بررسی ناپایداری ارتعاشی تیر تیموشنکو چندقسمتی دوسر آزاد تحت اثر نیروی تعقیب‌کننده با اتصالات فنری و تغییرات جرم گسترده و متمرکز

حمید موسی‌زاده[۱]
دانشکده فنی و مهندسی
دانشگاه تربیت مدرس

امیر حسین اثباتی[۲]
دانشکده هوافضا
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

بهزاد قدیری دهکردی[۳]
دانشکده فنی و مهندسی
دانشگاه تربیت مدرس

سعید ایرانی[۴]
دانشکده هوافضا
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

(تاریخ دریافت: ۸۹/۰۶/۲۰؛ تاریخ پذیرش: ۹۱/۱۲/۱۷)

چکیده

در این تحقیق، مدل تیر دوسر آزاد تیموشنکو برای تحلیل ناپایداری ارتعاشی (استاتیکی و دینامیکی) سازه ماهواره‌بر در طول مسیر مورد استفاده قرار گرفته است. برای این منظور تیر تیموشنکو با خواص جرمی متغیر در طول تیر در نظر گرفته شده و اثر پارامتر اینرسی دورانی و تغییر شکل برشی در معادلات وارد شده است. همچنین مدل مورد نظر دارای تعدادی جرم دلخواه متمرکز می‌باشد که اثر مقدار و موقعیت اجرام مذکور بررسی شده و اثر جرم متمرکز با مراجع دیگر مقایسه شده است. روابط با استفاده از اصل همیلتون و تعیین انرژی کلی سیستم بررسی و به روش المان محدود تحلیل شده و با استفاده از توابع شکلی تیر تیموشنکو، ماتریس‌های سختی، میرایی و جرمی استخراج شده ست. به طورکلی تغییرات طول و کاهش جرم هر قسمت تأثیر بالایی بر مقدار و نوع نیروی بحرانی دارد. برای مدل تیر دو و سه مرحله‌ای با کاهش جرم قسمت انتهایی، نیروی بحرانی کاهش می‌یابد و اضافه نمودن جرم متمرکز باعث تغییر پایداری سیستم و افزایش مکان جرم متمرکز از نوک تیر باعث افزایش پایداری تیر می‌شود. همچنین ناپایداری تیر از نوع فلاتر در نیروهای پایین به واگرایی در مقادیر نیرویی بالا تبدیل می‌شود و تغییر پارامتر اینرسی دورانی تیر و اینرسی دورانی جرم‌های متمرکز، در تغییر نوع ناپایداری بسیار مؤثر است. در این پژوهش نیز، اثر اتصالات شامل میرایی و سفتی برای تیر دو-قسمتی بررسی شده و افزایش میرایی و سفتی اتصالات در پایدارسازی تیر نشان داده شده است.

واژه های کلیدی: تیر تیموشنکو، نیروی تعقیب کننده، جرم متمرکز، تحلیل المان محدود، ناپایداری استاتیکی و دینامیکی

Vibration Analysis of Free-Free Multi Step Timoshenko Beam under Follower Force Effect with Joint Springs and Concentrated and Distributed Mass Effects

H. Moosazadeh
Aerospace Eng. Dep't.
Tarbiat Modares Univ.

A. Esbati
Aerospace Eng. Dep't.
Kh.N. Toosi Univ. of Tech.

B. Ghadiri Dehkordi
Aerospace Eng. Dep't.
Tarbiat Modares Univ.

S. Irani
Aerospace Eng. Dep't.
Kh.N. Toosi Univ. of Tech.

(Received: 11 September, 2010; Accepted: 07 March, 2013)

ABSTRACT

This paper presents the variation in dynamic and static instability characteristics of free-free Timoshenko beam subjected to follower force, where each step has a point mass with transverse and rotary inertia. A finite element code is developed to model two-dimensional Timoshenko beams using the extended Hamilton's principle. The effects of each section length and distributed and concentrated mass on the type of the instability and the critical follower force have been studied for different models of beams. It is concluded that when mass of last section is subsided, the magnitude and the type of instability changes significantly and in most cases it decrease. It is observed that change in rotary inertia parameter of Timoshenko beam and the rotary inertia of concentrated masses affect the magnitude and the type of instability. In this case, by change concentrated mass location, the critical follower force increase suddenly. Effect of joint springs for two section beam with damping and stiffness variation is analysed. Increase in joints parameters lead to more stability.

Keywords: Free-Free Timoshenko Beam, Follower Force, Concentrated Mass, Finite Element, Instabilit

۱- دانشجوی دکتری h.moosazadeh124@gmail.com
۲- دانشجوی دکتری
۳- استادیار (نویسنده پاسخگو): ghadirib@modares.ac.ir
۴- استادیار

۱- مقدمه

سازه‌های هوافضایی تحت اثر نیروی پیشران محوری و عرضی قرار دارند که توسط موتورهای جت و راکت تولید می‌شوند. نیروی پیشران موشک به عنوان نیروی تعقیب‌کننده در مطالعات پایداری سازه در نظر گرفته می‌شود.

با پیشرفت علم، نیازمندی‌هایی که در گروه سازه مطرح است شامل افزایش نسبت نیروی پیشران به وزن، نیاز به کاهش وزن سازه و اثر تغییر جرم در حین پرواز می‌باشد. با توجه به افزایش جرم محموله ماهواره‌برهای نسل جدید و افزایش اثر نیروی پیشران، نسبت نیروی پیشران به وزن علی‌رغم افزایش وزن کل سازه، در حال افزایش است. این بدان معنی است که سازه سامانه فضایی، تحت نیروی بالاتری قرار می‌گیرد. کاهش وزن سازه، نیازی است که مستقیماً بر کاهش هزینه‌های آماده‌سازی و پرتاب و هزینه تولید مؤثر می‌باشد. هر چه موشک یا ماهواره‌بر بزرگ‌تر می‌شود، میزان سوخت موجود در مخازن آن نیز افزایش می‌یابد. با مصرف سوخت در حین پرواز، میزان جرم و مرکز جرم آن، تغییر چشمگیری می‌کند، این تغییر جرم در بیشتر تحقیقات انجام شده در زمینه ناپایداری استاتیکی و دینامیکی تیر دو سر آزاد بررسی نشده است.

در بخش اول، یک تیر یک قسمتی با اثر دو جرم متمرکز در ابتدا و در طول تیر با نیروی پیشران انتهای تیر بررسی شده است. نسبت جرم متمرکز به جرم تیر از مقدار بی‌بعد $\mu = ۰/۰۰۰۱$ تا $\mu = ۱۰۰۰$ تغییر می‌کند. در واقع جرم متمرکز می‌تواند شبیه‌ساز جرم متمرکز ناشی از بار مفید و محموله حمل‌شونده یا بسته موتور و یا اثرات جرم متمرکز ناشی از مخازن سوخت و اکسید مایع در پرتابه‌ها و...، باشد. تغییرات جرم متمرکز برای بررسی تغییرات فرکانسی تیر با افزایش نیروی تعقیب‌کننده، تعیین مقدار نیروی ناپایدارکننده و نوع ناپایداری ایجاد شده صورت گرفته است.

در بخش دوم، به بررسی اثر اینرسی دورانی تیر پرداخته و در بخش سوم اثر اتصالات در شرایط پایداری تیر دوقسمتی مورد تحلیل قرار گرفته است.

در بخش پنجم، به بررسی مدل تیر سه‌قسمتی با نسبت طول بی‌بعد ۰/۴، ۰/۳ و ۰/۳ به ترتیب از ابتدا تا انتهای تیر پرداخته شده است. نسبت جرمی قسمت دوم به اول (m2/m1) و نسبت جرمی قسمت سوم به اول (m3/m1) می‌باشد و این تغییرات بین ۰ تا ۴۰ در نظر گرفته شده است. همین‌طور تحلیل پایداری تیر با اثر جرم متمرکز در انتهای هر قسمت با اثر اینرسی دورانی جرم متمرکز و بدون آن بررسی شده است.

برای محاسبه فرکانس طبیعی سیستم، تحت اثر نیروی پایستار فعالیت‌های زیادی انجام شده است. معادلات تحلیلی برای یک تیر یکنواخت، تحت اثر نیروی محوری ثابت توسط بوکاییان[1] برای شرایط مرزی متفاوت مورد بررسی قرار گرفت و معادلات مشخصه و بارهای بحرانی تعیین شدند [۱]. جوشی[2] یک روش ساده برای محاسبه فرکانس طبیعی برای یک تیر تحت اثر نیروی محوری، با توزیع جرم متغیر ارائه کرد [۲]. همچنین نایهوس[3] در زمینه مقادیر مرزی برای یک تیر یکنواخت تحت اثر نیروی محوری، تحقیقاتی انجام داد [۳]. پورتاکدوست و اسدیان اثر نیروی تراست برروی پایداری مود خمشی پرتابه را مشاهده کردند [۴]. آنها به این نتیجه رسیدند که نیروی تراست به عنوان یک نیروی محوری نقش حیاتی در کاهش فرکانس طبیعی و تغییر شکل مودهای موشک دارند.

پایداری یک سیستم الاستیک تحت اثر نیروی ناپایستار، با معادلات مرسوم اویلری قابل حل نیست، این سیستم می‌تواند دچار ناپایداری استاتیکی و ناپایداری دینامیکی (فلاتر) شود [۵]. برای نخستین بار بک[4] در سال ۱۹۵۲ پایداری یک ستون یکنواخت را تحت اثر نیروی تعقیب‌کننده مورد مطالعه قرار داد [۶]. پس از بک، مقالات بسیاری در زمینه پایداری ارتعاشاتی ستون یکنواخت منتشر شد، که از آن جمله می‌توان به آثار ساکاران و رائو[5] [۷]، پدرسون[6] [۸] و چن و کو[7] [۹] اشاره کرد. در بیشتر این مقالات، اثر نیروی تعقیب‌کننده مورد توجه نبوده و بنابراین جرم متمرکز در آنها لحاظ نشده است. سوجیام[8] در سال ۱۹۹۰ به صورت تجربی و تئوری، ناپایداری یک ستون را تحت اثر نیروی راکت، به همراه یک جرم متمرکز در نوک آن بررسی کرد. چن و کو آنالیز حساسیت مقادیر ویژه، برای تحلیل پایداری ستون به همراه جرم متمرکز در سر آزاد آن را به دست آوردند [۱۰]. رایو و سوجیاما[9] ترکیب اندازه و اینرسی دورانی جرم متمرکز را بر روی ستون تیموشنکو، مورد مطالعه قرار دادند [۱۱]. همچنین سوجیاما با کمک لانگتجیم[10] طراحی بهینه برای پایداری دینامیکی ستون تحت اثر نیروی پیشران را مورد بررسی قرار داد [۱۲].

1- Bokaian
2- Joshi
3- Nihous
4- Beck
5- Sankaran and Rao
6- Pederson
7- Chen and Ku
8- Sugiyama
9- Ryu and Sugiyama
10- Langthjem

برای دست‌یابی به پاسخ مطلوب‌تر برای رفتار یک پرتابه (موشک، راکت و ماهواره‌بر و...) پایداری ارتعاشات تیر دو سر آزاد، تحت اثر نیروی تعقیب‌کننده مورد بررسی قرار گرفت. به دلیل همراه داشتن نیروی ناپایستار در این سیستم، حل معادلات آن کمی پیچیده می‌شود. بیل[1] در سال ۱۹۶۵ برای نخستین بار پایداری یک تیر دوسر آزاد را تحت اثر نیروی پیشران ثابت و نوسانی، برای یک تیر یکنواخت بررسی کرد [۱۳]. او در تحقیق خود نشان داد با یک نیروی پیشران، در راستای اعمال نیرو و بدون سیستم کنترل، در لحظه ادغام دو فرکانس اول خمش، ($K_\theta = ۰$) ناپایداری اتفاق می‌افتد.

پارک[2]، پایداری دینامیکی تیر دوسر آزاد تیموشنکو را تحت اثر یک نیروی ثابت تعقیب‌کننده مورد مطالعه قرار داد [۱۴] و بر خلاف تحلیل‌های بالا، اثر اینرسی دورانی و تغییر شکل برشی بر روی پایداری تیر را، با نیروی کنترل‌شده تعقیب کننده محاسبه کرد. در حالتی که کنترل‌کننده راستا موجود نباشد، ناپایداری در نیروی بحرانی فلاتر و نیروی بحرانی با افزایش ترم تغییر شکل برشی، افزایش می‌یابد. با کنترل راستا، ناپایداری مقدماتی چه در زمینه فلاتر و چه دایورژنس، به موقعیت و گیرندگی سنسور حرکت دورانی وابسته است.

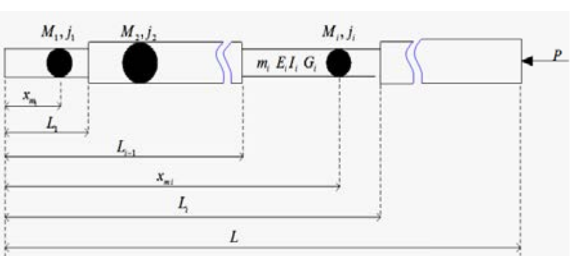
کیم و چوو[3] [۱۵] تیر تیموشنکو را تحت اثر نیروی پیشران ضربانی که قبلاً مدل اویلر- برنولی آن توسط بیل تحلیل شده بود را مورد بررسی قرار دادند. اثر موقعیت و اینرسی جابه‌جایی جرم متمرکز مورد مطالعه قرار گرفت و ارتباط بین نیروی بحرانی و پهنای ناپایداری در نزدیکی ω_1 ۲ (دو فرکانس طبیعی اول خمش) نیز بررسی شد. آنها به این نتیجه رسیدند که محدوده ناپایداری، در نزدیکی ω_1 ۲ به شدت با نوع نیروی بحرانی ارتباط دارد.

پراتهان و داتا[4]، مدل تیر تیموشنکوی یکنواخت تحت اثر نیروی ثابت را با دو جرم متمرکز مورد مطالعه قرار دادند [۱۶]. آنها نشان دادند مقدار خواص و جایگاه جرم دوم، چگونه بر مقدار نیروی بحرانی تأثیر می‌گذارد. بررسی تأثیر تغییرات سطح و سیستم کنترل راستای اعمال نیرو، بر روی مدل تیر سه‌قسمتی توسط ایرانی، اثباتی و موسی‌زاده انجام شده است [۱۷].

نکته‌ای که در این مقاله مورد تأکید قرار گرفته است، بررسی تغییر جرم گسترده مدل، در اثر کاهش سوخت در طی مسیر پرواز است. از این رو مدل تیر یکنواخت که در بیشتر تحلیل‌ها مورد استفاده قرار گرفته است، توانایی مدل کردن این مسئله را ندارد. بنابراین باید مدل ریاضی که توانایی بررسی خواص جرمی در مدل را داشته باشد، استخراج گردد. اگرچه وارد کردن این پارامترها باعث پیچیده شدن روابط و محاسبات شده است، با این حال مشاهده می‌شود تغییر در جرم سوخت، باعث تغییر چشمگیری در نیروی بحرانی تعقیب‌کننده شده است که از دید محققان پیشین به دور مانده است. همین‌طور نتایج ترکیبی اثر اتصالات با خاصیت سفتی و میرایی برای تیر تیموشنکو جالب و جدید است و با توجه به شبیه‌سازی این خاصیت در مدل‌های عملیاتی پرتابه‌ها دارای اهمیت است.

۲- روابط ریاضی تیر تیموشنکو با اثر جرم متمرکز

این تیر شامل n جزء می‌باشد، هر جزء دارای سختی، خواص سطحی و جرمی متفاوتی در هر مرحله است. مدول الاستیسیته (E_i)، ممان سطح (I_i)، مدول پیچشی (G_i)، همچنین توزیع جرم بر واحد طول (m_i) که از حاصل‌ضرب چگالی (ρ_i) در مساحت مقطع (A_i) می‌باشد، برای هر جزء تیر به صورت مجزا قابل تعریف است. انتهای هر تیر فاصله‌ای معادل L_i از ابتدای مدل دارد و هر قسمت دارای یک جرم متمرکز می‌باشد. هر یک از جرم‌های یاد شده، دارای اینرسی جابه‌جایی (M_i) و دورانی (j_i) بوده و فاصله هریک از مبدأ برابر x_{M_i} می‌باشد. جابه‌جایی هر جزء با $w_i(x)$ تعریف می‌شود (شکل ۱).



شکل (۱): تیر تیموشنکو، با توزیع جرمی و خواص مقطع متغیر به همراه جرم متمرکز.

روش حل در این گزارش، اصل انرژی همیلتون می‌باشد که رابطه اصلی آن در رابطه (۱) ارائه شده است [۱۶]. عبارات این رابطه در بخش ۲-۱ تا ۲-۳ تشریح شده است.

$$\int_{t1}^{t2} (\delta(T - V + W_C))dt + \int_{t1}^{t2} \delta W_{NC} dt = 0. \qquad (۱)$$

1- Beal
2- Park
3- Kim and Choo
4- Pradhan and Datta

۲-۱- انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم

رابطه (۲) انرژی پتانسیل برای سازه‌های الاستیک در حالت تنش صفحه‌ای[1] به صورت زیر است:

$$V_{beam}=\frac{1}{2}\iiint_{v}\left(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx}+\sigma_{xy}\varepsilon_{xy}\right)dv,$$
$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{L}\left[EI\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^{2}+kAG\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\phi\right)^{2}\right]dx. \qquad (۲)$$

همچنین، انرژی جنبشی برای تیر، به شرح زیر است:

$$T_{beam}=\frac{1}{2}\int_{0}^{L}\left(\rho A\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^{2}+\rho I\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^{2}\right)dx. \qquad (۳)$$

انرژی جنبشی سیستم، حاصل‌جمع انرژی جنبشی تیر و جرم‌های متمرکز است که در رابطه زیر نشان داده شده است:

$$T=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\int_{L_{i-1}}^{L_i}m_i\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^{2}dx+\frac{1}{2}\int_{L_{i-1}}^{L_i}\rho_i I_i\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^{2}dx\right)$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}M_i\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^{2}|_{x=x_{Mi}}+\frac{1}{2}j_i\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^{2}|_{x=x_{Mi}}\right). \qquad (۴)$$

عبارت اول این رابطه ناشی از انرژی جنبشی تیر می‌باشد که در رابطه (۳) برای یک تیر یکنواخت تعریف شده بود و برای اعمال بر روی تیر تعریف شده با مقاطع متغیر به صورت سری در می‌آید. در این رابطه برای تمامی اجزاء تیر، جرم متمرکز در نظر گرفته شده است. این مدل می‌تواند تمامی حالت‌های مورد نظر در ترکیب تیر و جرم متمرکز را در خود جای دهد. زمانی که در جزئی از تیر جرم متمرکز وجود نداشته باشد، مقدار M_i ، j_i را برابر صفر قرار داده و اگر تعداد اجرام یک مرحله بیشتر از یک عدد باشد، به تعداد جرم‌ها می‌توان تیر معرفی کرد.

اثر انرژی جنبشی به صورت δTوارد شده است:

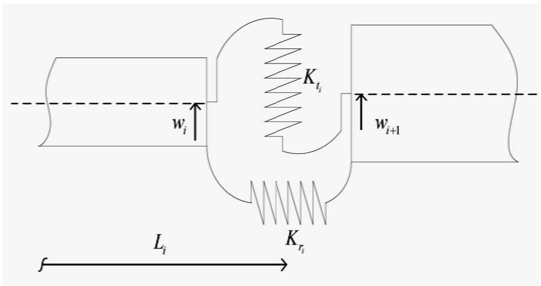
$$\delta T=\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{L_{i-1}}^{L_i}m_i\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)\delta\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)dx+\int_{L_{i-1}}^{L_i}\rho_i I_i\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)dx\right)$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\left(M_i\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)\delta\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)|_{x=x_{Mi}}+j_i\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)|_{x=x_{Mi}}\right). \qquad (۵)$$

فرم دیفرانسیلی انرژی پتانسیل به شرح زیر است:

$$\delta V=\sum_{i=1}^{n}\left(\begin{array}{l}\frac{1}{2}\int_{L_{i-1}}^{L_i}EI_i\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)dx\\+\frac{1}{2}\int_{L_{i-1}}^{L_i}kA_iG_i\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\phi\right)\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\phi\right)dx\end{array}\right). \qquad (۶)$$

انرژی پتانسیل فنرهای حرکت انتقالی و پیچشی به صورت زیر تعریف می‌شوند (شکل ۲):

$$\delta V_{spring}=\sum_{i=1}^{n-1}K_{t_i}(w_{i+1}-w_i)\delta(w_{i+1}-w_i)|_{x=L_i}$$
$$+\sum_{i=1}^{n-1}K_{r_i}(\phi_{i+1}-\phi_i)\delta(\phi_{i+1}-\phi_i)|_{x=L_i}. \qquad (۷)$$



شکل (۲): فنرهای متصل کننده قسمت‌های مختلف تیر در مقطع iام.

۲-۲- کار نیروی پایستار

بخشی از کار نیروی پیشران به وسیله نیروی گسترده در طول تیر مدل می‌شود که در اصل، بخش پایستار کار انجام شده توسط نیروی تعقیب کننده می‌باشد.

اگر یک تیر دوسر آزاد تحت اثر نیروی محوری (تراست) قرار گیرد، تنها نیروهایی که به آن وارد می‌شود نیروی پیشران و اینرسی می‌باشند که برایند آنها باعث شتاب سیستم می‌شود. رابطه (۸) تعادل نیروی سیستم را با در نظر گرفتن شتاب گرانشی نشان می‌دهد.

$$M'a=P-M'g. \qquad (۸)$$

شتاب سیستم بر اساس رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$a=\frac{P-M'g}{M'}. \qquad (۹)$$

در این رابطه، P نیروی پیشران، M' جرم کل سیستم، g شتاب گرانشی زمین و a شتاب مجموعه است. بار گسترده سیستم در طول تیر از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\hat{P}(x)=M(x)a. \qquad (۱۰)$$

$\hat{P}(x)$ نیرو محوری در مقطع x و $M(x)$ کل جرم تیر و جرم‌های متمرکز تا نقطه x می‌باشد. رابطه $M_i(x)$ برای هر نقطه واقع در قسمت iام تیر، به شرح زیر است:

$$M_i(x)=m_ix-m_iL_{i-1}+M_iH(x-x_{Mi})+\sum_{j=1}^{i}\left(m_{j-1}l_{j-1}+M_{j-1}\right). \qquad (۱۱)$$

لازم به یادآوری است، دامنه رابطه فوق $L_{i-1}<x<L_i$ است بنابراین هر مرحله از تیر دارای تابع $M(x)$ متفاوتی می‌باشد. در رابطه (۱۱) ترم آخر بیانگر جرم کل بخش‌های تیر و جرم‌های متمرکز تا ابتدای قسمت iمی‌باشد. با قرار دادن روابط (۹) و (۱۰) در رابطه (۱۱) نیروی محوری در مقطع x واقع در مرحله

1- Plane Stress

i تیر تعیین می‌شود. با انتگرال‌گیری از هر مرحله در طول کار انجام شده توسط این نیرو در هر مقطع از رابطه (۱۲) محاسبه می‌شود:

$$W_c=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\int_{L_{i-1}}^{L_i}\left(\frac{P}{M'}\right)\begin{bmatrix} m_i x-m_i L_{i-1}+M_i H(x-x_{Mi}) \\ +\sum_{j=1}^{i}\left(m_{j-1}l_{j-1}+M_{j-1}\right)\end{bmatrix}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx. \qquad (۱۲)$$

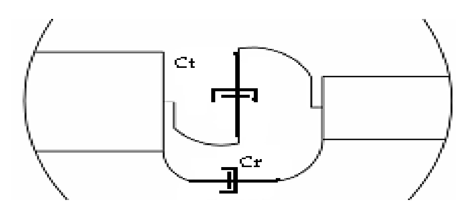
۲-۳- کار نیروی ناپایستار

در این بخش، اثر ترم ناپایستار نیروی تعقیب‌کننده، در رابطه همیلتون بررسی می‌شود. با توجه به اینکه نقطه اثر نیروی تعقیب‌کننده در انتهای مدل می‌باشد، موقعیت آن با L، در طول کل تیر نشان داده می‌شود. برای مدل تیر تحت اثر نیروی پیشران، رابطه دیفرانسیلی کار نیروی ناپایستار تعقیب‌کننده به شرح زیر است [۱۶]:

$$\delta W_{NCf}=-P\phi|_{x=L}\ \delta w|_{x=L}\ . \qquad (۱۳)$$

که در رابطه فوق، P نیروی تعقیب‌کننده، δw فرم دیفرانسیلی جابه‌جایی تیر در نقطه $x=L$ و ϕ شیب تیر در نقطه انتهایی می‌باشد. همین‌طور اثر کار ناپایستار میرایی مربوط به اتصالات نیز به صورت زیر تعریف شده است (شکل ۳):

$$\begin{aligned}\delta W_{NCd} &= -\sum_{i=1}^{n-1}C_{t_i}(\dot{w}_{i+1}-\dot{w}_i)\delta(w_{i+1}-w_i)|_{x=L_i} \\ &-\sum_{i=1}^{n-1}C_{r_i}(\dot{\phi}_{i+1}-\dot{\phi}_i)\delta(\phi_{i+1}-\phi_i)|_{x=L_i}\ .\end{aligned} \qquad (۱۴)$$



شکل (۳): میرایی فنرهای متصل کننده قسمت‌های مختلف تیر در مقطع iام.

۲-۴- روابط بی‌بعد

برای استفاده از خواص روابط بی‌بعد، هر یک از روابط همیلتون با استفاده از ترم‌های بی‌بعد کننده زیر، بدون بعد می‌شود:

$$\begin{aligned}&\xi=\frac{x}{L},\xi_{(..)}=\frac{x_{(..)}}{L},\eta=\frac{w}{L},\ \lambda_{(..)}=\frac{L_{(..)}}{L},\ \hat{\lambda}_i=\frac{l_i}{L},\\ &e_i=\frac{E_iI_i}{E_1I_1},v_i=\frac{m_i}{m_1},\tau=t\frac{1}{L^2}\sqrt{\frac{E_1I_1}{m_1}},S_i=\left(\frac{kG_iA_iL^2}{E_1I_1}\right),\\ &r_i=\frac{\rho_i}{\rho_1},\ R_i=\frac{I_i}{A_1L^2},\beta_i=\frac{j_i}{m_1L^3},\ \mu_i=\frac{M_i}{m_1L},Q=\frac{PL^2}{E_1I_1},\\ &\kappa_{r_i}=\frac{K_{t_i}L}{E_1I_1},\kappa_{t_i}=\frac{K_{r_i}L^3}{E_1I_1},\delta_{r_i}=\frac{C_{r_i}}{EIL}\sqrt{\frac{EI}{m_1}},\delta_{t_i}=\frac{C_{t_i}L}{EI}\sqrt{\frac{EI}{m_1}}.\end{aligned} \qquad (۱۵)$$

در پارامترهای بالا، e_i به دلیل تفاوت در خواص سختی، همچنین v_i و r_i به دلیل تفاوت در خواص جرمی در مراحل مختلف تیر ظاهر می‌شوند. اثر بی‌بعد جرم‌های متمرکز μ_i و β_i می‌باشند که به ترتیب ترم‌های بی‌بعد اینرسی جابه‌جایی و اینرسی دورانی می‌باشند. Q ترم بی‌بعد نیروی پیشران می‌باشد. دو پارامتر مهم دیگر $S_i=\left(\frac{kG_iA_iL^2}{E_1I_1}\right)$ و $R_i=\frac{I_i}{A_1L^2}$ به ترتیب پارامتر تغییر شکل برشی[1] و پارامتر اینرسی دورانی[2] می‌باشند. این ترم‌ها که از مشخصات تیر تیموشنکو می‌باشند، تأثیر زیادی بر نتایج ناپایداری خواهند داشت. بر اساس پارامترهای تعریف شده، رابطه بی‌بعد انرژی پتانسیل، با قراردادن این ترم‌ها به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}\delta V=\frac{E_1I_1}{L}\Bigg(\sum_{i=1}^{n}&\begin{pmatrix}\int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i}e_i\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right)\delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right)d\xi\\ +\int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i}S_i\left(\frac{\partial\eta}{\partial\xi}-\phi\right)\delta\left(\frac{\partial\eta}{\partial\xi}-\phi\right)d\xi\end{pmatrix}\\ &+\sum_{i=1}^{n-1}\kappa_{t_i}(\eta_{i+1}-\eta_i)\delta(\eta_{i+1}-\eta_i)|_{\xi=\lambda_i}\\ &+\sum_{i=0}^{n-1}\kappa_{r_i}(\phi_{i+1}-\phi_i)\delta(\phi_{i+1}-\phi_i)|_{\xi=\lambda_i}\Bigg).\end{aligned} \qquad (۱۶)$$

برای انرژی جنبشی، رابطه بی‌بعد به شرح زیر است:

$$\begin{aligned}\delta T=\frac{E_1I_1}{L}\sum_{i=1}^{n}&\left(v_i\int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i}\left(\frac{\partial\eta}{\partial\tau}\right)\delta\left(\frac{\partial\eta}{\partial\tau}\right)d\xi+r_iR_i\int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\right)\delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\right)d\xi\right)\\ &+\sum_{i=1}^{n}\left(\mu_i\left(\frac{\partial\eta}{\partial\tau}\right)\delta\left(\frac{\partial\eta}{\partial\tau}\right)|_{\xi=\xi_{Mi}}+\beta_i\left(\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\right)\delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\right)|_{\xi=\xi_{Mi}}\right).\end{aligned} \qquad (۱۷)$$

همچنین رابطه بی‌بعد کار پایستار به وسیله معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$\delta W_c=\frac{E_1I_1}{L}\sum_{i=1}^{n}\int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i}\frac{Q}{\mu_{tod}}\begin{pmatrix}v_i(\xi-\lambda_{i-1})+\mu_iH(\xi-\xi_{Mi})\\ +\sum_{j=1}^{i}\left(v_{j-1}(\hat{\lambda}_{j-1})+\mu_{j-1}\right)\end{pmatrix} \qquad (۱۸)$$

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\right)\delta\left(\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\right)d\xi.$$

رابطه بی‌بعد کار ناپایستار به این صورت تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}\delta W_{NC}=&-\frac{E_1I_1}{L}Q\left(\phi|_{\xi=\lambda}\right)\delta\eta|_{\xi=\lambda}\\ &-\sum_{i=1}^{n-1}\delta_{t_i}(\dot{\eta}_{i+1}-\dot{\eta}_i)\delta(\eta_{i+1}-\eta_i)|_{\xi=\lambda_i}\\ &-\sum_{i=1}^{n-1}\delta_{r_i}(\dot{\phi}_{i+1}-\dot{\phi}_i)\delta(\phi_{i+1}-\phi_i)|_{\xi=\lambda_i}\ .\end{aligned} \qquad (۱۹)$$

با جایگذاری روابط (۱۹-۱۶) در رابطه (۱) خواهیم داشت:

1- Shear Deformation Parameter
2- Rotary Inertia Parameter

$$
\begin{aligned}
&\int_{\tau_1}^{\tau_2}\{\sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix} \nu_i \int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i}\left(\frac{\partial \eta}{\partial \tau}\right)\delta\left(\frac{\partial \eta}{\partial \tau}\right)d\xi \\ +r_i R_i \int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i}\left(\frac{\partial \phi}{\partial \tau}\right)\delta\left(\frac{\partial \phi}{\partial \tau}\right)d\xi \end{pmatrix} \\
&+\sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix} \mu_i \left(\frac{\partial \eta}{\partial \tau}\right)\delta\left(\frac{\partial \eta}{\partial \tau}\right)|_{\xi=\xi_{Mi}} \\ +\beta_i \left(\frac{\partial \phi}{\partial \tau}\right)\delta\left(\frac{\partial \phi}{\partial \tau}\right)|_{\xi=\xi_{Mi}} \end{pmatrix} \\
&-(\sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix} \int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} e_i \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right)\delta\left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right)d\xi \\ +\int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} S_i \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi}-\phi\right)\delta\left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi}-\phi\right)d\xi \end{pmatrix} \\
&\quad +\sum_{i=1}^{n-1}\kappa_{t_i}(\eta_{i+1}-\eta_i)\delta(\eta_{i+1}-\eta_i)|_{\xi=\lambda_i} \\
&\quad +\sum_{i=0}^{n-1}\kappa_{r_i}(\phi_{i+1}-\phi_i)\delta(\phi_{i+1}-\phi_i)|_{\xi=\lambda_i}) \\
&+\sum_{i=1}^{n}\int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i}\frac{Q}{\mu_{total}}\begin{pmatrix} \nu_i(\xi-\lambda_{i-1}) \\ +\mu_i H(\xi-\xi_{Mi}) \\ +\mu_{start_i} \end{pmatrix}\left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi}\right)\delta\left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi}\right)d\xi \\
&-Q\left(K_s\phi|_{\xi=\xi_s}+\phi|_{\xi=\lambda}\right)\delta\eta|_{\xi=\lambda} \\
&-\sum_{i=1}^{n-1}\delta_{t_i}(\dot{\eta}_{i+1}-\dot{\eta}_i)\delta(\eta_{i+1}-\eta_i)|_{\xi=\lambda_i} \\
&-\sum_{i=1}^{n-1}\delta_{r_i}(\dot{\phi}_{i+1}-\dot{\phi}_i)\delta(\phi_{i+1}-\phi_i)|_{\xi=\lambda_i}\}d\tau=0 .
\end{aligned} \tag{۲۰}
$$

۲- ۵- المان‌بندی سیستم

به منظور سهولت در انتگرال‌گیری، تغییر مختصاتی به شرح زیر اعمال می‌شود:

$$\xi=\lambda_{i-1}+\Delta_i(m-1)+\Delta_i\tilde{\xi}_i . \tag{۲۱}$$

در رابطه فوق، $\tilde{\xi}$ محدوده جدید انتگرال‌گیری است. همچنین λ_{i-1} ترم بی‌بعد L_{i-1}، m شمارنده المان در مرحله i و Δ_i از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\Delta_i=\frac{\lambda_i-\lambda_{i-1}}{N_i}, \tag{۲۲}$$

Δ_i طول هر المان در مرحله i است. با این تغییرات محدوده انتگرال‌گیری در طول یک المان از صفر تا یک شده است ($۰<\tilde{\xi}<۱$).

رابطه (۲۳) برای مدل المان‌بندی‌شده تعیین می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&\int_{\tau_1}^{\tau_2}\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{m=1}^{N_i}\left(\Delta_i\int_0^1\begin{pmatrix} \nu_i\left(\frac{\partial \eta}{\partial \tau}\right)\delta\left(\frac{\partial \eta}{\partial \tau}\right) \\ +r_i R_i\left(\frac{\partial \phi}{\partial \tau}\right)\delta\left(\frac{\partial \phi}{\partial \tau}\right)\end{pmatrix}d\tilde{\xi}\right) \\
&+\sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix} \mu_i\left(\frac{\partial \eta}{\partial \tau}\right)\delta\left(\frac{\partial \eta}{\partial \tau}\right)|_{\xi=\xi_{Mi}} \\ +\beta_i\left(\frac{\partial \phi}{\partial \tau}\right)\delta\left(\frac{\partial \phi}{\partial \tau}\right)|_{\xi=\xi_{Mi}}\end{pmatrix} \\
&-(\sum_{i=1}^{n}\sum_{m=1}^{N_i}\Delta_i\int_0^1\begin{pmatrix} \frac{1}{{\Delta_i}^2}e_i\left(\frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\xi}}\right)\delta\left(\frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\xi}}\right) \\ +S_i\left(\frac{1}{\Delta_i}\frac{\partial \eta}{\partial \tilde{\xi}}-\phi\right)\delta\left(\frac{1}{\Delta_i}\frac{\partial \eta}{\partial \tilde{\xi}}-\phi\right)\end{pmatrix}d\tilde{\xi}
\end{aligned} \tag{۲۳}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{i=1}^{n-1}\kappa_{t_i}(\eta_{i+1}-\eta_i)\delta(\eta_{i+1}-\eta_i)|_{\xi=\lambda_i} \\
&+\sum_{i=0}^{n-1}\kappa_{r_i}(\phi_{i+1}-\phi_i)\delta(\phi_{i+1}-\phi_i)|_{\xi=\lambda_i}) \\
&+\frac{Q}{\mu_{total}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{m=1}^{N_i}\left(\frac{1}{\Delta_i}\int_0^1\begin{pmatrix} \nu_i\left(\Delta_i(m-1)+\Delta_i\tilde{\xi}_i\right) \\ +\mu_i H(\xi-\xi_{Mi})+\mu_{start_i} \\ \left(\frac{\partial \eta}{\partial \tilde{\xi}}\right)\delta\left(\frac{\partial \eta}{\partial \tilde{\xi}}\right)\end{pmatrix}d\tilde{\xi}\right) \\
&-Q\left(K_s\phi|_{\xi=\xi_s}+\phi|_{\xi=\lambda}\right)\delta\eta|_{\xi=\lambda} \\
&-\sum_{i=1}^{n-1}\delta_{t_i}(\dot{\eta}_{i+1}-\dot{\eta}_i)\delta(\eta_{i+1}-\eta_i)|_{\xi=\lambda_i} \\
&-\sum_{i=1}^{n-1}\delta_{r_i}(\dot{\phi}_{i+1}-\dot{\phi}_i)\delta(\phi_{i+1}-\phi_i)|_{\xi=\lambda_i}\}d\tau=0.
\end{aligned}
$$

$\eta(\tau,\tilde{\xi})$ و $\phi(\tau,\tilde{\xi})$ توابعی از دو متغیر زمان و مکان می‌باشند. برای حل رابطه فوق، در رابطه مولد $\eta(\tau,\tilde{\xi})$ و $\phi(\tau,\tilde{\xi})$ را به فرم رابطه دو ترم مجزا از زمان و مکان به شرح زیر است:

$$
\begin{aligned}
&\eta^i(\xi,\tau)=A^i(\xi)V(\tau), \\
&\phi^i(\xi,\tau)=B^i(\xi)V(\tau).
\end{aligned} \tag{۲۴}
$$

در این رابطه $A^i(\xi)$ و $B^i(\xi)$ توابع شکلی تیر تیموشنکو می‌باشند. رابطه کلی به صورت ماتریسی زیر ساده می‌شود:

$$[M]\ddot{V}+[K]V=0. \tag{۲۵}$$

برای سیستم فوق $V(\tau)=e^{i\omega\tau}$ فرض می‌شود. بر این اساس رابطه نهایی زیر حاصل شده که باید تحلیل مقدار ویژه شده و نتایج از روی پاسخ ریشه‌ها قابل تعیین است:

$$([K]-\omega^2[M])V=0. \tag{۲۶}$$

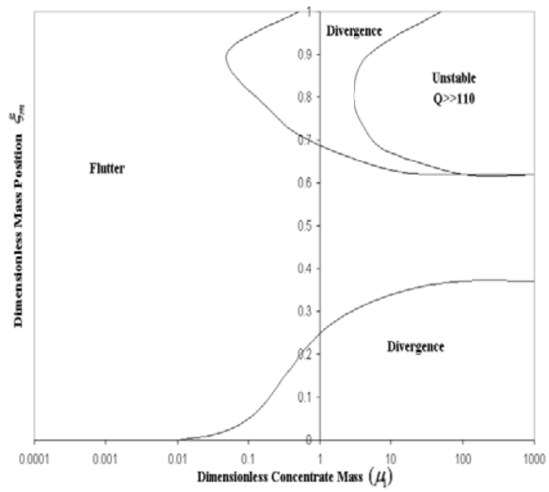
۳- نتایج

نتایج شامل بررسی روند تغییرات پایداری سیستم بر اساس تغییرات تعداد قسمت‌های تیر و تعداد و مکان جرم متمرکز روی تیر است.

۳- ۱- بررسی مقدار و مکان یک جرم متمرکز در طول تیر یکنواخت

برای مکان جرمی کمتر از ۰/۴ با افزایش مقدار جرم متمرکز بی‌بعد برای مقادیر بیشتر از ۰/۱، به تدریج نوع ناپایداری از دینامیکی (فلاتر) به استاتیکی (واگرایی) تبدیل شده و نیروی بحرانی ناپایداری نیز کاهش چشمگیری داشته است. قابل ذکر است که محدوده گسترده‌ای از نیروی ناپایداری تیر از نوع فلاتر می‌باشد که این محدوده برای مکان جرمی ۰/۴ تا ۰/۶ قابل رؤیت است و با افزایش مکان جرم به ۰/۶ و بالاتر، برای مقادیر جرمی بیشتر از ۰/۱ تیر پایداری بیشتری از خود نشان داده و

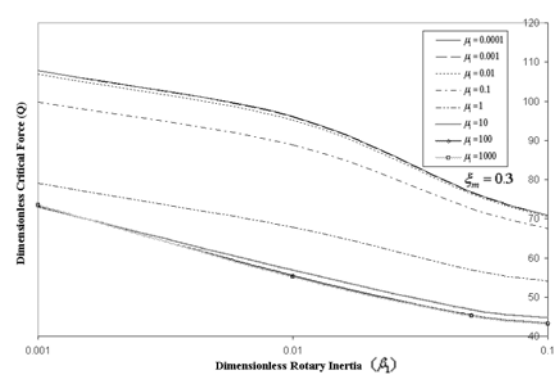
نوع ناپایداری به واگرایی تبدیل شده است. برای مقادیر جرمی بیشتر از ۵ پایداری تیر افزایش زیادی یافته و نیروی بحرانی بسیار بزرگ‌تر از مقدار ۱۱۰ مربوط به تیر یکنواخت بدون جرم متمرکز شده است (شکل ۴).



شکل (۴): محدوده و نوع ناپایداری تیر با جرم متمرکز و متغیر در طول.

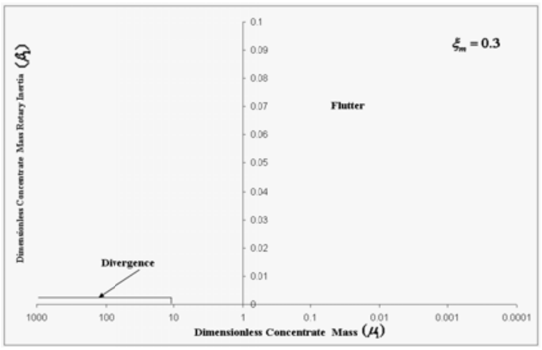
۳-۲- بررسی نوع و محدوده ناپایداری تک‌جرم متمرکز با اثر اینرسی دورانی

یک جرم متمرکز در فاصله ۰/۳ از ابتدای تیر فرض نموده و تغییرات نیروی ناپایداری بی‌بعد بر حسب تغییرات ضریب بی‌بعد اینرسی دورانی جرم متمرکز برای مقادیر جرمی مورد نظر تعیین شده است که با افزایش مقدار جرم متمرکز و افزایش اینرسی دورانی آن کاهش نیروی بحرانی حاصل شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود افزایش اینرسی جرم متمرکز و کاهش پایداری تیر به صورت یکنواخت است (شکل ۵).



شکل (۵): تغییرات نیروی ناپایداری تیر برای مقادیر ضریب اینرسی دورانی متغیر، برای جرم واقع در۰/۳ از ابتدای تیر.

نوع ناپایداری برای جرم مذکور در شکل فوق برحسب تغییرات اینرسی دورانی و مقدار جرم متمرکز ترسیم شده است. ناحیه ناپایداری از نوع واگرایی بسیار کوچک و برای مقادیر جرمی بالاتر از ۱۰ و اینرسی دورانی کمتر از ۰/۰۰۲ مشاهده شده است (شکل ۶).



شکل (۶): نوع ناپایداری تیر با تغییر مقدار و اینرسی دورانی جرم متمرکز برای جرم متمرکز در $\xi_m = ۰/۳$.

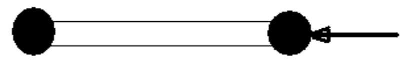
۳-۳- تحلیل مدل تیر یک قسمتی تیموشنکو با دو جرم متمرکز

مطابق شکل **۷** دو جرم متمرکز بر روی تیر یکنواخت فرض شده است. جرم اول در ابتدای تیر و جرم دوم متغیر در طول تیر می‌باشد. جرم اول نشانگر محموله داخل ماهواره‌بر و جرم دوم تجهیزات، جرم سوخت یا موتور و ... می‌باشد. شکل **۸** تا **۱۱** مربوط به تحلیل مقدار نیروی بحرانی مدل تیر با تغییرات مقدار جرم متمرکز اول در ابتدای تیر از ۰ تا ۱۰ و تغییر مکان جرم دوم از ۰/۲ تا انتهای تیر است.

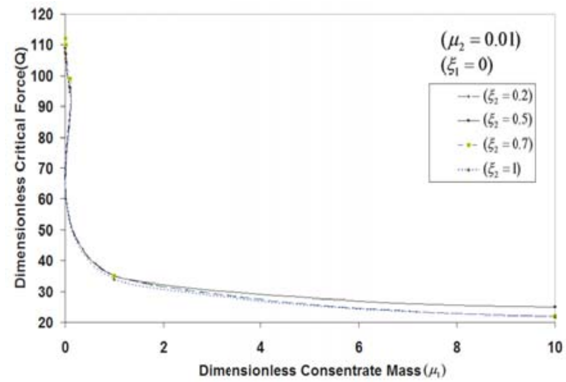
برای مقدار جرم متمرکز دوم ۰/۰۱ با افزایش مقدار جرم اول کاهش نیروی بحرانی مشاهده شده است. با افزایش مقدار جرم اول از صفر تا ۰/۱ تغییرات نیروی بحرانی بسیار زیاد است که تأثیر و اهمیت جرم متمرکز اول در تعیین ناپایداری سیستم را نشان داده است. با افزایش فاصله جرم متمرکز دوم از جرم اول کاهش بیشتری در نیروی بحرانی مشاهده شده است. اما با توجه به مقدار جرم کوچک دوم تغییرات نامحسوس است (شکل ۸).

با افزایش جرم متمرکز دوم به ۰/۱ نحوه تغییرات نیروی بحرانی همانند شکل **۸** است. باید توجه داشت برای مقادیر کوچک جرم اول، با افزایش فاصله جرم دوم از اول نیروی بحرانی افزایش یافته است. در واقع اثر پایدارکنندگی جرم دوم برای فاصله ۰/۷ از ابتدای تیر بیشترین مقدار را دارد و قابل مشاهده است. برای مقادیر بزرگ‌تر جرم متمرکز اول تا مقدار

۱۰ با افزایش فاصله جرم دوم کاهش نیروی بحرانی و کاهش پایداری قابل مشاهده است (شکل ۹).



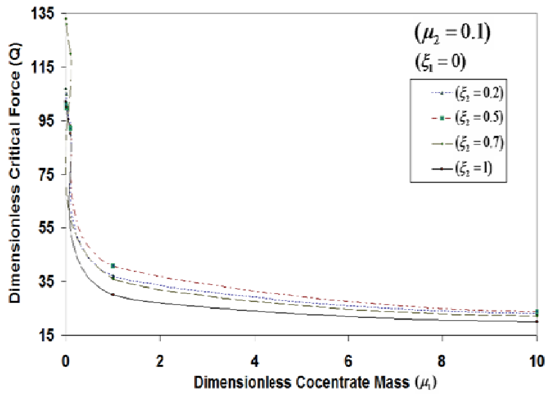
شکل (۷): تیر یکنواخت با اثر دو جرم متمرکز.



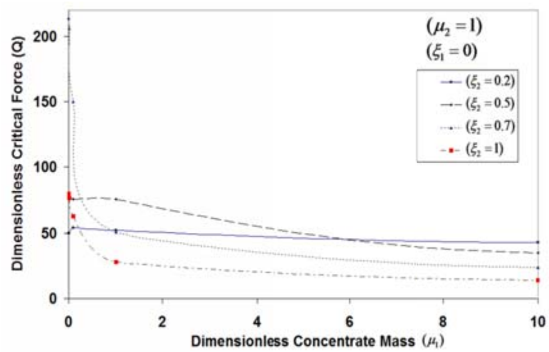
شکل(۸): تغییرات نیروی بحرانی با تغییر مقدار جرم متمرکز اول و مکان جرم دوم با مقدار بی‌بعد ۰/۰۱.

با افزایش مقدار جرم دوم به مقدار ۱ و ۱۰ در شکل **۱۰** و **۱۱** اثر آن در نیروی بحرانی مشخص‌تر می‌باشد. برای مقادیر جرمی کوچک $\mu_1 <$ ۰/۱ با افزایش فاصله جرم دوم تا ۰/۷ افزایش چشمگیری در نیروی بحرانی تا مقدار ۲۰۰ برای $\mu_2 =$ ۱ و افزایش تا ۱۰۰۰ برای $\mu_2 =$ ۱۰ مشاهده شده است. آنچه از نمودارهای ذکر شده مشاهده شده این است که برای مقادیر کوچک جرم اول با افزایش مقدار جرم دوم و فاصله آن تا ۰/۷، افزایشی پایدار به صورتی مطلوب اتفاق افتاده است. با افزایش بیشتر فاصله جرم مذکور تا ۱ کاهشی در نیروی بحرانی دیده شده است. این این تحلیل و کد تهیه شده در تعیین شرایط پایداری بهینه بسیار اهمیت داشته و کاربردی است. با افزایش مقدار جرم اول تا مقادیر ۱۰ به تدریج نتیجه معکوسی مشاهده شده و افزایش فاصله جرم دوم باعث کاهش پایداری شده است. با افزایش مقدار جرم دوم به طور کلی افزایش نیروی بحرانی مشاهده شده است.

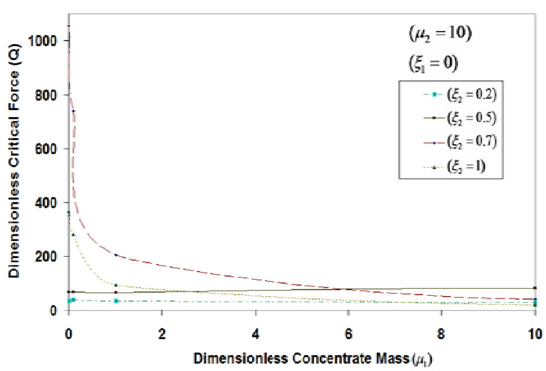
شکل **۱۲** نوع ناپایداری و فرکانس ناپایداری دینامیکی یا استاتیکی را برای تغییرات مقدار جرم اول و مکان جرم دوم با مقدار ۱ نشان داده است. برای جرم دوم در مکان $\xi_2 = 0.2$ با افزایش مقدار جرم اول نوع ناپایداری از استاتیکی به دینامیکی تغییر یافته و از مقدار صفر برای $\mu_1 <$ ۰/۱ به مقدار ۲/۵ برای $\mu_1 =$ ۱ تبدیل شده است. برای $\xi_2 =$ ۰/۵ با افزایش مقدار جرم اول فرکانس ناپایداری دینامیکی سیستم کاهش یافته تا به ناپایداری استاتیکی در $\mu_1 =$ ۱۰ رسیده است. با افزایش فاصله به $\xi_2 =$ ۰/۷ و بالاتر نوع ناپایداری به طور کلی به استاتیکی تبدیل شده است.



شکل (۹): تغییرات نیروی بحرانی با تغییر مقدار جرم متمرکز اول و مکان جرم دوم با مقدار بی‌بعد ۰/۱.

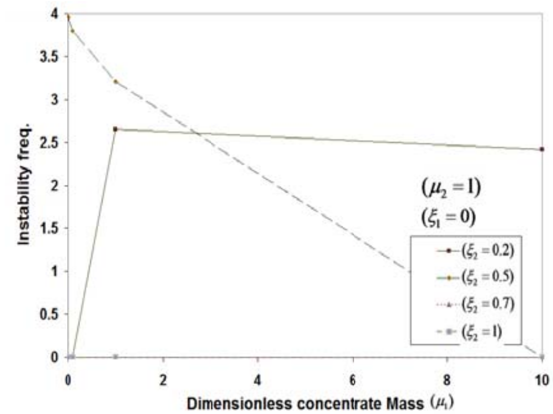


شکل (۱۰): تغییرات نیروی بحرانی با تغییر مقدار جرم متمرکز اول و مکان جرم دوم با مقدار بی‌بعد ۱.

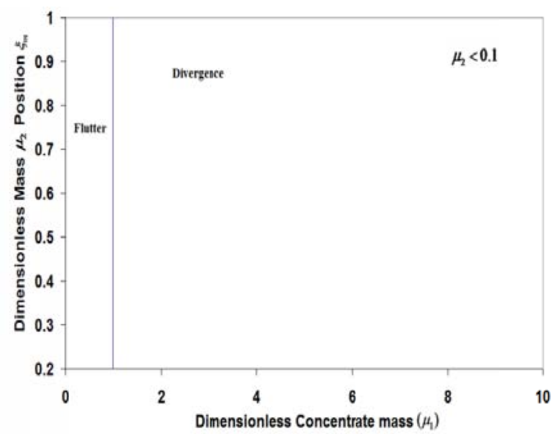


شکل (۱۱): تغییرات نیروی بحرانی با تغییر مقدار جرم متمرکز اول و مکان جرم دوم با مقدار بی‌بعد ۱۰.

نوع ناپایداری مدل با افزایش مقدار جرم متمرکز اول برای مقادیر کوچک جرم دوم $\mu_2 <$ ۰/۱ با گذر از مقدار ۱، از نوع دینامیکی به استاتیکی تبدیل شده است (شکل ۱۳).



شکل (۱۲): تغییرات فرکانس ناپایداری سیستم با تغییر مقدار جرم متمرکز اول و مکان جرم دوم با مقدار بی‌بعد ۱.

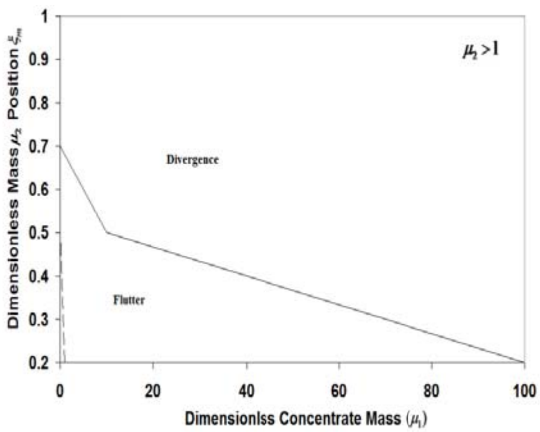


شکل (۱۳): محدوده و نوع ناپایداری تیر برحسب مقدار جرم متمرکز اول و مکان جرم متمرکز دوم ($\mu_2 <$ ۰/۱).

با تغییر مقدار جرم متمرکز اول از صفر تا ۱۰۰ و مکان جرم دوم از ۰/۲ تا ۱ برای مقادیر $\mu_2 >$ ۱ نوع ناپایداری و محدوده ناپایداری دینامیکی و استاتیکی نشان داده شده است (شکل ۱۴).

۳-۴- تحلیل تیر یک‌قسمتی تیموشنکو با سه جرم متمرکز

اثر مکان جرم سوم، برروی نیروی بحرانی در شکل **۱۵** نشان داده شده است. نیروی بحرانی برحسب موقعیت جرم متمرکز اول، ارائه شده است. همچنین چند ترکیب با اینرسی دورانی متفاوت برای تیر و جرم‌های متمرکز فرض شده است. با صرف‌نظر کردن از اثر اینرسی دورانی برای تیر و جرم‌های متمرکز، نیروی بحرانی برای مدل به مقدار حداکثر رسیده است. در این حالت، $R = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 =$ ۰ بوده و افزایش نیرو بحرانی تا مقدار ۸۵/۴ برای مکان جرم متمرکز ۰/۲۴ مشاهده شده است و ناپایداری از نوع استاتیکی می‌باشد. پس از این نقطه، نوع ناپایداری به دینامیکی تغییر نموده و نیروی بحرانی کاهش یافته است. این نیرو از نقطه ۰/۴۶ دوباره افزایش یافته است، اگر چه در نظر نگرفتن اینرسی دورانی برای مدل باعث افزایش نیروی بحرانی شده ولی در مدل فیزیکی واقعی، تیر و جرم متمرکز دارای اینرسی دورانی می‌باشند. لذا فرض بالا باعث کاهش دقت نتایج می‌شود.



شکل (۱۴): محدوده و نوع ناپایداری تیر برحسب مقدار جرم متمرکز اول و مکان جرم متمرکز دوم ($\mu_2 >$ ۱).

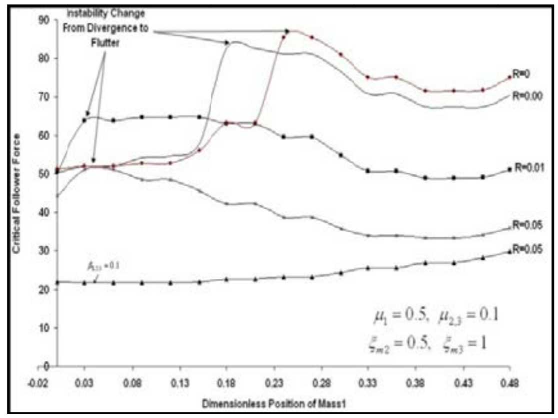
با در نظر گرفتن اینرسی دورانی برای تیر به مقدار ($R =$ ۰/۰۰۱ ، $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 =$ ۰) نیروی بحرانی از نقطه ۰/۱۵ تا ۰/۲۴ بیشتر از حالت $R =$ ۰ می‌باشد. با افزایش اینرسی دورانی تیر که در تیر تیموشنکو قابل بررسی است، ناپایداری از استاتیکی به دینامیکی تبدیل شده است. با افزایش اینرسی دورانی تیر، دامنه تغییرات نیروی بحرانی کاهش یافته است. این موضوع با افزایش اینرسی دورانی جرم‌های متمرکز شدت بیشتری پیدا کرده است. به‌گونه‌ای که با صرف‌نظر از اینرسی دورانی نیروی بحرانی بین ۵۰/۱ تا ۸۵/۴ تغییر کرده، ولی در ترکیب ۰/۰۱ = $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3$ ، $R =$ ۰/۰۵، نیروی بحرانی بین ۲۱/۹ تا ۲۹/۸ تغییر نموده و ناپایداری از نوع دینامیکی می‌باشد.

برای $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 =$ ۰ ، $R =$ ۰/۰۵ در ۰/۳ تغییر نوع ناپایداری از استاتیکی به دینامیکی مشاهده شده است. در حالت $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 =$ ۰/۰۱ ، $R =$ ۰/۰۵، ناپایداری تنها دینامیکی می‌باشد. درواقع با افزایش اینرسی دورانی، تغییر ناپایداری از استاتیکی به دینامیکی زودتر اتفاق افتاده است.

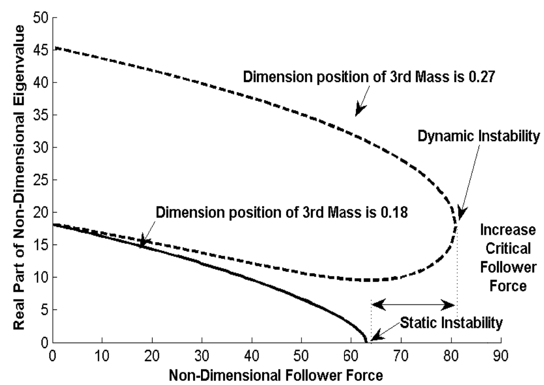
در شکل **۱۶** افزایش نیروی بحرانی با تغییر نوع ناپایداری اتفاق افتاده است. با توجه به نکته طرح شده مبنی بر اینکه افزایش اینرسی باعث شده تغییر در نوع ناپایداری زودتر اتفاق افتد، بر این اساس می‌توان نتیجه گرفت که در محدوده ابتدایی

نمودار فوق مقدار جرم‌های متمرکز و اینرسی دورانی آنها می‌تواند باعث بهبود نیروی بحرانی و رفتار سیستم شود. پارامتر اینرسی دورانی تیر نیز باعث تغییر رفتار دینامیکی سیستم شده است، اگر چه مقدار $R < ۰/۰۰۱$ اثر کمی بر ناپایداری سیستم دارد.

کد تهیه شده با استفاده از منابع مختلف مانند مراجع [۲] و [۲۱-۱۴]، صحه‌گذاری شده است.



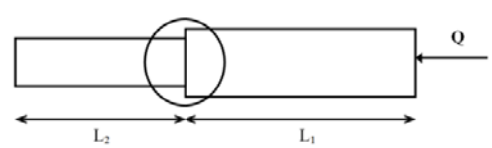
شکل (۱۵): نیروی بحرانی تعقیب کننده برحسب موقعیت جرم سوم.



شکل (۱۶): افزایش نیروی بحرانی با تغییر نوع ناپایداری از استاتیکی به دینامیکی $R = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = ۰$.

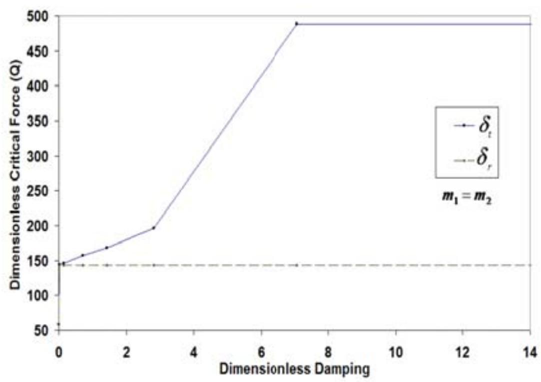
۳- ۵- تحلیل تیر دوقسمتی تیموشنکو با اثر اتصالات فنری و خواص جرمی گسترده و متمرکز

شکل **۱۷** نمونه تیر دوقسمتی را نشان داده که اتصالات بین دو قسمت فرض شده است و یک نمونه کاربردی با توجه به خواص سازه‌ای پرتابه‌ها به‌شمار می‌رود.



شکل (۱۷): مدل تیر دو قسمتی با اثر اتصالات بین دو قسمت.

با فرض جرم برابر در دو قسمت تیر و اندازه مساوی آنها، اثر تغییرات میرایی دورانی و انتقالی به طور جداگانه بررسی شده است. با افزایش مقدار ضریب بی‌بعد میرایی دورانی از صفر تا ۱۴ (با میرایی انتقالی صفر)، نیروی ناپایداری ثابت باقی مانده است. با افزایش ضریب میرایی انتقالی (میرایی دورانی صفر) از صفر تا ۱۴ افزایش چشمگیری در نیروی بحرانی مشاهده شده است. مقدار نیروی بحرانی از ۱۴۰ به ۴۹۰ رسیده است. بنابراین اثر میرایی اتصالات در نیروی ناپایداری بسیار اهمیت داشته و اثرات مشخصی دارد (شکل ۱۸).



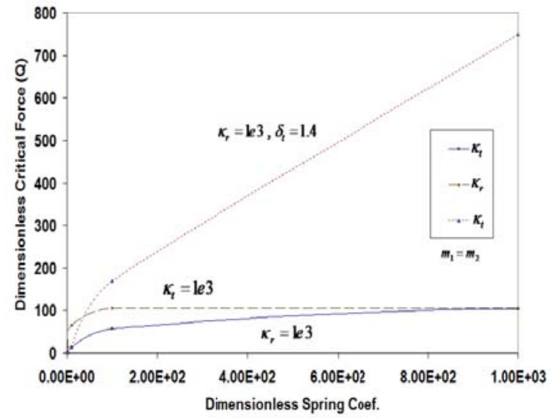
شکل (۱۸): اثر میرایی دورانی و انتقالی در نیروی بحرانی.

اثر سفتی اتصالات نیز مورد بررسی قرار گرفته است، برای فنر دورانی با سفتی ۱۰۰۰ با افزایش سفتی انتقالی فنر بین صفر تا ۱۰۰۰، افزایش نیروی بحرانی از صفر تا ۱۰۰ مشاهده شده است. برای فنر انتقالی با ضریب سفتی ۱۰۰۰ نیز با افزایش سفتی فنر دورانی، افزایش نیروی بحرانی از صفر تا ۱۰۰ مشاهده شده است. افزایش نیروی بحرانی در حالت دوم سریع‌تر ایجاد شده و پایداری بالاتری را نشان داده است. وجود میرایی انتقالی ۱/۴ در اتصالات برای فنر دورانی با سفتی ۱۰۰۰ افزایش چشمگیری در نیروی بحرانی با افزایش سفتی انتقالی نشان داده است و نیروی بحرانی از صفر تا ۷۵۰ افزایش یافته است (شکل ۱۹).

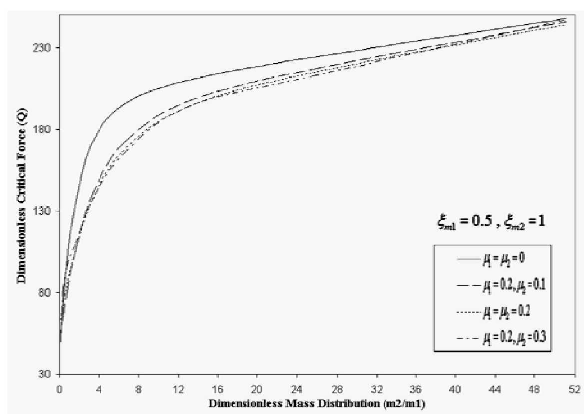
مدل‌سازی صحیح اتصالات در تعیین دقیق نیروی بحرانی و فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای مدل اهمیت بسیاری دارد که در پژوهش انجام شده این قابلیت ایجاد شده است.

در شکل **۲۰** تغییرات جرمی قسمت دوم تیر نسبت به قسمت اول، با در نظر گرفتن اثر جرم متمرکز در انتهای هر قسمت برای تیر دو قسمتی با نسبت طولی برابر، بررسی شده است. جرم متمرکز اول در میانه تیر دارای مقدار بی‌بعد ۰ و ۰/۲ و جرم متمرکز در انتهای تیر دارای مقدار ۰، ۰/۱، ۰/۲ و

۰/۳ می‌باشد. با اعمال اثر جرم متمرکز نسبت به حالت فاقد جرم متمرکز، کاهشی در مقدار نیروی بحرانی به‌وجود آمده است. اما با افزایش نسبت جرمی m1/m2 اختلاف نیروی بحرانی حالت‌های مختلف کم شده و با افزایش کلی مقدار نیروی بحرانی در نمودار به سمت مقدار ۲۴۵ همگرا شده است. اثر جرم متمرکز در ناپایدارسازی تیر مشخص است، اما این ناپایداری کم می‌باشد. با افزایش جرم متمرکز انتهای تیر پایداری کاهش یافته است.



شکل (۱۹): اثر سفتی فنرهای دورانی و انتقالی در نیروی بحرانی.



شکل (۲۰): تغییرات پایداری تیر دو قسمتی با طول برابر و افزایش نسبت جرم گسترده با اثر جرم متمرکز $\mu_1 = ۰/۲$.

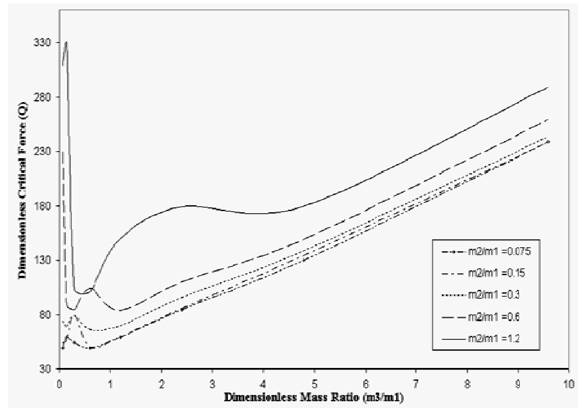
۳-۶- تحلیل تیر سه‌قسمتی با خواص جرمی گسترده و متمرکز متغیر

برای مدل تیر سه‌قسمتی، تغییرات جرم گسترده و متمرکز در بخش‌های مختلف شبیه‌ساز مدل ماهوابر سه مرحله‌ای می‌باشد. در شکل **۲۱** با افزایش نسبت m1/m3 بین ۰/۰۷۵ تا ۱۰ برای نسبت جرمی m1/m2 بین ۰/۰۷۵ تا ۱/۲، نیروی ناپایداری تیر سه‌قسمتی تعیین شده است. برای نسبت‌های جرمی کوچک بخش سوم و دوم به اول (۰/۰۵۷- ۰/۳)، پایداری تیر زیاد است و نیروی بحرانی مقادیر بالایی دارد (۳۳۰-۲۳۰) که با افزایش این نسبت جرمی‌ها به مقدار بالاتر از ۰/۳ این پایداری زیاد اولیه حذف شده و روند تغییرات پایداری رشد تقریباً یکنواختی را نشان داده است. به طور کلی افزایش نسبت جرمی بخش سوم باعث افزایش نیروی بحرانی شده است. همین‌طور افزایش نسبت جرمی بخش دوم نیز باعث افزایش نیروی بحرانی شده است. برای نسبت m1/m2 -۰.۰۷۵ با افزایش نسبت جرمی سوم از ۱ تا ۱۰، نیروی بحرانی بین ۵۰ تا ۲۴۰ تغییر کرده است. با افزایش نسبت جرمی دوم به ۱/۲، افزایش نسبت جرمی سوم باعث تغییر نیروی بحرانی از ۱۰۰ تا ۲۹۰ شده است. بنابراین برای نسبت‌های جرمی کوچک m1/m2، افزایش نسبت جرمی سوم همواره باعث افزایش پایداری شده است. با افزایش بیشتر نسبت جرمی بخش سوم بالاتر از ۱۰، نیروی ناپایداری افزایش بسیار زیادی یافته است.

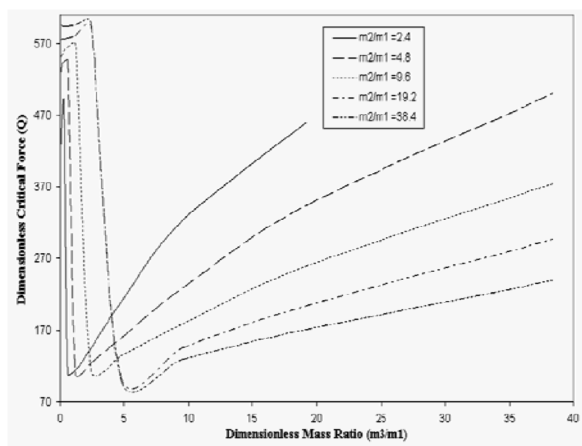
شکل **۲۲** ادامه بررسی شکل **۲۱** در افزایش نسبت جرمی بخش دوم و سوم می‌باشد. افزایش نسبت جرمی m1/m2 از ۱/۲ به ۲/۴ و بالاتر باعث تغییر روند پاسخ سیستم از نظر مقدار نیروی بحرانی به افزایش نسبت جرمی بخش سوم تیر شده است. برای نسبت جرمی پایین m3/m1 در حدود ۰/۰۷۵ تا ۵، با افزایش نسبت جرمی بخش دوم تیر از ۲/۴ به ۳۸/۴، روند کاهش پایداری تیر با نرخ شدید از مقادیر نیرویی بالا (۶۰۰-۴۰۰) به حدود ۱۰۰ رسیده است. با افزایش بیشتر نسبت m3/m1 افزایش پایداری، برای نسبت‌های مختلف m2/m1 مشخص شده است. تفاوت این نمودار با شکل **۲۱**، کاهش پایداری تیر با افزایش نسبت جرمی بخش دوم، در بخشی از نمودار با شیب مثبت است. در حالی‌که با شیب منفی نمودار (با نسبت جرمی کوچک بخش سوم)، افزایش نسبت جرمی بخش دوم باعث افزایش پایداری تیر شده است. برای نسبت جرمی m2/m1 =۲/۴ با افزایش نسبت جرمی سوم از ۰/۶ به ۱۹/۲، نیروی بحرانی از ۱۰۹ به ۴۶۰ افزایش یافته است. با افزایش نسبت جرمی m2/m1 =۳۸/۴ با افزایش نسبت جرمی سوم از ۵ به ۳۸/۴، نیروی بحرانی از ۸۰ به ۲۴۰ افزایش یافته است.

شکل **۲۳** نشان‌دهنده نوعی ناپایداری تیر سه‌قسمتی، در محدوده نسبت جرمی ۰/۰۷۵ تا ۴۰ می‌باشد. با افزایش نسبت جرمی m3/m1 بین ۰/۰۷۵ تا ۱۵ برای مقادیر کوچک نسبت m2/m1 (۱/۲-۰/۰۷۵) ناپایداری از نوع واگرایی در مقادیر نیروی پایین ایجاد شده است. با افزایش نسبت جرمی بخش سوم بین ۱۵ تا ۴۰ در محدوده m2/m1 (۱/۲- ۰/۰۷۵)

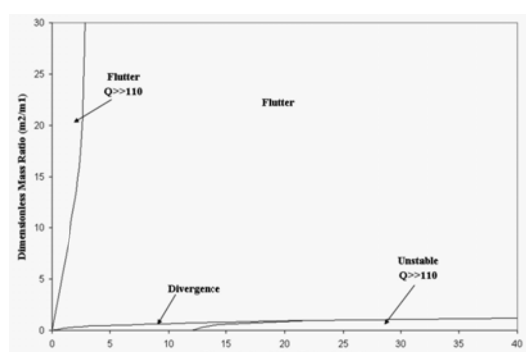
ناپایداری از نوع واگرایی در ناحیه امن به دست آمده است. یک محدوده ناپایداری از نوع فلاتر برای نسبت جرمی‌های پائین m3/m1 بین ۰/۰۷۵ تا ۲/۶ و نسبت جرمی بخش دوم، بین ۰/۰۷۵ تا ۳۰ تعیین شده است. برای دیگر نسبت‌های جرمی بخش دوم و سوم نوع ناپایداری اکثراً دینامیکی (فلاتر) است.



شکل (۲۱): اثر نسبت جرمی m1/m2 و m3/m1 در پایداری تیر بدون جرم متمرکز.

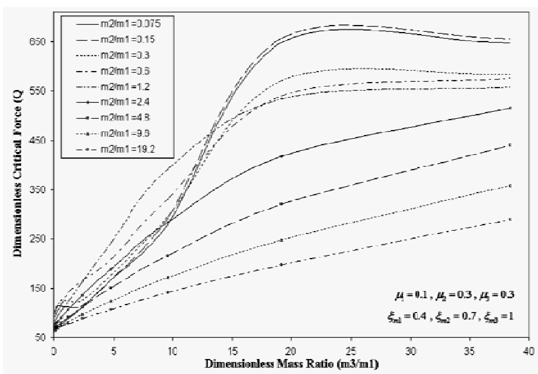


شکل (۲۲): اثر نسبت جرمی m2/m1 و m3/m1 در پایداری تیر بدون جرم متمرکز.



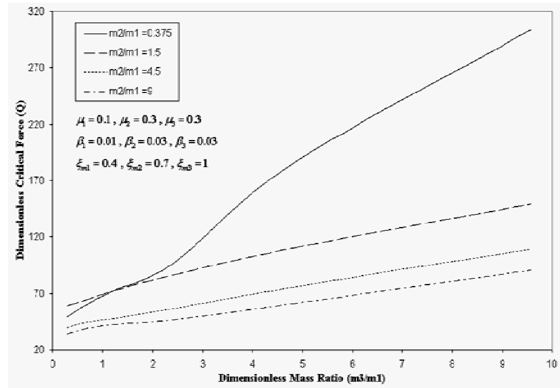
شکل(۲۳): محدوده‌ی نوع ناپایداری تیر سه‌قسمتی با تغییر نسبت جرمی.

نیروی ناپایداری تیر سه‌قسمتی با فرض اثر جرم متمرکز در انتهای هر قسمت تعیین شده است (شکل ۲۴). جرم متمرکز در انتهای هر قسمت باعث ایجاد نرخ تغییرات یکنواخت‌تر نیروی بحرانی نسبت به حالت قبل شده است. مقدار جرم متمرکز اول با ضریب ۰/۱ و جرم دوم و سوم با ضریب ۰/۳ در نظر گرفته شده است. نیروی ناپایداری برای نسبت m3/m1 = ۰/۰۷۵ برای مقادیر مختلف m2/m1 در حدود ۶۰ تا ۱۰۰ آغاز شده و با افزایش نسبت جرمی سوم به ۳۸/۴ تغییرات نیروی بحرانی برای نسبت جرمی بخش دوم از ۰/۰۷۵ تا ۱۹/۲ به‌ترتیب از ۶۵۰ شروع شده و به ۲۹۰ رسیده است. بنابراین افزایش نسبت جرمی بخش سوم باعث افزایش پایداری و افزایش نسبت جرمی بخش دوم باعث کاهش پایداری شده است.



شکل (۲۴): اثر نسبت جرمی m2/m1 و m3/m1 در پایداری تیر با حضور جرم متمرکز.

در شکل **۲۵** نیروی ناپایداری تیر سه‌قسمتی برای تغییرات نسبت جرمی m3/m1 بین ۰/۰۷۵ تا ۹/۶ و m2/m1 بین ۰/۳۷۵تا ۹، با در نظر گرفتن اثر جرم متمرکز و اینرسی دورانی جرم متمرکز در انتهای هر قسمت تعیین شده است. مقدار اینرسی دورانی جرم متمرکز اول ۰/۰۱ و جرم متمرکز ۰/۱ می‌باشد. برای جرم دوم و سوم ضریب اینرسی دورانی ۰/۰۳ و جرم متمرکز ۰/۳ در نظر گرفته شده است. در واقع اثر جرم متمرکز در انتهای هر قسمت و اضافه شدن اثر اینرسی باعث ایجاد نرخ تغییرات نیروی یکنواخت‌تر در سیستم نسبت به حالت بدون اینرسی شده است. همین‌طور مقادیر نیروی بحرانی نسبت به حالت بدون اثر اینرسی کاهش قابل ملاحظه‌ای یافته است.



شکل (۲۵): اثر نسبت جرمی m2/m1 و m3/m1 در پایداری تیر با حضور جرم متمرکز و اینرسی دورانی مربوطه.

برای نسبت جرمی m2/m1 کوچک‌تر از ۱، با افزایش نسبت جرمی بخش سوم، نیروی بحرانی بین ۵۰ تا ۳۰۰ تغییر کرده است. اما با افزایش نسبت m2/m1 بالاتر از یک کاهش مشخصی در نیروی بحرانی مشاهده شده است. برای نسبت جرمی m2/m1= ۱/۵ نیروی بحران از مقدار ۶۰ برای نسبت جرمی m3/m1=۰/۳ به ۱۵۰ در ۹/۶ رسیده است.

۴- نتیجه‌گیری

در مدل تیر یک‌قسمتی، با افزایش فاصله جرم متمرکز از ابتدای تیر، ناپایداری تیر از نوع فلاتر در نیروهای پایین به واگرایی در مقادیر نیرویی بالا و سپس افزایش این نیرو با افزایش مقدار جرم متمرکز و رسیدن تیر به پایداری بسیار زیاد می‌شود.

اثر جرم، افزایش فاصله جرم دوم از جرم اول در مدل تیر یکنواخت دو جرمی، افزایش پایداری برای مقادیر کوچک جرم اول و کاهش پایداری برای مقادیر بزرگ جرم اول است. اثر میرایی و سقتی اتصالات بسیار مهم است و باعث تغییرات مشخصی در پایداری و فرکانس‌های سیستم می‌شود.

در مدل تیر دوقسمتی، با افزایش نسبت جرمی بخش دوم به اول، پایداری تیر افزایش می‌یابد و با کاهش نسبت طول بخش دوم به اول نیز افزایش پایداری مشاهده می‌شود.

در مدل تیر سه‌قسمتی، با افزایش نسبت جرمی بخش دوم در حالی‌که نسبت جرمی بخش سوم کم است، ناپایداری از نوع فلاتر در نیروهای بالا رخ می‌دهد و در این حالت نسبت جرمی بخش دوم در ناپایداری تعیین‌کننده می‌باشد. با افزایش نسبت جرمی بخش سوم، تا حدود نسبت جرمی بخش دوم، نیروی ناپایداری کاهش می‌یابد. با افزایش نسبت جرمی سوم نسبت به دوم، دوباره افزایش پایداری تیر مشاهده می‌شود.

اضافه نمودن اثر جرم متمرکز در مدل تیر سه‌قسمتی، اثر مشخصی در تغییر رفتار پایداری سیستم دارد. پایداری سیستم کاهش یافته و پایداری تیر یکنواخت‌تر خواهد شد.

۵- مراجع

1. Bokaian, A. “Natural Frequencies of Beam under Compressive Axial Loads”, J. Sounds and Vibration, Vol. 126, No. 1, pp. 49-65, 1988.
2. Joshi, A. “Free Vibration Charactristic of Variable Mass Rocket Having Larg Axial Thrust / Acceleration”, J. Sounds and Vibration, Vol. 187, No. 4, pp. 727-736, 1995.
3. Nihous, G.C. “On the Countiniuty of Boundary Value Problem for Vibration Free-Free Stright Beam under Axial Loads”, J. Sounds and Vibration, Vol. 272, No. 1, pp. 110-19, 1997.
4. Pourtakdoust, S.H. and Assadian, N. “Investigation of Thrust Effect on the Vibrational Characteristics of Flexible Guided Missiles”, J. Sound and Vibration, Vol. 272, No. 4, pp. 287-299, 2004.
5. Bolotin. V.V. “Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability”, Pergamon Press, Oxford, 1963.
6. Beck, M. “Die Knicklast des Einseitig Eingespannten Tagential Gedruckten Stabes”, Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik, Vol. 3, No.3, pp. 225-8, 1952.
7. Sankaran, G.V. and Rao, G.V. “Stability of Tapered Cantilevered Columns Subjected to Follower Forces”, Computers and Struct., Vol. 6, No.3, pp. 217-220, 1976.
8. Pedersen, P. “Influence of Boundary Conditions on the Stability of a Column under Non-Conservative Load”, Int. Solids Struct., Vol. 13, No.5, pp. 445-455, 1977.
9. Chen, L.W. and Ku, D.M. “Eigenvalue Sensitivity in the Stability Analysis of Beck’s Column with a Concentrated Mass at the Free End”, J. Sound and Vibration, Vol. 153, No.3, pp. 403-411, 1992.
10. Sugiyama, Y. “Dynamic Stability of Cantilevered Timshenko Columns Subjected to a Rocket Thrust”, Computers and Structures, Vol. 51, No. 4, pp. 331-335, 1994.
11. Ryu, B.J. and Sugiyama, Y. “Dynamic Stability of Cantilevered Timshenko Columns Subjected to a Rocket Thrust”, Computers and Struct., Vol. 51, No. 4, pp. 331-335, 1994.
12. Langthjem, M.A. and Sugiyama, Y. “Optimum Shape Design against Flutter of a Cantilevered Column with an Endmass of Finite Size Subjected to a Non-Conservative Load”, J. Sound and Vibration, Vol. 226, No. 1, pp. 1-23, 1999.
13. Beal, T.R. “Dynamic Stability of a Flexible Missile under Constant and Pulsating Thrusts,” J. AIAA, Vol. 3, No. 3, pp. 486 – 494, 1965.
14. Park, Y.P. “Dynamic Stability of a Free Timoshenko Beam under a Controlled Follower Force,” J. Sound and Vibration, Vol. 113, No. 3, pp. 407 – 415, 1987

15. Kim, J.H. and Choo, Y.S. “Dynamic Stability of a Free-Free Timoshenko Beam Subjected to a Pulsating Follower Force,” J. Sound and Vibration, Vol. 216, No. 4, pp. 623 – 636, 1998.
16. Sumeet Pradhan, P.K. “Dynamic instability Characteristics of a Free-Free Missile Structure under a Controlled Follower Force”, Aircraft Engineering and Aerospace Technology, Vol.78, No.6, pp. 509–514, 2006.
17. Esbati, A.H. , Irani, S. and Moosazadeh, H. “The Effect of Mass and Section Properties on Instability Characteristic of Free-Free 3 Stages Timoshenko Beam, Subjected to Controlled Follower Force”, Mech. and Aerospace J., Vol. 5, No. 4, pp. 67-79, 2010 (In Persian).
18. Bazoune, A. and Khulief. Y.A, “Shape Functions of Three Dimensional Timoshenko Beam Element”, J. Sound and Vibration, Vol. 259, No.2, pp. 335-351, 2003.
19. Wu, J.J. “On the Stability of a Free-Free Beam under Axial Thrust Subjected to Directional Control”, J. Sound and Vibration, Vol. 43, No.1, pp. 45-52, 1975.
20. Wu, J.J. “Missile Stability Using Finite Elements—an Unconstrained Variational Approach”, J. AIAA, Vol. 14, No. 3, pp. 313-319, 1976.
21. Park, Y.P. and C.D. Mote, “the Maximum Controlled Follower Force on a Free-Free Beam Carrying a Concentrated Mass”, J. Sound and Vibration, Vol. 98, No. 2, pp. 247–256, 1985.