تحلیل ارتعاشات غیرخطی و پایداری دینامیکی میکروورق ویسکوالاستیک نانو کامپوزیتی تحت میدان الکتروستاتیک

امیر جلالی[۱] و سیامک اسماعیل زاده خادم[۲]
دانشکده مهندسی مکانیک و هوافضا
دانشگاه تربیت مدرس
(تاریخ دریافت: ۸۹/۱۱/۰۴؛ تاریخ پذیرش: ۹۱/۴/۱۸)

چکیده

در این مقاله، ارتعاشات غیرخطی و پایداری دینامیکی یک میکروورق ویسکوالاستیک کامپوزیتی تقویت شده با نانو تیوب کربن مورد بررسی قرار گرفته است. میکروورق مورد بررسی، یک میکرو ورق مربعی تحت میدان الکتروستاتیک بوده و شرایط مرزی آن در چهار لبه، تکیه‌گاه ساده، غیرقابل حرکت، درنظر گرفته شده است. به‌منظور استخراج خواص مکانیکی مواد، از روش اشلبی- موری- تاناکا استفاده شده است. معادلات حرکت غیرخطی میکروورق با استفاده از روش نیوتن و تئوری وون-کارمن استخراج شده و با به‌کارگیری ترکیبی از روش گالرکین و تئوری مقیاس‌های چندگانه این معادله‌ها حل شده‌اند. در این مقاله نشان داده شده است که استفاده از میکروورق نانو کامپوزیتی موجب افزایش فرکانس طبیعی و دامنه‌ی ارتعاش میکروورق می‌شود. اما به‌واسطه‌ی میرایی بالای مواد ویسکوالاستیک، رفتار دینامیکی و ارتعاشی آن به شدت محدود می‌شود. علاوه‌بر بالا بودن ضریب میرایی ویسکوالاستیک، خاصیت میرایی در این مواد به ازای افزایش ولتاژ الکتروستاتیک نیز متغیر است که امری نامطلوب به‌شمار می‌رود. همچنین به ازای درصدهای مختلف نانوتیوب کربن در میکروورق ویسکوالاستیک، رفتار غیرخطی ورق کاملاً متفاوت بوده است و می‌تواند به ازای یک مقدار مشخص ولتاژ، رفتاری سخت‌شونده و یا نرم‌شونده داشته باشد که این موضوع، می‌بایست در طراحی میکرو ادوات و به‌ویژه میکرورزوناتورها مورد توجه قرار گیرد.

واژه‌های کلیدی: نانو کامپوزیت، ویسکوالاستیک، ارتعاشات غیرخطی، میدان الکتروستاتیک

Nonlinear Vibration and Dynamic Stability Analysis of a Nanocomposite Viscoelastic Microplate Under an Electrostatic Actuation

A. Jalali and S.E. Khadem
Mech. and Aerospace Eng. Dep't
Tarbiat Modares Univ.
(Received: 24, January, 2011; Accepted: 8, July, 2012)

ABSTRACT

In this paper, nonlinear vibration and dynamic stability analysis of a CNT- reinforced nanocomposite viscoelastic microplate under an electrostatic actuation are investigated. The microplate is assumed as a square immovable simply supported microplate and an electrostatic actuation is applied on it. In order to obtain material properties of the nanocomposite microplate, the Eshelby–Mori–Tanaka method is implemented. The nonlinear equations of motion of the microplate are derived and, using the Galerkin method and multiple scale method, these equations are solved. It is shown that nanocomposite viscoelastic microplate increases the natural frequency and deflection of the microplate simultaneously, but, there are some limitations because of high values of viscoelastic damping of the nanocomposite materials. Furthermore, the damping of the nanocomposite microplate is changed, as the electrostatic voltage is changed. This situation is an unfavorable phenomenon. Also nonlinear behavior of the microplate is quite variable as nanotube volume fraction varies and, for a given voltage, it can show softening or hardening behavior as CNT volume fraction changes. This matter should be considered in designing of the microdevices, especially microresonators.

Keywords: Nanocomposite, Viscoelastic, Nonlinear Vibration, Electrostatic Actuation

---

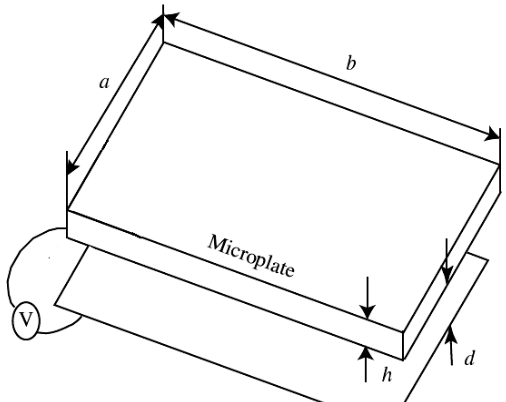
۱- دانشجوی دکتری: amirjalali@modares.ac.ir
۲- استاد (نویسنده پاسخگو): khadem@modares.ac.ir

۱- مقدمه

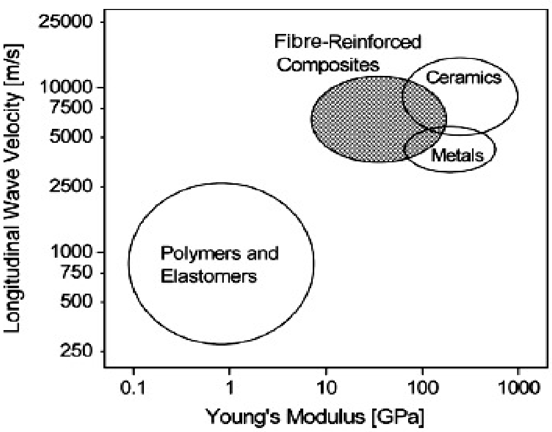
میکروورق تحریک‌شده با میدان الکترواستاتیک، می‌تواند در ادوات مختلفی از قبیل میکروپمپ‌ها، میکروسوئیچ‌ها، میکروآیینه‌ها و ... مورد استفاده قرار گیرد [۵-۱]. شماتیک این المان در شکل **۱** نشان داده شده است. این المان نقش یک الکترود انعطاف‌پذیر در یک خازن را بازی می‌کند و در کنار الکترود ثابت آن، به‌عنوان یک خازن متغیر به‌حساب می‌آید. در این حالت، نیروی خازنی موجب تغییر شکل خمشی ورق می‌شود که این تغییر شکل خمشی، بر روی نیروی خازنی تأثیرگذار است و آن را تغییر می‌دهد. بنابراین بین نیروهای مکانیکی و الکتریکی در این ادوات، کوپلینگ غیر قابل انکاری وجود دارد که نمی‌توان از آن صرف‌نظر کرد.

این ادوات از جنبه‌های مختلفی مورد بررسی قرار گرفته‌اند. به‌عنوان مثال، تغییر مکان خمشی یک دیافراگم تحت میدان الکترواستاتیک توسط فرانسیس[1] و دوفور[2] مورد بحث قرار گرفته است [۶]. خصوصیات دینامیکی یک میکروورق تحت میدان الکترواستاتیک با درنظر گرفتن پارامترهای غیرخطی هندسی آن توسط ان جی[3] و همکارانش مورد مطالعه قرار گرفته است [۷]. همچنین پاسخ دینامیکی آرایه‌های موازی از میکروورق‌های تحت میدان الکترواستاتیک نیز توسط پورفیری[4] تحلیل شده است [۸]. باید به این نکته توجه داشت که، تمامی این مطالعات بر روی مدل‌های الاستیک میکروورق انجام شده است.

تغییر مکان خمشی به‌نسبت بزرگ یک میکروورق در فرکانس‌های بالا، جزء یکی از خواص مطلوب میکروحسگرها و میکروعملگرها به‌شمار می‌رود. برای داشتن تغییر مکان خمشی بزرگ می‌بایست صلبیت ورق کم باشد و برای داشتن فرکانس طبیعی بالا، می‌بایست سرعت موج ($c=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$) در میکروورق فوق افزایش یابد. همان‌طور که در شکل **۲** نشان داده شده است، از میان مواد مختلفی همانند فلزات، سرامیک‌ها و پلیمرها که برای ساخت حسگرها و عملگرها مورد استفاده قرار می‌گیرند، مواد کامپوزیتی مطلوب‌ترین خواص را با توجه به موارد فوق دارا است و در میان مواد کامپوزیتی، کامپوزیت‌های نانوتیوب کربنی به‌علت خواص مکانیکی استثنایی نانوتیوب‌ها، یکی از بهترین مواد را تشکیل می‌دهند.



شکل (۱): شماتیک میکروورق با تحریک الکترواستاتیک.



شکل (۲): نمودار انتخاب مواد برای میکروحسگرها/میکروعملگرها[۹].

حسگرها و عملگرهای کامپوزیتی نانوتیوب کربنی، در سال‌های اخیر مورد استفاده قرار گرفته‌اند [۱۲-۱۰]. رفتار و خصوصیت‌های آنها در تحقیق‌های حاضر به‌وفور بیان شده است [۱۵-۱۳]. افشاری و همکارانش در مقاله‌ی خود، کامپوزیت‌های تقویت شده با نانوتیوب کربن را به‌عنوان دسته‌ی جدیدی از مواد ساختاری برای استفاده در المان‌های مکانیکی سیستم‌های میکروالکترومکانیکال پیشنهاد داده‌اند. آنها، امکان استفاده از کامپوزیت‌های نانوتیوب کربنی در

1- Francais
2- Dufour
3- Ng
4- Porfiri

طراحی عملگرها را به‌طور کامل مطالعه کرده‌اند و خصوصیات رفتاری آنها را تحت شرایط عملگری بررسی کرده‌اند [۹].

عموماً، کامپوزیت پلیمری تقویت شده با نانوتیوب کربن به‌عنوان یک ماده ویسکوالاستیک به‌شمار می‌رود. فو[1] و ژانگ[2] پایداری دینامیکی غیرخطی یک میکروتیر اویلر- برنولی ویسکوالاستیک را تحت دو نوع بار الکتریکی مختلف مطالعه کرده‌اند [۱۶]. هم‌چنین فو و همکارانش پایداری دینامیکی غیرخطی یک میکروتیر ویسوالاستیک دوسر گیردار را تحت بار محوری تناوبی و بار الکتروستاتیک متقارن مورد بررسی قرار داده‌اند. آنها در این مقاله، از مدل استاندارد برای مدل‌سازی رفتار ویسکوالاستیک استفاده کرده‌اند و تأثیرات میرایی محیطی و میرایی درون سازه‌ای، تأثیرات غیرخطی هندسی، خزش و بار الکتروستاتیک را بر روی نواحی پایداری مورد بررسی قرار داده‌اند [۱۷]. فو و ژانگ در مقاله‌ای دیگر، پاسخ استاتیکی و دینامیکی غیرخطی یک میکروورق ویسکوالاستیک را به‌صورت عددی مطالعه کرده و شکل‌های مختلف ناپایداری پولین[3] را مورد بحث قرار داده‌اند [۱۸]. پاسخ یک میکروتیر ویسکوالاستیک به تحریک الکتروستاتیک، توسط زمانیان و همکارانش استخراج شده است [۱۹]. آنها در مقاله‌ی خود از روش گالرکین و تئوری اغتشاشات برای یافتن پاسخ استفاده کرده‌اند و نشان داده‌اند که حتی مقادیر بسیار کوچک میرایی ویسکوالاستیک می‌تواند باعث کاهش قابل توجه‌ی بیشینه دامنهِ ارتعاشات میکروتیر شود و فرکانس غیرخطی سیستم را به‌طور قابل ملاحظه‌ای منتقل کند. در این مقاله، با استفاده از تئوری ورق وون-کارمن[4]، معادله‌های حاکم بر حرکت یک میکروورق با تکیه‌گاه‌های ساده‌ی غیرقابل حرکت[5]، در چهار طرف استخراج شده و در استخراج معادله‌ها، کلیه‌ی پارامترهای صلبیت، میرایی و اینرسی غیرخطی لحاظ شده است. به‌عبارت دیگر برای اولین بار از مدل کامل غیرخطی میکروورق به‌صورت سه معادله و بدون حذف هیچ یک از ترم‌های موجود در معادله‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. سپس پاسخ استاتیکی و دینامیکی غیرخطی میکروورق تحت میدان الکتروستاتیک مورد بحث قرار گرفته است. لازم به‌ذکر است که برای مدل‌سازی رفتار ویسکوالاستیک ماده نیز از تئوری کلوین-وویت[6] استفاده شده شده است. به‌منظور حل معادله‌های حرکت، روش گالرکین و روش مقیاس‌های چندگانه به‌خدمت گرفته شده است. سپس، برای اولین بار، تأثیرات درصد حجمی نانوتیوب کربن بر روی رفتار ارتعاشی و دینامیکی میکروورق نانوکامپوزیتی مورد مطالعه قرار گرفته است و نتیجه‌های ارزشمندی استخراج شده است.

۲- تعیین خواص مکانیکی نانوکامپوزیت

نانوتیوب‌های کربن یکی از چشمگیرترین و قابل توجه‌ترین موادی بوده‌اند که در میکرو ادوات به‌خدمت گرفته شده‌اند. این مواد اولین بار توسط ایجیما[7] کشف شده‌اند [۲۰]. نانوتیوب کربن دو نوع کاملاً متفاوت دارد که به آن نانوتیوب کربن تک دیواره[8] (SWNT) و نانوتیوب چند دیواره[9] (MWNT) گفته می‌شود. برخی از خواص نانو تیوب‌های کربن در جدول **۱** ذکر شده است.

جدول (۱): خواص نانوتیوب های کربن [۹].

	$(10,10)\,SWNTs$	$(30,30)_{10}\,MWNTs$	$Array of\,(10,10)\,SWNTs$
$E_{11}\,(Gpa)$	۱۰۶۰	۸۰۰	۵۸۰
$E_{22}\,(Gpa)$	۶/۶۳	۱۵/۵۸	۹/۴
ν	۰/۱۶	۰/۱۴	۰/۱۸
$\rho\,(kg/m^3)$	۱۴۴۰	۲۰۹۰	۱۱۵۰

در این مقاله از SWNT $(10,10)$ به‌عنوان المان تقویت‌کننده و از PMMA[10] به‌عنوان ماتریس استفاده شده است. علت استفاده از PMMA، مقاومت بسیار بالای این ماده، در مقابل شرایط آب و هوایی متفاوت است. مدول الاستیک نانوکامپوزیت CNT/PMMA با استفاده از روش اشلبی-موری تاناکا[11] [۲۱] به‌دست آمده است. جدول **۲** خواص

1- Fu
2 -Zhang
3 -Pull-in
4 -Von Karmann
5 -Immovable Simply Supported Boundary Condition

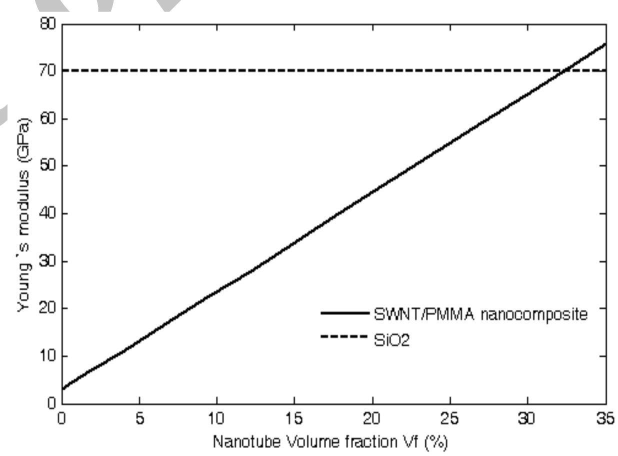
6- Kelvin-Voigt
7 -Iijima
8- Single Wall Carbon NanoTube
9 -Multi Wall Carbon NanoTube
10 -Poly(Methyl Methacrylate)
11- Eshelby–Mori–Tanaka Method

مکانیکی مواد مورد استفاده در این مقاله به‌عنوان ورق نانوکامپوزیتی را لیست کرده است. ماده‌ی SiO_2 یکی از مواد رایجی است که به‌عنوان المان پایه در میکروادوات مورد استفاده قرار می‌گیرد و رفتاری الاستیک از خود بروز می‌دهد.

جدول (۲): خواص مواد مورد استفاده به‌عنوان ماتریس [۹].

MAterial	$\rho\,(kg/m^3)$	$E\ (Gpa)$	ν
SiO_2	۲۶۰۰	۷۰	۰/۲
PMMA	۱۱۵۰	۳	۰/۴

در این مقاله با فرض توزیع الیاف در ماتریس با جهت قرارگیری به‌طور کامل اتفاقی و نسبت لاغری الیاف بزرگ‌تر از ۱۰۰۰، مدول الاستیک نانوکامپوزیت SWNT/PMMA نسبت به درصد حجمی نانوتیوب، با استفاده از روش اشلبی- موری تاناکا استخراج شده و در شکل **۳** نشان داده شده است. روابط و ضرایب مربوط به این روش در پیوست (الف) آورده شده است.



شکل (۳): مدول یانگ یک نانوکامپوزیت تقویت شده با نانوتیوب کربن با توزیع به‌طور کامل تصادفی نانوتیوب.

همان‌طور که در شکل **۳** مشاهده می‌شود، به ازای درصد حجمی نانوتیوب کربن معادل۳۲/۳٪ مدول الاستیک نانوکامپوزیت با مدول الاستیک SiO_2 برابر خواهد بود.

۳- مدل‌سازی و فرمول‌بندی

معادلات حاکم بر تغییر مکان خمشی به‌نسبت بزرگ یک میکروصفحه‌ی مستطیلی ویسکوالاستیک تحت میدان الکتروستاتیک، با استفاده از تئوری ورق وون-کارمن و نیز تئوری ویسکوالاستیک کلوین-وویت به‌صورت زیر به‌دست می‌آید [۲۲]:

$$
\begin{aligned}
&\frac{Eh}{(1-\nu^2)}\{[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\eta(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial t})]+\\
&\nu[\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+\\
&\eta(\frac{\partial^3 v}{\partial x\,\partial y\partial t}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y\,\partial t}+\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y})]\}\\
&+\frac{Eh}{2(1+\nu)}[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\\
&\eta(\frac{\partial^3 u}{\partial y^2\partial t}+\frac{\partial^3 v}{\partial x\,\partial y\,\partial t}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y\,\partial t}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\\
&\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^3 w}{\partial y^2\partial t})]=\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},
\end{aligned}
\tag{۱}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{Eh}{(1-\nu^2)}\{[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\eta(\frac{\partial^3 v}{\partial y^2\partial t}+\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^3 w}{\partial y^2\partial t})]+\\
&\nu[\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+\\
&\eta(\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\partial t}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y\,\partial t}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y})]\}\\
&+\frac{Eh}{2(1+\nu)}[\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\\
&\eta(\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial t}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\,\partial t}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial t}+\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\
&+\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y\partial t})]=\rho h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.
\end{aligned}
\tag{۲}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{12}h^2(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4})-\frac{1}{12}h^2\eta(\frac{\partial^5 w}{\partial x^4\partial t}+2\frac{\partial^5 w}{\partial x^2\partial y^2\partial t}+\frac{\partial^5 w}{\partial y^4\partial t})\\
&+[\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}((\frac{\partial w}{\partial x})^2+\nu(\frac{\partial w}{\partial y})^2)+\frac{(1-\nu^2)N_{xx}}{Eh}+\\
&\eta(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}+\nu\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial t}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial t}+\nu\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial t})]\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\
&+[\frac{\partial v}{\partial y}+\nu\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}((\frac{\partial w}{\partial y})^2+\nu(\frac{\partial w}{\partial x})^2)+\frac{(1-\nu^2)N_{yy}}{Eh}+\\
&\eta(\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial t}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}+\nu\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial t}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial t}]\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\\
&+(1-\nu)[\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}+2\frac{(1+\nu)N_{xy}}{Eh}+\\
&\eta(\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial t}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial t}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial t}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial t}]\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\\
&=C_p^{-2}(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial w}{\partial x}-\rho h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\frac{\partial w}{\partial y})-\frac{\varepsilon_0(1-\nu^2)(V_p+V_d)^2}{2Ehd^2(1-\frac{w}{d})^2}.
\end{aligned}
\tag{۳}
$$

که شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده غیر قابل حرکت برای لبه‌های آن به‌صورت زیر خواهد بود:

$$
\begin{aligned}
&x=0,a \quad , \quad u=v=w=0 \quad , \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0,\\
&y=0,b \quad , \quad u=v=w=0 \quad , \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0.
\end{aligned}
\tag{۴}
$$

در صورت حذف ترم میدان الکتروستاتیک در این معادلات، می توان معادلات مربوط به صفحه مقیاس ماکرو را که در مرجع [۲۳] ذکر شده است به‌دست آورد. که در این معادله، $u = u(x, y, t)$، $v = v(x, y, t)$ و $w = w(x, y, t)$ بیانگر جابه‌جایی‌های میکروورق در جهات X، Y و Z، η بیانگر میرایی ویسوالاستیک، ν بیانگر ضریب پواسون، E بیانگر مدول یانگ، h بیانگر ضخامت ورق، ρ بیانگر دانسیته، d بیانگر فاصله هوایی بین الکترودها، ε_0 بیانگر ثابت دی‌الکتریک هوا، و V_P و V_d بیانگر المان‌های پولاریزاسیون و نوسانی ولتاژ اعمالی به ورق هستند. معادله‌های (۳-۱) می‌توانند با استفاده از پارامترهای بی‌بعدسازی زیر به‌صورت بی‌بعد نوشته شوند.

$$x^* = \frac{x}{a}\,,\ y^* = \frac{y}{b}\,,\ t^* = \frac{t}{\tau}\,,\ u^* = \frac{au}{d^2}\,,\qquad v^* = \frac{av}{d^2}\,,\ w^* = \frac{w}{d}\,,\ \eta^* = \frac{\eta}{\tau}. \tag{۵}$$

در این رابطه، $\tau = \frac{\sqrt{12}a^2}{hc_p}$ و $c_p^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)}$ است.

بنابراین، شکل بی‌بعد معادله‌های (۳-۱) به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\eta(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial t})+\\
&\nu\,[c\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}+c^2\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+\\
&\eta\,(c\frac{\partial^3 v}{\partial x\,\partial y\,\partial t}+c^2\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y\,\partial t}+c^2\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y})]+\\
&\frac{(1-\nu)}{2}[c^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+c\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}+c^2\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+c^2\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\\
&\eta(c^2\frac{\partial^3 u}{\partial y^2\partial t}+c\frac{\partial^3 v}{\partial x\,\partial y\,\partial t}+c^2\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y\,\partial t}+\\
&c^2\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+c^2\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+c^2\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^3 w}{\partial y^2\partial t})]=\frac{h^2}{12a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},
\end{aligned} \tag{۶}$$

$$\begin{aligned}
&c^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+c^3\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\eta(c^2\frac{\partial^3 v}{\partial y^2\partial t}+c^3\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+c^3\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^3 w}{\partial y^2\partial t})]+\\
&\nu\,[c\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+c\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+\\
&\eta(c\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial t}+c\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y\,\partial t}+c\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y})]\\
&+\frac{(1-\nu)}{2}[c\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+c\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+c\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+\\
&\eta(c\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial t}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\,\partial t}\\
&+c\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial t}+c\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+c\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+\\
&c\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y\,\partial t})]=\frac{h^2}{12a^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},
\end{aligned} \tag{۷}$$

$$\begin{aligned}
&-(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4})-\\
&\eta(\frac{\partial^5 w}{\partial x^4\partial t}+2\frac{\partial^5 w}{\partial x^2\partial y^2\partial t}+\frac{\partial^5 w}{\partial y^4\partial t})\\
&+12\alpha_1[\frac{\partial u}{\partial x}+\nu c\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}((\frac{\partial w}{\partial x})^2+\nu c^2(\frac{\partial w}{\partial y})^2)+\\
&N_1+\eta(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}+\nu c\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial t}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial t}+\nu c^2\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial t})]\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\
&+12c^2\alpha_1[c\frac{\partial v}{\partial y}+\nu\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}(c^2(\frac{\partial w}{\partial y})^2+\nu(\frac{\partial w}{\partial x})^2)+N_2+\\
&\eta(c\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial t}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}+\nu\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial t}+c^2\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial t}]\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\\
&+12c\,(1-\nu)\alpha_1[c\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+c\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}+N_{12}+\\
&\eta(c\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial t}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial t}+c\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial t}\frac{\partial w}{\partial y}+c\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial t}]\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\\
&=(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\alpha_2\frac{(V_p+V_t)^2}{(1-w)^2}).
\end{aligned} \tag{۸}$$

و شرایط مرزی بی‌بعد به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}
&x = 0,1 \quad , \quad u = v = w = 0 \quad , \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,\\
&y = 0,1 \quad , \quad u = v = w = 0 \quad , \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.
\end{aligned} \tag{۹}$$

همان‌گونه که در این معادله‌ها مشاهده می‌شود، ترم‌های غیرخطی سختی، میرایی و اینرسی در این معادله‌ها ظاهر شده‌اند. همچنین پارامترهای c، α_1 و α_2 که در این معادله‌ها ظاهر شده‌اند، به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$c = \frac{a}{b}\,,\ \alpha_1 = \frac{d^2}{h^2}\,,\ \alpha_2 = \frac{6\,\varepsilon_0\,(1-\nu^2)\,a^4}{E\,h^3\,d^3}. \tag{۱۰}$$

۳-۱- تغییر مکان استاتیکی

تغییر مکان خمشی میکروورق تحت میدان الکتروستاتیک را می‌توان متشکل از دو جزء دانست: جزء استاتیکی ناشی از ولتاژ DC و جزء نوسانی ناشی از ولتاژ AC. بنابراین تغییر مکان‌های میکروورق را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}
&u\,(x\,,y\,,t) = u_s\,(x\,,y\,) + u_d\,(x\,,y\,,t),\\
&v\,(x\,,y\,,t) = v_s\,(x\,,y\,) + u_d\,(x\,,y\,,t),\\
&w\,(x\,,y\,,t) = w_s\,(x\,,y\,) + w_d\,(x\,,y\,,t).
\end{aligned} \tag{۱۱}$$

در این روابط، زیرنویس "s" و "d" نمایانگر اجزای استاتیکی و دینامیکی تغییر مکان‌ها هستند.

با جای‌گذاری معادله‌ی (۱۱) در معادله‌های (۸-۶) و حذف کردن ترم‌های حاوی مشتقات زمانی از معادله‌های

حاصله، معادلات حاکم بر پاسخ استاتیکی ورق به شکل زیر استخراج خواهد شد:

$$\frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2}+\frac{\partial w_s}{\partial x}\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}+\nu\left(c\frac{\partial^2 v_s}{\partial x\partial y}+c^2\frac{\partial w_s}{\partial y}\frac{\partial^2 w_s}{\partial x\partial y}\right)+ \frac{(1-\nu)}{2}\left[c^2\frac{\partial^2 u_s}{\partial y^2}+c\frac{\partial^2 v_s}{\partial x\partial y}+ c^2\frac{\partial w_s}{\partial y}\frac{\partial^2 w_s}{\partial x\partial y}+c^2\frac{\partial w_s}{\partial x}\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}\right]=0. \quad (۱۲)$$

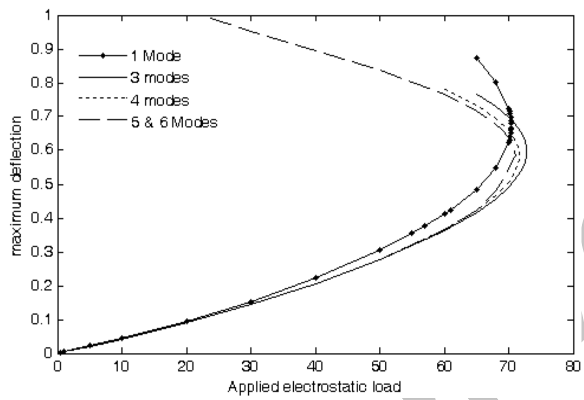
$$c^2\frac{\partial^2 v_s}{\partial y^2}+c^3\frac{\partial w_s}{\partial y}\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}+\nu\left(c\frac{\partial^2 u_s}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial w_s}{\partial x}\frac{\partial^2 w_s}{\partial x\partial y}\right)+ \frac{(1-\nu)}{2}\left[c\frac{\partial^2 u_s}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v_s}{\partial x^2}+c\frac{\partial w_s}{\partial y}\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}+c\frac{\partial w_s}{\partial x}\frac{\partial^2 w_s}{\partial x\partial y}\right]=0. \quad (۱۳)$$

$$-\left(\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4}+2c^2\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2\partial y^2}+c^4\frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4}\right)+ 12\alpha_1\left[\frac{\partial u_s}{\partial x}+\nu c\frac{\partial v_s}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial w_s}{\partial x}\right)^2+ \nu c^2\left(\frac{\partial w_s}{\partial y}\right)^2\right)\right]\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}+12c^2\alpha_1\left[c\frac{\partial v_s}{\partial y}+\nu\frac{\partial u_s}{\partial x}+ \frac{1}{2}\left(c^2\left(\frac{\partial w_s}{\partial y}\right)^2+\nu\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right)\right]\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}+12c(1-\nu)\alpha_1\left[c\frac{\partial u}{\partial y}+ \frac{\partial v}{\partial x}+c\frac{\partial w_s}{\partial x}\frac{\partial w_s}{\partial y}\right]\frac{\partial^2 w_s}{\partial x\partial y}=-\alpha_2\frac{(V_p)^2}{(1-w_s)^2}. \quad (۱۴)$$

به‌منظور حل معادله‌های غیرخطی فوق، از روش گالرکین[۱] استفاده شده است. در روش گالرکین شکل تابع پاسخ به‌صورت یک سری، که هر جمله‌ی آن حاصل‌ضرب یک ضریب ثابت در یک تابع مقایسه‌ای است، در نظر گرفته می‌شود. این سری می‌بایست تمامی شرایط هندسی مسئله را ارضا کند. بدین منظور پاسخ معادله‌های (۱۴-۱۲) به‌شکل زیر فرض شده است [۲۴]:

$$u_{m,n}(x,y)=C_{1m,n}Sin(2m\pi x)Sin((2n-1)\pi y),$$
$$v_{m,n}(x,y)=C_{2m,n}Sin((2m-1)\pi x)Sin(2n\pi y), \qquad m,n=1,2,...$$
$$w_{m,n}(x,y)=C_{3m,n}Sin((2m-1)\pi x)Sin((2n-1)\pi y). \quad (۱۵)$$

با ضرب نمودن هر دو طرف معادله‌ی (۱۴) در $(1-w_s(x,y))^2$، جایگذاری معادله‌ی (۱۵) در معادله حاصله و نیز معادله‌های (۱۳-۱۲)، و به‌کارگیری روش گالرکین، مقادیر $C_{m,n}$ و درنتیجه تغییر شکل‌های میکروورق نانوکامپوزیتی به‌دست خواهد آمد. در روش گالرکین، پس از جایگذاری توابع پاسخ و با استفاده از خاصیت تعامد، معادله حرکت در توابع مقایسه‌ای مختلف ضرب شده و از هر کدام از معادله‌های حرکت در حوزه حل، انتگرال گرفته می‌شود. بدین‌صورت یک سری معادله‌های جبری بر حسب ضرایب ثابت مسئله به‌دست می‌آید. این کار به‌تعداد توابع مقایسه‌ای تکرار می‌شود که نتیجه‌ی آن یک دستگاه معادله‌های جبری متشکل از مقادیر مجهول $C_{m,n}$ خواهد بود. به‌منظور تعیین تعداد مودهای مورد نیاز که می‌بایست به‌منظور دست‌یابی به‌دقت مورد نظر مورد استفاده قرار گیرد، همگرایی این روش مدنظر قرار گرفته است. شکل **۴** تغییر مکان بیشینه‌ی میکروورق را برای حل مسئله با تعداد مودهای مختلف درنظر گرفته شده در روش گالرکین نشان می‌دهد. مقادیر مورد استفاده در این تحلیل عبارت است از: $a=310\mu m$ و $\varepsilon_0=8.854\times10^{-12}F/m$. میکروورق مورد بررسی در تحلیل همگرایی، یک میکروورق SiO_2 مربعی با تکیه‌گاه ساده درنظر گرفته شده است.



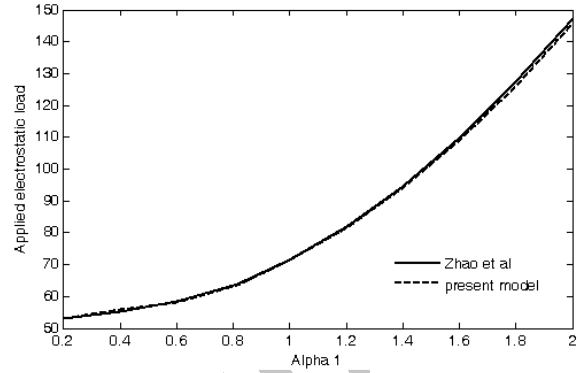
شکل (۴): بیشینه تغییر شکل یک میکروورق مربعی با تکیه‌گاه ساده نسبت به نیروی الکتروستاتیک $\alpha_2 V_p^2$، برای $\alpha_1=1$.

همان‌طور که در شکل **۴** نشان داده شده است، برای دست‌یابی به‌دقت مورد نظر حداقل می‌بایست ۵ مود در روش گالرکین مورد استفاده قرار گیرد. شکل‌های **۶-۵** تغییرات w_{max} و $\alpha_2 V_p^2$ را نسبت به پارامتر α_1 برای روش مورد استفاده در این مقاله و نیز روش استفاده شده توسط ژائو[۲] و همکارانش [۲۵] را نشان می‌دهد. همان‌طور که در این شکل نشان داده شده است، تطابق مناسبی بین نتیجه‌های دو تحقیق وجود دارد. بنابراین مدل مورد استفاده در این تحقیق مقادیر ولتاژ پولین را با دقت مناسب تخمین می‌زند.

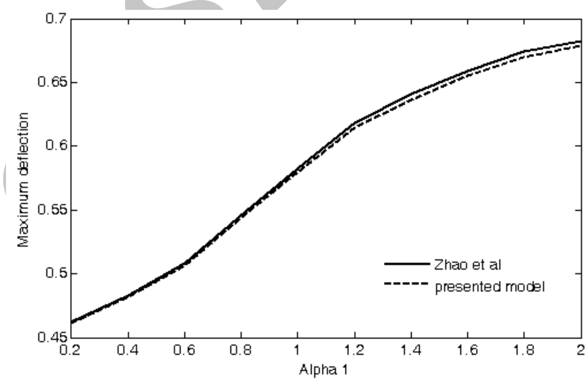
1- Galerkin Method

2- Zhao

همان‌طور که در این شکل‌ها نیز مشاهده می‌شود، بیشینه اختلاف بین دو مدل معادل ۰/۳٪ برای $\alpha_2 = 2$ است.



شکل (۵): تغییرات نیروی الکترواستاتیک پولین نسبت به α_1 برای یک میکروورق مربعی با تکیه‌گاه ساده.



شکل (۶): تغییرات بیشینه تغییر شکل ورق نسبت به α_1 برای یک میکروورق مربعی با تکیه‌گاه ساده.

۳-۲- استخراج فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها

با جایگذاری معادله‌ی (۱۱) و سپس معادله‌های (۱۴-۱۲) در معادله‌های (۸-۶)، معادله‌های حاکم بر رفتار دینامیکی غیرخطی میکروورق حول موقعیت استاتیکی آن به‌دست خواهد آمد، که پاسخ آن در قسمت‌های بعدی محاسبه شده است. به‌منظور به‌دست آوردن فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای خطی سیستم، می‌بایست معادله‌های حاکم بر حرکت ارتعاشات خطی آن را به‌دست آورد که این کار با حذف جملات حاوی ترم‌های غیرخطی، میرایی و نیرو از معادله‌های حاصله انجام می‌شود و درنتیجه معادله‌های مقدار ویژه خطی میکروورق حول موقعیت استاتیکی آن به شکل زیر استخراج خواهد شد:

$$
\begin{aligned}
& p_1 \frac{\partial^2 u_d}{\partial x^2} + p_2 \frac{\partial^2 v_d}{\partial x \partial y} + p_3 \frac{\partial^2 u_d}{\partial y^2} + p_4 \frac{\partial w_d}{\partial x} + p_5 \frac{\partial w_d}{\partial y} + \\
& p_6 \frac{\partial^2 w_d}{\partial x^2} + p_7 \frac{\partial^2 w_d}{\partial y^2} + p_8 \frac{\partial^2 w_d}{\partial x \partial y} + p_9 \frac{\partial^2 u_d}{\partial t^2} = 0,
\end{aligned} \tag{۱۶}
$$

$$
\begin{aligned}
& q_1 \frac{\partial^2 v_d}{\partial y^2} + q_2 \frac{\partial^2 u_d}{\partial x \partial y} + q_3 \frac{\partial^2 v_d}{\partial x^2} + q_4 \frac{\partial w_d}{\partial x} + q_5 \frac{\partial w_d}{\partial y} + \\
& q_6 \frac{\partial^2 w_d}{\partial x^2} + q_7 \frac{\partial^2 w_d}{\partial y^2} + q_8 \frac{\partial^2 w_d}{\partial x \partial y} + q_9 \frac{\partial^2 v_d}{\partial t^2} = 0,
\end{aligned} \tag{۱۷}
$$

$$
\begin{aligned}
& r_1 \frac{\partial^4 w_d}{\partial x^4} + r_2 \frac{\partial^4 w_d}{\partial x^2 \partial y^2} + r_3 \frac{\partial^4 w_d}{\partial y^4} + r_4 \frac{\partial w_d}{\partial x} + r_5 \frac{\partial w_d}{\partial y} + r_6 \frac{\partial^2 w_d}{\partial x^2} + \\
& r_7 \frac{\partial^2 w_d}{\partial y^2} + r_8 \frac{\partial^2 w_d}{\partial x \partial y} + r_9 \frac{\partial u_d}{\partial x} + r_{10} \frac{\partial u_d}{\partial y} \\
& + r_{11} \frac{\partial v_d}{\partial x} + r_{12} \frac{\partial v_d}{\partial y} + r_{13} \frac{\partial^2 w_d}{\partial t^2} + r_{14} w_d + r_{15} \frac{\partial^2 u_d}{\partial t^2} + r_{16} \frac{\partial^2 v_d}{\partial t^2} = 0.
\end{aligned} \tag{۱۸}
$$

که ضرایب p_1 تا p_9، q_1 تا q_9 و r_1 تا r_{16} در پیوست (ب) تعریف شده‌اند. به‌منظور حل معادله‌های (۱۹-۱۶) این‌طور درنظر گرفته می‌شود که [۲۴]:

$$
\begin{aligned}
u_d(x, y, t) &= U(x, y) e^{i \omega_{m,n} t}, \\
v_d(x, y, t) &= V(x, y) e^{i \omega_{m,n} t}, \\
w_d(x, y, t) &= W(x, y) e^{i \omega_{m,n} t}.
\end{aligned} \tag{۱۹}
$$

در این معادله:

$$
\begin{aligned}
U(x, y) &= B_{1m,n} \Phi_{u\,m,n}(x, y), \\
V(x, y) &= B_{2m,n} \Phi_{v\,m,n}(x, y), \\
W(x, y) &= B_{3m,n} \Phi_{w\,m,n}(x, y).
\end{aligned} \tag{۲۰}
$$

که در آن، Φ و $\omega_{m,n}$ به‌ترتیب شکل مود خطی و فرکانس طبیعی میکروورق در حالت بدون تغییر شکل استاتیکی است. با جایگذاری معادله‌های (۲۰-۱۹) و نیز پاسخ معادله‌های (۱۴-۱۲) در معادله‌های (۱۸-۱۶) و به‌کارگیری روش گالرکین، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای میکروورق استخراج خواهند شد.

۳-۳- تحلیل پاسخ دینامیکی

به‌منظور حل معادله‌های دینامیکی حاکم بر حرکت میکروورق حول موقعیت استاتیکی آن، از روش مقیاس‌های چندگانه استفاده شده است. بنابراین تغییر مکان‌های میکروورق به‌صورت زیر فرض شده است[۲۶]:

$$
\begin{aligned}
& u_d(x, y, t) = \varepsilon u_1(x, y, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 u_2(x, y, T_0, T_1, T_2) + \\
& \varepsilon^3 u_3(x, y, T_0, T_1, T_2), \\
& v_d(x, y, t) = \varepsilon v_1(x, y, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 v_2(x, y, T_0, T_1, T_2) + \\
& \varepsilon^3 v_3(x, y, T_0, T_1, T_2), \\
& w_d(x, y, t) = \varepsilon w_1(x, y, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 w_2(x, y, T_0, T_1, T_2) + \\
& \varepsilon^3 w_3(x, y, T_0, T_1, T_2).
\end{aligned} \tag{۲۱}
$$

که در آن، T_0، T_1 و T_2 سه مقیاس زمانی به شکل $T_0=t$، $T_1=\varepsilon t$ و $T_2=\varepsilon^2 T$ هستند و ε پارامتر سامان‌دهنده[1] کوچک بدون بعد است. به‌منظور ایجاد توازن بین ترم‌های غیرخطی موجود در معادله‌های با ترم میرایی ویسکوالاستیک η و نیروی تحریک V_d، این دو ترم به‌ترتیب به‌عنوان ترم‌هایی با مرتبه‌ی ε^2 و ε^3 درنظر گرفته شده‌اند. همچنین با درنظر گرفتن این فرض که طول و عرض ورق بسیار به یکدیگر نزدیک هستند، پارامتر بی‌بعد σ_1 به‌صورت زیر تعریف شده است[۲۶]:

$$c=1+\varepsilon^2\sigma_1. \qquad (۲۲)$$

با جایگذاری معادله‌های (۲۲-۲۱) در معادله‌های حرکت دینامیکی میکروورق حول موقعیت استاتیکی آن و مساوی قرار دادن ترم‌های حاوی توان‌های برابر از ε خواهیم داشت:

$order(\varepsilon^1)$:

$$L_{1u}[u_1,v_1,w_1]=p_1\frac{\partial^2u_1}{\partial x^2}+p_2\frac{\partial^2v_1}{\partial x\,\partial y}+p_3\frac{\partial^2u_1}{\partial y^2}+ p_4\frac{\partial w_1}{\partial x}+p_5\frac{\partial w_1}{\partial y}+p_6\frac{\partial^2w_1}{\partial x^2}+p_7\frac{\partial^2w_1}{\partial y^2}+ p_8\frac{\partial^2w_1}{\partial x\,\partial y}+p_9\frac{\partial^2u_1}{\partial t^2}=0, \qquad (۲۳)$$

$$L_{1v}[u_1,v_1,w_1]= q_1\frac{\partial^2v_1}{\partial y^2}+q_2\frac{\partial^2u_1}{\partial x\,\partial y}+q_3\frac{\partial^2v_1}{\partial x^2}+q_4\frac{\partial w_1}{\partial x}+q_5\frac{\partial w_1}{\partial y}+ q_6\frac{\partial^2w_1}{\partial x^2}+q_7\frac{\partial^2w_1}{\partial y^2}+q_8\frac{\partial^2w_1}{\partial x\,\partial y}+q_9\frac{\partial^2v_1}{\partial t^2}=0, \qquad (۲۴)$$

$$L_{1w}[u_1,v_1,w_1]=r_1\frac{\partial^4w_1}{\partial x^4}+r_2\frac{\partial^4w_1}{\partial x^2\partial y^2}+r_3\frac{\partial^4w_1}{\partial y^4}+ r_4\frac{\partial w_1}{\partial x}+r_5\frac{\partial w_1}{\partial y}+r_6\frac{\partial^2w_1}{\partial x^2}+r_7\frac{\partial^2w_1}{\partial y^2}+r_8\frac{\partial^2w_1}{\partial x\,\partial y}+ r_9\frac{\partial u_1}{\partial x}+r_{10}\frac{\partial u_1}{\partial y}+r_{11}\frac{\partial v_1}{\partial x}+r_{12}\frac{\partial v_1}{\partial y}+r_{13}\frac{\partial^2w_1}{\partial t^2}+ r_{14}w_1+r_{15}\frac{\partial^2u_1}{\partial t^2}+r_{16}\frac{\partial^2v_1}{\partial t^2}=0. \qquad (۲۵)$$

$$x=0,1\ ,\ u_1=v_1=w_1=0\ ,\ \text{and}\ \frac{\partial^2w_1}{\partial x^2}=0,\quad y=0,1\ ,\ u_1=v_1=w_1=0\ ,\ \text{and}\ \frac{\partial^2w_1}{\partial y^2}=0. \qquad (۲۶)$$

$order(\varepsilon^2)$:

$$L_{2u}[u_2,v_2,w_2]=-p_1\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial^2w_1}{\partial x^2}-p_2\frac{\partial w_1}{\partial y}\frac{\partial^2w_1}{\partial x\partial y}- p_3\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial^2w_1}{\partial y^2}-p_9\frac{\partial^2u_1}{\partial T_0\partial T_1}, \qquad (۲۷)$$

1- Bookkeeping parameter

$$L_{2v}[u_2,v_2,w_2]=-q_1\frac{\partial w_1}{\partial y}\frac{\partial^2w_1}{\partial y^2}-q_2\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial^2w_1}{\partial x\partial y} -q_3\frac{\partial w_1}{\partial y}\frac{\partial^2w_1}{\partial x^2}-q_9\frac{\partial^2v_1}{\partial T_0\partial T_1}, \qquad (۲۸)$$

$$\begin{aligned}L_{2w}[u_2,v_2,w_2]=&-2\frac{\partial^2w_1}{\partial T_0\,\partial T_1}+\alpha_1\frac{h^2}{a^2}\left(\frac{\partial^2v_1}{\partial T_0^2}\frac{\partial w_1}{\partial y}+\frac{\partial^2u_1}{\partial T_0^2}\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)+\\ &2\alpha_1\frac{h^2}{a^2}\left(\frac{\partial^2v_1}{\partial T_0\,\partial T_1}\frac{\partial w_s}{\partial y}+\frac{\partial^2u_1}{\partial T_0\,\partial T_1}\frac{\partial w_s}{\partial x}\right)\\ &+12\alpha_1(1-\nu)\frac{\partial^2w_s}{\partial x\partial y}\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial w_1}{\partial y}+12\alpha_1(1-\nu)\frac{\partial w_s}{\partial y}\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial^2w_1}{\partial x\partial y}+\\ &12\alpha_1(1-\nu)\frac{\partial w_s}{\partial x}\frac{\partial w_1}{\partial y}\frac{\partial^2w_1}{\partial x\partial y}+6\alpha_1\frac{\partial^2w_s}{\partial y^2}\left\{\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)^2+\nu\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2\right\}+\\ &6\alpha_1\frac{\partial^2w_s}{\partial x^2}\left\{\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2+\nu\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)^2\right\}+12\alpha_1\frac{\partial w_s}{\partial x}\frac{\partial w_1}{\partial x}\left(\frac{\partial^2w_1}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2w_1}{\partial y^2}\right)\\ &+12\alpha_1\frac{\partial w_s}{\partial y}\frac{\partial w_1}{\partial y}\left(\frac{\partial^2w_1}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2w_1}{\partial x^2}\right)+12\alpha_1(1-\nu)\frac{\partial^2w_1}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)+\\ &12\alpha_1\frac{\partial u_1}{\partial x}\left(\frac{\partial^2w_1}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2w_1}{\partial y^2}\right)+12\alpha_1\frac{\partial v_1}{\partial y}\left(\frac{\partial^2w_1}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2w_1}{\partial x^2}\right)+\frac{3\alpha_2V_s{}^2w_1}{(-1+w_s)^4},\end{aligned} \qquad (۲۹)$$

$$x=0,1\ ,\ u_2=v_2=w_2=0\ ,\ \text{and}\ \frac{\partial^2w_2}{\partial x^2}=0,\quad y=0,1\ ,\ u_2=v_2=w_2=0\ ,\ \text{and}\ \frac{\partial^2w_2}{\partial y^2}=0, \qquad (۳۰)$$

$order(\varepsilon^3)$:

$$L_{3u}[u_3,v_3,w_3]=\sigma_1\Gamma_u^{\sigma_1}+\Gamma_u^K-\eta\frac{\partial}{\partial T_0}\Gamma_u^\eta+ \Gamma_u^m\frac{\partial^2u_1}{\partial T_0\,\partial T_2}+p_9\left(2\frac{\partial^2u_2}{\partial T_0\,\partial T_1}+\frac{\partial^2u_1}{\partial T_1^2}\right), \qquad (۳۱)$$

$$L_{3v}[u_3,v_3,w_3]=\sigma_1\Gamma_v^{\sigma_1}+\Gamma_v^K-\eta\frac{\partial}{\partial T_0}\Gamma_v^\eta+ \Gamma_v^m\frac{\partial^2v_1}{\partial T_0\,\partial T_2}+q_9\left(2\frac{\partial^2v_2}{\partial T_0\,\partial T_1}+\frac{\partial^2v_1}{\partial T_1^2}\right), \qquad (۳۲)$$

$$\begin{aligned}L_{3w}[u_3,v_3,w_3]=&\sigma_1(\Gamma_w^{\sigma_1}+\bar{\Gamma}_w^{\sigma_1})-\eta\frac{\partial}{\partial T_0}\Gamma_w^\eta+\Gamma_w^K-\Gamma_w^m\frac{\partial^2w_1}{\partial T_0\,\partial T_2}+\\ &\Gamma_{wu1}^m\frac{\partial^2u_1}{\partial T_0\,\partial T_2}+\Gamma_{wv1}^m\frac{\partial^2v_1}{\partial T_0\,\partial T_2}+\bar{\Gamma}_{wu1}^m\frac{\partial^2u_1}{\partial T_0^2}+\bar{\Gamma}_{wu2}^m\frac{\partial^2u_2}{\partial T_0^2}+\\ &\bar{\Gamma}_{wv1}^m\frac{\partial^2v_1}{\partial T_0^2}+\bar{\Gamma}_{wv2}^m\frac{\partial^2v_2}{\partial T_0^2}+\frac{\alpha_2V_sV_d\,e^{(i\,\Omega T_0)}}{(-1+w_s)^2}\\ &-\alpha_1\frac{h^2}{a^2}\left[2\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial^2u_1}{\partial T_0\,\partial T_1}+2\frac{\partial w_1}{\partial y}\frac{\partial^2v_1}{\partial T_0\,\partial T_1}+\frac{\partial w_s}{\partial x}\left(\frac{\partial^2u_1}{\partial T_1^2}+2\frac{\partial^2u_2}{\partial T_0\,\partial T_1}\right)+\right.\\ &\left.\frac{\partial w_s}{\partial y}\left(\frac{\partial^2v_1}{\partial T_1^2}+2\frac{\partial^2v_2}{\partial T_0\,\partial T_1}\right)\right]-\frac{\partial^2w_1}{\partial T_1^2}-2\frac{\partial^2w_2}{\partial T_0\,\partial T_1}.\end{aligned} \qquad (۳۳)$$

$$x=0,1\ ,\ u_3=v_3=w_3=0\ ,\ \text{and}\ \frac{\partial^2w_3}{\partial x^2}=0,\quad y=0,1\ ,\ u_3=v_3=w_3=0\ ,\ \text{and}\ \frac{\partial^2w_3}{\partial y^2}=0. \qquad (۳۴)$$

که ضریب‌های موجود در این معادله‌ها، در پیوست (ج) معرفی شده‌اند. حل معادله‌های (۲۶-۲۳) به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}u_1&=A(T_1,T_2)\phi_u(x,y)e^{i\omega T_0}+\bar{A}(T_1,T_2)\phi_u(x,y)e^{-i\omega T_0},\\ v_1&=A(T_1,T_2)\phi_v(x,y)e^{i\omega T_0}+\bar{A}(T_1,T_2)\phi_v(x,y)e^{-i\omega T_0},\\ w_1&=A(T_1,T_2)\phi_w(x,y)e^{i\omega T_0}+\bar{A}(T_1,T_2)\phi_w(x,y)e^{-i\omega T_0}\end{aligned} \qquad (۳۵)$$

که در آن، φ_u، φ_v و φ_w شکل مودهای نرمال شده اول

میکروورق هستند، یعنی: $\iint \varphi\, dx\, dy = 1$. هم‌چنین ω نیز فرکانس طبیعی اول سیستم بوده و $A(T_1, T_2)$ تابع مختلطی است که، می‌بایست از شرط حل‌پذیری مسئله به‌دست آید. با جایگذاری معادله‌ی (۳۵) در معادله‌های (۲۹-۲۷) خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
&L_{2u}[u_2, v_2, w_2] = (A^2 e^{2i\,\omega T_0} + 2A\bar{A} + \bar{A}^2 e^{-2i\,\omega T_0}) H_1(x,y) + \\
&2i\,\omega p_9 (\frac{\partial A}{\partial T_1} e^{i\,\omega T_0} - \frac{\partial A}{\partial T_1} e^{-i\,\omega T_0})\phi_u, \\
&L_{2v}[u_2, v_2, w_2] = (A^2 e^{2i\,\omega T_0} + 2A\bar{A} + \bar{A}^2 e^{-2i\,\omega T_0}) H_2(x,y) + \\
&2i\,\omega q_9 (\frac{\partial A}{\partial T_1} e^{i\,\omega T_0} - \frac{\partial A}{\partial T_1} e^{-i\,\omega T_0})\phi_v, \\
&L_{2w}[u_2, v_2, w_2] = (A^2 e^{2i\,\omega T_0} + 2A\bar{A} + \bar{A}^2 e^{-2i\,\omega T_0}) H_3(x,y) + \\
&(2i\,\omega r_{15}\phi_u + 2i\,\omega r_{16}\phi_v - 2i\,\omega\phi_w)(\frac{\partial A}{\partial T_1} e^{i\,\omega T_0} - \frac{\partial A}{\partial T_1} e^{-i\,\omega T_0}).
\end{aligned} \qquad (۳۶)
$$

که در این معادله:

$$
\begin{aligned}
&H_1(x,y) = -p_1 \frac{\partial \phi_w}{\partial x}\frac{\partial^2 \phi_w}{\partial x^2} - p_2 \frac{\partial \phi_w}{\partial y}\frac{\partial^2 \phi_w}{\partial x \partial y} - p_3 \frac{\partial \phi_w}{\partial x}\frac{\partial^2 \phi_w}{\partial y^2}, \\
&H_2(x,y) = -q_1 \frac{\partial \phi_w}{\partial y}\frac{\partial^2 \phi_w}{\partial y^2} - q_2 \frac{\partial \phi_w}{\partial x}\frac{\partial^2 \phi_w}{\partial x \partial y} - q_3 \frac{\partial \phi_w}{\partial y}\frac{\partial^2 \phi_w}{\partial x^2}, \\
&H_3(x,y) = +\alpha_1 \frac{h^2}{a^2}(\frac{\partial^2 \phi_v}{\partial T_0^2}\frac{\partial \phi_w}{\partial y} + \frac{\partial^2 \phi_u}{\partial T_0^2}\frac{\partial \phi_w}{\partial x}) + \\
&12\alpha_1(1-\nu)\frac{\partial^2 w_S}{\partial x \partial y}\frac{\partial \phi_w}{\partial x}\frac{\partial \phi_w}{\partial y} + 12\alpha_1(1-\nu)\frac{\partial w_S}{\partial y}\frac{\partial \phi_w}{\partial x}\frac{\partial^2 \phi_w}{\partial x \partial y} + \\
&12\alpha_1(1-\nu)\frac{\partial w_S}{\partial x}\frac{\partial \phi_w}{\partial y}\frac{\partial^2 \phi_w}{\partial x \partial y} + 6\alpha_1 \frac{\partial^2 w_S}{\partial y^2}\{(\frac{\partial \phi_w}{\partial y})^2 + \nu(\frac{\partial \phi_w}{\partial x})^2\} + \\
&6\alpha_1 \frac{\partial^2 w_S}{\partial x^2}\{(\frac{\partial \phi_w}{\partial x})^2 + \nu(\frac{\partial \phi_w}{\partial y})^2\} + 12\alpha_1 \frac{\partial w_S}{\partial x}\frac{\partial \phi_w}{\partial x}(\frac{\partial^2 \phi_w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \phi_w}{\partial y^2}) + \\
&12\alpha_1 \frac{\partial w_S}{\partial y}\frac{\partial \phi_w}{\partial y}(\frac{\partial^2 \phi_w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \phi_w}{\partial x^2}) + 12\alpha_1(1-\nu)\frac{\partial^2 \phi_w}{\partial x \partial y}(\frac{\partial \phi_u}{\partial y} + \frac{\partial \phi_v}{\partial x}) + \\
&12\alpha_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}(\frac{\partial^2 \phi_w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \phi_w}{\partial y^2}) + 12\alpha_1 \frac{\partial v_1}{\partial y}(\frac{\partial^2 \phi_w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \phi_w}{\partial x^2}) + \frac{3\alpha_2 V_S^2 \phi_w}{(-1 + w_S)^4}.
\end{aligned} \qquad (۳۷)
$$

به‌منظور حذف جمله‌های سکولار از معادله‌ی (۳۶)، فرض شده است که A تنها تابعی از T_2 باشد. با درنظر گرفتن این فرض، مشتقات زمانی نسبت به T_1 از معادله‌ی (۳۶) حذف شده است و حل خصوصی آن به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
&u_2 = \psi_{1u} A^2 e^{2i\,\omega T_0} + 2\psi_{2u} A\bar{A} + \psi_{1u}\bar{A}^2 e^{-2i\,\omega T_0}, \\
&v_2 = \psi_{1v} A^{22i\,\omega T_0} + 2\psi_{2v} A\bar{A} + \psi_{1v}\bar{A}^2 e^{-2i\,\omega T_0}, \\
&w_2 = \psi_{1w} A^2 e^{2i\,\omega T_0} + 2\psi_{2w} A\bar{A} + \psi_{1w}\bar{A}^2 e^{-2i\,\omega T_0}.
\end{aligned} \qquad (۳۸)
$$

که در آن، ψ_j از حل معادله زیر به‌دست خواهد آمد:

$$
\begin{aligned}
&p_1 \frac{\partial^2 \psi_{ju}}{\partial x^2} + p_2 \frac{\partial^2 \psi_{jv}}{\partial x \partial y} + p_3 \frac{\partial^2 \psi_{ju}}{\partial y^2} + \\
&p_4 \frac{\partial \psi_{jw}}{\partial x} + p_5 \frac{\partial w_{jw}}{\partial y} + p_6 \frac{\partial^2 w_{jw}}{\partial x^2} + \\
&p_7 \frac{\partial^2 w_{jw}}{\partial y^2} + p_8 \frac{\partial^2 w_{jw}}{\partial x \partial y} - 4\omega_j^2 p_9 \psi_{ju} = H_1(x,y) \\
&q_1 \frac{\partial^2 \psi_{jv}}{\partial y^2} + q_2 \frac{\partial^2 \psi_{ju}}{\partial x \partial y} + q_3 \frac{\partial^2 \psi_{jv}}{\partial x^2} + \\
&q_4 \frac{\partial \psi_{jw}}{\partial x} + q_5 \frac{\partial \psi_{jw}}{\partial y} + q_6 \frac{\partial^2 \psi_{jw}}{\partial x^2} + \\
&q_7 \frac{\partial^2 \psi_{jw}}{\partial y^2} + q_8 \frac{\partial^2 \psi_{jw}}{\partial x \partial y} - 4\omega_j^2 q_9 \psi_{jv} = H_2(x,y), \\
&r_1 \frac{\partial^4 \psi_{jw}}{\partial x^4} + r_2 \frac{\partial^4 \psi_{jw}}{\partial x^2 \partial y^2} + r_3 \frac{\partial^4 \psi_{jw}}{\partial y^4} + \\
&r_4 \frac{\partial \psi_{jw}}{\partial x} + r_5 \frac{\partial \psi_{jw}}{\partial y} + r_6 \frac{\partial^2 \psi_{jw}}{\partial x^2} + \\
&r_7 \frac{\partial^2 \psi_{jw}}{\partial y^2} + r_8 \frac{\partial^2 \psi_{jw}}{\partial x \partial y} + r_9 \frac{\partial \psi_{ju}}{\partial x} + r_{10} \frac{\partial \psi_{ju}}{\partial y} \\
&+ r_{11} \frac{\partial \psi_{jv}}{\partial x} + r_{12} \frac{\partial \psi_{jv}}{\partial y} + (r_{14} - 4\omega_j^2 r_{13})\psi_{jw} - \\
&4\omega_j^2 r_{15}\psi_{ju} - 4\omega_j^2 r_{16}\psi_{jv} = H_3(x,y) \\
&j = 1, 2.
\end{aligned} \qquad (۳۹)
$$

در این معادله به ازای $j = 1$، مقدار فرکانس طبیعی $\omega_j = \omega$ و به ازای $j = 2$، فرکانس طبیعی $\omega_j = 0$ خواهد بود. به‌منظور حل معادله‌ی (۳۹)، ψ_{ju}، ψ_{jv} و ψ_{jw} به‌صورت زیر فرض می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
&\psi_{ju}(x,y) = \sum_{i=1}^{M} a_{ui}\varphi_{ui} \quad , \\
&\psi_{jv}(x,y) = \sum_{i=1}^{M} a_{vi}\varphi_{vi} \quad , \\
&\psi_{jw}(x,y) = \sum_{i=1}^{M} a_{vi}\varphi_{vi} \, .
\end{aligned} \qquad (۴۰)
$$

در این معادله، ϕ_u، ϕ_v و ϕ_w شکل مودهای نامیرای میکروورق حول موقعیت استاتیکی آن هستند. با جایگذاری معادله‌ی (۴۰) در معادله‌ی (۳۹) و به‌کارگیری روش گالرکین، مقدار ثابت‌های a_i و در نتیجه، مقادیر $\psi_j(x, y)$ به‌دست خواهد آمد.

حال، با جایگذاری معادله‌های (۳۸ و ۳۵) در معادله‌های (۳۳-۳۱) و بیان نزدیک بودن فرکانس تحریک و فرکانس طبیعی اصلی سیستم با استفاده از پارامتر σ_2 به‌شکل

$\Omega=\omega+\varepsilon^2\sigma_2$ [۲۶] خواهیم داشت:

$$L_{3u}[u_3,v_3,w_3]=(\hbar_u^{\sigma_1}\sigma_1A-i\,\omega\eta\,\hbar_u^{\eta}A+\hbar_u^{K}A\bar{A}^2+ i\,\omega\phi_u\,\hbar_u^{m}\frac{dA}{dT_2})e^{i\,\omega T_0}+cc+NST, \tag{۴۱}$$

$$L_{3v}[u_3,v_3,w_3]=(\hbar_v^{\sigma_1}\sigma_1A-i\,\omega\eta\,\hbar_v^{\eta}A+\hbar_v^{K}A\bar{A}^2+ i\,\omega\phi_v\,\hbar_v^{m}\frac{dA}{dT_2})e^{i\,\omega T_0}+cc+NST, \tag{۴۲}$$

$$\begin{aligned}L_{3w}[u_3,v_3,w_3]=&([\hbar_w^{\sigma_1}-\omega^2 r_{16}\phi_v]\sigma_1A-i\,\omega\eta\,\hbar_w^{\eta}A+\\&[\hbar_w^{K}+\omega^2(\phi_u\bar{\hbar}_{wu1}^{m}+\phi_v\bar{\hbar}_{wv1}^{m})+4\omega^2(\psi_{1u}\bar{\hbar}_{wu1}^{m}+\\&\psi_{1v}\bar{\hbar}_{wv1}^{m})]A^2\bar{A}+Fe^{i\sigma_2T_2}-i\,\omega[\hbar_w^{m}\phi_w-\hbar_{wu1}^{m}\phi_u\\&-\hbar_{wv1}^{m}\phi_v]\frac{dA}{dT_2})e^{i\,\omega T_0}+cc+NST.\end{aligned} \tag{۴۳}$$

ضرایب $\hbar$، با اندیس u، v و w با جایگذاری معادله‌ی (۴۴) در ضرایب Γ که در پیوست (ج) آورده شده‌اند، به‌دست خواهند آمد:

$$\begin{aligned}&u_1=\phi_u\,,\ u_2=\psi_{1u}+2\psi_{2u}\,,\\&v_1=\phi_v\,,\ v_2=\psi_{1v}+2\psi_{2v}\,,w_1=\phi_w\,,\\&w_2=\psi_{1w}+2\psi_{2w}\,,\\&F=\frac{\alpha_2V_SV_d}{(-1+w_S)^2}.\end{aligned} \tag{۴۴}$$

از آنجا که معادله‌های (۴۳-۴۱) در حالت همگن دارای جواب غیر صفر است، بنابراین، این سیستم معادله‌ها در حالت غیر همگن، تنها در حالتی دارای جواب است که شرط حل‌پذیری را ارضا کند [۲۶]. به‌منظور تعیین این شرط حل‌پذیری، می‌بایست ابتدا طرفین معادله‌های (۴۳-۴۱) را در χ_u، χ_v و χ_w ضرب کرده و طرفین معادله‌های حاصله را با یکدیگر جمع کرد. χها توابع الحاقی معادله‌ی همگن حاکم بر u_3، v_3 و w_3 هستند که در ادامه‌ی حل به‌دست خواهند آمد. با انتگرال گرفتن از طرفین معادله‌ی حاصله و استفاده از انتگرال جزء به جزء برای انتقال اپراتورهای مشتق به توابع الحاقی، و درنظر داشتن این موضوع که این توابع الحاقی در معادله‌ی همگن صدق می‌کنند، شرط حل‌پذیری معادله به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$KA^2\bar{A}+(\Sigma-i\,\omega\eta\xi)A-i\,\omega m\frac{dA}{dT_2}+f\ e^{i\,\sigma_2T_2}=0. \tag{۴۵}$$

که در آن:

$$\begin{aligned}&m=\iint\{-\chi_u\,\phi_u\,\hbar_u^{m}-\chi_v\,\phi_v\,\hbar_v^{m}+\chi_w\,[\phi_w\,\hbar_w^{m}-\phi_u\,\hbar_{wu1}^{m}-\phi_v\,\hbar_{wv1}^{m}]\}dx\,dy\,,\\&\Sigma=\iint\{\chi_u\,\hbar_u^{\sigma_1}\sigma_1+\chi_v\,\hbar_v^{\sigma_1}\sigma_1+\chi_w\,[\hbar_w^{\sigma_1}-\omega^2r_{16}\phi_v\,]\sigma_1\}dx\,dy\,,\\&\xi=\iint\{\chi_u\,\hbar_u^{\eta}+\chi_v\,\hbar_v^{\eta}+\chi_w\,\hbar_w^{\eta}\}dx\,dy\,,\\&K=\iint\{\chi_u\hbar_u^{K}+\chi_v\,\hbar_v^{K}+\chi_w\,[\hbar_w^{K}+\omega^2(\phi_u\,\bar{\hbar}_{wu1}^{m}+\phi_v\,\bar{\hbar}_{wv1}^{m})+4\,\omega^2(\psi_{1u}\,\bar{\hbar}_{wu1}^{m}+\psi_{1v}\,\bar{\hbar}_{wv1}^{m})]\}dx\,dy\,,\\&f=\iint\chi_w\,F\,dx\,dy\,.\end{aligned} \tag{۴۶}$$

لازم به‌ذکر است که معادله‌های حاکم بر ورق، خودالحاقی نبوده و می‌بایست پس از استخراج معادله‌های حاکم بر توابع الحاقی، این توابع را استخراج کرد. پارامتر A را می‌توان به‌شکل قطبی و با استفاده از دامنه ارتعاش a و زاویه فاز β به‌شکل $A=\frac{1}{2}a\,e^{i\beta}$ بازنویسی کرد. با جایگزین کردن شکل قطبی پارامتر A در معادله‌ی (۴۵) و جداسازی قسمت‌های حقیقی و موهومی معادله حاصله و نیز درنظر گرفتن این فرض که مقدار γ به‌صورت $\gamma=\sigma_2T_2-\beta$ تعریف شود [۲۵]، معادله‌ی (۴۵) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}&m\frac{d\,a}{dT_2}=-a\,\eta\,\xi+2\frac{f}{\omega}\sin\gamma=g_1(a\,,\gamma),\\&m\ a\frac{d\,\gamma}{dT_2}=(m\,\sigma_2+\frac{\Sigma}{\omega})a+\frac{K}{4\,\omega}a^3+2\frac{f}{\omega}\cos\gamma=g_2(a\,,\gamma).\end{aligned} \tag{۴۷}$$

معادله‌ی حاکم بر نقطه‌ی تعادل (a_0,γ_0) با مساوی صفر قرار دادن $d\,a/aT_2$ و $d\,\gamma/dT_2$ به‌دست می‌آید. پس خواهیم داشت:

$$4\frac{f^{\,2}}{\omega^2}=a_0^{\,2}[(\eta\,\xi)^2+(\frac{K}{4\,\omega}a_0^{\,2}+(m\,\sigma_2+\frac{\Sigma}{\omega}))^2]. \tag{۴۸}$$

همان‌طور که در معادله‌ی (۴۸) نشان داده شده است، هنگامی a_0 مقدار بیشینه خود را به‌دست می‌آورد که ترم‌های موجود در پرانتزها برابر صفر شوند، پس خواهیم داشت:

$$\sigma_2=\frac{-K\,a^2-4\Sigma}{4\,m\,\omega}\quad,\quad a_0=\frac{2f}{\eta\,\xi\,\omega}. \tag{۴۹}$$

و درنتیجه فرکانس رزونانس غیرخطی به‌صورت زیر به‌دست خواهد آمد:

$$\Omega=\omega-\frac{f^{\,2}K}{m\,\omega^3\eta\,\xi^2}-\frac{\Sigma}{m\,\omega^2}. \tag{۵۰}$$

همچنین با جای‌گذاری معادله‌های (۳۵ و ۳۸) در معادله‌ی (۲۱) تغییر شکل‌های میکروورق به‌صورت زیر به‌دست خواهند آمد:

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{1}{2} a\, \phi_u \cos(\Omega t - \gamma) + \\
&\frac{1}{2} a^2 [\psi_{2u} + \frac{1}{2}\psi_{1u} \cos(2(\Omega t - \gamma))], \\
v &= \frac{1}{2} a\, \phi_v \cos(\Omega t - \gamma) + \\
&\frac{1}{2} a^2 [\psi_{2v} + \frac{1}{2}\psi_{1v} \cos(2(\Omega t - \gamma))], \\
w &= \frac{1}{2} a\, \phi_w \cos(\Omega t - \gamma) + \\
&\frac{1}{2} a^2 [\psi_{2w} + \frac{1}{2}\psi_{1w} \cos(2(\Omega t - \gamma))].
\end{aligned} \tag{۵۱}
$$

۳-۴- تحلیل پایداری

بـه‌منظـور مطالعـه‌ی پایـداری سیسـتم، در ابتـدا مـی‌بایسـت ماتریس ژاکوبین را به‌دسـت آورد [۲۶]. بنـابراین از معادلـه‌ی (۴۷) به‌دست می‌آید که:

$$
\begin{bmatrix} \Delta a' \\ \Delta \gamma' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial a} & \frac{\partial g_1}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial g_2}{\partial a} & \frac{\partial g_2}{\partial \gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta \gamma \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix} -\eta\xi & \frac{2f}{\omega}\cos(\gamma_0) \\ \frac{Ka_0}{2\omega} - \frac{2f}{a_0^{\,2}\omega}\cos(\gamma_0) & \frac{-2f}{a_0\omega}\sin(\gamma_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta \gamma \end{bmatrix}. \tag{۵۲}
$$

اگر ماتریس ضرایب معادلـه‌ی (۵۲) بـا C نمـایش داده شـود، معادلـه‌ی مشخصــه‌ی سیســتم بــا معادلــه‌ی $C - \lambda I = 0$ به‌دست می‌آید که در آن I ماتریس واحد است. پس می‌توان نوشت:

$$
\lambda^2 + 2(\eta\xi)\lambda + \left[(\eta\xi)^2 + \{(m\sigma_2 + \frac{\Sigma}{\omega}) + \frac{Ka_0^{\,2}}{4\omega}\}\{(m\sigma_2 + \frac{\Sigma}{\omega}) + \frac{3Ka_0^{\,2}}{4\omega}\} \right] = 0. \tag{۵۳}
$$

و در نتیجه مقادیر λ به‌صورت زیر به‌دست خواهد آمد:

$$
\lambda = -\eta\xi \pm \sqrt{-\{(m\sigma_2 + \frac{\Sigma}{\omega}) + \frac{Ka_0^{\,2}}{4\omega}\}\{(m\sigma_2 + \frac{\Sigma}{\omega}) + \frac{3Ka_0^{\,2}}{4\omega}\}}. \tag{۵۴}
$$

درصورتی‌که مقادیر ویژه‌ی سیستم مثبت باشد، ناپایـداری رخ می‌دهد و در صورتی‌که یکی از مقادیر ویژه برابـر صـفر باشـد، نقطه‌ی انشعاب[1] به‌وجود خواهد آمد. با درنظر گرفتن معادله‌ی (۵۳) این شرایط زمانی رخ خواهد داد که:

$$
(\eta\xi)^2 + \{(m\sigma_2 + \frac{\Sigma}{\omega}) + \frac{Ka_0^{\,2}}{4\omega}\}\{(m\sigma_2 + \frac{\Sigma}{\omega}) + \frac{3Ka_0^{\,2}}{4\omega}\} = 0 \tag{۵۵}
$$

درصورتی‌که از معادله‌ی (۴۸) نسـبت بـه a_0 مشـتق گرفتـه شود خواهیم داشت:

1- Bifurcation Point

$$
\frac{d\sigma_2}{da_0} = \frac{-\left[(\eta\xi)^2 + \{(m\sigma_2 + \frac{\Sigma}{\omega}) + \frac{Ka_0^2}{4\omega}\}\{(m\sigma_2 + \frac{\Sigma}{\omega}) + \frac{3Ka_0^2}{4\omega}\} \right]}{ma_0\left[(m\sigma_2 + \frac{\Sigma}{\omega}) + \frac{Ka_0^{\,2}}{4\omega} \right]}. \tag{۵۶}
$$

معادله‌های (۵۶-۵۵) نشان می‌دهـد کـه نقطـه‌ی انشـعاب در صـورتی رخ مـی‌دهـد کـه $\frac{d\sigma_2}{da_0}$ مسـاوی صـفر باشـد. بـا مشتق‌گیری از معادله‌ی (۴۷) خواهیم داشت:

$$
\frac{d}{d\sigma_2} \begin{bmatrix} g_1(a,\gamma) \\ g_2(a,\gamma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}. \tag{۵۷}
$$

و از آنجا که درجـه مـاتریس حاصـل از ضـرب مـاتریس C در ماتریس معادله‌ی (۵۷) برابر ۲ است، ایـن نقطـه‌ی انشـعاب از نوع نقطه‌ی زینی[2] است.

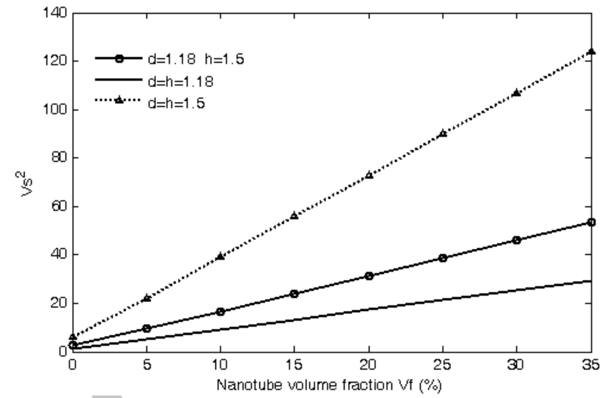
۴- بحث

همان‌طورکه در شکل **۳** نشان داده شده اسـت، مـدول یانـگ میکروصفحه نانوکامپوزیتی تقویت شده با نانوتیوب کـربن، بـا افزایش درصد حجمی نانوتیوب کربن به‌صورت خطی افـزایش می‌یابد. به‌عبارت دیگر، بـا افـزایش درصـد حجمـی نـانوتیوب کربن، میکروصفحه سفت‌تر شده و سـختی آن بـالاتر مـی‌رود. این موضوع به‌صورت مستقیم ناپایـداری پـولین میکـروورق را تحت تأثیر قرار می‌دهد. هنگامی‌که درصـد حجمـی نـانوتیوب افزایش می‌یابد، سختی ورق و دانسیته آن به‌صورت هـم‌زمـان افزایش می‌یابد. نرخ افزایش این پارامترها و تأثیر آنها بـر روی تغییر شکل و فرکانس میکروورق از جمله موارد مهمی هستند که می‌بایست مورد بررسی قرار گیرند.

شکل **۷** تغییرات ولتاژ پولین را نسبت بـه درصـد حجمـی نـانوتیوب کـربن موجـود در نانوکامپوزیـت مـورد اسـتفاده در میکروورق نشان می‌دهد. کلیه تحلیل‌ها به ازای $a = 310\mu m$ و $\varepsilon_0 = 8.854\times10^{-12} F/m$ و نیز خواص مکـانیکی ورق SiO_2 مطــابق جــدول **۲** و نیــز خــواص مکــانیکی میکــروورق نانوکامپوزیتی مطابق روش اشلبی-موری-تاناکـا انجـام شـده است. همان‌گونه که در شکل **۷** مشاهده می‌شود، هنگامی‌کـه درصد حجمی افزایش می‌یابد، ولتاژ پولین نیز به‌صورت خطـی افزایش می‌یابد و از آنجا کـه مطـابق شـکل **۳** بـه ازای مقـدار

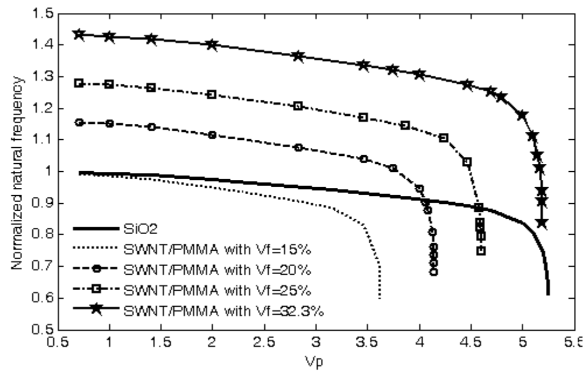
2- Saddle Node Bifurcation

درصد حجمی معادل $V_f \approx 32.2\%$، مدول یانگ میکروورق نانوکامپوزیتی تقویت شده با نانوتیوب کربن، با مدول یانگ میکروورق SiO_2 برابر می‌شود، می‌توان گفت ولتاژ پولین میکروورق نانوکامپوزیتی نیز به ازای $V_f \approx 32.2\%$ با ولتاژ پولین میکروورق SiO_2 برابر خواهد شد، اما همان‌گونه که در شکل **۸** نیز نشان داده شده است، فرکانس طبیعی این میکروورق نانوکامپوزیتی بسیار بالاتر از میکروورق SiO_2 است.

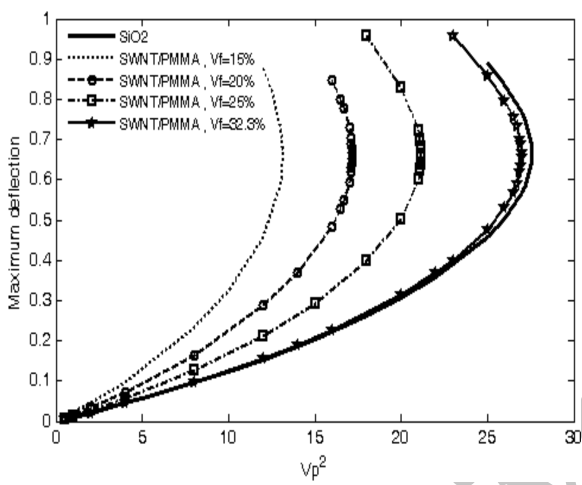


شکل (۷): تغییرات ولتاژ پولین به ازای تغییرات درصد حجمی نانو تیوب کربن.

تغییرات فرکانس طبیعی میکروورق‌های مختلف نسبت به تغییرات ولتاژ الکترواستاتیک به ازای $\alpha_1 = 1$ در شکل **۸** نشان داده شده است. همان‌گونه که در این شکل مشاهده می‌شود، به ازای درصدهای حجمی بالاتر از ۱۵٪ از نانوتیوب کربن، فرکانس طبیعی میکروورق نانوکامپوزیتی، بالاتر از میکروورق SiO_2 است. این رفتار، یکی از رفتارهای مطلوب و ایده‌آلی است که در طراحی و ساخت میکروادوات دنبال می‌شود. شکل **۹** تغییر شکل خمشی میکروورق‌های نانوکامپوزیتی را با میکروورق SiO_2 مقایسه کرده است. همان‌گونه که در این شکل مشاهده می‌شود، به ازای یک ولتاژ اعمالی مشخص، تغییر شکل خمشی میکروورق به ازای کاهش درصد حجمی نانوتیوب کربن افزایش می‌یابد. با درنظر گرفتن شکل **۸**، اگرچه فرکانس طبیعی میکروصفحه نانوکامپوزیتی با ۱۵٪ نانوتیوب کربن، به ازای ولتاژهایی کمتر از ولتاژ پولین، به‌طور تقریبی برابر با میکرو صفحه SiO_2 است، اما تغییر شکل خمشی آن بسیار بالاتر از میکروصفحه SiO_2 است (شکل **۹**).



شکل(۸):تغییرات فرکانس طبیعی میکروورق نسبت به ولتاژ الکترواستاتیک ($\alpha_1 = 1$).



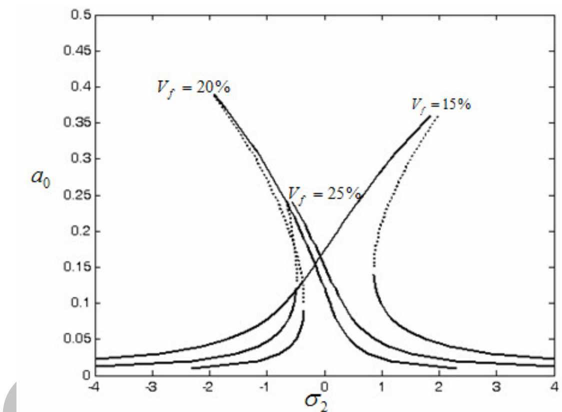
شکل (۹): بیشینه تغییر شکل خمشی میکروورق نسبت به نیروی الکترواستاتیک برای درصدهای مختلف نانوتیوب کربن.

اگرچه این موضوع یک خاصیت مطلوب به‌شمار می‌رود، ولی باید به این نکته نیز توجه داشت که در این حالت، ناپایداری پولین در میکروصفحه نانوکامپوزیتی سریع‌تر و در ازای ولتاژهای پایین‌تری رخ می‌دهد. از طرف دیگر، بیشینه تغییر شکل خمشی میکروورق نانوکامپوزیتی با ۳۲/۳٪ نانوتیوب کربن، به ازای ولتاژهایی کمتر از ولتاژ پولین برابر با میکروصفحه SiO_2 بوده و فرکانس طبیعی آن نیز به‌صورت تقریبی ۱/۴ برابر میکروصفحه SiO_2 است که این رفتار به‌عنوان پدیده‌ای مطلوب در میکروادوات به‌شمار می‌رود.

در کنار این موضوع می‌بایست به میرایی بالای نانوکامپوزیت‌ها نیز توجه داشت. مقدار η برای سرامیک‌هایی همانند SiO_2 در محدوده‌ی $(۱۰)^{-۴}$ – $(۱۰)^{-۵}$ [۲۷] و به‌عنوان مثال برای نانوکامپوزیت با ۱۰٪ نانوتیوب کربن در محدوده

$(۱۰)^{-۲}$ - $(۱۰)^{-۱}$ [۲۸] است. پس این میرایی به‌شدت رفتار ارتعاشی میکروورق را تحت تأثیر قرار می‌دهد.

شکل **۱۰** تغییرات بیشینه دامنه ارتعاش a_0 را نسبت به پارامتر σ_2 به ازای ورق‌های نانوکامپوزیتی با درصدهای مختلف از نانوتیوب کربن و برای $V_s{}^2 = 13$ نشان می‌دهد. در این نمودار سایر پارامترهای طراحی برای تمامی نمونه‌ها ثابت درنظر گرفته شده است.

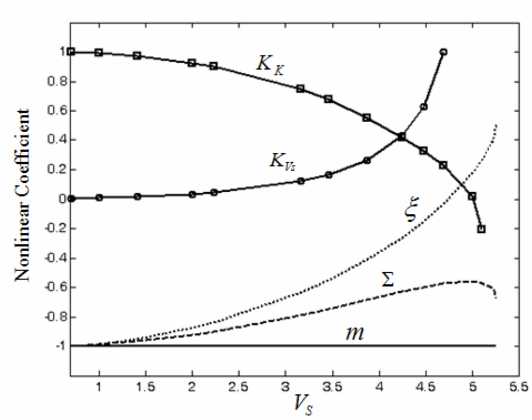


شکل (۱۰): تغییرات بیشینه‌ی دامنه‌ی ارتعاش نسبت به پارامتر σ_2 به ازای درصدهای مختلف حجمی نانوتیوب کربن.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، به ازای این ولتاژ اعمالی، میکروورق نانوکامپوزیتی با ۱۵٪ نانوتیوب کربن دارای رفتار غیرخطی از نوع سخت‌شوندگی و میکروورق‌های نانوکامپوزیتی با ۲۰٪ و ۲۵٪ نانوتیوب کربن دارای رفتار غیرخطی از نوع نرم‌شوندگی هستند. هم‌چنین بیشینه دامنه ارتعاش نانوکامپوزیت با ۲۵٪ نانو تیوب، نسبت به نانوکامپوزیت با ۲۰٪ نانوتیوب، کاهش آشکاری را نشان می‌دهد، که نشان از افزایش سختی این نمونه از میکروورق دارد.

لازم به‌ذکر است که ترم‌های بیانگر سختی در معادله‌های میکروورق می‌توانند به دو دسته تقسیم شوند: ترم‌های سختی ساختاری میکروورق و ترم‌های سختی ناشی از نیروی الکترواستاتیک اعمال شده به میکروورق. زمانی‌که سختی ناشی از نیروی الکترواستاتیک بر سختی ساختاری میکروورق غلبه کند، حالت نرم‌شوندگی و زمانی‌که سختی ساختاری بر سختی الکترواستاتیک غلبه کند، رفتار سخت‌شوندگی بروز می‌کند.

شکل **۱۱** تغییرات ضرایب غیرخطی ظاهر شده در معادله‌ی (۵۰) را نشان می‌دهد. در این شکل ترم سختی K به دو ترم سختی ساختاری K_K و سختی الکترواستاتیک K_{Vs} تقسیم شده است. با هدف ساده‌سازی شکل‌ها و برای اینکه بتوان تمامی این ضریب‌های غیرخطی را در یک شکل با یکدیگر مقایسه کرد، کلیه‌ی این ضریب‌های غیرخطی نسبت به بیشینه‌ی مقداری که هر کدام از آنها داشته‌اند، نرمال شده‌اند.



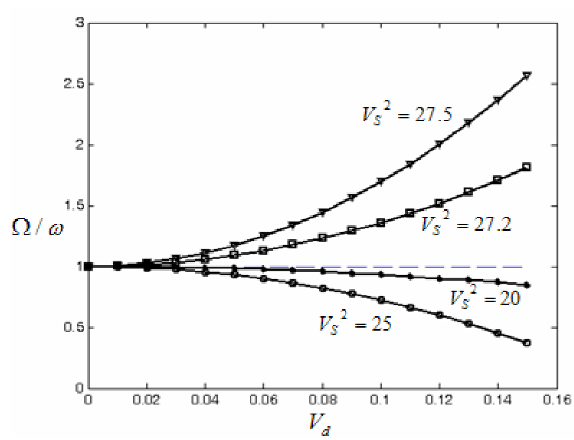
شکل (۱۱): تغییرات ضرایب غیرخطی نرمال شده نسبت به ولتاژ الکترواستاتیک.

همان‌گونه که در این شکل نیز مشاهده می‌شود، مقدار پارامتر m به ازای مقادیر مختلف ولتاژ الکترواستاتیک تغییر محسوسی نداشته و ثابت است. ضریب غیرخطی Σ که ضرایب ترم‌های حاوی σ_1 را تشکیل می‌دهد، به ازای افزایش ولتاژ الکترواستاتیک افزایش یافته است و در ولتاژهای نزدیک به ۵ ولت دوباره کاهش می‌یابد. قدرمطلق ضریب غیرخطی ξ که در واقع از جملات میرایی ناشی می‌شود، نیز با افزایش ولتاژ الکترواستاتیک، در ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. این نکته در تحلیل رفتار دینامیکی سیستم بسیار با اهمیت است. برخلاف سیستم‌های الاستیک که میرایی سیستم ثابت بوده و تنها با ضریب میرایی ویسکوز c بیان می‌شود، در سیستم‌های ویسکوالاستیک، همان‌گونه که در شکل **۱۱** نیز مشاهده می‌شود، مقدار میرایی متغیر است و با افزایش ولتاژ الکترواستاتیک، میرایی آن نیز تغییر می‌یابد. این میرایی می‌تواند نقش مهمی در جابه‌جا کردن فرکانس‌های غیرخطی

ایفا کند.

همان‌گونه که در شکل **۱۰** نشان داده شده است، مقدارهای سختی ساختاری میکروورق نانوکامپوزیتی به ازای افزایش ولتاژ الکتروستاتیک کاهش یافته و سختی الکتروستاتیک آن افزایش می‌یابد، که نرخ تغییرات آنها می‌تواند نشانگر رفتار سخت‌شوندگی و یا نرم‌شوندگی سیستم باشد.

شکل **۱۲** تغییرات فرکانس طبیعی غیرخطی میکروورق نانوکامپوزیتی با ۳۲/۳٪ نانوتیوب کربن را نسبت به ولتاژ دینامیک اعمال شده به ورق و به ازای مقادیر مختلف ولتاژ استاتیکی نشان می‌دهد. همان‌گونه که در این شکل نیز مشاهده می‌شود، به ازای ولتاژهای استاتیکی مختلف، سیستم می‌تواند رفتار نرم‌شوندگی و یا سخت‌شوندگی از خود نشان دهد. باید به این نکته توجه داشت که رفتار غیرخطی سیستم در گذر از نرم‌شوندگی به سخت‌شوندگی، از اطراف ناحیه خطی نیز عبور می‌کند. پس می‌توان مقدار ولتاژ استاتیکی اعمالی به سیستم را به‌گونه‌ای تنظیم کرد که رفتار سیستم به حالت خطی نزدیک شود. همچنین این کار را می‌توان با قرار دادن لایه‌ای از پیزوالکتریک بر روی ورق و تغییر در میزان سختی آن انجام داد. این موضوع در میکروحسگرها/میکروعملگرها کاربرد فراوانی دارد. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش میزان نیروی دینامیکی اعمال شده به ورق، جابه‌جایی فرکانسی افزایش می‌یابد و فرکانس غیرخطی به مقادیری کمتر و یا بیشتر از فرکانس خطی منتقل می‌شود.



شکل (۱۲): تغییرات فرکانس غیرخطی نسبت به ولتاژ دینامیک V_d به ازای مقادیر مختلف V_S.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله رفتار استاتیکی، دینامیکی غیر خطی یک میکروورق ویسکوالاستیک نانوکامپوزیتی مورد بررسی قرار گرفته است. در این مقاله نشان داده شده است که با استفاده از میکروورق‌های نانوکامپوزیتی می‌توان به تغییر شکل‌هایی معادل تغییر شکل میکروورق الاستیک در فرکانس‌هایی بسیار بالاتر از فرکانس‌های میکروورق الاستیک دست یافت که این موضوع به‌شدت در میکروادواتی نظیر میکروسوئیچ‌ها مناسب و مطلوب است. اما رفتار دینامیکی میکروورق‌های نانوکامپوزیتی محدودیت‌هایی برای استفاده آن به‌وجود می‌آورد که از مهم‌ترین آنها می‌توان به میرایی بسیار بالای آنها اشاره کرد. علاوه‌بر ضریب میرایی بالای نانوکامپوزیت‌ها، میرایی میکروورق به ازای افزایش ولتاژ الکتروستاتیک نیز تغییر می‌یابد که خود، پدیده‌ای نامطلوب در میکروادوات به‌شمار می‌ورد. همچنین، رفتار غیرخطی میکروورق نانوکامپوزیتی به ازای تغییر در میزان درصد حجمی نانوتیوب کربن به‌طور کامل، متفاوت بوده است و می‌بایست در طراحی و ساخت میکروادوات و به‌ویژه میکرورزوناتورها مورد توجه قرار گیرد.

مراجع

1. Zengerle, R., Richter, A., and Sandmaier, H. "A Micro Membrane Pump with Electrostatic Actuation", Proc. Micro Electro Mechanical Sys. Conf., pp. 19-24, Germany, 1992.
2. Zhang, X.M., Chau, F.S., Quan, C., Lam, Y.L., and Liu, A. Q. "A Study of the Static Characteristics of a Torsional Micromirror" Sensors Actuators A, Vol. 90, No's. 1-2, pp. 73–81, 2001.
3. Hsu, P. C., Mastrangelo, C.H., and Wise, K.D. "A High Sensitivity Polysilicon Diaphragm Condenser Microphone", Proc. MEMS Conf., pp. 580-585, Heidelberg, Germany, 1998.
4. Scheeper, P.R., Van-Der-Donk, A.G.H., and Bergveld, P. "A Review of Silicon Microphones", Sensors Actuators A, Vol. 44, No. 1, pp. 1–11, 1999.
5. Tilmans, H.A. and Legtenberg, R., "Electrostatically Driven Vacuum-Encapsulated Polysilicon Resonators: part II. Theory and Performance", Sensors Actuators A, Vol. 45, No. 1, pp. 67–84, 1994.
6. Francais, O. and Dufour, I. "Normalized Abacus for the Global Behavior of Diaphragms: Pneumatic, Electrostatic, Piezoelectric or

Electromagnetic Actuation", J. Model. Simul. Microsys., Vol. 2, No. 1, pp. 149–160, 1999.
7. Ng, T.Y., Jiang, T.Y., Li, H., Lam, K.Y., and Reddy, J.N. "A Coupled Field Study on the Non-Linear Dynamic Characteristics of an Electrostatic Micropump", J. Sound and Vib., Vol. 273, No's. 4-5, pp. 989–1006, 2004.
8. Porfiri, M. "Vibrations of Parallel Arrays of Electrostatically Actuated Microplates", J. Sound Vib., Vol. 315, No's. 4-5, pp. 1071–1085, 2008.
9. Ashrafi, B., Hubert, P., and Vengallatore, S. "Carbon Nanotube-Reinforced Composites as Structural Materials for Microactuators in Microelectromechanical Systems", Nanotech., Vol. 17, No. 19, pp. 4895–4903, 2006.
10. Shen, G.R., Cheng, Y.T., and Tsai, L.N. "Synthesis and Characterization of Ni–P–CNT Nanocomposite Film for MEMS Applications" IEEE Trans. Nanotechnol., Vol. 4, Issue 5, pp. 47–539, 2005.
11. Tsai, L.N., Cheng, Y.T., Hsu, W., and Fang, W. "Ni–Carbon Nanotubes Nanocomposite for Robust Microelectromechanical Systems Fabrication" J. Vac. Sci. Tech. B, Vol. 24, No. 1, pp. 10–205, 2006.
12. Fang, W., Chu, H.Y., Hsu, W.K., Cheng, T.W., and Tai, N.H. "Polymer-Reinforced Aligned Multiwalled Carbon Nanotube Composites for Microelectromechanical Systems Applications", Adv. Mater., Vol. 17, No. 24, pp. 2987–92, 2005.
13. Coleman, J.N., Khan, U., Blau, W.J., and Gun'ko, Y.K. "Small but Strong: a Review of the Mechanical Properties of Carbon-Nanotube–Polymer Composites", Carbon, Vol. 44, No. 9, pp. 1624-52, 2006.
14. Coleman, J.N., Khan, U., and Gun'ko, Y.K. "Mechanical Reinforcement of Polymers Using Carbon Nanotubes", Adv. Mater., Vol. 18, No. 6, pp. 689–706, 2006.
15. Thostenson, E.T., Li, C., and Chou, T.W. "Nanocomposites in Context", Comp. Sci. Tech., Vol. 65, No's. 3-4, pp. 491–516, 2005.
16. Fu, Y.M. and Zhang, J. "Nonlinear Static and Dynamic Responses of an Electrically Actuated Viscoelastic Microbeam", Acta Mech. Sin., Vol. 25, No. 2, pp. 211–218, 2009.
17. Fu, Y.M., Zhang, J., and Bi, R.G. "Analysis of the Nonlinear Dynamic Stability for an Electrically Actuated Viscoelastic Microbeam", Microsyst. Technol., Vol. 15, No. 5, pp. 763-9, 2009.
18. Fu, Y. and Zhang, J. "Active Control of the Nonlinear Static and Dynamic Responses for Piezoelectric Viscoelastic Microplates", Smart Mater. Struct., Vol. 18, No. 9, 2009.
19. Zamanian, M., Khadem, S.E., and Mahmoodi, S.N. "Nonlinear Response of a Resonant Viscoelastic Microbeam under an Electrical Actuation", Struct.l Eng. and Mech., Vol. 35, No. 4, pp. 387-407, 2010.
20. Iijima, S. "Helical Microtubules of Graphitic Carbon", Nature, Vol. 354, No. 6348, pp. 56-58, 1991.
21. Chen, C.H. and Cheng, C.H. "Effective Elastic Moduli of Misoriented Short-Fiber Composites" Int. J. Solids Struct., Vol. 33, No. 17, pp. 2519–39, 1996.
22. Jalali, A. "Nonlinear Vibration and Stability Analysis of a Rectangular Nanocomposite Viscoelastic Microplate under Electrostatic Actuation" PhD Dissertation, Dep't of Mech.l and Aerospace Eng., Tarbiat Modares Univ., Tehran, pp. 25-49, 2011 (in Persian).
23. Shooshtari A. and Khadem, S.E. "Nonlinear Vibration of a Viscoelastic Rectangular Plate, Based on First Order Shear Deformation Theory" Aerospace Mech. J., Vol. 2, No. 1, pp. 77-94, 2006 (in Persian).
24. Meirovitch, L. "Analytical Methods in Vibrations", Prentice Hall, 1997.
25. Xiaopeng, Z., Eihab, M. A.R., and Nayfeh, A.H. "A Reduced-Order Model for Electrically Actuated Microplates", J. Micromech. Microeng. Vol. 14, No. 7, pp. 900–906, 2004.
26. Nayfeh, A.H. "An Introduction to Perturbation Techniques", Wiley, New York, 1981.
27. Cebon, D., and Ashby, M.F. "Material Selection for Precision Instruments", Meas. Sci. and Tech., Vol. 5, pp. 296-306, 1994.
28. Kireitseu Maksim, V. "Preliminary Results on Rheological and Damping Properties of Nanoparticle- Reinforced Materials", Annul Transactions of the Nordic Theology soci., Vol. 14, pp. 107-114, 2006.

پیوست الف: رابطه‌های مربوط به محاسبه خواص مکانیکی و مادی نانوکامپوزیت‌ها با استفاده از روش اشلبی موری تاناکا

فرض اصلی مورد استفاده روش اشلبی موری تاناکا، تقریب زدن الیاف‌های کوچک به‌عنوان بیضی‌های کوچک با نسبت لاغری $s = L/2r$ است. بر این اساس، مدول یانگ کامپوزیت از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$C^C = C^M + V_f \left\langle (C^N - C^M) A^N \right\rangle \left[(1-V_f) I + V_f \left\langle A^N \right\rangle \right]^{-1}. \quad \text{(الف-۱)}$$

که در آن، C^C، C^M و C^N به‌ترتیب تانسورهای سفتی کامپوزیت، ماتریس و نانوالیاف هستند. همچنین I ماتریس واحد می‌باشد و تانسور A^N نیز به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A^N = [I + S(C^M)^{-1}(C^N - C^M)]^{-1}. \quad \text{(الف-۲)}$$

که در آن، S تانسور اشلبی است. المان‌های تانسور اشلبی تابعی از ضریب لاغری s و نسبت پواسون ماتریس بوده و به‌صورت جدول **الف-۱** تعریف می‌شوند:

جدول الف-۱. المان‌های تانسور اشلبی [۹].

	Ellipsoid (aspect ratio, s)	Circular cylinder ($\lim s \to \infty$)
S_{11}	$\frac{4Q}{3} + RI_3 + 2s^2T$	0
$S_{22} = S_{33}$	$Q + RI_1 + \frac{3T}{4}$	$\frac{5-4\nu^M}{8(1-\nu^M)}$
$S_{23} = S_{32}$	$\frac{Q}{3} - RI_1 + \frac{4T}{3}$	$\frac{-1+4\nu^M}{8(1-\nu^M)}$
$S_{21} = S_{31}$	$-RI_1 - s^2T$	$\frac{\nu^M}{2(1-\nu^M)}$
$S_{12} = S_{13}$	$-RI_3 - T$	0
S_{44}	$\frac{Q}{3} + RI_1 + \frac{T}{4}$	$\frac{3-4\nu^M}{8(1-\nu^M)}$
$S_{55} = S_{66}$	$2R - \frac{RI_1}{2} - \frac{1+s^2}{2}T$	$\frac{1}{4}$
For other S_{ij}	0	0

که در آن:

$$I_1 = \frac{2s}{\sqrt{(1-s^2)^3}}[s\sqrt{s^2-1} - \cosh^{-1}(s)], \quad \text{(الف-۳)}$$

$$Q = \frac{3}{8(1-\nu^M)}, \; R = \frac{1-2\nu^M}{8(1-\nu^M)}, \quad \text{(الف-۴)}$$
$$T = Q\frac{4-3I_1}{3(s^2-1)}, \; I_3 = 4-2I_1.$$

با استفاده از این روابط می‌توان مدول الاستیک کامپوزیت‌ها را برای کامپوزیت‌های با الیاف کاملاً هم محور و یا با الیاف‌های با جهات کاملاً تصادفی استخراج نمود.

همچنین برای استخراج دانسیته کامپوزیت نیز از رابطه‌ی زیر استفاده می‌شود:

$$\rho^C = (1-V_f)\rho^M + V_f \rho^N. \quad \text{(الف-۵)}$$

که در آن، ρ^C، ρ^M و ρ^N به‌ترتیب دانسیته کامپوزیت، ماتریس و نانوالیاف است.

پیوست ب: ضرایب مربوط به معادلات (۱۹)-(۱۶):

$$\text{(ب-۱)}$$
$$p_1 = 1,$$
$$p_2 = \frac{1+\nu}{2},$$
$$p_3 = \frac{1-\nu}{2},$$
$$p_4 = \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2},$$
$$p_5 = \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y},$$
$$p_6 = \frac{\partial w_s}{\partial x},$$
$$p_7 = \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial w_s}{\partial x},$$
$$p_8 = \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial w_s}{\partial y},$$
$$p_9 = \frac{-h^2}{12a^2}.$$
$$q_1 = 1, q_2 = \frac{1+\nu}{2},$$
$$q_3 = \frac{1-\nu}{2},$$
$$q_4 = \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y},$$
$$q_5 = \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2},$$
$$q_6 = \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial w_s}{\partial y}, q_7 = \frac{\partial w_s}{\partial y},$$
$$q_8 = \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial w_s}{\partial x},$$
$$q_9 = \frac{-h^2}{12a^2}.$$
$$r_1 = r_3 = 1,$$
$$r_2 = 2,$$
$$r_4 = -12\alpha_1 \frac{\partial w_s}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}\right) -$$
$$12\alpha_1(1-\nu)\frac{\partial w_s}{\partial y}\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y},$$

$$r_5 = -12\alpha_1 \frac{\partial w_s}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}\right) - 12\alpha_1 (1-\nu) \frac{\partial w_s}{\partial x} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y},$$

$$r_6 = -12\alpha_1 \frac{\partial u_s}{\partial x} - 12\alpha_1 \nu \frac{\partial v_s}{\partial y} - 6\alpha_1 \left(\left(\frac{\partial w_s}{\partial x}\right)^2 + \nu \left(\frac{\partial w_s}{\partial y}\right)^2\right) - 12 \frac{a^2}{h^2} N_1,$$

$$r_7 = -12\alpha_1 \frac{\partial v_s}{\partial y} - 12\alpha_1 \nu \frac{\partial u_s}{\partial x} - 6\alpha_1 \left(\left(\frac{\partial w_s}{\partial y}\right)^2 + \nu \left(\frac{\partial w_s}{\partial x}\right)^2\right) - 12 \frac{a^2}{h^2} N_2,$$

$$r_8 = -12\alpha_1 (1-\nu)\left(\frac{\partial u_s}{\partial y} + \frac{\partial v_s}{\partial x} + 2\frac{a^2}{h^2} N_{12} + \frac{\partial w_s}{\partial x}\frac{\partial w_s}{\partial y}\right),$$

$$r_9 = -12\alpha_1 \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}\right),$$

$$r_{10} = r_{11} = -12\alpha_1 (1-\nu) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y},$$

$$r_{12} = -12\alpha_1 \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}\right)$$

$$r_{13} = 1,$$

$$r_{14} = \frac{2\alpha_2 V_s^2}{(-1+w_s)^3},$$

$$r_{15} = -\alpha_1 \frac{h^2}{a^2} \frac{\partial w_s}{\partial x},$$

$$r_{16} = -\alpha_1 \frac{h^2}{a^2} \frac{\partial w_s}{\partial y}.$$

پیوست ج: ضریب‌های موجود در معادله‌های مربوط به مرتبه ε^3 در روش مقیاس‌های چندگانه (معادله‌های (۳۲-۳۴))

$$\Gamma_u^{\sigma_1} = -\left(p_2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} + 2p_3 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + 2\left(p_4 - \frac{\partial^2 w_S}{\partial x^2}\right)\frac{\partial w_1}{\partial x} + 2p_5 \frac{\partial w_1}{\partial y} + 2p_7 \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + 2p_8 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y}\right),$$

$$\Gamma_u^{K} = -\left(p_1\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\frac{\partial w_2}{\partial x}\right) + p_2\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y}\frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial y}\frac{\partial^2 w_2}{\partial x \partial y}\right) + p_3\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}\frac{\partial w_2}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}\right)\right),$$

$$\Gamma_u^{\eta} = p_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + p_2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} + p_3 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + p_4 \frac{\partial w_1}{\partial x} + p_5 \frac{\partial w_1}{\partial y} + p_6 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + p_7 \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + p_8 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y},$$

$$\Gamma_u^{m} = 2p_9.$$

(ج-۱)

$$\Gamma_v^{\sigma_1} = -\left(2q_2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + q_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + q_4 \frac{\partial w_1}{\partial x} + \left(q_5 + 2\frac{\partial^2 w_S}{\partial y^2}\right)\frac{\partial w_1}{\partial y} + q_6 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + 3q_7 \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + q_8 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y}\right),$$

$$\Gamma_v^{K} = -\left(q_1\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}\frac{\partial w_2}{\partial y}\right) + q_2\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y}\frac{\partial w_2}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial^2 w_2}{\partial x \partial y}\right) + q_3\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial y}\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}\right)\right),$$

$$\Gamma_v^{\eta} = q_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + q_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + q_3 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + q_4 \frac{\partial w_1}{\partial x} + q_5 \frac{\partial w_1}{\partial y} + q_6 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + q_7 \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + q_8 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y},$$

$$\Gamma_v^{m} = 2q_9.$$

(ج-۲)

$$\Gamma_w^{\eta} = \left(r_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + r_2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} + r_3 \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} + r_4 \frac{\partial w_1}{\partial x} + r_5 \frac{\partial w_1}{\partial y} + r_9 \frac{\partial u_1}{\partial x} + r_{10} \frac{\partial u_1}{\partial y} + r_{11} \frac{\partial v_1}{\partial x} + r_{12} \frac{\partial v_1}{\partial y}\right),$$

$$\Gamma_w^{m} = 2r_{13},\ \Gamma_{wu}^{m} = 2r_{15},\ \Gamma_{wv}^{m} = 2r_{16},$$

$$\bar{\Gamma}_{wu1}^{m} = -\alpha_1 \frac{h^2}{a^2}\frac{\partial w_2}{\partial x},\ \bar{\Gamma}_{wu2}^{m} = -\alpha_1 \frac{h^2}{a^2}\frac{\partial w_1}{\partial x},$$

$$\bar{\Gamma}_{wv1}^{m} = -\alpha_1 \frac{h^2}{a^2}\frac{\partial w_2}{\partial y},\ \bar{\Gamma}_{wv2}^{m} = -\alpha_1 \frac{h^2}{a^2}\frac{\partial w_1}{\partial y},$$

(ج-۳)

$$
\begin{aligned}
\Gamma_w^K =& -(-12\alpha_1 \frac{\partial w_s}{\partial x}[(1+\nu)\frac{\partial^2 w_1}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial w_2}{\partial y}+\\
&(1-\nu)\frac{\partial w_1}{\partial y}\frac{\partial^2 w_2}{\partial x\,\partial y}+(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2})\frac{\partial w_2}{\partial x}+\\
&\frac{\partial w_1}{\partial x}(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2})]\\
&-12\alpha_1\frac{\partial w_s}{\partial y}[(1-\nu)\frac{\partial^2 w_1}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial w_2}{\partial x}+\\
&(1-\nu)\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial^2 w_2}{\partial x\,\partial y}+(\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2})\frac{\partial w_2}{\partial y}+\\
&\frac{\partial w_1}{\partial y}(\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2})]\\
&-12\,\alpha_1\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}(\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial w_2}{\partial x}+\nu\frac{\partial w_1}{\partial y}\frac{\partial w_2}{\partial y})-\\
&12\,\alpha_1\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}(\frac{\partial w_1}{\partial y}\frac{\partial w_2}{\partial y}+\nu\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial w_2}{\partial x})\\
&-12(1-\nu)\alpha_1\frac{\partial^2 w_s}{\partial x\,\partial y}(\frac{\partial w_1}{\partial y}\frac{\partial w_2}{\partial x}+\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial w_2}{\partial y})-\\
&12\,\alpha_1\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\nu\frac{\partial v_2}{\partial y}+2[(\frac{\partial w_1}{\partial x})^2+\nu(\frac{\partial w_1}{\partial y})^2])\\
&-12\,\alpha_1\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}(\frac{\partial v_2}{\partial y}+\nu\frac{\partial u_2}{\partial x}+\\
&2[(\frac{\partial w_1}{\partial y})^2+\nu(\frac{\partial w_1}{\partial x})^2])-\\
&12(1-\nu)\alpha_1\frac{\partial v_1}{\partial x}\frac{\partial^2 w_2}{\partial x\,\partial y}-12(1+\nu)\alpha_1\frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial^2 w_2}{\partial x\,\partial y}\\
&-12(1-\nu)\alpha_1\frac{\partial u_1}{\partial x}(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2})-\\
&12\alpha_1\frac{\partial v_1}{\partial y}(\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2})-\\
&12(1-\nu)\alpha_1\frac{\partial^2 w_1}{\partial x\,\partial y}(\frac{\partial u_2}{\partial y}+\frac{\partial v_2}{\partial x})\\
&-12(1-\nu)\alpha_1\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial w_1}{\partial y}\frac{\partial^2 w_1}{\partial x\,\partial y}+\\
&\frac{4\alpha_2 V_s^2 w_1^3}{(-1+w_s)^5}-\frac{6\alpha_2 V_s^2 w_1 w_2}{(-1+w_s)^4})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_w^{\sigma_1} =& -(2r_2\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2\,\partial y^2}+4r_3\frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4}+\\
&2(r_4+12\alpha_1\frac{\partial w_s}{\partial x}\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2})\frac{\partial w_1}{\partial x}+\\
&2(r_5-12\alpha_1\frac{\partial w_s}{\partial y}\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2})\frac{\partial w_1}{\partial x},\\
&-12\alpha_1\nu[(\frac{\partial w_s}{\partial y})^2+\frac{\partial v_s}{\partial y}]\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}+\\
&2(r_7-6\alpha_1[(\frac{\partial w_s}{\partial y})^2+\frac{\partial v_s}{\partial y}])\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}+\\
&2(r_8+6\alpha_1(1-\nu)\frac{\partial v_s}{\partial x})\frac{\partial^2 w_1}{\partial x\,\partial y}\\
&-24\alpha_1\nu\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}\frac{\partial u_1}{\partial x}+2r_{10}\frac{\partial u_1}{\partial y}+\\
&2r_{11}\frac{\partial v_1}{\partial x}+(r_{12}-24\alpha_1\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2})\frac{\partial v_1}{\partial y}),
\end{aligned}
$$

$$
\bar{\Gamma}_w^{\sigma_1}=r_{16}\frac{\partial^2 v_1}{\partial T_0^2},
$$