بررسی صحت نتایج تئوری‌های دانل و سندرز برای ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای ضخیم هدفمند در شروط مرزی متفاوت

شاهرخ حسینی هاشمی[۱]، حسین بیسادی[۲]، محمدرضا ایلخانی[۳] و محمد فدایی[۴]
دانشکده مهندسی مکانیک
دانشگاه علم و صنعت ایران
(تاریخ دریافت: ۹۰/۰۸/۲۰؛ تاریخ پذیرش: ۹۱/۰۳/۱۳)

چکیده

سازه‌های استوانه‌ای ساخته شده از مواد هدفمند (FGM)، به دلیل قابلیت‌های خوب مکانیکی و توانایی تحمل درجه حرارت‌های بالا، بسیار مورد توجه طراحان سازه هستند. بنابراین استفاده از یک روش کارآمد برای تحلیل ارتعاشات این سازه‌ها بسیار حائز اهمیت است. در این مقاله، بررسی ارتعاشات آزاد یک پوسته استوانه‌ای هدفمند بر اساس دو تئوری پوسته دانل و سندرز، در کنار تئوری مرتبه اول برشی مورد بررسی قرار گرفته است که ماده هدفمند دارای خواص متغیر در راستای ضخامت بر اساس یک تابع توانی است. در این تحقیق، معادلات حرکت به واسطه روش دقیق فضای حالت حل شده و به عنوان یکی از مزایای این روش است که نتایج آن برای تمامی شروط مرزی کلاسیک محاسبه شده است. نتایج به دست آمده از هر دو تئوری با نتایج سایر مقالات و مدل المان محدود سه‌بعدی مقایسه و تصدیق شده است. همچنین اثرات تغییر در پارامترهای هندسی و خصوصیات مواد بر فرکانس طبیعی سازه، در شروط مرزی مختلف مورد بررسی قرارگرفته است. قابل توجه است که در برخی موارد نتایج به دست آمده برای یکی از تئوری‌ها، دارای خطای عمده‌ای است که به دلایل آن اشاره شده است.

واژه‌های کلیدی: فرکانس طبیعی، تئوری مرتبه اول برشی، دانل و سندرز، روش فضا حالت.

Accuracy Analysis of Donnell & Sanders Theories for Free Vibration of Thick Functionally Graded Cylindrical Shell in Various Boundary Conditions

Sh.Hosseini Hashemi, H. Bisadi, M.R. Ilkhani and M. Fadaee
Mech. Eng. Dep't.
Iran Univ. of Sci. and Tech.
(Received: 11 November, 2011; Accepted: 02 June, 2012)

ABSTRACT

Functionally Graded cylindrical structures, because of their good mechanical ability and their high heat resistance capability, are noteworthy in structural designers view. So, possessing an efficient analysis method for vibration of such structures is so important. In this paper, free vibration of functionally graded cylindrical shell is analyzed based on Donnell and Sanders theories. Also, the first order shear deformation theory is used for displacement field. FG material properties change through the thickness direction according to a power law distribution function. Equations of motion are solved with state space method and as an advantage, numerical results are calculated for every classical boundary conditions. Numerical Results are compared with literature and 3D finite element model and good agreement are observed. Also, effects of geometry and material parameters change on natural frequencies are studied for different boundary conditions. In some cases, one of the theories has major error which is mentioned.

Keywords: Natural Frequency, First Order Shear Deformation Theory, Donnell & Sanders, State Space Method

۱- استاد (نویسنده پاسخگو): shh@iust.ac.ir
۲- استادیار: bisadi@iust.ac.ir
۳- دانشجوی کارشناسی ارشد: ilkhani@iust.ac.ir
۴- دانشجوی دکتری: fadaee@iust.ac.ir

۱- مقدمه

سازه‌های استوانه‌ای به جهت داشتن تناسب قابل قبول میان میزان وزن سازه و مقاومت مکانیکی، یکی از پرکاربردترین سازه‌های مهندسی هستند. به همین دلیل شاخه‌های مختلف مهندسی مانند مکانیک، هوافضا، الکترونیک، معدن، هسته‌ای و ...، از این توانایی برای تأمین نیازهای خود بهره برده‌اند. در سال‌های اخیر تلاش‌های بسیاری در راستای بررسی رفتار این سازه‌ها در گرایش‌های مختلف مهندسی صورت گرفته است. در این میان، بررسی رفتار دینامیکی و ارتعاشی سازه‌های استوانه‌ای یکی از پرکارترین زمینه‌های مهندسی بوده است. مهم‌ترین قدم در بررسی رفتار دینامیکی سازه‌های استوانه‌ای، یافتن فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای متناظر آن است، چرا که تمامی رفتارهای دینامیکی یک سازه بر مبنای این دو خصوصیت قابل بررسی است. بنابراین به منظور انجام یک طراحی بهینه، داشتن یک پاسخ دقیق برای این دو مورد بسیار حائز اهمیت است.

پرکاربردترین تئوری‌های به‌کار رفته در بررسی رفتار ارتعاشی استوانه‌ها برپایه تئوری الاستیسیته خطی و تئوری خطی پوسته‌ها بوده است. لاو[1] اولین کسی است که توانست بر اساس تئوری الاستیسیته خطی، تئوری پوسته‌های نازک را با موفقیت ارائه دهد [۱]. دانل[2] [۲] تئوری پوسته استوانه‌ای با مقطع دایروی را با ساده‌سازی معادلات پوسته‌های کم انحنا ارائه داد، این تئوری به دلیل سادگی و دقت کافی در کاربرد بسیار مورد توجه قرار گرفت. اما پاسخ‌های حاصل از این تئوری به دلیل در نظر نگرفتن اثر اینرسی دورانی، تنش‌های درون صفحه‌ای و اثر تغییر فرم برشی فقط در محدوده پوسته‌های بسیار نازک قابل اعتماد بودند. سندرز[3] [۳] تئوری پوسته‌های نازک را با استفاده از اصل کار مجازی و فرضیات لاو و کیرشوهف[4] توسعه داد. تئوری سندرز توانست مشکل ناپایداری‌های موجود در تئوری‌های قبلی را مرتفع کند. فلاگ[5] [۴] نیز تئوری را ارائه داد که بخش اعظم روابط آن بر پایه فرضیات کیرشوهف بود. نوازیلف[6] [۵] تئوری خود را با ساده‌سازی‌هایی درفرم کلی روابط اصلی پوسته‌ها و براساس فرضیات کیرشوهف ارائه داد. نقدی[7] [۶] نیز دقت نتایج تئوری لاو و کیرشوهف را برای یک پوسته الاستیک بررسی کرد. در این زمینه اطلاعات بیشتری در مرجع [۷] قابل دسترسی است.

همان‌طور که مشاهده شد، این تئوری‌ها بر اساس ساده‌سازی‌هایی بنا شده بودند که بر مبنای آن، پوسته باید بسیار نازک باشد تا بتوان مقادیر تنش را در ضخامت آن ثابت فرض نمود و پاسخی قابل اطمینان به دست آورد. بنابراین نتایج تئوری‌های کلاسیک پوسته‌ها، برای ضخامت‌های کم و همچنین فقط برای چند فرکانس اول قابل اطمینان است. برای به دست آوردن نتایج بهتر، دو اثر اینرسی دورانی و تغییر فرم برشی تحت عنوان تئوری مرتبه اول برشی[8] ارائه شده و با در نظر گرفتن این تئوری برای میدان‌های جابه‌جایی در کنار دو تئوری پوسته دانل و سندرز، پاسخ‌های بسیار خوبی برای پوسته‌های نسبتاً ضخیم به دست آمده است. خِدیِر[9] [۸ و ۹] یک پاسخ تحلیلی برای جابه‌جایی، فرکانس طبیعی و بار کمانش یک پوسته استوانه‌ای متعامد ارائه داد. تئوری به‌کار رفته در این تحلیل، تئوری بهبود یافته سندرز با میدان جابه‌جایی مرتبه اول و مرتبه بالای برشی بود. برپایه تئوری مرتبه اول برشی و تئوری سندرز، رِدی[10] [۱۰] پاسخی دقیق برای ارتعاشات و کمانش یک قطاع استوانه‌ای متعامد را تحت تأثیر بار سینوسی، بار گسترده و بار نقطه‌ای ارائه داد. نوسیر و ردی [۱۱] نیز پاسخ دقیقی را با بهسازی روش فضا- حالت و با استفاده از تئوری دانل و تئوری مرتبه اول برشی، برای یک پوسته استوانه‌ای متعامد ارائه دادند. شارما[11] [۱۲] ارتعاشات آزاد یک استوانه آزاد- گیردار را با تئوری‌های پوسته نازک بودیانسکی[12] و سندرز تحلیل کرد. سولدادوس[13] [۱۳] ارتعاشات آزاد یک استوانه همگن را بر پایه معادلات سه‌بعدی الاستیسیته در شرط مرزی ساده و با یک روش بازگشتی بررسی کرد. ژائو[14] و همکارانش [۱۴] ارتعاشات آزاد یک قطاع استوانه‌ای چند لایه را با شرط مرزی ساده و به روش المان‌بندی آزاد بررسی کردند که این تحلیل مبتنی بر تئوری[15] لاو بود. ژیانگ[16] و همکارانش [۱۵] ارتعاشات آزاد یک پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه را بر اساس تئوری مرتبه اول برشی و به روش المان محدود بررسی کردند. فِریرا[17] [۱۶] نیز

1- Love
2- Donnell
3- Sanders
4- Kirchhoff
5- Flugge
6- Novozhilov
7- Naghdi

8- First Order Shear Deformation
9- Khdeir
10- Reddy
11- Sharma
12- Budiansky
13- Soldatos
14- Zhao
15- Love
16- Xiang
17- Ferreira

بـا بـه‌کـاربردن تئـوری مرتبـه اول برشـی در تئـوری دانـل فرکانس‌های طبیعی یک پوسته اسـتوانه‌ای متعامـد را بـا روش المان محدود بررسی کرد.

مـواد هدفمنـد[1] گونـه‌ای از مـواد کـامپوزیتی هسـتند کـه خواص آنها در راستای ضخامتشان تغییـر مـی‌کنـد. ایـن مـواد دارای مقاومت حرارتی بالایی هستند و به مقدار قابل توجهی از تنش‌های حرارتی می‌کاهند و در نتیجه، دارای نسـبت وزن بـه مقاومت مکانیکی بسـیار خـوبی هسـتند. در ایـن مـواد توزیـع پیوسته خـواص از تغییـرات ناگهـانی توزیـع تـنش مـی‌کاهـد. خصوصیات برجسته این مواد باعـث شـده اسـت کـه بـه طـور گسترده در سازه‌های مقاوم به حرارت به‌کـار رونـد و در نتیجـه تحقیقات زیادی در زمینه دینامیک اجزای ساخته شـده از ایـن مـواد انجـام شـود. پرادهـان[2] و همکـارانش [۱۷] و لـوی[3] و همکارانش [۱۸] به بررسی ارتعاشات آزاد یک پوسته استوانه‌ای با مواد هدفمند پرداختنـد کـه در ایـن تحلیـل از تئـوری لاو و روش ریلـی[4] اسـتفاده کردنـد. عسـگری و اخلاقـی [۱۹] فرکانس‌های طبیعی یک پوسته استوانه‌ای ضخیم ساخته شـده از مواد هدفمند دوبعـدی را بـا اسـتفاده از تئـوری الاستیسـیته سه‌بعدی بررسی نمودند. یاس و عراق [۲۰] پاسخ‌های ارتعاشات آزاد یک استوانه هدفمند با شرایط مرزی ساده را، بـا معـادلات سه‌بعدی الاستیسیته و به روش مربعات دیفرانسیلی ارائه دادند. لی[5] و همکارانش [۲۱] ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای سه‌لایه را که لایه میانی آن از مواد هدفمند بود با شرط مرزی سـاده و بر اساس تئوری فلاگ بررسی کردند. اقبال[6] و همکارانش [۲۲] [۲۲] با استفاده از روش انتشار امواج ارتعاشات اجباری پوسـته استوانه‌ای نازک را بررسی کردند. این تحلیل برای شروط مرزی مختلف انجام شد. ول[7] [۲۳] پاسخ دقیقـی را بـرای ارتعاشـات آزاد و اجباری استوانه‌ای هدفمند با شرط مـرزی سـاده و روش سری‌های توانی ارائه داد. تورنابن[8] [۲۴] ارتعاشـات آزاد پوسـته استوانه‌ای هدفمند را بر اساس تئوری مرتبه اول برشـی و روش مربعات دیفرانسـیلی تعمـیم یافتـه بررسـی کـرد. پرادیومنـا[9] و همکارش [۲۵] ارتعاش آزاد یک پوسته اسـتوانه‌ای هدفمنـد را به روش المان محدود C^0 بررسـی نمودنـد. رِدِکـاپ[10] [۲۶] بـا استفاده از روش مربعـات دیفرانسـیلی پاسـخ مناسـبی را بـرای ارتعاشات آزاد استوانه اورتوتروپیک با تغییرات خواص در محـور شعاعی بر اساس تئوری الاستیسیته خطی ارائـه داد. همچنـین جعفری و همکاران [۲۷] نیز با در نظر گرفتن اثر فشار داخلـی فرکانس‌های طبیعی یک پوسته نازک استوانه‌ای را با استفاده از روش ریلی ارائه نموده‌اند.

اگرچه در سال‌های گذشته تلاش‌های بسـیاری در بررسـی دینامیک پوسته‌های استوانه‌ای هدفمند انجام شده اما اکثر آنها از روش‌های عددی برای تحلیل استفاده کرده‌اند. بنابراین هنـوز جای خالی برای بررسی دینامیک اسـتوانه‌ای هدفمنـد کـه بـه صورت دقیق مقادیر فرکانس طبیعی و شکل مود را ارائـه دهـد، احسـاس مـی‌شـود. بـر همـین اسـاس و بـر مبنـای بررسـی نویسندگان، فضـای خـالی بررسـی دقیـق ارتعاشـات آزاد یـک پوسته استوانه‌ای ضخیم که از مواد هدفمند ساخته شده باشد و برای تمامی شروط مرزی پاسخگو باشد، احساس شده است. در این مقاله با اسـتفاده از تئـوری مرتبـه اول برشـی و دو تئـوری پوسته دانل و سندرز معادلات حاکم بر ارتعاشات آزاد استوانه به دست آمده است. به منظور حـل ایـن معـادلات از روش دقیـق فضا- حالت استفاده شده و تمامی شروط مـرزی مـورد بررسـی قرار گرفته است. نتایج به دست آمده از این تحلیل با کارهـایی کـه توسـط سـایر محققـین انجـام داده‌انـد و همچنـین نتـایج نرم‌افزاری المان محدود مقایسه شده است. در طـی انجـام ایـن تحلیل، اثر تغییر در پارامترهای هندسی و همچنین نحوه توزیع خصوصیات مواد مورد بررسی قرار گرفته اسـت کـه در نتیجـه، نتایج جالبی نیز در مورد محدوده پاسخ قابل قبول دو تئوری به دست آمده است.

۲- روابط حاکم بر مسئله

در این قسمت ابتدا به منظور درک بهتر مسئله، پیش نیازهای ریاضی و پس از آن نحوه مدل‌سازی ریاضی مسئله حاضر، ارائه شده است.

۲-۱ خصوصیات هندسی مسئله

یک المان از پوسته دو انحنایی، به صورتی که در شکل **۱** آمـده را در نظر بگیرید. بردار P محل نقطه‌ای از این پوسـته را نشـان می‌دهد که در فاصله z از صفحه میانی قرار دارد و بردار p محل

1- Functionally Graded Materials (FGM)
2- Pradhan
3- Loy
4- Rayleigh
5- Li
6- Iqbal
7- Vel
8-Tornabene
9- Pradyumna
10- Redekop

نقطه متناظر را نشان می‌دهد که بر روی صفحه میانی قرار دارد. در این حالت فاصله میان دو نقطه $(\xi_1,\xi_2,0)$ و $(\xi_1+d\xi_1,\xi_2+d\xi_2,0)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$ds^2=\vec{dp}.\vec{dp}=\alpha_1^2(d\xi_1)^2+\alpha_2^2(d\xi_2)^2. \qquad (۱)$$

در رابطه بالا $\alpha_1^2=p_1.p_1,\alpha_2^2=p_2.p_2$ متریک‌های سطح هستند. همچنین فاصله میان دو نقطه (ξ_1,ξ_2,z) و $(\xi_1+d\xi_1,\xi_2+d\xi_2,z+dz)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$dS=d\vec{P}.d\vec{P}= \qquad (۲)$$

$$L_1^2(d\xi_1)^2+L_2^2(d\xi_2)^2+L_3^2(dz)^2.$$

در این رابطه داریم:

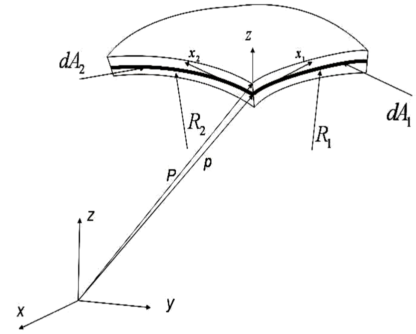
$$d\vec{P}=(\partial\vec{P}/\partial\xi_1)d\xi_1+ \qquad (۳)$$

$$(\partial\vec{P}/\partial\xi_2)d\xi_2+(\partial\vec{P}/\partial z)dz,$$

و مقادیر L_1,L_2,L_3 ضرایب لامه هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند [۷]:

$$L_1=\alpha_1\left(1+\frac{z}{R_1}\right),L_2=\alpha_1\left(1+\frac{z}{R_2}\right), \qquad (۴)$$

$$L_3=1.$$



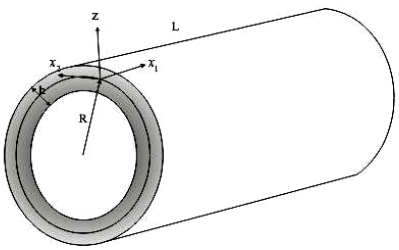
شکل (۱): نمایش یک المان از پوسته.

با دانستن این تعاریف مقادیر دیفرانسیلی سطح که برای محاسبات بعدی مورد نیاز است به صورت زیر به دست می‌آید:

$$dA_1=L_1d\xi_1dz=\alpha_1\left(1+\frac{z}{R_1}\right)d\xi_1dz,$$

$$dA_2=L_2d\xi_2dz=\alpha_2\left(1+\frac{z}{R_2}\right)d\xi_2dz. \qquad (۵)$$

دررابطه (۵) دو مقدار R_1,R_2 شعاع انحنا پوسته در دو جهت هستند که در مورد یک استوانه $R_1=\infty$ است. حال با کسب آگاهی از چگونگی قرارگیری محورهای مختصات و تعریف پارامترهای اولیه مربوط به آن، یک پوسته استوانه‌ای هدفمند به طول L ، شعاع انحنای صفحه میانی R و ضخامت h مطابق شکل **۲** در نظر گرفته شده است.



شکل (۲): نمایش هندسی یک استوانه هدفمند.

از اینجا به بعد به منظور ساده‌سازی و مختصرسازی روابط از یک تغییرمتغیر به صورت $x_1=\alpha_1\xi_1,x_2=\alpha_2\xi_2$ استفاده شده که در نتیجه آن سه مقدار (x_1,x_2,z) مختصات حرکت طولی، محیطی و شعاعی در نظر گرفته شده است.

۲-۲- خصوصیات مواد

مواد هدفمند، گروهی از مواد کامپوزیتی هستند که خصوصیات مکانیکی آنها به صورت توزیع شده در یک راستای خاص تغییر می‌کند. در واقع خواص مکانیکی مواد هدفمند، به صورت پیوسته میان خواص دو صفحه بالایی و پایینی که معمولاً یک ماده مقاوم به حرارت مانند سرامیک و یک ماده با مقاومت مکانیکی بالا مانند فولاد است، تغییر می‌کند. در اغلب موارد خاص مکانیکی، این مواد به صورت کسر حجمی و بر پایه یک تابع ریاضی درجهت ضخامت تغییر می‌کند. این تابع به اشکال مختلفی در تحلیل‌ها به‌کار رفته که به عنوان نمونه می‌توان به فرم‌نمایی و فرم‌توانی آن اشاره کرد. در این تحلیل از یک تابع کسر حجمی توانی برای نشان دادن نحوه توزیع خصوصیات مکانیکی استفاده شده است. دو مقدار مدول الاستیسیته یانگ و چگالی ماده به صورت زیر تغییر می‌کنند:

$$E_z=(E_m-E_c)V_f(z)+E_c,$$
$$\rho_z=(\rho_m-\rho_c)V_f(z)+\rho_c. \qquad (۶)$$

در رابطه (۶) دو اندیس c و m به ترتیب نشان دهنده خصوصیات سرامیک و فلز هستند و $V_f(z)$ تابع کسر حجمی است که به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۸]:

$$V_f(z)=\left(\frac{z}{h}+\frac{1}{2}\right)^g. \qquad (۷)$$

در رابطه (۷)، g مقدار شاخص توانی است که می‌تواند از صفر تا بی‌نهایت تغییر نماید. مقادیر خصوصیاتی که در این تحلیل

استفاده شده در جدول **۱** آمده و دیگر خاصیت مکانیکی ماده یعنی ضریب پواسون ثابت و برابر ۰/۳ در نظر گرفته شده است.

جدول (۱): خصوصیات مکانیکی مواد هدفمند به کار رفته در تحلیل.

ماده	مدول یانگ	چگالی
Aluminum(Al)	۷۰ Gpa	۲۷۰۰ kg/m^3
Alumina(Al_2o_3)	۳۸۰ Gpa	۳۸۰۰ kg/m^3
Zirconia(Zro_2)	۲۰۰ Gpa	۵۷۰۰ kg/m^3

همچنین از آنجایی که این مواد تنها دارای تغییر خصوصیات در راستای ضخامت خود هستند، بنابراین رفتار تنش و کرنش این مواد از قانون هوک تبعیت می‌کند که در ادامه به روابط آن اشاره شده است.

۲-۳ فرضیات تئوری

به جهت به دست آوردن معادلات حاکم بر دینامیک یک پوسته استوانه‌ای نسبتاً ضخیم، فرضیاتی در نظر گرفته شده است که در نتیجه آن تعریف میدان جابه‌جایی، روابط میان کرنش- جابه‌جایی و تنش- کرنش به دست آمده است. میدان جابه‌جایی مرتبه اول به شرح زیر ارائه شده است [۳]:

$$\begin{aligned} U\left(x_1,x_2,z,t\right) &= u\left(x_1,x_2,t\right)+z\psi_1\left(x_1,x_2,t\right),\\ V\left(x_1,x_2,z,t\right) &= v\left(x_1,x_2,t\right)+z\psi_2\left(x_1,x_2,t\right),\\ W\left(x_1,x_2,z,t\right) &= w\left(x_1,x_2,t\right). \end{aligned} \qquad (۸)$$

در جایی که مقادیر u,v,w به ترتیب جابه‌جایی در جهت عرضی، محیطی و طولی است و ψ_1,ψ_2 چرخش صفحه میانی به ترتیب حول محورهای x_2,x_1 است، t نیز زمان است. رابطه کرنش- جابه‌جایی در دستگاه مختصات منحنی‌الخط به صورت زیر است [۷]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{\partial}{\partial\xi_j}\left(\frac{u_i}{L_i}\right)+\frac{1}{L_i}\sum_{k=1}^{3}\frac{u_k}{L_k}\frac{\partial L_i}{\partial\xi_k},\\ \gamma_{ij} &= \frac{1}{\sqrt{g_i g_j}}\left[g_i\frac{1}{\alpha_j}\left(\frac{u_i}{\sqrt{g_i}}\right)+g_j\frac{1}{\alpha_i}\left(\frac{u_j}{\sqrt{g_j}}\right)\right]. \end{aligned} \qquad (۹)$$

در این رابطه ε_{ij},u_i کرنش نرمال و میدان‌های جابه‌جایی هستند. در این مقاله تحلیل بر پایه دو تئوری دانل و سندرز قرار داده شده است بنابراین با توجه به فرضیات در نظر گرفته شده برای این دو تئوری و توجه به این نکته مهم که برای یک پوسته با شعاع انحنای ثابت $\frac{\partial\alpha_2}{\partial\xi_1}=\frac{\partial\alpha_1}{\partial\xi_2}=۰$ می‌باشد که روابط کرنش- جابه‌جایی به صورت زیر به دست می‌آیند. (به جهت ساده‌سازی و همچنین بنابر فرضیات مسئله مقدار ε_3 برابر صفر در نظر گرفته شده است).

$$\varepsilon_{11}=\varepsilon_1,\varepsilon_{22}=\varepsilon_2,\varepsilon_{12}=\varepsilon_6,\varepsilon_{23}=\varepsilon_4,\varepsilon_{13}=\varepsilon_5.$$

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1=\varepsilon_1^0+zk_1,\qquad \varepsilon_2=\varepsilon_2^0+zk_2,\\ &\varepsilon_6=\varepsilon_6^0+zk_6,\qquad \varepsilon_4=\varepsilon_4^0,\\ &\varepsilon_5=\varepsilon_5^0. \end{aligned} \qquad (۱۰)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1^0=\frac{\partial u}{\partial x_1},\quad \varepsilon_2^0=\frac{\partial v}{\partial x_2}+\frac{w}{R},\quad \varepsilon_6^0=\frac{\partial v}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial x_2},\\ &\varepsilon_4^0=\frac{\partial w}{\partial x_2}+\psi_2-c_1\frac{v}{R},\quad \varepsilon_5^0=\frac{\partial w}{\partial x_1}+\psi_1,\quad k_1=\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1},\\ &k_2=\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2},\quad k_6=\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}+\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}+\frac{1}{2R}\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}-\frac{\partial u}{\partial x_2}\right). \end{aligned} \qquad (۱۱)$$

به دلیل آنکه توزیع تنش در هر یک از لبه‌های یک پوسته خطی نیست، نمی‌توان معادلات حرکت یک پوسته را بر اساس تنش‌ها به دست آورد. بنابراین معادلات را بر اساس مفهومی به نام منتجه‌های تنش می‌نویسند که مجموع تنش‌های اعمالی در یک لبه پوسته در واحد طول است. دو تئوری مورد نظر با توجه به روابط (۱) و (۲)، به صورت زیر تعریف می‌شوند [۷]:

$$\begin{aligned} &\begin{Bmatrix} M_1\\ M_2\\ M_6 \end{Bmatrix}=\int_{-h/2}^{h/2}\begin{Bmatrix} z\,\sigma_1(1+c_1\frac{z}{R})\\ z\,\sigma_2\\ z\,\sigma_6(1+c_1\frac{z}{R}) \end{Bmatrix}dz,\\ &\begin{Bmatrix} N_1\\ N_2\\ N_6\\ Q_1\\ Q_2 \end{Bmatrix}=\int_{-h/2}^{h/2}\begin{Bmatrix} \sigma_1(1+c_1\frac{z}{R})\\ \sigma_2\\ \sigma_6(1+c_1\frac{z}{R})\\ \kappa_5\sigma_5(1+c_1\frac{z}{R})\\ \kappa_4\sigma_4 \end{Bmatrix}dz, \end{aligned} \qquad (۱۲)$$

به طوری‌که N_1,N_2,N_6 منتجه‌های نیروهای درون‌صفحه‌ای هستند و همچنین Q_1,Q_2 منتجه‌های نیروهای عرضی هستند. M_1,M_2,M_6 نیز منتجه‌های ممان هستند. در رابطه بالا دو ضریب κ_4,κ_5 ضرایب تصحیح برشی هستند که در تئوری میندلین به جهت بهبود وضعیت توزیع برش به‌کار می‌روند. مقادیر مختلفی برای این دو ضریب مطرح شده‌اند که در این مقاله $\kappa_4=\kappa_5$ در نظرگرفته شده و مقادیر ۳/۴ و۵/۶ برای آنها به‌کار رفته است [۱۱]. دیگر پارامتر مهمی که برای این تحلیل به‌کار گرفته شده، ممان اینرسی جرمی است که

برای یک استوانه و با توجه به روابط (۵) به قرار زیر خواهد بود:

$$I_i = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z)\left(1+c_1\frac{z}{R}\right)z^i dz \qquad i=0,1,2. \qquad (۱۳)$$

در رابطه بالا $\rho(z)$ رابطه چگالی توزیع شده مواد هدفمند است. به این نکته باید اشاره کرد که در تمامی روابط بالا ضریب c_1 به صورت $c_1 = ۱$ برای تئوری سندرز و $c_1 = ۰$ برای تئوری دانل در نظر گرفته شده است. در نهایت روابط تنش- کرنش برای مواد هدفمند همان‌طوری‌که اشاره شد به صورت زیر است [۱۸]:

$$\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_4\\ \sigma_5\\ \sigma_6\end{bmatrix} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}\begin{pmatrix}1 & \nu & 0 & 0 & 0\\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & (1-\nu)/2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\nu)/2\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_4\\ \varepsilon_5\\ \varepsilon_6\end{bmatrix}. \qquad (۱۴)$$

۲- ۴- معادلات حرکت

با آگاهی از روابط مورد نیاز برای به دست آوردن معادلات حرکت، از اصل همیلتون برای این معادلات استفاده شده است. فرم کلی این اصل به صورت زیر است [۷]:

$$\int_0^T \delta \mathrm{L} dt = \int_0^T (\delta\mathrm{K} - \delta\mathrm{U})dt = 0. \qquad (۱۵)$$

در رابطه بالا U و K انرژی پتانسیل، کرنشی وانرژی جنبشی هستند که برای المانی ازیک پوسته استوانه‌ای به قرار زیر می‌باشند [۷]:

$$\mathrm{K} = \frac{1}{2}\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^{\theta}\int_0^{L} \rho(z)(\dot{u}^2+\dot{v}^2+\dot{w}^2)(1+\frac{z}{R})dx_1 dx_2 dz ,$$

$$\mathrm{U} = \frac{1}{2}\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^{\theta}\int_0^{L} (\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_6\varepsilon_6 \qquad (۱۶)$$

$$+\sigma_4\varepsilon_4 + \sigma_5\varepsilon_5)(1+\frac{z}{R})dx_1 dx_2 dz .$$

بعد از اعمال عملگر حساب تغییرات و انجام چندین انتگرال‌گیری جزء به جزء و جداسازی ضرایب مربوط به $\delta u, \delta v, \delta w, \delta\psi_1, \delta\psi_2$ معادلات حرکت به قرار زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
&\delta u: \quad \frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{\partial N_6}{\partial x_2} = I_1\ddot{u} + I_2\ddot{\psi}_1,\\
&\delta v: \quad \frac{\partial N_6}{\partial x_1} + \frac{\partial N_2}{\partial x_2} + c_1\frac{Q_2}{R} = I_1\ddot{v} + I_2\ddot{\psi}_2,\\
&\delta \psi_1: \quad \frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial M_6}{\partial x_2} - Q_1 = I_2\ddot{u} + I_3\ddot{\psi}_1,\\
&\delta w: \quad \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} - \frac{N_2}{R} = I_1\ddot{w}.
\end{aligned} \qquad (۱۷)$$

در معادلات بالا نقطه بالای پارامترها به‌معنای مرتبه مشتق نسبت به زمان است و ضریب c_1 نیز مانند قبل خواهد بود. در

کنار این معادلات برای هر نوع از شروط مرزی کلاسیک قیدهای زیر نیز به دست می‌آید که در زیر طبقه‌بندی شده‌اند.

شرط مرزی ساده:

$$\begin{aligned}
&S1:\ w = M_1 = \psi_2 = N_1 = N_6 = 0,\\
&S2:\ w = M_1 = \psi_2 = u = N_6 = 0,\\
&S3:\ w = M_1 = \psi_2 = N_1 = v = 0,\\
&S4:\ w = M_1 = \psi_2 = u = v = 0.
\end{aligned} \qquad (۱۸- ۱)$$

شرط مرزی گیردار:

$$\begin{aligned}
&C1:\ w = \psi_1 = \psi_2 = N_1 = N_6 = 0,\\
&C2:\ w = \psi_1 = \psi_2 = u = N_6 = 0,\\
&C3:\ w = \psi_1 = \psi_2 = N_1 = v = 0,\\
&C4:\ w = \psi_1 = \psi_2 = u = v = 0.
\end{aligned} \qquad (۱۸- ۲)$$

شرط مرزی آزاد:

$$N_1 = N_6 = M_1 = M_6 = Q_1 = 0. \qquad (۱۸- ۳)$$

حال با آگاهی کامل از روابط و معادلات حاکم بر آن، نیاز است تا با قراردادن روابط در داخل یکدیگر آنها را ساده‌سازی نماییم. روابط (۱۰) و (۱۴) در روابط (۱۲) قرار گرفته و بعد از حل انتگرال‌های منتجه ممان و نیرو به صورت زیر ساده‌سازی می‌شوند:

$$\begin{aligned}
&N_1 = (A+\frac{B}{R})(\varepsilon_1^0+\nu\varepsilon_2^0) + (B+\frac{C}{R})(k_1^0+\nu k_2^0),\\
&M_1 = (B+\frac{C}{R})(\varepsilon_1^0+\nu\varepsilon_2^0) + (C+\frac{D}{R})(k_1^0+\nu k_2^0),\\
&N_2 = A(\varepsilon_2^0+\nu\varepsilon_1^0) + B(k_2^0+\nu k_1^0),\\
&M_2 = B(\varepsilon_2^0+\nu\varepsilon_1^0) + C(k_2^0+\nu k_1^0),\\
&M_6 = (B'+\frac{C'}{R})\varepsilon_6^0 + (C'+\frac{D'}{R})k_6^0,\\
&N_6 = (A'+\frac{B'}{R})\varepsilon_6^0 + (B'+\frac{C'}{R})k_6^0,\\
&Q_1 = \kappa(A'+\frac{B'}{R})\varepsilon_5^0, \quad Q_2 = \kappa A'\varepsilon_4^0.
\end{aligned} \qquad (۱۹)$$

تمامی ضرایب به‌کار رفته در روابط (۱۹) در پیوست آمده است. با قرار دادن این روابط در معادلات حرکت (۱۷) پنج معادله دیفرانسیل جزئی به دست می‌آید. برای حل معادلات حرکت پوسته استوانه‌ای با هر شرط مرزی اختیاری در دو سر استوانه $\pm L/2$، پاسخ‌های زیر در نظر گرفته شده است:

$$\begin{aligned}
&u = U_m(x_1)Cos(\beta_m x_2)e^{i\omega_m t},\\
&v = V_m(x_1)Sin(\beta_m x_2)e^{i\omega_m t},\\
&\psi_1 = X_m(x_1)Cos(\beta_m x_2)e^{i\omega_m t},\\
&\psi_2 = Y_m(x_1)Sin(\beta_m x_2)e^{i\omega_m t},\\
&w = w_m(x_1)Cos(\beta_m x_2)e^{i\omega_m t}.
\end{aligned} \qquad (۲۰)$$

در دسته روابط بالا $\beta_m = m/R$ می‌باشد که $m = ۰,۱,۲,\cdots$ شماره مد ارتعاشی و ω_m نیز فرکانس طبیعی متناظر آن است.

حال بـا قـرار دادن ایـن دسـته پاسخ‌هـا در معـادلات حرکـت به دست آمده از جای‌گذاری روابط (۱۱ و ۱۹) و مرتـب‌سـازی آنها بر اساس مرتبه مشتق‌گیری داریم:

$$\begin{aligned} U'' &= q_1 U + q_2 V' + q_3 W' + q_4 X + q_5 Y', \\ V'' &= q_6 U' + q_7 V + q_8 W + q_9 X' + q_{10} Y, \\ X'' &= q_{11} U + q_{12} V' + q_{13} W' + q_{14} X + q_{15} Y', \\ Y'' &= q_{16} U' + q_{17} V + q_{18} W + q_{19} X' + q_{20} Y, \\ W'' &= q_{21} U' + q_{22} V + q_{23} W + q_{24} X' + q_{25} Y. \end{aligned} \quad (۲۱)$$

پنج معادله به دست آمده در بالا یک دسته معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم معمولی کوپل هستند و q_iها نیز ترکیبی از ضرایب آمده در پیوست هستند. به منظور حـل ایـن دسـتگاه از روش فضـا- حالـت اسـتفاده شـده اسـت. در ایـن روش بـا انتخـاب متغیرهای کمکی هر دستگاه معادلات دیفرانسیل بـا n معادلـه مرتبه m ، به $m \times n$ معادله مرتبـه اول بـدل مـی‌شـود. بـدین ترتیب برای حل این مسـئله خـاص از تغییـر متغیـرهـای زیـر استفاده است:

$$\begin{aligned} &Z_{1m}(x_1) = U_m(x_1), && Z_{2m}(x_1) = U'_m(x_1) = Z'_{1m}(x_1), \\ &Z_{3m}(x_1) = V_m(x_1), && Z_{4m}(x_1) = V'_m(x_1) = Z'_{3m}(x_1), \\ &Z_{5m}(x_1) = W_m(x_1), && Z_{6m}(x_1) = W'_m(x_1) = Z'_{5m}(x_1), \\ &Z_{7m}(x_1) = X_m(x_1), && Z_{8m}(x_1) = X'_m(x_1) = Z'_{7m}(x_1), \\ &Z_{9m}(x_1) = Y_m(x_1), && Z_{10m}(x_1) = Y'_m(x_1) = Z'_{9m}(x_1). \end{aligned} \quad (۲۲)$$

با اعمال این تغییر متغیر در دستگاه معادلات داریم:

$$\begin{aligned} &\{Z'\} = [A]\{Z\}, \\ &\{Z'\} = \{Z'_{1m} \ldots Z'_{10m}\}^T, \{Z\} = \{Z_{1m} \ldots Z_{10m}\}. \end{aligned} \quad (۲۳)$$

ماتریس $[A]$ یک ماتریس ده در ده است و همان‌طوری کـه در زیر مشخص است دارای ۳۰ درایه غیر صفر می‌باشد.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_1 & 0 & 0 & q_2 & 0 & q_3 & q_4 & 0 & 0 & q_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_6 & q_7 & 0 & q_8 & 0 & 0 & q_9 & q_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{11} & q_{12} & 0 & q_{13} & 0 & 0 & q_{14} & q_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ q_{16} & 0 & 0 & q_{17} & 0 & q_{18} & q_{19} & 0 & 0 & q_{20} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & q_{21} & q_{22} & 0 & q_{23} & 0 & 0 & q_{24} & q_{25} & 0 \end{pmatrix}. \quad (۲۴)$$

نحوه کلی پاسخ برای معادله (۲۳) به صورت زیر است:

$$Z(x_1) = e^{Ax_1}\{a\}, \quad (۲۵)$$

دراین رابطه $\{a\}$ بردار و ستونی از ثوابت است کـه بـه شـروط مرزی وابسته است و ماتریس e^{Ax_1} نیز فرم تـوانی مـاتریس $[A]$ است. تنها مورد دیگـر کـه بایـد توضـیح داده شـود، چگـونگی به دست آوردن فرم توانی مـاتریس $[A]$ اسـت کـه روش‌هـای زیادی نیز برای آن موجود است. برای این منظـور نیـز از روش ماتریس‌های مودال استفاده شـده کـه بـه صـورت رابطـه (۲۶) تعریف می‌شود. در ایـن رابطـه λ_i $(i = ۱,۲,...,۱۰)$ مقـادیر ویـژه ماتریس $[A]$ هستند و ماتریس $[M]$ نیز مـاتریس مـودال اسـت که iامین ستون آن همان بردار ویژه متناظر با iامین مقدار ویژه ماتریس $[A]$ است.

$$e^{Ax_1} = [M] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 x_1} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 x_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_{10} x_1} \end{bmatrix} [M]^{-1}. \quad (۲۶)$$

با قرار دادن رابطه (۲۵) در داخل هـر نـوع ترکیبـی از شـرایط مرزی در دو سمت $x_1 = \pm L/2$ استوانه، یـک دسـتگاه معـادلات همگن حاصل می‌شود که به صورت زیر قابل نمایش است:

$$G_{ij} k_j = 0. \quad (۲۷)$$

دستگاه معادلات همگن (۲۷) دارای پاسخ نخواهد بود مگر آنکه دترمینان ماتریس ضرایب صفر باشد:

$$|G_{ij}| = 0. \quad (۲۸)$$

معادله (۲۸) مقدار فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای را بـه دست می‌آورد. نکته مهم قابل ذکر این است که در مواردی کـه ضخامت پوسته خیلی کم و یا خیلی زیاد است بهتر است که از فرم (۲۹) که در آن ماتریس معکوس ماتریس مودال در مخـرج قرار گرفته استفاده نمود، چرا که با انجام این عمل دیگر نیـازی به محاسبه دترمینان معکوس ماتریس مودال نیست و از خطای محاسباتی کامپیوتری در محاسبه دترمینان معکـوس مـاتریس مودال جلوگیری می‌شود.

$$\frac{|G_{ij}|}{|M_{ij}|} = 0. \quad (۲۹)$$

۳- نتایج عددی

در این بخش ابتدا نتایج به دست آمده از تحلیل حاضر، با نتایج به دست آمده از نرم‌افزار Abaqus و سایر مقالات مقایسه شـده است. این مقایسه در دو بخـش اسـتوانه همسـانگرد و اسـتوانه هدفمنـد در ضخامت‌های مختلف و برای شروط مـرزی متفـاوت انجام شده است. به منظور مـدل‌سـازی المـان محـدود پوسـته هدفمند، از المان سه‌بعدی الاستیسیته ۲۰ گره‌ای که هـر گـره دارای سه درجه آزادی است، استفاده شده است. همچنین مدل مذکور در راستای ضخامت به تعداد ۲۰ لایه تقسیم‌بندی شـده و هر لایه به صورت جداگانه در دو راسـتای طـولی و پیرامـونی

المان‌بندی شده است. انتخاب این تعداد تقسیمات با توجه به توصیه مراجع انجام شده است [۲۸]. در داخل جداول شماره مود هر فرکانس به صورت (n,m) که به‌ترتیب شماره مود محیطی و طولی هستند، نشان داده شده است. در قسمت دوم اثرات تغییر پارامترهای مختلف هندسی و مادی بر روند تغییر فرکانس طبیعی استوانه برای شروط مرزی مختلف بررسی شده است. در ادامه، شروط مرزی گیردار، ساده و آزاد به ترتیب با نمادهای C، S و F نشان داده شده است. همچنین در تمامی موارد از ضریب تصحیح برش $\kappa = ۵/۶$ استفاده شده است. ترکیب به‌کار رفته در تحلیل به دو صورت Al/Al_2O_3 یا ماده (۱) و Al/ZrO_2 یا ماده (۲) می‌باشند.

۳-۱- مقایسه کمی نتایج

در جدول **۲** فرکانس‌های طبیعی یک استوانه همگن با شرایط مرزی ساده که توسط دو تئوری دانل و سندرز به دست آمده‌اند و با رابطه $\Omega = R\omega\sqrt{((1-\nu^2)\rho / E)}$ بی‌بعد شده‌اند نشان داده شده است. نتایج بر اساس شماره مودهای پیرامونی متفاوت مرتب شده و با نتایج به دست آمده از تئوری سه‌بعدی الاستیسیته و المان محدود سه‌بعدی مقایسه شده‌اند. نتایج حاضر در این جدول نشان می‌دهد که تطابق بسیار خوبی میان نتایج تئوری‌های مذکور و نتایج تئوری سه‌بعدی الاستیسیته وجود دارد و دقت نتایج بسیار عالی است. همین‌طور مدل المان محدود نیز نتایج بسیار خوبی را ارائه داده که نشان از صحت مدل‌سازی در نرم‌افزار المان محدود است. در جدول **۳** دو فرکانس طبیعی اول یک استوانه‌ای همگن که توسط دو تئوری دانل و سندرز و مدل المان محدود سه‌بعدی محاسبه شده‌اند، برای ترکیبات شروط مرزی و در نسبت‌های ضخامت به شعاع مختلف نشان داده شده است. در کنار هر یک از فرکانس‌ها، ارقامی که به صورت برجسته نشان داده شده‌اند حاکی از مودهای محوری هستند.

جدول حاضر نشان می‌دهد که نتایج به دست آمده دارای دقت بسیار خوبی نسبت به مدل سه‌بعدی المان محدود هستند. همین‌طور این دو تئوری توانسته مودهای ارتعاشی طولی را نیز تحت پوشش قرار داده و فرکانس‌های آنها را با دقت خوبی ارائه دهند، اما دو جدول **۲** و **۳** به طور کلی نشان می‌دهند که تئوری سندرز نتایج دقیق‌تری نسبت به تئوری دانل می‌دهد. این تفاوت به ویژه در نسبت ضخامت‌های بالاتر مشهودتر بوده و معمولاً نتایج به دست آمده از تئوری دانل بزرگ‌تر از مقدار المان محدود است.

جدول **۴** و **۵** دو فرکانس اول یک پوسته استوانه‌ای هدفمند و با خصوصیت ماده (۱) را نشان می‌دهد که برای ترکیبات شروط مرزی و برای نسبت‌های مختلف h/R به دست آمده است. جدول **۴**، تطابق بسیار خوب بین نتایج به دست آمده از تئوری سندرز با نتایج المان محدود سه‌بعدی را گزارش می‌دهد. در مقابل همان‌طوری که انتظار می‌رفت تئوری دانل نسبت به المان محدود، نتایج بیشتری داده که به ویژه در نسبت‌های ضخامت به شعاع بالاتر، این مسئله مشهودتر است.

جدول (۲): مقایسه فرکانس‌های طبیعی یک پوسته استوانه‌ای همگن با شرط مرزی ساده (n=1, L/R= ۲۰ , h/R=۰/۰۰۲).

شماره مود	Loy [۱۸]	FEM	Present Donnell	Present Sanders
۱	۰/۰۰۱۶۱۰۱	۰/۰۰۱۶۱۰۱	۰/۰۰۱۶۲۳۷	۰/۰۰۱۶۱۰۵
۲	۰/۰۰۹۳۸۲	۰/۰۰۹۳۸۰۸	۰/۰۱۱۶۲۷	۰/۰۰۹۳۹۲۲
۳	۰/۰۲۲۱۰۵	۰/۰۲۲۱۱۸	۰/۰۲۴۸۳۲	۰/۰۲۲۱۱۰
۴	۰/۰۴۲۲۰۹۵	۰/۰۴۲۱۴۲	۰/۰۴۴۸۸۷	۰/۰۴۲۰۸۸
۵	۰/۰۶۸۰۰۸	۰/۰۶۸۱۵۵	۰/۰۷۰۸۱۰	۰/۰۶۷۹۸۱
۶	۰/۰۹۹۷۳۰	۰/۰۱۰۰۱۳	۰/۱۰۲۵۱۸	۰/۰۹۹۶۶۴
۷	۰/۱۳۷۲۳۹	۰/۱۳۸۲۲۸	۰/۱۳۹۹۷۹	۰/۱۳۷۱۰۸
۸	۰/۱۸۰۵۲۷	۰/۱۸۲۷۲۰	۰/۱۸۳۱۸۲	۰/۱۸۰۳۰۵
۹	۰/۲۲۹۵۹۴	۰/۲۳۴۰۵۷	۰/۲۳۲۶۹۶	۰/۲۲۹۲۳۲
۱۰	۰/۲۸۴۴۳۵	۰/۲۸۸۷۶۲	۰/۲۸۶۷۹۰	۰/۲۸۳۸۷۷

در جدول **۵** نیز تئوری سندرز نتایج خوبی ارائه داده اما در مقابل، خطای حاصل از تئوری دانل در این جداول به شدت افزایش یافته است. به طوری که با کاهش سختی از شروط مرزی ساده- ساده به آزاد- آزاد مشاهده می‌شود که مقدار خطا به شدت افزایش یافته تا جایی که در شرط مرزی آزاد- آزاد که یکی از پرکاربردترین شروط مرزی در صنایع می‌باشد، نتایج غیر قابل اطمینان هستند. در مواردی که نسبت h/R بالاست تئوری سندرز مقادیر کمتری را نسبت به المان محدود ارائه نموده واین به دلیل آن است که روش المان محدود با توجه به نوع مدل‌سازی پاسخ دقیقی نیست. اما در مقابل روش حاضر یک روش دقیق و تحلیلی است.

۳- ۲- اثرتغییر مود پیرامونی بر فرکانس طبیعی پایه

در شکل **۳** مقادیر فرکانس طبیعی استوانه با مشخصات ماده (۱) L/R=۱، g=۱ و h/R=۰/۰۲ و شروط مرزی C-C، C-S، S-

S و C-F برای سه مود طولی اول، نمودارهای زیر ترسیم شده است.

نتایج حاصل از دو تئوری دانل و سندرز در کنار هم قرار گرفته‌اند. در تمامی نمودارهای شکل **۳** مشاهده می‌شود که در عدد مود طولی (n) ثابت، میزان فرکانس طبیعی با افزایش مود پیرامونی (m) ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. همچنین در این نمودارها مشاهده می‌شود که عدد مود پیرامونی پایه (m) به نوع شرط مرزی وابسته است. این پدیده در اثر تغییر در نسبت میان انرژی کششی و انرژی خمشی استوانه اتفاق می‌افتد. البته همان‌طوری که انتظار می‌رفت در شرط مرزی C-F به ویژه در فرکانس پایه اختلاف میان دو تئوری تا حدودی افزایش می‌یابد.

جدول (۳) مقایسه دو فرکانس طبیعی اول استوانه همگن با شروط مرزی مختلف و نسبت‌هایh/R متفاوت(L=R=1).

شروط مرزی	R/h	فرکانس اول(Hz)				فرکانس دوم(Hz)			
		FEM		Present		FEM		Present	
				DT*	ST**			DT	ST
C - C	۵	۲۰۷۶/۳	[۱ و ۲]	۲۰۸۵/۷	۲۰۷۵/۷	۲۱۸۱/۶	[۱ و ۱]	۲۱۸۵/۵	۲۱۷۵/۳
	۱۰	۱۴۷۳/۰	[۱ و ۳]	۱۴۸۳/۶	۱۴۸۲/۱	۱۵۲۱/۰	[۱ و ۲]	۱۵۲۴/۴	۱۵۱۸/۰
	۴۰	۷۳۸/۴	[۱ و ۵]	۷۴۱/۳	۷۳۵/۵	۷۵۶/۹	[۱ و ۶]	۷۶۲/۷	۷۵۴/۷
C – S	۵	۱۷۷۶/۶	[۱ و ۲]	۱۷۹۷/۳	۱۷۷۵/۶	۱۸۹۰/۳	[۱ و ۱]	۱۸۹۱/۰	۱۸۹۰/۰
	۱۰	۱۲۷۸/۹	[۱ و ۳]	۱۳۰۰/۰	۱۲۷۹/۵	۱۳۵۲/۹	[۱ و ۲]	۱۳۶۲/۳	۱۳۵۳/۱
	۴۰	۶۶۲/۲۳	[۱ و ۵]	۶۶۸/۶	۶۶۱/۸	۶۸۸/۱	[۱ و ۶]	۶۹۶/۷	۶۸۷/۸
S - S	۵	۹۸۸/۶	---	۹۸۷/۱	۹۸۷/۱	۱۵۳۶/۶	[۱ و ۲]	۱۵۷۱/۰	۱۵۳۶/۸
	۱۰	۹۸۷/۴	---	۹۸۷/۱	۹۸۷/۱	۱۱۳۰/۰	[۱ و ۳]	۱۱۵۸/۴	۱۱۳۱/۰
	۴۰	۵۹۲/۹	[۱ و ۵]	۶۰۱/۶	۵۹۳/۸	۶۲۶/۵	[۱ و ۶]	۶۳۷/۴	۶۲۷/۲

* DT: Donnell Theory
** ST: Sanders Theory

جدول (۴): مقایسه دو فرکانس طبیعی اول استوانه هدفمند با خصوصیت ماده(۱) برای شروط مرزی و نسبت‌های h/R مختلف (L=R=1,g=1).

شروط مرزی	R/h	فرکانس اول(Hz)				فرکانس دوم(Hz)			
		FEM		Present		FEM		Present	
				DT	ST			DT	ST
C - C	۵	۱۶۳۵/۸	[۱ و ۲]	۱۶۵۰/۳	۱۶۳۹/۳	۱۶۹۷/۰	[۱ و ۳]	۱۷۲۴/۶	۱۷۰۱/۱
	۱۰	۱۱۵۱/۷	[۱ و ۳]	۱۱۷۰/۳	۱۱۵۵/۴	۱۲۰۹/۸	[۱ و ۲]	۱۲۲۱/۱	۱۲۱۴/۵
	۴۰	۵۸۷/۳	[۱ و ۵]	۵۹۴/۵	۵۸۹/۶	۵۹۰/۸	[۱ و ۶]	۶۰۱/۳	۵۹۴/۴
C - S	۵	۱۴۰۲/۰	[۱ و ۲]	۱۴۱۹/۵	۱۴۰۵/۲	۱۴۷۲/۸	[۱ و ۳]	۱۵۰۳/۷	۱۴۷۳/۸
	۱۰	۱۰۰۶/۹	[۱ و ۳]	۱۰۲۷/۸	۱۰۰۹/۴	۱۰۸۰/۴	[۱ و ۴]	۱۱۱۰/۹	۱۰۸۲/۲
	۴۰	۵۲۸/۴	[۱ و ۵]	۵۳۶/۰	۵۳۰/۵	۵۳۵/۴	[۱ و ۶]	۵۴۷/۶	۵۳۹/۹
S - S	۵	۸۱۰/۱	----	۸۳۰/۵	۸۲۸/۲	۱۲۱۶/۰	[۱ و ۲]	۱۲۴۷/۹	۱۲۲۰/۴
	۱۰	۸۱۵/۴	----	۸۲۶/۰	۸۲۴/۸	۸۹۵/۷	[۱ و ۳]	۹۲۱/۱	۸۹۹/۹
	۴۰	۴۷۳/۳	[۱ و ۵]	۴۸۱/۶	۴۷۵/۴	۴۸۵/۵	[۱ و ۶]	۴۹۷/۷	۴۹۰/۳

جدول (۵): مقایسه دو فرکانس طبیعی اول استوانه هدفمند با خصوصیت ماده (۱) برای شروط مرزی و نسبت‌های h/R مختلف (L=R=۱ و g=۱).

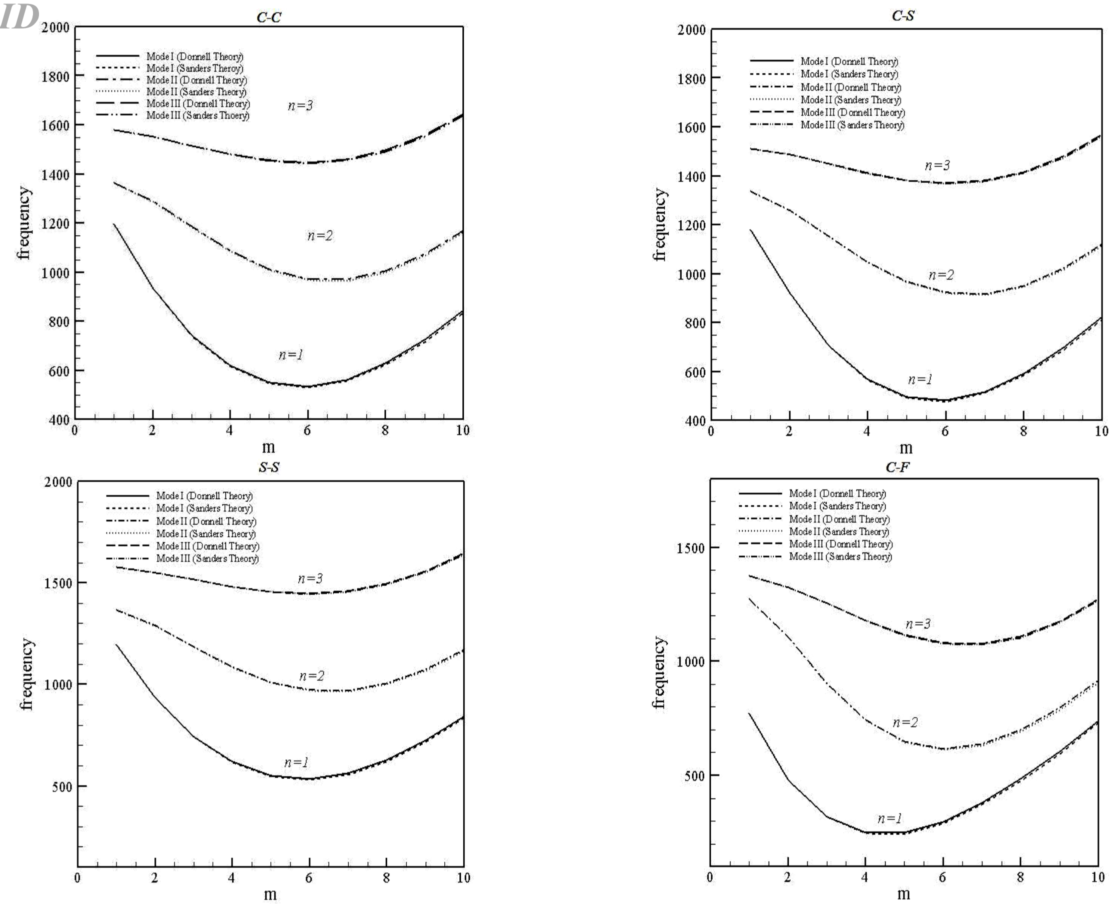
شروط مرزی	R/h	فرکانس اول(Hz)				فرکانس دوم(Hz)			
		FEM		Present		FEM		Present	
				DT	ST			DT	ST
C - F	۵	۶۲۶/۱	[۱ و ۲]	۶۵۳/۱	۶۲۵/۳	۷۴۱/۳	[۱ و ۳]	۷۹۹/۲	۷۴۱/۶
	۱۰	۴۷۹/۶	[۱ و ۳]	۵۰۶/۳	۴۸۰/۳	۵۳۰/۸	[۱ و ۲]	۵۳۹/۸	۵۳۰/۷
	۴۰	۲۶۰/۴	[۱ و ۴]	۲۶۷/۲	۲۶۲/۰	۲۷۵/۸	[۱ و ۵]	۲۸۷/۸	۲۷۹/۶
S - F	۵	۲۴۱/۶	[۱ و ۲]	۳۲۹/۶	۲۴۹/۴	۵۹۳/۵	[۱ و ۳]	۶۷۷/۷	۵۹۷/۲
	۱۰	۱۲۶/۱	[۱ و ۲]	۱۷۱/۲	۱۲۹/۱	۳۱۵/۳	[۱ و ۳]	۳۶۰/۳	۳۱۹/۵
	۴۰	۳۱/۹	[۱ و ۲]	۴۳/۶	۳۰/۲	۸۰/۴	[۱ و ۳]	۹۲/۶	۸۱/۹
F - F	۵	۱۸۰/۷	[۰ و ۲]	۲۴۵/۴	۱۸۰/۹	۳۰۶/۷	[۱ و ۲]	۴۲۴/۳	۳۲۳/۳
	۱۰	۹۳/۶	[۰ و ۲]	۱۲۷/۳	۹۴/۲	۱۶۷/۲	[۱ و ۲]	۲۲۷/۸	۱۷۲/۶
	۴۰	۲۳/۸	-----	۲۳/۵	۲۴/۲	۴۳/۱	[۱ و ۲]	۵۸/۹	۳۸/۶

۳- ۳- اثر تغییر نسبت طول به شعاع بر فرکانس طبیعی پایه

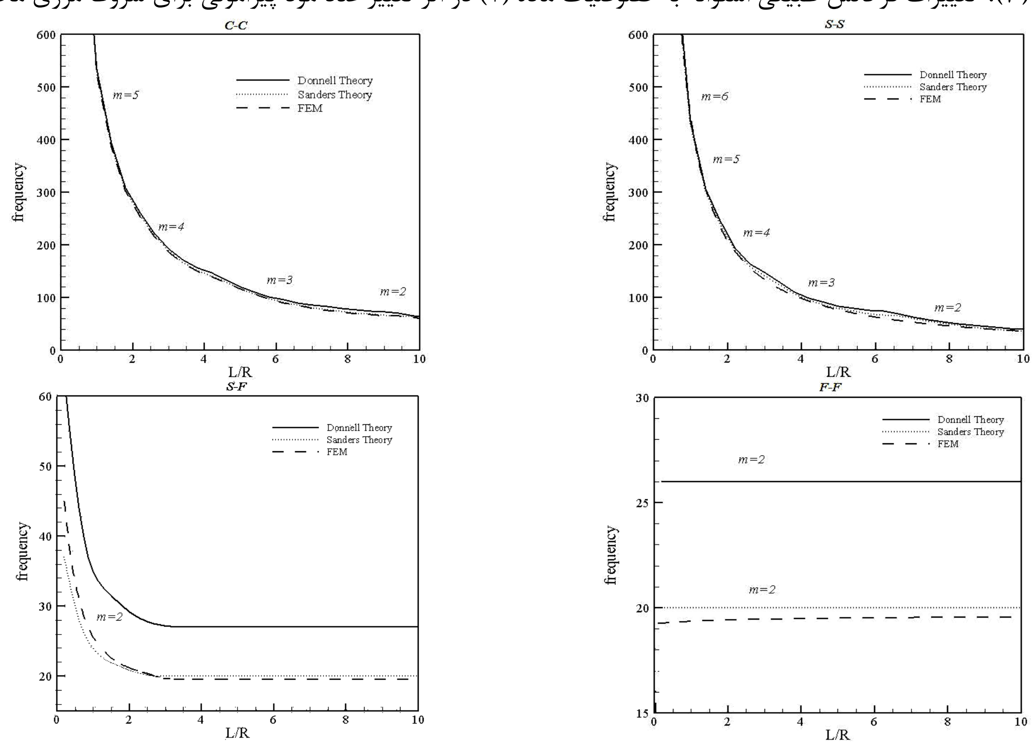
تغییرات فرکانس طبیعی پایه بر اثر تغییر نسبت طول به شعاع استوانه، برای یک استوانه هدفمند با g=۱، h/R=۰/۰۲ و خصوصیات ماده (۱) برای شروط مرزی C-C، S-S، S-F و F-F، در شکل **۴** نشان داده شده است. به منظور مقایسه دقیق، در این اشکال نتایج دو تئوری دانل و سندرز در کنار نتایج المان محدود سه‌بعدی قرار داده شده است. نتایج این مقایسه نشان می‌دهد که در شروط مرزی C-C و S-S با افزایش مقدار L/R مقدار فرکانس طبیعی پایه کاهش می‌یابد که این مسئله همراه با تغییر در عدد موج پیرامونی است. در واقع با افزایش این نسبت مقدار مقاومت خمشی استوانه کاهش می‌یابد. همچنین در این دو شرط مرزی، تطابق خوبی میان نتایج وجود دارد و می‌توان گفت، نتایج سندرز نسبت به دانل تطابق بهتری با المان محدود دارد. اما با افزایش میزان درجات آزادی در دو انتهای استوانه به ویژه در حالت F-F، اختلاف میان نتایج تئوری دانل با المان محدود افزایش می‌یابد، این در حالی است که نتایج تئوری سندرز هنوز تطابق بسیار خوبی را با المان محدود حفظ کرده است. تئوری دانل با وجود حفظ روند صحیح نسبت به تغییر در نسبت طول به شعاع، نمی‌تواند به خوبی شروط مرزی طبیعی مانند منتجه‌های تنش را اعمال نماید که یکی از دلایل این خطا، عدم اعمال تغییر شکل درون صفحه‌ای بر کرنش‌های برشی است.

۳- ۴- اثر تغییر نسبت ضخامت به شعاع بر فرکانس طبیعی پایه

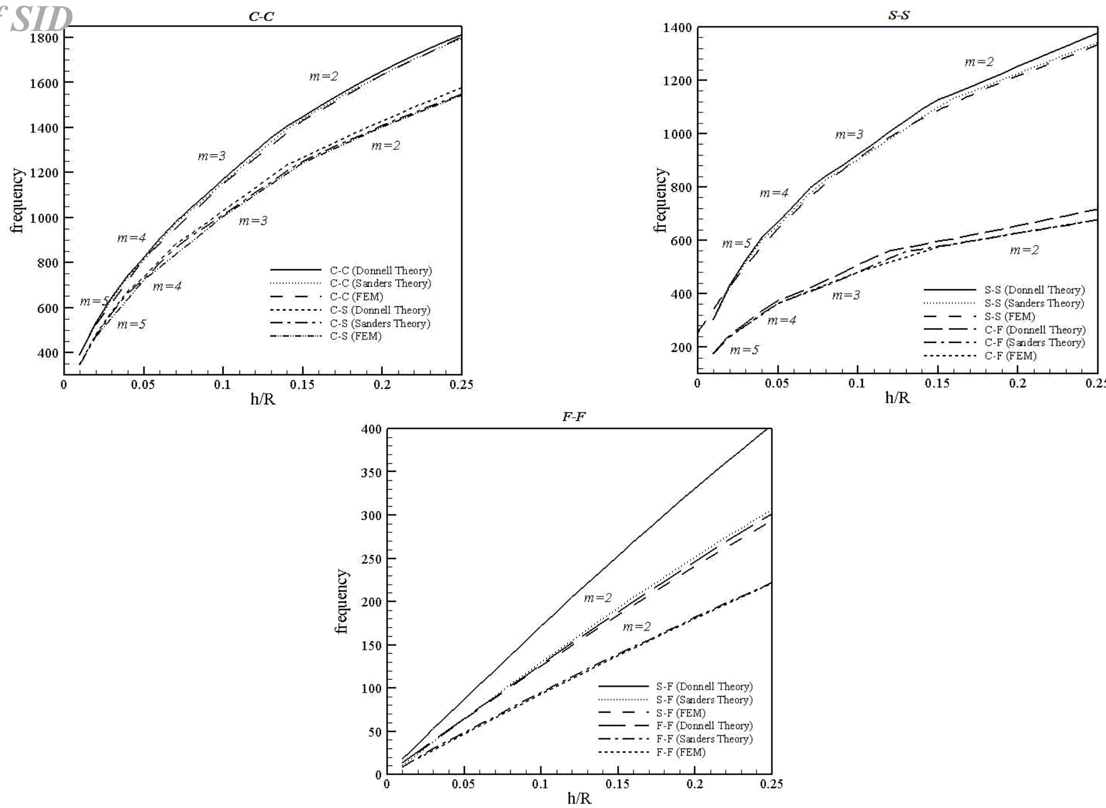
در شکل **۵** نمودارهای تغییرات فرکانس طبیعی پایه بر اثر تغییر نسبت ضخامت به شعاع در استوانه هدفمند با خصوصیات ماده (۱) L/R=۱ وg=۱ برای تمامی ترکیبات ممکن شروط مرزی کلاسیک ترسیم شده است. در این قسمت هم، نتایج حاصل از تئوری‌های دانل و سندرز در کنار نتایج حاصل از مدل سه‌بعدی المان محدود قرار گرفته است. در تمامی نمودارها نتایج حاصل از تئوری سندرز تطابق بسیار خوبی را حتی در ضخامت‌های بالا با مدل المان محدود سه‌بعدی نشان می‌دهد. اما نتایج حاصل از تئوری دانل، برای حالت‌های C-C، C-S، S-S وC-F، آن هم فقط در محدوده نسبت ضخامت به شعاع کمتر از ۰/۱ با نتایج المان محدود تطابق دارد. همین‌طور در شروط مرزی S-F وF-F میزان این خطا به‌مقدار زیادی افزایش یافته است (شکل ۶). دلیل آن است که در این حالات بالا بودن مقدار ضخامت استوانه در کنار عدم توانایی تئوری دانل در پاسخ‌گویی به شروط مرزی آزاد قرار گرفته و میزان خطا را به شدت افزایش داده است. بر طبق نمودارها، مشاهده می‌شود که مقدار فرکانس طبیعی پایه با افزایش نسبت ضخامت به شعاع افزایش می‌یابد. در این نمودارها، به ویژه در شروط مرزی C-C، C-S و S-S تغییر عدد مود پیرامونی مشاهده می‌شود که روند کاهشی آنها نشان از افزایش سختی خمشی سازه است.



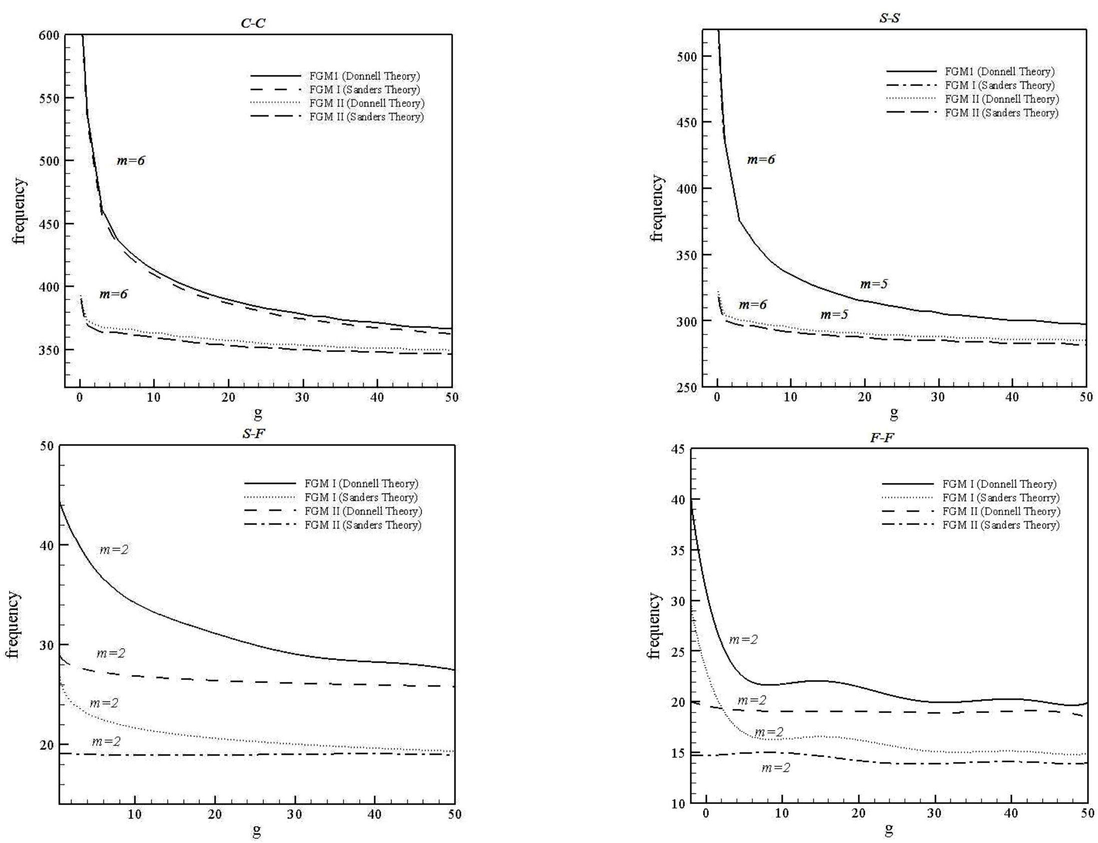
شکل (۳): تغییرات فرکانس طبیعی استوانه با خصوصیات ماده (۱) در اثر تغییر عدد مود پیرامونی برای شروط مرزی مختلف.



شکل (۴): تغییرات فرکانس طبیعی استوانه هدفمند با خصوصیات ماده (۱) در اثر تغییر نسبت طول به شعاع برای شروط مرزی مختلف.



شکل (۵): تغییرات فرکانس طبیعی استوانه هدفمند با خصوصیات ماده (۱) در اثر تغییر نسبت ضخامت به شعاع برای شروط مرزی مختلف.



شکل (۶): تغییرات فرکانس طبیعی استوانه هدفمند با خصوصیات ماده (۱) و (۲) در اثر تغییر g برای شروط مرزی مختلف.

۳- نتیجه‌گیری

دراین مقاله به بررسی ارتعاشات آزاد استوانه هدفمند پرداخته شده و دو تئوری دانل و سندرز مورد استفاده قرار گرفته است. به منظور حل دقیق این دو تئوری، همان‌طور که انتظار می‌رفت روش فضای حالت مورد توانست نتایج خوبی را به دست آورد، همچنین از یک مدل المان محدود سه‌بعدی استفاده شد که نتایج آن نیز مثبت است. نتایج دو تئوری در کنار نتایج سایر محققین و همچنین نتایج نرم‌افزاری المان محدود مورد بررسی قرار گرفته و در نهایت، دقت تئوری‌ها بررسی شده است. اثرات تغییر در شاخص توانی مواد هدفمند، نسبت ضخامت به شعاع، نسبت طول به شعاع و تعداد مود پیرامونی نیز، بر روی فرکانس طبیعی استوانه برای شروط مرزی مختلف بررسی شد که مهم‌ترین نتایج این تحلیل به شرح زیر می‌باشد:

۱- نتایج تئوری سندرز در تمامی شروط مرزی و شرایط هندسی، دقت بسیار خوبی را نسبت به نتایج سایر تحقیقات و نتایج المان محدود سه‌بعدی نشان داده است،

۲- تئوری دانل نمی‌تواند به خوبی شروط مرزی آزاد را اعمال نماید و نتایج قابل قبولی ارائه نمی‌دهد،

۳- تئوری حاضر علاوه بر مودهای خمشی توانست مودهای طولی ارتعاشی را نیز به خوبی به دست آورد،

۴- عدد مود پیرامونی مطابق با فرکانس طبیعی پایه استوانه با تغییر در شروط مرزی، نسبت ضخامت و شعاع و نسبت طول به شعاع تغییر می‌کند،

۵- تغییر طول استوانه در شرط مرزی آزاد- آزاد تأثیری بر فرکانس طبیعی پایه استوانه نداشته و در نتیجه فرکانس پایه ثابت خواهد ماند،

۶- تئوری دانل نمی‌تواند پاسخ مناسبی را برای استوانه‌هایی با نسبت ضخامت به شعاع بالا ارائه دهد و

۷- فرکانس طبیعی ماده (۱) نسبت به ماده (۲) دارای حساسیت بیشتری به شاخص توانی است به ویژه در مقادیر $g < 1$.

مراجع

1. Love, A.E.H. "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity", 1st Ed., Cambridge Univ. Press, Dover, New York, 1944.
2. Donnell, L.H. "A New Theory for the Buckling of Thin Cylinders Under Axial Compression and Bending", Transa. Of the ASME, Vol. 56, No.473, pp. 795–806, 1934.
3. Sanders, J.L. "An Improved First Approximation Theory for Thin Shells", NASA TR-R24, 1959.
4. Flügge, W. "Stresses in Shells", 2nd edn, Springer-Verlag, Berlin, 1962.
5. Novozhilov, V.V. "Theory of Thin Elastic Shells", 2nd Ed., P. Noordhoff, Groningen, 1964.
6. Naghdi, P.M. "Foundations of Elastic Shell Theory". In: Prog. in Solid Mech. (Eds I.N. Sneedon and R. Hill), North-Holland, Amsterdam, IV, Chapter 1, 1963.
7. Leissa, A.W. "Vibrations of Shells", NASA SP-288, Washington, DC, 1973.
8. Khdeir, A.A. Reddy, J.N., and Frederick, D. "A Study of Bending, Vibration and Buckling of Cross-Ply Circular Cylindrical Shells with Various Shell Theories", Int. J. Eng. Sci. Vol. 27, No. 11, pp. 1337-1351, 1989.
9. Khdeir, A.A. and Reddy, J.N. "Influence Of Edge Conditions on the Modal Characteristics of cross-Ply Laminated Shells", Computers & Struct., Vol. 34, No. 6, pp. 817-826, 1990.
10. Reddy, J.N. "Exact Solutions of Moderately Thick Laminated Shells", ASCE J. Eng. Mech., Vol. 110, No. 5, pp. 794-809, 1983.
11. Nosier, A. and Reddy, J.N. "Vibration and Stability Analyses of Cross-Ply Laminated Circular Cylindrical Shells", J. Sound and Vibration, Vol. 157, No. 1, pp. 139-159, 1992.
12. Sharma, C.B. "Free Vibrations of Clamped-Free Circular Cylinders", Thin-Walled Struct. Vol. 2, No.2, pp. 175-193, 1984.
13. Soldatos, K.P., Hadjigeorgiou, V.P. "Three-Dimensional Solution of the Free Vibration Problem of Homogeneous Isotropic Cylindrical Shells and Panels", J. Sound and Vibration, Vol. 137, No. 3, pp. 369-384, 1990.
14. Zhao, X., Ng, T.Y., and Liew, K.M. "Free Vibration of Two-Side Simply-Supported Laminated Cylindrical Panels via the Mesh-Free Kp-Ritz Method", Int. J. Mech. Sci., Vol. 46, No.1, pp. 123–142, 2004.
15. Xiang, S., Bi, Z.Y., Jiang, S.X., Jin. Y.X., and Yang, M.S. "Thin Plate Spline Radial Basis Function for the Free Vibration Analysis of Laminated Composite Shells", Composite Struct., Vol. 93, No. 2, pp. 611-615, 2011.
16. Ferreira, A.J. M., Roque, C.M.C., and Jorge, R. M. N. "Natural Frequencies of FSDT Cross-Ply Composite Shell by Multiquadrics", Composite Struct., Vol. 77, No. 3, pp. 296–305, 2007.
17. Pradhan, S.C., Loy, C.T., Lam, K.Y., and Reddy, J.N. "Vibration Characteristics of Functionally Graded Cylindrical Shells Under Various Boundary Conditions", Applied Acoustics, Vol. 6, No.1, pp.111-129, 2000.
18. Loy, C.T., Lam, K.Y., and Reddy. J.N. "Vibration of Functionally Graded Cylindrical Shells", Int. J. Mech. Sci., Vol. 41, No.3, pp. 309-324, 1999.
19. Asgari, M. and Akhlaghi, M. "Natural Frequency Analysis of 2D-FGM Thick Hollow Cylinder Based

on Three-Dimensional Elasticity Equations", Eur. J. Mech. A/Solids, Vol. 30, No.2, pp. 72-81, 2011.
20. Yas, M.H., and SobhaniAragh, B. "Elasticity Solution for Free Vibration Analysis of Four-Parameter Functionally Graded Fiber Orientation Cylindrical Panels Using Differential Quadrature Method", European J. Mech./ASolids, Vol. 30, No. 5, pp. 631-638, 2011.
21. Li, S.R., Fu, X.H., and Batra, R.C. "Free Vibration of Three-Layer Circular Cylindrical Shells with Functionally Graded Middle Layer", Mech. Research Communications, Vol. 37 No.6, pp. 577–580, 2010.
22. Iqbal, Z., Naeem, M.N., and Sultana, N. "Vibration Characteristics of FGM Circular Cylindrical Shells Using Wave Propagation Approach", Acta Mech., Vol. 208, No.3-4, pp. 237–248, 2009.
23. Vel, S.S. "Exact Elasticity Solution for the Vibration of Functionally Graded Anisotropic Cylindrical Shells", Composite Struct., Vol. 92, No.11, pp.2712–2727, 2010.
24. Tornabene, F. "Free Vibration Analysis of Functionally Graded Conical, Cylindrical Shell and Annular Plate Structures with a Four-Parameter Power- Law Distribution", Comput. Methods Appl. Mech. Eng., Vol. 198, No.37, pp. 2911–35, 2009.
25. Pradyumna, S. and Bandyopadhyay, J.N. "Free Vibration Analysis of Functionally Graded Curved Panels Using a Higher-Order Finite Element Formulation", J. Sound and Vibration, Vol. 318, No.1-2, pp. 176–192, 2008.
26. Redekop, D. "Three-Dimensional Free Vibration Analysis of Inhomogeneous Thick Orthotropic Shells of Revolution Using Differential Quadrature", J. Sound and Vibration, Vol. 291, No.3-5, pp.1029–1040, 2006.
27. Azimi, P., Mehrabani, M.M., Jafari, A.A. "Effect of Internal Pressure on Free Vibration of a FGM Cylindrical Shell", Aerospace Mech. J., Vol. 7, No. 1, pp-81-90, 2011 (In Persian).
28. Nguyen, T.K., Sab, K., and Bonnet, G. "First-Order Shear Deformation Plate Models for Functionally Graded Materials", Composite struct., Vol. 83, No.1, pp-25–36, 2008.

پیوست

ضرایب منتجه‌های تنش پوسته استوانه‌ای هدفمند

$$A=\int_{-h/2}^{h/2}\frac{E(z)}{1-\nu^2}dz \qquad A'=\int_{-h/2}^{h/2}\frac{E(z)}{2(1+\nu)}dz$$

$$B=\int_{-h/2}^{h/2}\frac{zE(z)}{1-\nu^2}dz \qquad B'=\int_{-h/2}^{h/2}\frac{zE(z)}{2(1+\nu)}dz$$

$$C=\int_{-h/2}^{h/2}\frac{z^2E(z)}{1-\nu^2}dz \qquad C'=\int_{-h/2}^{h/2}\frac{z^2E(z)}{2(1+\nu)}dz$$

$$D=\int_{-h/2}^{h/2}\frac{z^3E(z)}{1-\nu^2}dz \qquad D'=\int_{-h/2}^{h/2}\frac{z^3E(z)}{2(1+\nu)}dz$$