مدلسازی میرایی ترموالاستیک در ارتعاشات مدهای حجمی تشدیدگر حلقوی میکرومکانیکی با استفاده از روش انرژی

گروہ مکانیک، دانشکدہ مہندسی

ابوالفضل بیجاری و سید حسین کشمیری کم محمد رضا زنگویی مطلق آ گروه برق، دانشکده مهندسی دانشگاه فردوسی مشهد

(تاریخ دریافت: ۸۹/۰۹/۰۸؛ تاریخ پذیرش: ۹۱/۴/۱۸)

چکیدہ

در این مقاله، میرانی ترموالاستیک در ارتعاشات مدهای حجمی تشدیدگر حلقوی میکرومکانیکی با استفاده از روش انرژی، مدل سازی و بررسی می شود. در این روش، با فرض ناچیز بودن کویلینگ ترموالاستیک، ابتدا فرکانس های تشدید و جابه جایی های الاستیک در مدهای حجمی، بر یایهی روابط تنش سطحی دو بعدی محاسبه و سیس مقدار اتلاف ناشی از میرایی ترموالاستیک توسط روابط ترموالاستیسیتهی خطبی کویل نشده، تحت شرایط آدیاباتیک محاسبه میشود. درستی روابط بهدست آمده، با مقایسهی نتیجههای تحلیلی با نتیجههای شبیهسازی دو تحلیل مدی و هارمونیک نرمافزار ANSYS تأیید می شود. نتیجهها نشان می دهد، که با افزایش نسبت شعاع خارجی به شعاع داخلی حلقه، درصد خطای نسبی نتیجههای تحلیلی کاهش می یابد. همچنین اثرات فرکانس تشدید و ابعاد حلقه بر ضریب کیفیت ترموالاستیک در شکل مدهای حجمی مختلف بررسی و بحث میشوند، بهطوری که تحلیل انجام شده، دید خوبی را در زمینهی طراحی تشدیدگرهای حلقوی میکرومکانیکی با ضریب کیفیت بالا، برای کاربردهای مخابراتی و حسگری فراهم می کند.

واژههای کلیدی: میرایی ترموالاستیک، تشدیدگر حلقوی میکرومکانیکی، ضریب کیفیت، مدهای حجمی، روش انرژی

Modeling of Thermoelastic Damping in Bulk-Mode Vibrations of Micromechanical Ring Resonator Using Energy Method

A.Bijari and S.H. Keshmiri Elect. Eng. Dep't

M.R. Zangooee Motlagh Mech. Eng. Dep't

Ferdowsi Univ. of Mashhad (Received: 29, November, 2010; Accepted: 8, July, 2012)

ABSTRACT

In this paper, thermoelastic damping in bulk-mode vibrations of the micromechanical ring resonator is modeled using the energy method. Assuming that the thermoelastic coupling is very weak, the resonance frequencies and elastic displacements are first calculated using two-dimensional plane stress equations. An analytical expression for thermoelastic quality factor is then derived based on uncoupled linear thermoelasticity under adiabatic conditions. The validity of the derived expressions is demonstrated by comparing the analytical results with simulation results of modal and harmonic analysis using ANSYS software. Results show that the relative error of the analytical results decreases with increasing the ratio of the outer-to-inner ring radius. Moreover, the effects of resonance frequency and ring geometry on thermoelastic quality factor in various mode shapes of bulk-mode vibrations are discussed. The present analysis is applied as an appropriate tool to design bulk-mode ring resonators with high quality factor.

Keywords: Thermoelastic Damping, Micromechanical Ring Resonator, Quality Factor, Bulk-modes, Energy Method

a.bijari@gmail.com - دانشجوی دکتری:

۲- استاد (نویسنده یاسخگو): keshmiri@um.ac.ir

۳- دانشجوی دکتری

۱– مقدمه

امروزه یکی از چالشهای موجود در طراحی تشدیدگرهای میکرومکانیکی، دستیابی به تشدیدگرهایی با ضریب کیفیت بالا برای کاربردهای مخابراتی و حسگری است؛ زیرا افزایش ضريب كيفيت تأثير مستقيمي بر بهبود عملكرد قطعات الكترونيكي نظير فيلترها، نوسانسازها [1-1] و نيز افزايش حساسیت و کاهش نسبت سیگنال به نویز حسگرها دارد [۳–۴]. از میان تشدیدگرهای میکرومکانیکی، تشدیدگرهای حلقوی مد حجمی^۳ بهدلیل سختی[†] ساختاری بالای مدهای حجمی نسبت به تشدیدگرهای تیر مد خمشی ٌ، نیاز چنـدانی به کوچکسازی ابعاد ساختار در جوزهی نانومتر برای دستیابی به فرکانس های تشدید بالا ندارد و از طرفی این تشدیدگرها با برخورداری از نقاط شبه گره ² در برخی از مدهای حجمی نامتقارن^۷، نسبت به سایر تشدیدگرهای مد حجمی از اتـلاف تکیهگاه^ کمتری نیز برخوردار هستند، و بههمین دلایل در سیستمهای میکروالکترومکانیکی (MEMS) توسعهی فراوانی يافتهاند [۶–۵]. امروزه با طراحي دقيق و جانمايي بهينه تیرهای تکیهگاه در تشدیدگرهای حلقوی مد حجمے و نیز بستهبندی ٔ این تشدیدگرها در شرایط خلاً بالا، دو مکانیزم میرایی خارجی نظیر اتلاف تکیهگاه و میرایی هوا تا حد زیادی کاهش یافتهاند [۶]؛ اما همچنان حد بالای ضریب کیفیت قابل دسترس در این تشدیدگرها، توسط مکانیزم میرایی ترموالاستیک تعیین مے شود [۸-۷]. به همین دلیل، مدلسازی و پیشبینی دقیق این مکانیزم میرایی، برای طراحی تشدیدگرهایی با ضریب کیفیت بالا، از اهمیت بسیاری برخوردار است.

اولین تحلیل در مورد میرایی ترموالاستیک توسط زنر^{۱۰} [۱۰-۹] در سال ۱۹۳۰ بر مبنای روابط پایه ترمودینامیک انجام شد. متعاقب آن در دهههای اخیر، تحقیقات تئوری

[۱۱–۱۳] و تجربی [۱۷–۱۴] فراوانی بر اساس تئوری زنر و حل دقيق رابطههاي ترموالاستيسيته خطي كوپل شده'' حاكم بر تشدیدگرهای تیر انجام شده است، بهطوریکه ضریب ¹⁷ کیفیت ترموالاستیک ($Q_{
m TED}$) محاسبه شده، توسط لیفشـیز و رویکز^{۳۲}(LR) [۱۱] بسته به ابعاد و فرکانس اضافه تشدیدگر تیر، در حدود ۲ تا ۲۰ درصد با ضریب کیفیت زنر متفاوت است. در مورد دیگر ساختارهای تشدیدگرهای میکرومکانیکی، ونــگ^{۱۲} و همکــارانش [۱۸] و هــائو^{۱۵} و همکــارانش [۱۹] بــا استفاده از روش LR Q_{TED} را برای تشدیدگرهای حلقوی مـد خمشی محاسبه کرده و وابستگی آن به ابعاد حلقه را نشان دادهاند. همچنین، سان ^{۱۶} و همکارانش [۲۱-۲۱] رابطهی دقیقے را برای میرایے ترموالاستیک در مدھای ارتعاشے غیرهم سطح تشدیدگر صفحه ی دایروی^{۱۷} استخراج کردهاند و نشان دادهاند که میرایی ترموالاستیک در این تشدیدگرها، مهم ترین مکانیزم میرایی در دمای اتاق است. تانویر ۱۸ و همكارانش [۲۲] اثر ابعاد و شرایط حرارتی سطحی مختلف را بر روی Q_{TED} تشدیدگرهای تیر با سطح مقطع حلقوی، بررسی کرده و نشان دادهاند که، در شرایط آدیاباتیک نسبت به شرایط همدما^۱٬ میتوان به Q_{TED} بالاتری در فرکانسهای بالا دست يافت.

با مروری بر تحقیقات انجام شده مشخص میشود که تاکنون میرایی ترموالاستیک در مدهای حجمی تشدیدگر حلقوی میکرومکانیکی بررسی نشده است، درصورتی که این تشدیدگرها امروزه در برخی از مدهای حجمی مرتبهدوم کاربرد گستردهای در قطعات مخابراتی پیسیم و حسگرها پیدا کردهاند. از این رو در این مقاله، میرایی ترموالاستیک در ارتعاشات مدهای حجمی تشدیدگر حلقوی با استفاده از روش انرژی و بر پایهی روابط تنش سطحی^{۲۰} و انتقال حرارت دوبعدی، محاسبه و درستی آن توسط تحلیل هارمونیک

- 11- Coupled
- 12- Lifshitz
- 13- Roukes
- 14-Wong
- 15- Hao
- 16- Sun
- 17- Circular Plate
- 18- Tunvir
- 19- Isothermal
- 20- Plane Stress

- 1- Oscillator
- 2- Resonator
- 3- Bulk-Mode
- 4- Stiffness
- 5- Flexural
- 6- Quasi-Nodal
- 7- Non-Axisymmetric
- 8- Anchor Loss
- 9- Packaging

¹⁰⁻ Zenner

نرمافزار ANSYS تأیید می شود. همچنین اثرات ابعاد حلقه، فرکانس تشدید و شکل مدهای حجمی بر ضریب کیفیت ترموالاستیک بررسی و بحث می شوند.

۲- فرضیات و روش تحلیل انرژی

برای تحلیل میرایی ترموالاستیک در ارتعاشات مدهای حجمی تشدیدگر حلقوی میکرومکانیکی، فرضیات ذیل برای کاهش پیچیدگی روابط الاستیک حاکم بر مدهای حجمی، در روش انرژی استفاده میشوند:

الف) همان طور که در شکل I نشان داده شده، با فرض بزرگتر بودن پهنای حلقه از ضخامت ساختار ($R_{o}-R_{i} >> r_{r}$)، تشدیدگر حلقوی را به صورت یک نوار حلقوی نازک^۱ با کنارههای آزاد در نظر گرفته، و بنابراین از سیستم مختصات قطبی (r, θ)، با مبدأ قرار گرفته در مرکز حلقه، و روابط تنش سطحی و انتقال حرارت دو بعدی استفاده می شود.



شکل (۱): طرح شماتیک تشدیدگر حلقوی با مختصات قطبی.

ب) مادهی ساختاری تشدیدگر، جامد همگن^{⁷ و همسانگرد^۳ فرض شده و در نتیجه روابط ترموالاستیسیته کوپلشده در غیاب منابع گرمایی داخلی و نیروهای خارجی، بهصورت زیر بیان میشوند [۲۳ و ۱۸]:}

$$\frac{E}{1-v^2}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) - \frac{E}{2(1+v)}\nabla\times\nabla\times\mathbf{u} - \frac{\alpha E}{1-v}\nabla\Theta = \rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}.$$
 (1)

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} - \chi \nabla^2 \Theta = -\frac{E \, \partial T_a}{C_v \, (1-v)} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}.$$
(Y)

که v، E و p بهترتيب، نشاندهنده مادول الاستيسيته،

1- Thin Annular \late

بردار جابهجایی u نیز شامل مؤلفههای جابهجاییهای شعاعی (u) و محیطی^۲ (v) در مختصات قطبی است: $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_r + v\mathbf{e}_{\boldsymbol{\theta}}.$ (٣) همچن<u>ین</u> $\nabla^2 = 1/r(\partial/\partial r) + \partial^2/\partial r^2 + 1/r^2(\partial^2/\partial \theta^2)$ عملگ لاپلاسین را در دستگاه مختصات قطبی مشخص می کند؛ و پارامترهای α، \mathcal{C}_{v} و Θ نیز بهترتیب، نشان دهنـدهی ضـریب انبساط حرارتی، ظرفیت گرمایی در واحد حجم، ضریب پخش ε حرارتی و تغییر از دمای محیط ($\Theta=T$ - T_a) هستند. پارامتر انبساط حرارتی الاسـتیک^۵ نامیـده شـده اسـت، کـه ناشـی از تنشهای مکانیکی و حرارتی بوده و بهصورت زیر تعریف می شود [۲۰]: $\mathcal{E} = \mathcal{E}_r + \mathcal{E}_{\theta} + \mathcal{E}_Z$. (۴) که تحت شرایط تنش سطحی دو بعدی، مؤلفههای کرنش شعاعی (ε_r) و محیطی (ε_{θ})، به صورت زیر بیان می شوند [۲۳]:

ضریب پواسون و چگالی مادهی ساختاری تشدیدگر هستند.

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}.$$
 (Δ)

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}.$$
(9)

و مقدار مولفهی c_z با استفاده از قانون هو 2^{3} و روابط حاکم بر تنش سطحی دوبعدی ($\sigma_z=0$)، بهصورت تابعی از تنش های شعاعی (σ_r) و محیطی (σ_{θ}) محاسبه می شود [27]:

$$\varepsilon_z = -\frac{\upsilon}{E} (\sigma_r + \upsilon \sigma_\theta) + \alpha \Theta. \tag{Y}$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - v^2} \Big[\varepsilon_r + v \varepsilon_\theta - (1 + v) \alpha \Theta \Big]. \tag{A}$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{E}{1 - v^2} \Big[\varepsilon_{\theta} + v \varepsilon_r - (1 + v) \alpha \Theta \Big]. \tag{9}$$

که در آن، با جایگزینی رابطههای (۹–۸) در رابطهای (۷) مقدار مؤلفه \mathcal{E}_z محیطی \mathcal{E}_z مولفه های کرنش شعاعی و محیطی بهدست میآید:

$$\varepsilon_{z} = -\frac{v}{(1-v)} (\varepsilon_{r} + \varepsilon_{\theta}) + \frac{(1+v)}{(1-v)} \alpha \Theta.$$
 (1.

در نتیجه، با جایگزینی رابطههای (۱۰ و ۶-۵) در رابطه (۴)، مقدار انبساط حرارتی الاستیک محاسبه می شود:

²⁻ Homogenous

³⁻ Isotropic

⁴⁻ Circumferential

⁵⁻ Elastic Dilation

⁶⁻ Hook

$$\varepsilon = \frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \alpha \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \Theta. \tag{11}$$

در میرایی ترموالاستیک، با ارتعاش ساختار در فرکانس تشدید، تغییرات کرنشی بهوجود آمده منجر به ایجاد تغییرات دمایی و در نتیجه، جریانهای گرمایی برگشتناپذیر میشوند، بهطوری که این جریانهای گرمایی برگشتناپذیر باعث افزایش آنتروپی و در نتیجه بخشی از انرژی ارتعاشی افزایش آنتروپی و در نتیجه بخشی از انرژی ارتعاشی تشدیدگر بهصورت انرژی حرارتی تلف میشود [۲۴]. در روش انرژی، مقدار این انرژی حرارتی ایجاد شده در یک دورهی زمانی ارتعاش، با استفاده از قانون دوم ترمودینامیک و درنظر گرفتن فرضهای (الف) و (ب)، بهصورت زیر بیان می شود [۲۵]:

$$W_{thermal} = \iint_{t_0 V} T_a \frac{\kappa \nabla^2 T}{T} dv dt.$$
(17)

که t_0 و V، بهترتیب دوره تناوب اصلی ارتعاش و حجم $K = \chi.C_v$ مستند و پارامتر $\chi.C_v$ مستند و پارامتر میگرومکانیکی هستند و پارامتر مرده مورد محمریب هدایت حرارتی ماده ی ساختاری تشدیگر نامیده می شود. با جایگزینی رابطه ی $T = \Theta + T_a$ در رابطه ی (۱۲)، رابطه ی زیر نتیجه می شود:

$$W_{thermal} = \iint_{t_0 V} \chi C_v \frac{\nabla^2 \Theta}{\left(1 + \frac{\Theta}{T_a}\right)} dv dt.$$
(17)

و با توجه به کوچک بودن تغییر دمای ناشی از کوپلینگ ترموالاستیک در مقایسه با دمای محیط (G>>Ta) و استفاده از بسط تیلور، رابطهی (۱۳) به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$W_{thermal} = \iint_{t_0 V} \chi C_v \left(1 - \frac{\Theta}{T_a} \right) \nabla^2 \Theta dv \, dt \,. \tag{14}$$

با جایگزینی رابطهی (۲) در رابطهی (۱۴)، رابطه زیر نتیجه میشود:

$$W_{thermal} = \iint_{t_0 V} C_v \left(1 - \frac{\Theta}{T_a} \right) \left(\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{E \, dT_a}{C_v \, (1 - v)} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right) dv \, dt \,. \tag{10}$$

ج) اکنون با فرض ضعیف بودن کوپلینگ ترموالاستیک، تغییر دمای ایجاد شده در ساختار تشدیدگر میکرومکانیکی به صورت هارمونیکی و با مدهای تشدید یکسان با جابه جایی ها و کرنش های الاستیک در نظر گرفته شده، و درنتیجه با استفاده

1- Time Period

از رابطهی (۱۵)، مقدار انرژی حرارتی تلف شده در اثر میرایی ترموالاستیک (ΔW_{TED}) بهصورت زیر محاسبه میشود:

$$\Delta W_{TED} = -\frac{E\alpha}{(1-\nu)} \operatorname{Re}\left\{ \iint_{t_0 V} \Theta\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right) d\nu \, dt \right\}. \tag{19}$$

درنهایت، با توجه به تعریف کلی ضریب کیفیت مکانیکی، ضریب کیفیت ناشی از میرایی ترموالاستیک، بهصورت زیر نتیجه می شود [۲۵]:

$$Q_{\text{TED}} = 2\pi \frac{W_{\text{Ring}}}{AW_{\text{TED}}}.$$
 (1Y)

که در آن، W_{Ring} بیشینهی انرژی ارتعاشی ذخیره شده در یک دوره ارتعاش در تشدیدگر حلقوی میکرومکانیکی است، و با توجه به فرض (ج)، مقدار آن از محاسبهی جابهجاییهای الاستیک ایجاد شده در مدهای حجمی کوپل نشده نتیجه میشود.

ب حس رابعتای (۲۰۰۰) به عمال میوری مسمه و مرزی در مورد جداسازی متغیرها و نیز در نظر گرفتن شرایط مرزی در مورد نوار حلقوی با کنارههای آزاد، فرکانسهای تشدید و مؤلفههای شعاعی و محیطی جابهجایی الاستیک در مدهای حجمی نامتقارن، به صورت زیر محاسبه می شوند [۲۷]:

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{nm} e^{j\omega_{nm}t}, \quad v = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{nm} e^{j\omega_{nm}t}.$$
(19)

$$U_{nm} = \frac{A_n}{k_{nm}} \left[\frac{d}{dr} \left(J_n(k_{nm}r) + \frac{B_n}{A_n} Y_n(k_{nm}r) \right) + \frac{n}{r} \left(\frac{C_n}{A_n} J_n(h_{nm}r) + \frac{D_n}{A_n} Y_n(h_{nm}r) \right) \right] \cos(n\theta),$$
(7.)

2- Helmholtz

www.SID.ir

$$\begin{split} m_{11} &= \left[-n(n+1) + (h_{nm}R_o)^2 / 2 \right] J_n(k_{nm}R_o) + \\ k_{nm}R_o J_{n-1}(k_{nm}R_o), \\ m_{12} &= \left[-n(n+1) + (h_{nm}R_o)^2 / 2 \right] Y_n(k_{nm}R_o) + \\ k_{nm}R_o Y_{n-1}(k_{nm}R_o), \\ m_{13} &= n(n+1)J_n(h_{nm}R_o) - nh_{nm}R_o J_{n-1}(h_{nm}R_o), \\ m_{14} &= n(n+1)Y_n(h_{nm}R_o) - nh_{nm}R_o Y_{n-1}(h_{nm}R_o), \\ m_{21} &= \left[-n(n+1) + (h_{nm}R_i)^2 / 2 \right] J_n(k_{nm}R_i) + \\ k_{nm}R_i J_{n-1}(k_{nm}R_i), \\ m_{22} &= \left[-n(n+1) + (h_{nm}R_i)^2 / 2 \right] Y_n(k_{nm}R_i) + \\ k_{nm}R_i Y_{n-1}(k_{nm}R_i), \\ m_{23} &= n(n+1)J_n(h_{nm}R_i) - nh_{nm}R_i J_{n-1}(h_{nm}R_i), \\ m_{31} &= -n(n+1)Y_n(h_{nm}R_o) + nk_{nm}R_o J_{n-1}(k_{nm}R_o), \\ m_{32} &= -n(n+1)Y_n(k_{nm}R_o) + nk_{nm}R_o J_{n-1}(k_{nm}R_o), \\ m_{33} &= \left[n(n+1) - (h_{nm}R_o)^2 / 2 \right] J_n(h_{nm}R_o) - \\ h_{nm}R_o J_{n-1}(h_{nm}R_o), \\ m_{34} &= \left[n(n+1) - (h_{nm}R_o)^2 / 2 \right] Y_n(h_{nm}R_i) - \\ n_{mR}O_{N-1}(h_{nm}R_i), \\ m_{43} &= \left[n(n+1) - (h_{nm}R_i)^2 / 2 \right] J_n(h_{nm}R_i) - \\ h_{nm}R_i J_{n-1}(h_{nm}R_i), \\ m_{43} &= \left[n(n+1) - (h_{nm}R_i)^2 / 2 \right] J_n(h_{nm}R_i) - \\ h_{nm}R_i J_{n-1}(h_{nm}R_i), \\ m_{44} &= \left[n(n+1) - (h_{nm}R_i)^2 / 2 \right] Y_n(h_{nm}R_i) - \\ h_{nm}R_i Y_{n-1}(h_{nm}R_i), \\ m_{44} &= \left[n(n+1) - (h_{nm}R_i)^2 / 2 \right] Y_n(h_{nm}R_i) - \\ h_{nm}R_i Y_{n-1}(h_{nm}R_i), \\ m_{44} &= \left[n(n+1) - (h_{nm}R_i)^2 / 2 \right] Y_n(h_{nm}R_i) - \\ h_{nm}R_i Y_{n-1}(h_{nm}R_i), \\ m_{44} &= \left[n(n+1) - (h_{nm}R_i)^2 / 2 \right] Y_n(h_{nm}R_i) - \\ h_{nm}R_i Y_{n-1}(h_{nm}R_i), \\ m_{44} &= \left[n(n+1) - (h_{nm}R_i)^2 / 2 \right] Y_n(h_{nm}R_i) - \\ h_{nm}R_i Y_{n-1}(h_{nm}R_i), \\ m_{44} &= \left[n(n+1) - (h_{nm}R_i)^2 / 2 \right] Y_n(h_{nm}R_i) - \\ h_{nm}R_i Y_{n-1}(h_{nm}R_i), \\ m_{44} &= \left[n(n+1) - (h_{nm}R_i)^2 / 2 \right] Y_n(h_{nm}R_i) - \\ h_{nm}R_i Y_{n-1}(h_{nm}R_i), \\ m_{44} &= \left[n(n+1) - (h_{nm}R_i)^2 / 2 \right] Y_n(h_{nm}R_i) - \\ \\ h_{nm}R_i Y_{n-1}(h_{nm}R_i), \\ m_{44} &= \left[n(n+1) - (h_{nm}R_i)^2 / 2 \right] Y_n(h_{nm}R_i) - \\ \\ h_{nm}R_i Y_{n-1}(h_{nm}R_i), \\ m_{44} &= \left[n(n+1) - (h_{nm}R_i)^2 / 2 \right] Y_n(h_{nm}R_i) - \\ \\ m_{44} &= \left[n(n+1) - (h_{nm}R_i) \right]$$

$$\begin{bmatrix} B_n / A_n \\ C_n / A_n \\ D_n / A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} m_{21} \\ m_{31} \\ m_{41} \end{bmatrix}.$$
(YY)

$$\hat{m}_{41} = m_{42} + m_{43} + m_{44} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} m_{21} \\ m_{31} \\ m_{41} \end{bmatrix}$$

$$\hat{m}_{41} = m_{42} + m_{43} + m_{44} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} m_{21} \\ m_{31} \\ m_{41} \end{bmatrix}$$

$$\hat{m}_{41} = m_{41} + m_{42} + m_{43} + m_{44} \end{bmatrix}$$

$$\hat{m}_{41} = m_{41} + m_{42} + m_{43} + m_{44} \end{bmatrix}$$

$$\hat{m}_{41} = m_{41} + m_{41} + m_{42} + m_{43} + m_{44} \end{bmatrix}$$

$$\hat{m}_{41} = m_{41} + m$$

$$V_{nm} = -\frac{A_n}{k_{nm}} \left[\frac{n}{r} \left(J_n(k_{nm}r) + \frac{B_n}{A_n} Y_n(k_{nm}r) \right) + \frac{C_n}{A_n} \frac{d}{dr} \left(J_n(h_{nm}r) + \frac{D_n}{A_n} Y_n(h_{nm}r) \right) \right] \sin(n\theta),$$

$$(\Upsilon)$$

$$\omega_{nm} = k_{nm} \sqrt{\frac{E}{\rho(1-v^2)}}.$$
(YY)

در رابطههای فوق، J_n و J_n بهترتیب توابع بسل نوع اول و دوم، و m فرکانس تشدید مد (n,m) هستند، که n و m بهترتیب نشاندهندهی مرتبهی محیطی و شعاعی شکل مد حجمی هستند. همچنین، پارامترهای h_{nm} و m_n ثابتهای مدی شکل مد حجمی (n,m) هستند و توسط رابطهی (۲۳) به یکدیگر وابسته می شوند:

$$h_{nm} = k_{nm} \sqrt{\frac{2}{1-v}}.$$
 (TT)

و مقادیر آنها از حل عددی رابطهی (۲۴) محاسبه میشوند: $|\mathbf{M}| = 0.$ (۲۴)

که عناصر ماتریس M بهصورت رابطهی (۲۶) تعریف می شوند. با مشخص بودن فرکانس تشدید و ابعاد تشدیدگر حلقوی، ثابتهای نسبی امواج الاستیک (۲۸٫۵٫٬۹٫۸٫۵٫ و ۵٫٬۸٫۱٫۱٫ را می توان از حل رابطهی (۲۲) محاسبه کرد. البته هر تشدیدگر حلقوی با ابعاد مشخص دارای مدهای حجمی نامتقارن متعددی است؛ که با حل عددی رابطهی (۲۴) توسط نرمافزار Matlab، فرکانس های تشدید این مدها مطابق شکل ۲ محاسبه می شوند.

اکنون با توجه به رابطههای (۲۲-۲۰)، بیشینه انرژی ارتعاشی ذخیره شده در مد حجمی (n,m) تشدیدگر حلقوی، از رابطهی زیر محاسبه میشود [۲۸]:

$$W_{\text{Ring}} = \frac{1}{2} \rho \omega_{nm}^2 t_r,$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_o} \left[U_{nm}^2(r,\theta) + V_{nm}^2(r,\theta) \right] \cdot r dr d\theta.$$
 (Y\Delta)

همچنین با استفاده از تحلیل مدی نرمافزار ANSYS و مشبندی ساختار تشدیدگر با المان سهبعدی 186 Solid یا المان دوبعدی Plane 42، میتوان فرکانسهای تشدید و شکل مدهای حجمی تشدیدگر حلقوی را مشاهده و درستی مقادیر بهدست آمده از روش تحلیلی را بررسی کرد.

Г



μm ،R_i=۳۰/۵ μm تحلیلی فرکانسهای تشدید مد حجمی در تشدیدگر حلقوی پالیسیلیکونی با ابعاد μm ،R_i=۳۰/۵ μm *r*=۲ μm *c*=۵۰



ANSYS حلقوی پالی سیلیکونی توسط تحلیل مدی نرمافزار $t_r=7~\mu m$ و $R_o=0.4~\mu m$ مدی نرمافزار $t_r=7~\mu m$

جدول (۱): مقایسهی نتیجههای دو روش تحلیلی و شبیهسازی ANSYS، در تشدیدگر حلقوی پالیسیلیکونی با ابعاد μm ،*R*_i=۳۰/۵ μm، ضخامت μm

| | | <i>m</i> = \ | <i>m</i> =۲ | <i>т=</i> ٣ | m=۴ | واحد |
|-------------|---------------------|--------------|-------------|----------------------------------|----------|-----------------------|
| | k_{1m} | •/٣٢٣ | ۱/• ۹۳۵ | 1/8230 | ۲/•۶۷ | $(\times 1 \cdot 0)$ |
| <i>n</i> =۱ | f_{Theory} | 44/14 | 148/44 | 511/45 | 276/82 | MHz |
| | $f_{\rm FEM}$ | 44/14 | 148/40 | $\gamma \lambda \lambda \lambda$ | 777 | MHz |
| | k_{2m} | ۰/۸۳ | ۰/۵۰۶ | 1/8088 | 1/5988 | (× \ · ^Δ) |
| <i>n</i> =۲ | f_{Theory} | 11/17 | ۶۷/۸۶ | ۱۶۱/۵۹ | 515/50 | MHz |
| | $f_{\rm FEM}$ | 11/17 | ۶۷/۸۵ | 181/29 | 212/22 | MHz |
| | k _{3m} | ۰/۲۰۹ | ۰/۷۰۶ | 1/884 | 1/0848 | (× \ · ^۵) |
| n=٣ | $f_{\rm Theory}$ | ۲۷/۹۹ | 94/88 | 187/87 | 5 • 9/57 | MHz |
| | $f_{\rm FEM}$ | ۲۷/۹۹ | 94/81 | 187/80 | ۲۰۹/۶ | MHz |

۴- محاسبهی تغییـر دمـای ایجـاد شـده در سـاختار تشدیدگر

با توجه به رابطهی (۱۶)، برای محاسبهی مقدار انرژی حرارتی تلفشده در اثر میرایی ترموالاستیک (ΔW_{TED})، ابتـدا انبسـاط حرارتی الاستیک محاسبه و سپس تغییر دمای ایجاد شـده در ساختار تشدیدگر حلقوی میکرومکانیکی نتیجه میشود. بـرای این منظور و با توجه به فرض (ج)، تغییر دمای ایجاد شـده در ساختار تشدیدگر بهصورت هـارمونیکی و بـا مـدهای تشـدید یکسان با جابهجایی الاستیک تعریف میشود:

$$\Theta = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_{nm} e^{j \omega_{nm} t}.$$
 (YA)

و با جایگزینی رابطـههای (۲۸ و ۲۱–۲۰) در رابطـهی (۱۱)، انبسـاط حرارتـی ایجـاد شـده در تشـدیدگر حلقـوی میکرومکانیکی بهصورت زیر نتیجه می شود:

$$\varepsilon = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{nm} e^{j\omega_{nm}t}.$$
 (Y9)

$$\varepsilon_{nm} = \alpha \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \Theta_{nm} - \left(\frac{1-2\nu}{1-\nu}\right) k_{nm} A_n \times \left(J_n (k_{nm} r) + \frac{B_n}{A_n} Y_n (k_{nm} r)\right) \cos(n\theta).$$
(7.)

| | (u | ر ۵٫۰ | | r |
|-------|----------------------|--------------------------------------|-----------------------|----------------------------------|
| | نيتريد | پالىسىلىكون | سيليلكون | واحد |
| | سيليكون | [22] | [٢٠] | |
| | [14] | | | |
| Ε | 178 | 104 | ۱۶۵/۹ | GPa |
| V | •/۲۴ | •/٢٢ | •/٢٢ | |
| ρ | 846. | ۲۳۳۰ | ۲۳۳۰ | kgm ⁻³ |
| C_v | ۲/۴۴×۱۰ ^۶ | 1/881×1・ ⁶ | ۱/۶۶×۱۰ ^۶ | Jm ⁻³ K ⁻¹ |
| α | ۳×۱۰ ^{-۶} | ۲/۶×۱۰ ^{-۶} | ۲/۵٩×۱۰ ^{-۶} | K ⁻¹ |
| χ | -Δ | Δ/Δ) ×) · $^{-\Delta}$ | ۹/۳۹×۱۰ ^{-۵} | $m^2 s^{-1}$ |
| | ۱۳/۱×۱۰ | | | |
| κ | ۳۲۰ | ٩٠ | 108 | $Wm^{-1}K^{-1}$ |

با محاسبه ی انبساط حرارتی الاستیک، تغییر دمای ایجاد بشده در مد حجمی (*n*,*m*) تشدید گر حلقوی از جایگزینی شده در مد حجمی (*n*,*m*) تشدید گر حلقوی از جایگزینی
$$\nabla^2 \Theta_{nm} - \frac{j\omega_{nm}}{\chi} \Theta_{nm} = \frac{j\omega_{nm}\Delta_E}{\alpha\chi(1-\upsilon)} \left[\alpha \frac{(1+\upsilon)}{(1-\upsilon)} \Theta_{nm} - \frac{(m_1)}{\chi} \Theta_{nm} A_n \left[J_n(k_{nm}r) + \frac{B_n}{A_n} Y_n(k_{nm}r) \right] \cos(n\theta) \right].$$
(71)
$$\left(\frac{1-2\upsilon}{1-\upsilon} \right) k_{nm}A_n \left(J_n(k_{nm}r) + \frac{B_n}{A_n} Y_n(k_{nm}r) \right) \cos(n\theta) \right].$$
(71)
$$\int \Delta_{mn} (1+\Delta_E (1+\upsilon)) \Theta_{nm} = -\frac{j\Delta_E \omega_{nm}}{\alpha\chi} \times \frac{(1-2\upsilon)}{(1-\upsilon)^2} \left(k_{nm}A_n \left(J_n(k_{nm}r) + \frac{B_n}{A_n} Y_n(k_{nm}r) \right) \cos(n\theta) \right).$$
(72)
$$\int (1-2\upsilon)^2 \left(k_{nm}A_n \left(J_n(k_{nm}r) + \frac{B_n}{A_n} Y_n(k_{nm}r) \right) \cos(n\theta) \right).$$
(71)
$$\int (1-2\upsilon)^2 \left(k_{nm}A_n \left(J_n(k_{nm}r) + \frac{B_n}{A_n} Y_n(k_{nm}r) \right) \cos(n\theta) \right).$$
(72)
$$\int (1-d\mu (1-\upsilon)^2) \left(\Delta_E (1+\upsilon)/(1-\upsilon)^2 \right) \times \frac{(1-2\upsilon)}{\chi} \times \frac{(2-1)}{\chi} \Theta_{nm} = -\frac{j\Delta_E \omega_{nm}}{\alpha\chi} \times \frac{(1-2\upsilon)}{(1-\upsilon)^2} \times \frac{(m_1)}{\chi} \Theta_{nm} = -\frac{j\Delta_E \omega_{nm}}{\alpha\chi} (1-2\upsilon) \right).$$
(72)
$$\left(k_{nm}A_n \left(J_n(k_{nm}r) + \frac{B_n}{A_n} Y_n(k_{nm}r) \right) \cos(n\theta) \right).$$
(72)
$$\left(k_{nm}A_n \left(J_n(k_{nm}r) + \frac{B_n}{A_n} Y_n(k_{nm}r) \right) \cos(n\theta) \right).$$
(72)
$$\left(k_{nm}A_n \left(J_n(k_{nm}r) + \frac{B_n}{A_n} Y_n(k_{nm}r) \right) \cos(n\theta) \right).$$
(72)
$$\left(k_{nm}A_n \left(J_n(k_{nm}r) + \frac{B_n}{A_n} Y_n(k_{nm}r) \right) \cos(n\theta) \right).$$
(72)
$$\left(k_{nm}A_n \left(J_n(k_{nm}r) + \frac{B_n}{A_n} Y_n(k_{nm}r) \right) \cos(n\theta) \right).$$
(72)
$$\left(k_{nm}A_n \left(J_n(k_{nm}r) + \frac{B_n}{A_n} Y_n(k_{nm}r) \right) \cos(n\theta) \right).$$
(72)
$$\left(k_{nm}A_n \left(J_n(k_{nm}r) + \frac{B_n}{A_n} Y_n(k_{nm}r) \right) \cos(n\theta) \right).$$
(72)

با حل رابطهی (۱۱)، پارامىر ىعيير دما در سىن مىد حجمى(n,m)، بـهصورت مجمـوع جـوابهـاى عمـومى ($\Theta^{G}_{nm})$ و خصوصى (σ^{S}_{nm}) محاسبه مىشود:

$$\Theta_{nm} = \Theta_{nm}^G + \Theta_{nm}^S, \qquad (\texttt{Tf})$$

$$\Theta_{nm}^{G} = \left(\Theta_{T\,1}J_n(k_{p\,1}r) + \Theta_{T\,2}K_n(k_{p\,2}r)\right)\cos(n\theta), \qquad (\Upsilon\Delta)$$

$$\Theta_{nm}^{S} = \Pi_{nm} A_n \left(J_n(k_{nm}r) + \frac{B_n}{A_n} Y_n(k_{nm}r) \right) \cos(n\theta).$$
 (Y9)

که در رابطههای فوق، K_n تابع بسل اصلاح شده نوع دوم بوده و پارامترهای k_{p2} k_{p2} مقادیری مختلط هستند: _____

$$k_{p1} = (1-j)\sqrt{\frac{\omega_{nm}}{2\chi}}$$
, $k_{p2} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega_{nm}}{2\chi}}$, (TV)

$$\Pi_{nm} = \frac{j\omega_{nm}\Delta_E}{\alpha \left(\chi k_{nm}^2 + j\omega_{nm}\right)} \frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)^2} k_{nm}.$$
 (TA)

www.SID.ir

بهدلیل وجود شرایط آدیاباتیک در خلاً (با صرف نظر از تلفات تشعشعی) و در نتیجه، عدم وجود جریانهای گرمایی میان کنارههای داخلی و خارجی حلقه، مقادیر *O*TI و *O*T2 از حل رابطهی (۳۹) محاسبه می شوند:

$$\frac{\partial \Theta_{nm}}{\partial r}\bigg|_{r=R_i} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \Theta_{nm}}{\partial r}\bigg|_{r=R_o} = 0. \tag{(49)}$$

درنهایت، با جایگزینی رابطههای (۳۴ و ۳۰) در رابطهی (۱۶)، مقدار انرژی تلف شده در اثر میرایی ترموالاستیک بهدست میآید:

$$\Delta W_{TED} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ -\frac{2\pi j E \, \alpha t_r}{(1-\upsilon)} \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_o} \Theta_{nm} \varepsilon_{nm}^* r dr \, d\theta \right\}.$$
 (*•)

و با استفاده از روابط (۴۰ و ۲۵، ۲۲، ۱۷)، رابطهی تحلیلی ضریب کیفیت ترموالاستیک در شکل مد حجمی (n,m) تشدیدگر حلقوی میکرومکانیکی نتیجه می شود:

$$Q_{\text{TED}} = \frac{-k_{nm}^2}{\alpha(1-v^2)} \frac{1}{\text{Re}\{I_1 + I_2\}} \times \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_o} \left[U_{nm}^2(r,\theta) + V_{nm}^2(r,\theta) \right] r dr d\theta,$$
(*1)

$$\begin{split} \mathrm{I}_{1} = \mathrm{j} \cdot \int_{0}^{2\pi} \int_{R_{i}}^{R_{o}} \Theta_{nm} \left[(2\nu - 1)k_{nm}A_{n} \times \left(\int_{R_{i}} \int_{R_{i}}^{R_{o}} \Theta_{nm} \left[(2\nu - 1)k_{nm}A_{n} \times \left(\int_{R_{i}} \int_{R_{i}}^{R_{o}} Y_{n} (k_{nm}r) \right] \cos(n\theta) \right]^{*} r dr d\theta, \end{split}$$

$$\begin{split} \mathrm{I}_{2} = \mathrm{j} \cdot \int_{0}^{2\pi} \int_{R_{i}}^{R_{o}} \alpha(1 + \nu) |\Theta_{nm}|^{2} r dr d\theta. \qquad (fm) \\ \mathrm{I}_{2} = \mathrm{j} \cdot \int_{0}^{2\pi} \int_{R_{i}}^{R_{o}} \alpha(1 + \nu) |\Theta_{nm}|^{2} r dr d\theta. \qquad (fm) \\ \mathrm{I}_{2} = \mathrm{j} \cdot \int_{0}^{2\pi} \int_{R_{i}}^{R_{o}} \alpha(1 + \nu) |\Theta_{nm}|^{2} r dr d\theta. \qquad (fm) \\ \mathrm{I}_{2} = \mathrm{j} \cdot \int_{0}^{2\pi} \int_{R_{i}}^{R_{o}} \alpha(1 + \nu) |\Theta_{nm}|^{2} r dr d\theta. \qquad (fm) \\ \mathrm{I}_{2} = \mathrm{j} \cdot \int_{0}^{2\pi} \int_{R_{i}}^{R_{o}} \alpha(1 + \nu) |\Theta_{nm}|^{2} r dr d\theta. \qquad (fm) \\ \mathrm{I}_{2} = \mathrm{j} \cdot \int_{0}^{2\pi} \int_{R_{i}}^{R_{o}} \alpha(1 + \nu) |\Theta_{nm}|^{2} r dr d\theta. \qquad (fm) \\ \mathrm{I}_{2} = \mathrm{j} \cdot \int_{0}^{2\pi} \int_{R_{i}}^{R_{o}} \alpha(1 + \nu) |\Theta_{nm}|^{2} r dr d\theta. \qquad (fm) \\ \mathrm{I}_{2} = \mathrm{j} \cdot \int_{0}^{2\pi} \int_{R_{i}}^{R_{o}} \alpha(1 + \nu) |\Theta_{nm}|^{2} r dr d\theta. \qquad (fm) \\ \mathrm{I}_{2} = \mathrm{j} \cdot \int_{0}^{2\pi} \int_{R_{i}}^{R_{o}} \alpha(1 + \nu) |\Theta_{nm}|^{2} r dr d\theta. \qquad (fm) \\ \mathrm{I}_{2} = \mathrm{j} \cdot \int_{0}^{2\pi} \int_{R_{i}}^{R_{o}} \alpha(1 + \nu) |\Theta_{nm}|^{2} r dr d\theta. \qquad (fm) \\ \mathrm{I}_{2} = \mathrm{j} \cdot \int_{0}^{2\pi} \int_{R_{i}}^{R_{o}} \alpha(1 + \nu) |\Theta_{nm}|^{2} r dr d\theta. \qquad (fm) \\ \mathrm{I}_{2} = \mathrm{j} \cdot \int_{0}^{2\pi} \int_{R_{i}}^{R_{o}} \alpha(1 + \nu) |\Theta_{nm}|^{2} r dr d\theta. \qquad (fm) \\ \mathrm{I}_{2} = \mathrm{j} \cdot \int_{0}^{2\pi} \int_{R_{i}}^{R_{o}} \alpha(1 + \nu) |\Theta_{nm}|^{2} r dr d\theta. \qquad (fm) \\ \mathrm{I}_{2} = \mathrm{j} \cdot \int_{0}^{2\pi} \int_{R_{i}}^{R_{o}} \alpha(1 + \nu) |\Theta_{nm}|^{2} r dr d\theta. \qquad (fm) \\ \mathrm{I}_{2} = \mathrm{j} \cdot \int_{0}^{2\pi} \int_{R_{i}}^{R_{o}} \alpha(1 + \nu) |\Theta_{nm}|^{2} r dr d\theta. \qquad (fm) \\ \mathrm{I}_{2} = \mathrm{j} \cdot \int_{0}^{2\pi} \int_{R_{i}}^{R_{i}} \alpha(1 + \nu) |\Theta_{nm}|^{2} r dr d\theta. \qquad (fm) \\ \mathrm{I}_{2} = \mathrm{j} \cdot \int_{0}^{2\pi} \int_{R_{i}}^{R_{i}} \alpha(1 + \nu) |\Theta_{nm}|^{2} r dr d\theta. \qquad (fm) \\ \mathrm{I}_{2} = \mathrm{j} \cdot \int_{0}^{2\pi} \int_{R_{i}}^{R_{i}} \alpha(1 + \nu) |\Theta_{nm}|^{2} r dr d\theta. \qquad (fm) \\ \mathrm{I}_{2} = \mathrm{j} \cdot \int_{0}^{2\pi} \int_{R_{i}}^{R_{i}} \alpha(1 + \nu) |\Theta_{nm}|^{2} r dr d\theta. \qquad (fm) \\ \mathrm{I}_{2} = \mathrm{j} \cdot \int_{0}^{2\pi} \int_{R_{i}}^{R_{i}} \alpha(1 + \nu) |\Theta_{nm}|^{2} r dr d\theta. \qquad (fm) \\ \mathrm{I}_{2} = \mathrm{j} \cdot \int_{0}^{2\pi} \int_{R_{i}}^{R_{i}} \alpha(1 + \nu) |\Theta_{nm}|^{2} r dr d\theta. \qquad ($$

۵- بررسی اثر ابعاد حلقه بر میرایی ترموالاستیک

همان طور که در مقدمه نیز بیان شد، تاکنون تحلیلهای بسیاری بر پایهی تئوری زنر در مورد میرایی ترموالاستیک و محاسبهی ضریب کیفیت ناشی از آن در تشدیدگرهای تیر مد خمشی انجام شدهاند، بهطوری که در تمام این تحلیلها، خمشی انجام شدهاند، بهطوری که در یسام این تحلیلها، [18]:

$$\frac{1}{Q_{TED}} = \left(\frac{E\,\alpha^2 T_a}{C_v}\right) \frac{2\pi f\,\tau_z}{1 + \left(2\pi f\,\tau_z\right)^2}.$$
(ff)

¹⁻ Relaxation Strength



پالیسیلیکونی در مدهای حجمی با مرتبه محیطی اول.

که در آن، D نشاندهندهی طول مسیر حرارتی مؤثر است، و در مورد تشدیدگر تیر با پهنای w، مقدار آن برابر پهنای تیر محاسبه شده است [۱۶ و ۹]. با توجه به رابطهی (۴۴)، با نزدیکی یا دوری فرکانس تشدید تیر به فرکانس حرارتی نزدیکی یا دوری فرکانس تشدید تیر به فرکانس حرارتی در نتیجه Q_{TED} ، کوپلینگ ترموالاستیک افزایش یا کاهش یافته و در نتیجه Q_{TED} تغییر می کند، به طوری که در این تشدیدگرها، به دلیل عدم وابستگی Q_{TED} به درازای تیر، با تغییر درازای تیر و در نتیجه تغییر فرکانس تشدید ساختار، به راحتی می توان رابطهی میان Q_{TED} و فرکانس های تشدید ساختار را بررسی کرد.

اما با توجه به رابطهی (۴۱)، Q_{TED} در تشدیدگرهای حلقوی مد حجمی به تمام پارامترهای مؤثر در تعیین فرکانس تشدید ساختار، نظیر ابعاد حلقه و خواص ماده ساختاری، وابسته بوده و بههمین دلیل، بررسی رابط و میان و فرکانسهای تشدید در این نوع تشدیدگرها پیچیدهتر Q_{TED} است. برای این منظور، ابتدا با استفاده از رابطههای (۲۶ و ۲۴) نمودار تغییرات فرکانس تشدید حلقه برحسب نسبت شعاع خارجی به شعاع داخلی آن ($\eta = R_o/R_i$) محاسبه شده و سـپس با استفاده از نتیجههای بهدست آمده، اثرات ابعاد حلقه و فرکانس تشدید ہے ضریب کیفیت ترموالاستیک ہررسے می شوند. شکل های ۶-۴ به ترتیب نمودار های تغییرات فرکانس تشدید برخی از مدهای حجمی با مرتبهی محیطی اول، دوم و سوم را بر حسب η و در مقادیر مختلفی از شعاع خارجی نشان میدهند. همانطور که در این شکلها مشاهده می شود، با افزایش شعاع خارجی حلقه در η ثابت، فرکانس تشدید کاهش یافته و همچنین در بیشتر شکل مدهای بررسی شده، میزان تغییرات فرکانس تشدید با شعاع خارجی حلقه، با کاهش η بهشدت کاهش مے یابد. اکنون به کمک Q_{TED} دادههای بهدست آمده از این نمودارها، می توان تغییرات T_a =۳۰۰ K با ابعاد حلقه را از رابطهی (۴۱)، در دمای محاسبه و مطابق شکلهای ۹-۷ رسم کرد.

در رابطهی فـوق، f فرکـانس تشـدید مـد خمشـی و τ_z زمـان رهایش حرارتی^۱ نامیده و بهصورت زیر تعریف میشود: $\tau_z = \frac{d^2}{\pi^2 \chi}.$

¹⁻ Thermal Relaxation Time







نسبت شعاع خارجی به شعاع داخلی تشدیدگر حلقوی پالیسیلیکونی در مدهای حجمی با مرتبهمحیطی دوم.





۶- مقایسهی نتیجهها با روش المان محدود (ANSYS) برای اطمینان از درستی نتیجههای بهدست آمده از روش انرژی، از تحلیل هارمونیک نرمافرار ANSYS برای محاسبه ضریب کیفیت ترموالاستیک استفاده میشود. در این تحلیل، نریب کیفیت ترموالاستیک استفاده میشود. در این تحلیل، با مشبندی ساختار توسط المانهای سهبعدی 226 Solid یا با مشبندی ساختار توسط المانهای سهبعدی 206 Solid یا دو بعدی 233 Plane که دارای قابلیت تحلیل محیطهای دو بعدی 233 Plane که دارای قابلیت تحلیل محیطهای ساختاری- حرارتی هستند، ابتدا تحلیل هارمونیک پیرامون فرکانس تشدید شکل مد مورد نظر انجام شده و سپس با استفاده از دادههای بهدست آمده، مقدار محال از رابطهی زیر محاسبه میشود [۲۹]:

$$Q_{TED} = \left(\sum_{j=1}^{N_e} \operatorname{Re}(U_t)\right) \left(\sum_{j=1}^{N_e} \operatorname{Im}(U_t)\right)^{-1}.$$
(*9)

که U_t انرژی کرنشی کل در هر المان و N_e تعداد المانهای ایجاد شده در اثر مش بندی ساختار است. همچنین با این تحلیل میتوان گرادیان حرارتی ایجاد شده در شکل مدهای حجمی مورد نظر را مطابق شکل **۱۱،** شبیهسازی کرد.

جدول \mathbf{r} ، نتیجههای بهدست آمده از دو روش انرژی و المان محدود نرمافزار ANSYS را در تشدیدگرهای حلقوی با ابعاد متفاوت و مدهای حجمی با مرتبهمحیطی اول، دوم و سوم، با یکدیگر مقایسه کرده و درصد خطای نسبی حاصل از این دو روش در محاسبهی کرده و درصد خطای نسبی حاصل از که مشاهده میشود، در هریک از مدهای حجمی با افزایش \mathbf{p} درصد خطای نسبی نتیجههای حاصل از روش انرژی کاهش مییابد. همچنین، در \mathbf{p} ثابت، با افزایش شعاع خارجی حلقه، درصد خطای نسبی کاهش بیشتری مییابد.



شکل (۹): نمودار تغییرات ضریب کیفیت ترموالاستیک با نسبت شعاع خارجی به شعاع داخلی تشدیدگر حلقوی پالیسیلیکونی در مدهای حجمی با مرتبه محیطی سوم.



شکل (۱۱): شبیهسازی گرادیان حرارتی ایجاد شده در شکل مدهای حجمی تشدیدگر حلقوی پالی سیلیکونی با ابعاد μm R_o=۲۰ μm R_i=1۲/۵

۷- نتیجهگیری

در این مقاله، میرایی ترموالاستیک در مدهای حجمی تشدیدگر حلقوی میکرومکانیکی مورد بررسے قرار گرفته و رابطه تحلیلی ضریب کیفیت ترموالاستیک در شکلمدهای نامتقارن (n,m) با استفاده از روش انرژی و بر پایهی رابطههای تنش سطحی و ترموالاستیسیته دو بعدی، ارائه شده است. همچنین اعتبار رابطهی تحلیلی بهدست آمده، با مقایسهی نتیجههای این رابطه با روش المان محدود نرمافزار ANSYS تأیید شده است. نتیجهها نشان میدهند کـه بـا افـزایش η در هریک از مدهای حجمی، نتیجههای حاصل از روش انرژی به η نتيجه الى حاصل از روش المان محدود نزديک تر شده و در ثابت، نتیجههای حاصل از روش تحلیلی در تشدیدگر حلقوی با شعاع خارجی بزرگتر، از دقت بالاتری برخوردارند. اثرات ابعاد حلقه بر فركانس تشديد و ضريب كيفيت ترموالاستيك بررسی شد و نتیجهها نشان میدهند که با افزایش شعاع خارجی حلقه در η ثابت، فرکانس تشدید کاهش و ضریب کیفیت ترموالاستیک افزایش می یابد. همچنین در دو مد حجمی پرکاربرد (۱،۲) و (۲،۴)، بالاترین میرزان ضریب کیفیت ترموالاستیک بهترتیب در η برابر با ۲/۴ و ۲/۲ مشاهده شد، که باتوجه به تعیین حد بالای ضریب کیفیت قابل دسترس در تشدیدگرهای میکرومکانیکی مد حجمی توسط مكانيزم ميرايي ترموالاستيك، از اين نتيجهها ميتوان برای طراحی تشدیدگرهای حلقوی میکرومکانیکی با ضریب كيفيت بسيار بالا استفاده كرد.

| مرتبه | شعاع داخلی | شعاع خارجي | η | شكلمد | تشديد | فر کانس | كيفيت | ضريب | درصد خطای |
|-----------------|------------|------------|-----|-------------------------|---------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------|--|----------------------|
| محيطى | (µm) | (µm) | | (n , m) | | | ترموالاستيك | | نسبى |
| مد (n) | | | | | <i>f_{Theory}</i> (MHz) | f _{FEM} (MHz) | Q _{Theory} | Q_{FEM} | $ \Delta Q /Q_{FEM}$ |
| | | | | (1.1) | 1 • 9/88 | ۱۰۹/۷۵ | ۶/۳۶×۱۰ ^۶ | ۵/۱۳×۱۰۶ | 74 |
| | ۱۲/۵ | ۲۰ | ۱/۶ | (7.1) | 377/98 | $\tau \gamma \gamma / \lambda \tau$ | ۲/۶۱×۱۰ ^۶ | ۶/•۸×۱۰ ^۶ | ۲۵ |
| | | | | (۳.1) | ۵۶۵ | 566/77 | ۰/۲۴×۱۰۶ | ۰/۱۸×۱۰ ^۶ | ٣٣ |
| | | | | (۴.1) | Y) Y/Y Y | ۲۱۷/۹۳ | ۳/۸۳×۱۰۶ | ٣/٢٢×١٠۶ | ۱۹ |
| | | | | (1.1) | ۱ ۱۳/۸۳ | ۱۱۳/۸۶ | ۲/۶۴×۱۰۶ | ۶/۳۱×۱۰ ^۶ | ١٨ |
| ١ | ۴ | ۲. | ۵ | (7.1) | 207/21 | ۲۵۷/۷۵ | ۰/۶۴×۱۰۶ | •/۵٧×١• ^۶ | ١٢ |
| | | | | (۳.1) | ۲ <i>۹۶</i> /۲۳ | T98/T4 | ۶/۷۲×۱۰ | ۲/۰۷×۱۰۶ | ١٧ |
| | | | | (۴.1) | 477/97 | ۴۳۳/۹۳ | ۶ ۲/۲۹×۱۰ | 1/97×1.5 | 18 |
| | | | | (1.1) | ۲۸/۴۵ | 27/48 | ٣٠/۶×١٠ ^۶ | 26/81×1.5 | ۱۵ |
| | 18 | ٨٠ | ۵ | (7.1) | 84/41 | sf/fm | ۶ ۲/۵۵×۱۰ | ۲/۳۴×۱۰۶ | ٨ |
| | | | | (۳.1) | ۷۴/۰۵ | ۷۴/۰۶ | 0/87×1 · ⁶ | $\Delta/\cdot 1 \times 1 \cdot {}^{5}$ | ١٢ |
| | | | | (۴.1) | ۱۰۸/۴۸ | 1 • ٨/۴٨ | ۶/۴۷×۱۰ ^۶ | ۷/۷۲×۱۰ ^۶ | ٩ |
| | | | | (1.7) | ۲۶/۳۹ | 79/48 | ۰/۱۹×۱۰ ^۶ | •/ \% × \ • [%] | 22 |
| | ۱۲/۵ | ۲. | ۱/۶ | (7.7) | 189/5 | 189/19 | ۱۵/۱۱×۱۰ ^۶ | ۲/۶۹×۱۰ ^۶ | ١٨ |
| | | | | (۳.۲) | 418/81 | 413/29 | ۲/۲۹×۱۰۶ | ۳/•۱×۱۰ ^۶ | 74 |
| | | | | (4.7) | ۵۵۴/۸۲ | ۵۵۴/۸۱ | ۰/۴۳×۱۰۶ | ۰/۳۳×۱۰ ^۶ | ٣٠ |
| | | | | (1.1) | YY/41 | ۷۷/۴۴ | ۰/۱۹×۱۰ ^۶ | •/۲١×١• ^۶ | ٩ |
| ۲ | ۴ | ۲. | ۵ | (7.7) | 188/88 | 188/80 | ۰/۷۸×۱۰۶ | ۰/۸۹×۱۰۶ | ١٢ |
| | | | | (٣.٢) | 272/2 | 2727/01 | ۰/ ۸۶ ×۱۰ ^۶ | ۰/۷۳×۱۰۶ | ١٧ |
| | | | | (۴.۲) | 308/14 | 366/16 | ۰/۵۴×۱۰۶ | ۰/۶۳×۱۰ ^۶ | 14 |
| | | | | (1.7) | 19/86 | ۱۹/۳۶ | •/۶٩×١٠ ^۶ | ۰/۷۸×۱۰ ^۶ | 11 |
| | 18 | ٨٠ | ۵ | (7.7) | 41/80 | 41/88 | ۳/•۴×۱۰۶ | ۲/۸۹×۱۰۶ | ۵ |
| | | | | (۳.۲) | ۶۶/۰۸ | ۶۸/۱۲ | ۳/۴۵×۱۰۶ | ۳/۱۱×۱۰ ^۶ | 11 |
| | | | | (۴.۲) | ٨٩/١٨ | ٨٩/١٩ | ۲/۱۴×۱۰۶ | ۲/۳۹×۱۰۶ | ۱. |
| | | | | (1.7) | ۶۶/۹۵ | ۶۷/۰۲ | ۰/۳۹×۱۰۶ | •/٣٣×١• ^۶ | ١٨ |
| | ۱۲/۵ | ۲. | ۱/۶ | (7.7) | 238/28 | 236/28 | ۰/۹۵×۱۰ ^۶ | ۰/٧۶×۱۰ ^۶ | ۲۵ |
| | · · · | | | (۳.۳) | 484/7 | 484/11 | ۰/۸۸×۱۰ ^۶ | ۶/۱۲×۱۰۶ | ۲ ۱ |
| | | | | (۴.۳) | 545/22 | 540/35 | ۰/۴۴×۱۰۶ | ۰/۳۶×۱۰ ^۶ | ۲۲ |
| | | | | (7.1) | 140/88 | 140/80 | ۰/۵۶×۱۰ ^۶ | ۰/۶۳×۱۰ ^۶ | 11 |
| ٣ | ۴ | ۲. | ۵ | (7.7) | ۲۳۵/۵۷ | 230/08 | ۰/۶۵×۱۰ ^۶ | ۰/۵۷×۱۰۶ | 14 |
| | | | | (۳.۳) | 87V/89 | 821/88 | ۰/۲۴×۱۰ ^۶ | •/۲۲×١• ^۶ | ٩ |
| | | | | (7.7) | 431/81 | 431/81 | ۰/۴۱×۱۰ ^۶ | ۰/۳۵×۱۰۶ | ١٧ |
| | | | | (7.1) | 36/41 | 36/41 | ۲/۱۱×۱۰۶ | ۲/۳۱×۱۰۶ | ٨ |
| | 18 | ٨٠ | ۵ | (7.7) | $\Delta \Lambda / \Lambda Y$ | ۵۸/۸۹ | ۲/۵٩×۱۰۶ | ۲/۷۲×۱۰۶ | ۵ |
| | | | | (۳.۳) | ٨١/٩ | ۸۱/۹۱ | •/٩۶×١•۶ | ۰/ ۸ ٩×۱ <i>۰۶</i> | ٨ |
| | | | | (۴.۳) | ۱۰۷/۸۹ | ۱ • Y/۹ | 1/87×1•8 | 1/44×108 | ١٣ |

جدول (۳): مقایسه مقادیر محاسبه شده برای ضریب کیفیت ترموالاستیک از دو روش انرژی و المان محدود نرمافزار ANSYS در برخی از شکلمدهای حجمی تشدیدگر حلقوی پالی سیلیکونی با ضخامت ساختاری *μ*m ۲=۲

3229, 2006.

- Duwel, A., Candler, R.N., Kenny, T.W., and Varghese, M. "Engineering MEMS Resonators with Low Thermoelastic Damping", IEEE/ASME, J. Microelectromechanical Sys.., Vol. 15, No. 6, pp. 1437–1445, 2006.
- Yasumura, K.Y., Stowe, T.D., Chow, E.M., Kenny, T.W., Stipe, B.C., and Rugar, D. "Quality Factors in Micron- and Submicron-thick Cantilevers", J. Microelectromechanical Sys., Vol. 9, No. 1, pp. 117-125, 2000.
- Candler, R.N., Duwel, A., Varghese, M., Chandorkar, S.A., Hopcroft, M.A., Bongsang, K., Lutz, M., and Kenny, T W. "Impact of Geometry on Thermoelastic Dissipation in Micromechanical Resonant Beams", J. Microelectromechanical Sys., Vol. 15, No. 4, pp. 927–934, Aug. 2006.
- Pourkamali, S., Hashimura, A., Abdolvand, R., Ho, G.K., and Ayazi, F. "High-Q Single Crystal Silicon HARPSS Capacitive Beam Resonators With Self- Aligned Sub-100-nm Transduction Gaps", IEEE/ASME, J. Microelectromechanical Sys., Vol. 12, No. 4, pp. 487–496, 2003.
- Roszhart, T.V. "The Effect of Thermoelastic Internal Friction on the Q of Micromachined Silicon Resonators", IEEE Solid State Sensor and Actuator Workshop, pp. 489–494, 1990.
- Wong, S.J., Fox, C.H.J., and William, S.M. "Thermoelastic Damping of the In-plane Vibration of Thin Silicon Rings", J. Sound and Vib., Vol. 293, No. 1, pp. 266–285, 2006.
- Hao, Z. and Ayazi, F. "Thermoelastic Damping in Flexural-Mode Ring Gyroscopes", ASME Int. Mech. Eng. Cong. and Exp., pp. 1-9, 2005.
- Sun, Y. and Tohmyoh, H. "Thermoelastic Damping of the Axisymmetric Vibration of Circular Plate Resonators", J. Sound and Vib., Vol. 319, No. 1, pp. 392–405, 2009.
- Sun, Y. and Saka, M. "Thermoelastic Damping in Micro-scale Circular Plate Resonators", J. Sound and Vib., Vol. 329, No. 3, pp. 328–337, 2010.
- Tunvir, K., Ru, C.Q., and Mioduchowski, A. "Thermoelastic Dissipation of Hollow Micromechanical Resonators", J. Lowdimensional Sys. and Nanostructures, Vol. 42, No. 9, pp. 2341-2352, 2010.
- 23. Sadd, M.H. "Elasticity Theory, Applications, and Numerics", 2nd Edition, Academic Press, 2009.
- Yi, Y.B. "Geometric Effects on Thermoelastic Damping in MEMS Resonators", J. Sound and Vib., Vol. 309, No. 3, pp. 588–599, 2008.
- Hao, Z. "Thermoelastic Damping in the Contour-Mode Vibrations of Micro and Nanoelectromechanical Circular Thin-plate Resonators", J. Sound and V., Vol. 313, No. 1, pp.

- Bannon, F.D., Clark, J.R., and Nguyen, C.T. C. "High Q HF Microelectromechanical Filters", IEEE J. Solid-State Circuits, Vol. 35, No. 4, pp. 512–526, 2000.
- Lin, Y.W., Lee, S.L., Li, S.S., Xie, Y., Ren, Z., and Nguyen, C.T.C. "Series-Resonant VHF Micromechanical Resonator Reference Oscillators", IEEE J. Solid-State Circuits, Vol. 39, No. 12, pp. 2477–2491, 2004.
- Walter, B., Faucher, M., Algre, E., Legrand, B., Boisgard, R., Aime, J.P., and Buchaillot, L. "Design and Operation of a Silicon Ring Resonator for Force Sensing Applications above 1 MHz", J. Micromechanics and Microengineering (JMM), Vol. 19, No. 11, pp. 1-7, 2009.
- Hao, Z., Abdolvand, R., and Ayazi, F. "A High-Q Length-Extensional Bulk-Modemass Sensor with Annexed Sensing Platforms", 19th IEEE Inter.l Conf. on Micro Electro Mech. Sys.(MEMS2006), Istanbul, Turkey, pp. 598-601, 2006.
- Hung, L.W., Xie, Y., Lin, Y.W., Li, S.S., Ren, Z., and Nguyen, C.T.C. "UHF Micromechanical Compound (2,4) Mode Ring Resonators with Solid-Gap Transducers", Proceedings, IEEE Int. Freq. Cont.Sympo., pp. 1370-1375, 2007.
- Xie, Y., Li., S., and Nguyen, C.T.C. "1.52-GHz Micromechanical Extensional Wine-Glass Mode Ring Resonators", IEEE Trans. on Ultrasonic Ferroelectrics and Freq. Cont., Vol. 55, No. 4, pp. 890-907, 2008.
- Chandorkar, S.A., Candler, R.N., Duwel, A., Melamud, R., Agarwal, M., Goodson, K.E., and Kenny, T.W. "Multimode Thermoelastic Dissipation", J. Appl. Phys., Vol. 105, No. 4, pp. 1-13, 2009.
- Chandorkar, S.A., Agarwal M., Melamud, R., Candler, R. N., Goodson, K. E., and Kenny, T. W. "Limits of Quality Factor in Bulk-Mode Micromechanical Resonators", IEEE 21st Int. Conf. on Microelectromechanical Sys., pp. 74-77, 2008.
- Zener, C. "Internal Friction in Solids I. Theory of Internal Friction in Reeds", J. Phys. Review, Vol. 52, No. 3, pp. 230–235, 1937.
- Zener, C. "Internal Friction in Solids: II. General Theory of Thermoelastic Internal Friction", J. Phys. Review, Vol. 53, No. 1, pp. 90–99, 1938.
- Lifshitz, R. and Roukes, M.L. "Thermoelastic Damping in Micro-and Nanomechanical Systems", J. Phys. Review B, Vol. 61, No. 8, pp. 5600–5609, 2000.
- Sun, Y., Fang, D., and Soh, A.K. "Thermoelastic Damping in Micro-Beam Resonators", Int. J. Solids and Struct., Vol. 43, No. 10, pp. 3213–

مراجع

- Bashmal, S., Bhat, R., and Rakheja, S., "In-plane Free Vibration of Circular Annular Disks", J. Sound and Vib., Vol. 322, No. 1, pp. 216–226, 2009.
- 29. ANSYS[®], Version 11.0, User's guide, ANSYS Inc.

77-96, 2008.

- Hao, Z., Pourkamali, S., and Ayazi, F. "VHF Single-crystal Silicon Elliptic Bulk-mode Capacitive Disk Resonators—Part I: Design and Modeling", IEEE/ASME, J. Microelectromechanical Sys., Vol. 13, No. 6, pp. 1043–1053, 2004.
- Takano, T., Hirata, H., and Tomikawa, Y., "Analysis of Non-axisymmetric Vibration Mode Piezoelectric Annular Plate and its Application to an Ultrasonic Motor", IEEE Trans. on Ultrasonics, Ferroelectrics and Freq. Cont., Vol. 37, No. 6, 558–565, 1990.