Microelectromechanical Sys.*, Vol. 15, No. 6, pp. 1437–1445, 2006.
  14. Yasumura, K.Y., Stowe, T.D., Chow, E.M., Kenny, T.W., Stipe, B.C., and Rugar, D. "Quality Factors in Micron- and Submicron-thick Cantilevers", *J. Microelectromechanical Sys.*, Vol. 9, No. 1, pp. 117–125, 2000.
  15. Candler, R.N., Duwel, A., Varghese, M., Chandorkar, S.A., Hopcroft, M.A., Bongsang, K., Lutz, M., and Kenny, T.W. "Impact of Geometry on Thermoelastic Dissipation in Micromechanical Resonant Beams", *J. Microelectromechanical Sys.*, Vol. 15, No. 4, pp. 927–934, Aug. 2006.
  16. Pourkamali, S., Hashimura, A., Abdolvand, R., Ho, G.K., and Ayazi, F. "High-Q Single Crystal Silicon HARPSS Capacitive Beam Resonators With Self- Aligned Sub-100-nm Transduction Gaps", *IEEE/ASME, J. Microelectromechanical Sys.*, Vol. 12, No. 4, pp. 487–496, 2003.
  17. Roszhart, T.V. "The Effect of Thermoelastic Internal Friction on the Q of Micromachined Silicon Resonators", *IEEE Solid State Sensor and Actuator Workshop*, pp. 489–494, 1990.
  18. Wong, S.J., Fox, C.H.J., and William, S.M. "Thermoelastic Damping of the In-plane Vibration of Thin Silicon Rings", *J. Sound and Vib.*, Vol. 293, No. 1, pp. 266–285, 2006.
  19. Hao, Z. and Ayazi, F. "Thermoelastic Damping in Flexural-Mode Ring Gyroscopes", *ASME Int. Mech. Eng. Cong. and Exp.*, pp. 1–9, 2005.
  20. Sun, Y. and Tohmyoh, H. "Thermoelastic Damping of the Axisymmetric Vibration of Circular Plate Resonators", *J. Sound and Vib.*, Vol. 319, No. 1, pp. 392–405, 2009.
  21. Sun, Y. and Saka, M. "Thermoelastic Damping in Micro-scale Circular Plate Resonators", *J. Sound and Vib.*, Vol. 329, No. 3, pp. 328–337, 2010.
  22. Tunvir, K., Ru, C.Q., and Mioduchowski, A. "Thermoelastic Dissipation of Hollow Micromechanical Resonators", *J. Low-dimensional Sys. and Nanostructures*, Vol. 42, No. 9, pp. 2341–2352, 2010.
  23. Sadd, M.H. "Elasticity - Theory, Applications, and Numerics", 2<sup>nd</sup> Edition, Academic Press, 2009.
  24. Yi, Y.B. "Geometric Effects on Thermoelastic Damping in MEMS Resonators", *J. Sound and Vib.*, Vol. 309, No. 3, pp. 588–599, 2008.
  25. Hao, Z. "Thermoelastic Damping in the Contour-Mode Vibrations of Micro and Nano-electromechanical Circular Thin-plate Resonators", *J. Sound and V.*, Vol. 313, No. 1, pp. 3229, 2006.
- مراجع**
1. Bannon, F.D., Clark, J.R., and Nguyen, C.T. C. "High Q HF Microelectromechanical Filters", *IEEE J. Solid-State Circuits*, Vol. 35, No. 4, pp. 512–526, 2000.
  2. Lin, Y.W., Lee, S.L., Li, S.S., Xie, Y., Ren, Z., and Nguyen, C.T.C. "Series-Resonant VHF Micromechanical Resonator Reference Oscillators", *IEEE J. Solid-State Circuits*, Vol. 39, No. 12, pp. 2477–2491, 2004.
  3. Walter, B., Faucher, M., Algre, E., Legrand, B., Boisgard, R., Aime, J.P., and Buchaillot, L. "Design and Operation of a Silicon Ring Resonator for Force Sensing Applications above 1 MHz", *J. Micromechanics and Microengineering (JMM)*, Vol. 19, No. 11, pp. 1–7, 2009.
  4. Hao, Z., Abdolvand, R., and Ayazi, F. "A High-Q Length-Extensional Bulk-Modemass Sensor with Annexed Sensing Platforms", *19th IEEE Inter.I Conf. on Micro Electro Mech. Sys.(MEMS2006)*, Istanbul, Turkey, pp. 598–601, 2006.
  5. Hung, L.W., Xie, Y., Lin, Y.W., Li, S.S., Ren, Z., and Nguyen, C.T.C. "UHF Micromechanical Compound (2,4) Mode Ring Resonators with Solid-Gap Transducers", *Proceedings, IEEE Int. Freq. Cont.Sympo.*, pp. 1370–1375, 2007.
  6. Xie, Y., Li, S., and Nguyen, C.T.C. "1.52-GHz Micromechanical Extensional Wine-Glass Mode Ring Resonators", *IEEE Trans. on Ultrasonic Ferroelectrics and Freq. Cont.*, Vol. 55, No. 4, pp. 890–907, 2008.
  7. Chandorkar, S.A., Candler, R.N., Duwel, A., Melamud, R., Agarwal, M., Goodson, K.E., and Kenny, T.W. "Multimode Thermoelastic Dissipation", *J. Appl. Phys.*, Vol. 105, No. 4, pp. 1–13, 2009.
  8. Chandorkar, S.A., Agarwal M., Melamud, R., Candler, R. N., Goodson, K. E., and Kenny, T. W. "Limits of Quality Factor in Bulk-Mode Micromechanical Resonators", *IEEE 21<sup>st</sup> Int. Conf. on Microelectromechanical Sys.*, pp. 74–77, 2008.
  9. Zener, C. "Internal Friction in Solids I. Theory of Internal Friction in Reeds", *J. Phys. Review*, Vol. 52, No. 3, pp. 230–235, 1937.
  10. Zener, C. "Internal Friction in Solids: II. General Theory of Thermoelastic Internal Friction", *J. Phys. Review*, Vol. 53, No. 1, pp. 90–99, 1938.
  11. Lifshitz, R. and Roukes, M.L. "Thermoelastic Damping in Micro-and Nanomechanical Systems", *J. Phys. Review B*, Vol. 61, No. 8, pp. 5600–5609, 2000.
  12. Sun, Y., Fang, D., and Soh, A.K. "Thermoelastic Damping in Micro-Beam Resonators", *Int. J. Solids and Struct.*, Vol. 43, No. 10, pp. 3213–

28. Bashmal, S., Bhat, R., and Rakheja, S., "In-plane Free Vibration of Circular Annular Disks", J. Sound and Vib., Vol. 322, No. 1, pp. 216–226, 2009.
29. ANSYS®, Version 11.0, User's guide, ANSYS Inc.
- 77-96, 2008.
26. Hao, Z., Pourkamali, S., and Ayazi, F. "VHF Single-crystal Silicon Elliptic Bulk-mode Capacitive Disk Resonators—Part I: Design and Modeling", IEEE/ASME, J. Microelectromechanical Sys., Vol. 13, No. 6, pp. 1043–1053, 2004.
27. Takano, T., Hirata, H., and Tomikawa, Y., "Analysis of Non-axisymmetric Vibration Mode Piezoelectric Annular Plate and its Application to an Ultrasonic Motor", IEEE Trans. on Ultrasonics, Ferroelectrics and Freq. Cont., Vol. 37, No. 6, 558–565, 1990.

Archive of SID