

ارتعاشات اجباری تیر تیموشنکو از جنس مواد هدفمند با لایه پیزوالکتریک تحت بار متحرک

علی اصغر جعفری^۱ و مرتضی فتح‌آبادی^۲

دانشکده مهندسی مکانیک

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

(تاریخ دریافت: ۲۹/۱۱/۹۰، تاریخ پذیرش: ۲۲/۰۹/۹۱)

چکیده

در این مقاله، ارتعاشات اجباری تیر تیموشنکو ساخته شده از FGM با لایه‌های پیزوالکتریک بررسی شده که بارگذاری آن از نوع بار متحرک با سرعت ثابت است. میدان جابه‌جایی با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی تیرها به دست آورده شده و معادلات حرکت تیر با استفاده از اصل همپلتون استخراج شده است. رفتار دینامیکی تیر نیز با استفاده از روش ناویر به دست آورده شده که نتایج به دست آمده با نتایج تحلیلی ارائه شده توسط محققان دیگر مطابقت دارد. همچنین اثر افزایش سرعت بار متحرک بر بیشینه خیز وسط تیر و سرعت بحرانی در توزیع‌های مختلف FGM به دست آورده شده است.

واژه‌های کلیدی: تیر تیموشنکو، FGM، بار متحرک، پیزوالکتریک

Forced Vibration of FGM Timoshenko Beam with Piezoelectric Layers Carrying Moving Load

A.A. Jafari and M. Fathabadi

Mech. Eng. Dep't.

Kh.N.Toosi Univ. of Tech.

(Received:18 February, 2012; Accepted:12 December, 2012)

ABSTRACT

In this paper forced vibration of FGM Timoshenko beam with piezoelectric layers are analyzed based on the first shear deformation beam theory. The governing equations of motion are derived using Hamilton's principle. Dynamic behaviors of beam are investigated by navier solution and the results obtained from this solution are compared with the existing theoretical results and showed relatively good agreements. Furthermore the effects of increasing the velocity of moving load in maximum deflection center of beam is studied and the critical velocity in different distribution models of FGM are investigated.

Keywords: Timoshenko Beam, FGM, Moving Load, Piezoelectric

پیزوالکتریک‌ها در ترکیب‌هایی با مواد کامپوزیت برای کنترل ارتعاشات این سازه‌ها به کار می‌روند. در زمینه ارتعاش آزاد چنین سازه‌هایی، تحقیقات زیادی انجام یافته ولی کمتر به بررسی ارتعاش اجباری آنها کمتر پرداخته شده است.

جائی-هانگ هان و این لی^۱ [۱] در سال ۱۹۹۸ آنالیز یک ورق کامپوزیتی با لایه پیزوالکتریک حسگر و عملگر برای کنترل ارتعاشات با استفاده از تئوری لایه‌گون^۲ انجام دادند. چاین چانگ لین^۳ و همکاران [۲] در سال ۱۹۹۹ کنترل ارتعاشات یک تیر-ورق را که با لایه‌های پیزوالکتریک حسگر و محرک بررسی کردند. معادلات با استفاده از اصل همپلتون استخراج و از روش المان محدود برای حل معادلات استفاده کردند. نریانان^۴ و همکاران [۳] در سال ۲۰۰۳ روش المان محدود را برای مدل‌سازی سازه‌های هوشمند با لایه پیزوالکتریک جهت کنترل فعال با لایه‌های عملگر و حسگر انجام دادند.

حیدری و اسلامی [۴] در سال ۲۰۰۶ کنترل ارتعاشات اجباری یک ورق کامپوزیتی ترموالاستیک را با پیزوالکتریک انجام دادند. معادلات حرکت را با استفاده از اصل همپلتون استخراج کرده و از روش المان محدود برای حل استفاده کردند. عباس‌زاده بیدختی، صدوق وینینی و اسلامی [۵] در سال ۲۰۰۶ کنترل فعال یک تیر از جنس FGM با لایه‌های پیزوالکتریک حسگر و عملگر را بررسی کردند. معادلات حرکت بر پایه تئوری اولر-برنولی و با استفاده از اصل همپلتون استخراج شد. کارگر نوین و همکارانش [۶] در سال ۲۰۰۷ به بررسی کنترل ارتعاشات ورق از جنس FGM با لایه‌های پیزوالکتریک عملگر و حسگر تحت شارژ الکتریکی ثابت پرداختند. آنها بر پایه تئوری کلاسیک ورق‌ها معادلات حرکت ورق دور مفصل را با استفاده از اصل همپلتون استخراج کردند.

شی رونگ لی^۵ و همکارانش [۷] در سال ۲۰۰۹ ارتعاش آزاد یک تیر از جنس FGM را با لایه‌های پیزوالکتریک را تحت افزایش دما و ولتاژ بررسی کردند. آنها با در نظر گرفتن مقدار دقیق کشش طولی و بر مبنای تئوری کلاسیک تیرها معادلات حرکت تیر را در شرایط بارگذاری الکتریکی و حرارتی به دست آوردند. شیشمک و کوچاتورک^۶ [۸] در سال ۲۰۰۹ ارتعاش آزاد و اجباری تیر از جنس FGM را تحت بار متحرک بررسی کردند. آنها در این تحقیق بر پایه تئوری کلاسیک تیرها و با

پیشرفت روزافزون بشر، استفاده از مواد نو را به امری اجتناب‌ناپذیر و غیرقابل انکار بدل نموده است. امروزه فلزاتی نظیر آهن و مس دیگر نمی‌توانند به تنهایی پاسخگوی نیازهای بشر باشند، در نتیجه رفع نمودن این نیازها مستلزم تمرکز بیشتر بر تحقیق و بررسی در زمینه مواد نو می‌باشد. FGMها جزء موادی محسوب می‌شوند که خواص آنها در یک یا دو جهت بر اساس تابعی از قبل تعیین شده و به طور پیوسته تغییر می‌کند. این گونه مواد در حالی که معمولاً ترکیبی از مواد سرامیکی و فلزی هستند، به نظر می‌رسد که کارآیی مطلوب هر کدام از مؤلفه‌های تشکیل دهنده خود را دارا می‌باشند. به عنوان مثال در ترکیبات سرامیک-فلز، علاوه بر آنکه مقاومت خوردگی یا حرارتی سرامیک‌ها را دارا هستند، از استحکام و مقاومت مکانیکی فلزات نیز بهره‌مند می‌باشند.

FGMها مواد کامپوزیتی می‌باشند که از نظر میکروسکوپی غیرهمگن بوده و دارای خصوصیات ساختاری شامل نوع توزیع و اندازه فازها بوده و به طور تدریجی از سطحی به سطح دیگر تغییر می‌کنند و همین تغییر تدریجی منجر به تغییر تدریجی خواص در FGM می‌شود. این مواد از مخلوط سرامیک با فلز و یا ترکیبی از فلزات مختلف ساخته می‌شوند.

ماده سرامیک مقاومت دمایی بالایی را به خاطر رسانایی گرمایی کم دارا است و از طرفی ماده فلزی چکش‌خوار، از به وجود آمدن شکستگی یا ترک به خاطر تنش حرارتی ممانعت به عمل می‌آورد.

برادران پیر و جاکوس کوری خاصیت مستقیم پیزوالکتریک را در کریستال‌های تورمالین کشف کردند. آنها دریافتند که تغییر شکل مکانیکی در جهات ویژه‌ای سبب می‌شود که صفحات الکتریکی مقابل هم، در روی صفحات کریستال‌هایی که عمود بر تغییر شکل مکانیکی‌اند، باردار شوند. این خاصیت که در کوارتز و سایر کریستال‌های بدون مرکز تقارن کشف شد، خاصیت پیزوالکتریک نامیده شده است. خاصیت پیزوالکتریکی معکوس به صورت آزمایشگاهی توسط برادران کوری اثبات شد.

مواد پیزوالکتریک از گذشته در بسیاری از کاربردها از جمله کنترل فعال تا از بین بردن پارازیت استفاده می‌شوند. ویژگی‌های خاص آنها مانند وزن کم، اندازه کوچک و پاسخ فرکانسی مطلوب باعث شده است که در سازه‌ها به عنوان عملگر و حسگر کاربرد زیادی یابند. در سازه‌های متشکل از عملگر و حسگر برای مشاهده اثر کنترل سازه، ولتاژ حسگر با یک ضریب بهره به ولتاژ عملگر نسبت داده می‌شود. امروزه

1- Jae-Hang Han and In Lee

2- Layerwise

3- Chain-Chang Lin

4- Naryanan

5- Shi- Rong LI

6- S,ims,ek and Kocatürk

میدان جابه‌جایی بر پایه تئوری مرتبه اول برشی به صورت

زیر در نظر گرفته شده است [۱۱]:

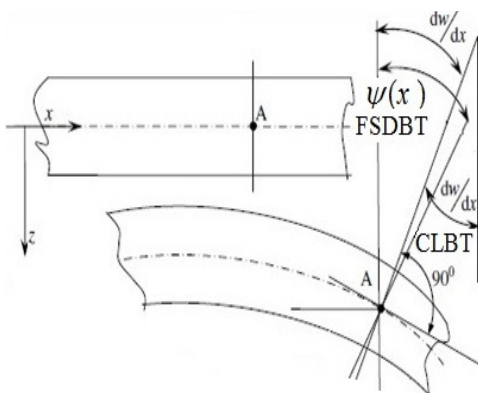
$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= u_0(x, t) + z\psi(x), \\ v &= 0, \\ w &= w_0(x, t), \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن، u_0 و w_0 جابه‌جایی لایه میانی تیر به ترتیب در راستای x, z می‌باشند. $\psi(x)$ چرخش سطح مقطع تیر است. همچنین میدان کرنش با استفاده از روابط کرنش - جابه‌جایی به صورت زیر به دست خواهد آمد [۱۱]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \psi(x)}{\partial x}, \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi(x), \\ \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

حال با استفاده از رابطه (۳) که معروف به اصل همپلتون^۵ می‌باشد، معادلات حرکت تیر قابل حصول است [۱۱]:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta U + \delta V - \delta T) dt = 0. \quad (3)$$



شکل (۱): سینماتیک تیر قبل و بعد از تغییر شکل برای تئوری‌های مختلف [۱۲].

در رابطه (۳)، t_1, t_2 دو زمان دلخواه هستند. U و V به ترتیب انرژی‌های جنبشی، پتانسیل و کار نیروهای خارجی می‌باشند که اولین تغییرات^۶ آنها به صورت زیر تعریف می‌شوند شوند [۱۱]:

$$\begin{aligned} \delta U &= \iiint_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dx dy dz, \\ \delta T &= \iiint_V \rho \dot{u}_i \delta \dot{u}_i dx dy dz, \\ \delta V &= -b \int_0^l P(x, t) \delta w dx. \end{aligned} \quad (4)$$

استفاده از روش لاگرانژ معادلات حرکت استخراج کردند. همچنین شیشمک [۹] در سال ۲۰۱۰ آنالیز ارتعاش غیرخطی یک تیر تیموشنکو FGM را تحت بار متحرک با تحریک هارمونیک بررسی کرد. وی نتایج آنالیز غیرخطی بر پایه تئوری تیموشنکو را با تحلیل خطی بر پایه تئوری کلاسیک مقایسه کرد. خلیلی، جعفری و افتخاری [۱۰] در سال ۲۰۱۰ ترکیبی از روش ریلی ریتز و DQM را برای بررسی رفتار دینامیکی تیر از جنس FGM تحت بار متحرک ارائه کردند. آنها معادلات حرکت را بر پایه تئوری کلاسیک تیرها و با استفاده از روش لاگرانژ استخراج کرده و نتایج تحقیق خود را با نتایج تحقیق شیشمک و کوچاتورک [۸] مقایسه کردند.

در این مقاله، ارتعاشات اجباری تیر از جنس FGM با لایه‌های پیزوالکتریک تحت بار متحرک با سرعتی ثابت بررسی شده که لایه پیزو پایینی از نوع حسگر و لایه پیزو بالایی از نوع عملگر در نظر گرفته شده است. برای اعمال اثر کنترل بر روی سازه، ولتاژ اعمالی بر لایه پیزو عملگر با ضریب بهره G به ولتاژ خروجی از حسگر نسبت داده شده است. معادلات حرکت تیر بر پایه تئوری مرتبه اول برشی تیرها^۱ و با استفاده از اصل همپلتون استخراج شده و شرایط مرزی مکانیکی در دو انتهای تیر از نوع تکیه‌گاه ساده^۲ در نظر گرفته شده است. همچنین فرض شده که تیر در انتها نیرویی در راستای طولی تحمل نمی‌کند و در واقع جابه‌جایی در راستای طولی در هر دو انتها صفر نمی‌باشد. معادلات نیز با استفاده از روش ناولر^۳ حل شده و نتایج به ازای حالتی خاص با نتایج تحقیقات پیشین مقایسه شده و همچنین اثرات سرعت بار متحرک بر بیشینه خیز وسط تیر بررسی شده است. از دیگر نتایج بررسی اثر نسبت حجمی FGM بر بیشینه خیز وسط تیر و بحث بر روی مقادیر سرعت بحرانی به ازای نسبت‌های مختلف FGM می‌باشد. در انتها قابل ذکر است که اثر ضریب بهره G بر بیشینه خیز بدون بعد وسط تیر و مقادیر سرعت بحرانی بررسی شده است.

۲- استخراج معادلات حرکت

در تئوری مرتبه اول برشی با در نظر گرفتن اثر کرنش برشی، به ویژه برای تیرهای ضخیم، تخمین بهتری زده می‌شود. در شکل ۱ سینماتیک تیر قبل و بعد از تغییر شکل برای تئوری‌های کلاسیک و تیموشنکو^۴ نشان داده شده است.

- 1- First Shear Deformation Beam Theory
- 2- Simply Support
- 3- Navier
- 4- Timoshenko

5- Hamilton Principle
6- First Variation

$$P(z) = P_2 e^{h \frac{P_1}{P_2} (z + \frac{h}{2})}, P_{12} = P_1 - P_2, \quad (7)$$

$$P(z) = P_2 e^{h \frac{P_1}{P_2} (z + \frac{h}{2})}, \quad (8)$$

$$P(z) = (1 - \frac{1}{2} (\frac{h/2 - z}{h})^p) P_1 + [1 - (1 - \frac{1}{2} (\frac{h/2 - z}{h})^p)] P_2, \quad (8)$$

for $0 \leq z \leq h/2$,

$$P(z) = (\frac{1}{2} (\frac{h/2 + z}{h})^p) P_1 + [1 - (\frac{1}{2} (\frac{h/2 + z}{h})^p)] P_2, \quad (9)$$

for $-h/2 \leq z \leq 0$.

بنابراین تنش‌ها در لایه FGM به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\sigma_{xx}^{FGM} = \frac{E^{FGM}}{1 - \nu^2} z \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right), \quad (10)$$

$$\sigma_{xz}^{FGM} = \frac{E^{FGM}}{2(1 + \nu)} k_5 \left(\psi(x) + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right).$$

در رابطه بالا k_5 ضریب تصحیح تنش برشی می‌باشد.

۲-۲- روابط لایه پیزوالکتریک

روابط پیزوالکتریک به صورت اندیسی در زیر آورده شده است [۱۵]:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \epsilon_{kl} - e_{kij} E_k, \quad (11)$$

$$D_i = e_{ikl} \epsilon_{kl} + \epsilon_{ik} E_k.$$

به دلیل نازکی لایه پیزو، از ترم برشی در این لایه صرف نظر کرده و در نتیجه در روابط (۱۲)، برای لایه پیزوالکتریک خواهیم داشت:

$$\sigma_{xx} = c_{11} \epsilon_{xx} - e_{31} E_z, \quad (12)$$

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & 0 \\ 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_z \end{Bmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & e_{15} \\ e_{31} & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{xz} \end{Bmatrix}.$$

به دلیل نازکی لایه پیزوالکتریک می‌توان از جابه‌جایی الکتریکی در دو راستای دیگر لایه پیزوالکتریک صرف نظر کرد. در نهایت، روابط پیزوالکتریک لایه‌ها به صورت روابط زیر تقلیل خواهند یافت:

$$\sigma_{xx} = c_{11} \epsilon_{xx} - e_{31} E_z, \quad (13)$$

$$D_z = \epsilon_{33} E_z - e_{31} \epsilon_{xx}.$$

۳-۲- روابط لایه حسگر

از آنجایی که در حسگر هیچ‌گونه شارژ الکتریکی خارجی وجود ندارد، بنابراین جابه‌جایی الکتریکی این لایه در راستای ضخامت صفر خواهد شد، با توجه به موارد ذکر شده رابطه (۱۴) به شرح زیر است:

$P(x, t)$ نیروی خارجی وارده بر تیر در راستای عرضی است.

با قرار دادن روابط (۴) در رابطه (۳) و انتگرال‌گیری جزء به جزء و بر اساس اصل اساسی حساب تغییرات می‌بایست ضرایب δu_0 ، δw_0 ، $\delta \psi(x)$ هر کدام به صورت مستقل صفر شوند، در نتیجه معادلات حرکت تیر به صورت زیر به دست می‌آید [۱۱]:

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} = I_1 \ddot{u}_0(x, t) + I_2 \ddot{\psi}(x, t), \quad (5)$$

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} - Q_x = I_2 \ddot{u}_0(x, t) + I_3 \ddot{\psi}(x, t),$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + P(x, t) = I_1 \dot{w}_0(x, t),$$

که نتیجه‌های ممان و تنش و ضرایب $I_{i(i=1 \text{ to } 3)}$ در معادلات (۵) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$M_{xx} = \int_{z_2}^{z_1} \sigma_{xx}^{FGM} z dz + \int_{z_3}^{z_2} \sigma_{xx}^s z dz + \int_{z_1}^{z_0} \sigma_{xx}^a z dz, \quad (6)$$

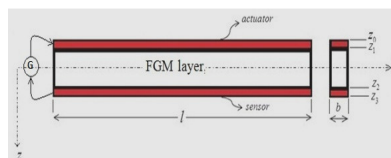
$$Q_x = \int_{z_2}^{z_1} \sigma_{xz}^{FGM} dz,$$

$$(I_1, I_2, I_3) = \int_{z_b}^{z_t} \rho(1, z, z^2) dz.$$

برای به دست آوردن معادله حاکم بر حرکت تیر شامل لایه FGM و لایه‌های پیزوالکتریک حسگر و عملگر مطابق شکل ۲ کافیت مقادیر تنش را در رابطه (۶) جایگذاری کنیم.

۱-۲- روابط لایه FGM

در FGM خواص E و ρ به ترتیب چگالی و مدول الاستیسیته، تابع ضخامت می‌باشند. این خواص با مدل‌های توانی و نمایی و سیگموئیدی به ترتیب در روابط (۷-۹) بیان شده‌اند.



$$z_0 - z_1 = h_a,$$

$$z_2 - z_3 = h_s,$$

$$z_0 = h/2 + h_a,$$

$$z_1 = h/2,$$

$$z_2 = -h/2,$$

$$z_3 = -h/2 - h_s.$$

شکل (۲): تیر از جنس FGM با لایه‌های پیزوالکتریک عملگر و حسگر به همراه ابعاد.

P در روابط زیر بیانگر خواص FGM (E, ρ) می‌باشد [۱۳ و ۱۴].

با جایگذاری رابطه (۲۲) در رابطه (۲۱) رابطه زیر برای تنش عملگر به دست خواهد آمد:

$$\sigma_{xx}^a = c_{11} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right)^a - \frac{e_{31}^2 h_s G}{h_a \epsilon_{33}} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + h_m^s \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) - \frac{e_{31}^2}{\epsilon_{33}} (h_m^a - z)^a \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \quad (23)$$

با جایگذاری روابط (۱۰)، (۱۵) و (۲۳) در رابطه (۶) معادلات حرکت تیر به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} A_1 \frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial x^2} + A_2 \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} &= \\ I_1 \ddot{u}_0(x,t) + I_2 \ddot{\psi}(x,t) & \\ A_3 \frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial x^2} + A_4 \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} - k_5 A_5 (\psi(x,t) & \\ + \frac{\partial w_0(x,t)}{\partial x}) = I_2 \ddot{u}_0(x,t) + I_3 \ddot{\psi}(x,t) & \quad (24) \\ k_5 A_5 \left(\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0(x,t)}{\partial x^2} \right) & \\ + P(x,t) = I_1 \ddot{w}_0(x,t). & \end{aligned}$$

که ضرایب $A_{i(i=1 \text{ to } 5)}$ و $I_{i(i=1 \text{ to } 3)}$ در پیوست (الف) تعریف شده‌اند.

۳- حل معادلات حرکت

با در نظر گرفتن شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده، در ابتدا و انتهای تیر برای شرایط مرزی نیرویی و جابه‌جایی در تیر مورد نظر خواهیم داشت:

$$w, N_{xx}, M_{xx} = 0 \quad \text{at } x=0 \text{ \& } x=l. \quad (25)$$

سپس با در نظر گرفتن تقریب سری فوریه [۱۶] برای مؤلفه‌های جابه‌جایی به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{m=1}^{\infty} u_m(t) \cos \frac{m\pi x}{l}, \\ \psi(x,t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m(t) \cos \frac{m\pi x}{l}, \\ w(x,t) &= \sum_{m=1}^{\infty} w_m(t) \sin \frac{m\pi x}{l}, \\ P(x,t) &= \sum_{m=1}^{\infty} P_m(t) \sin \frac{m\pi x}{l}. \end{aligned} \quad (26)$$

در روابط (۲۶) m بیانگر مود می‌باشد.

برای به دست آوردن $P_m(t)$ ، از آخرین معادله از روابط (۲۶) در راستای طول تیر انتگرال‌گیری کرده و با استفاده از اصل تعامد رابطه زیر برای $P_m(t)$ به دست خواهد آمد:

$$P_m(t) = \frac{2}{l} \int_0^l P(x,t) \sin \frac{m\pi x}{l} dx. \quad (27)$$

بار متحرک با سرعت ثابت با استفاده از تابع دلتای دیراک با رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$D_z = \epsilon_{33} E_z + e_{31} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right)^s = 0, \quad (14)$$

$$E_z^s = -\frac{e_{31}}{\epsilon_{33}} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right)^s.$$

بر این اساس رابطه تنش حسگر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\sigma_{xx}^s = \left(c_{11} + \frac{e_{31}^2}{\epsilon_{33}} \right) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right)^s. \quad (15)$$

بر این پایه با برابر قرار دادن شدت میدان الکتریکی در حسگر و رابطه تجربی $E_i = \varphi_i$ [۱۵] با هم و انتگرال‌گیری در راستای Z خواهیم داشت:

$$V^s = -\frac{e_{31} h_s}{\epsilon_{33}} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + h_m^s \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right), \quad h_m^s = \frac{z_2 + z_3}{2}. \quad (16)$$

۲-۴ روابط لایه عملگر

برای به دست آوردن معادلات حاکم بر عملگر می‌توان فرض کرد که توزیع پتانسیل الکتریکی درون عملگر به صورت یک تابع مرتبه دوم [۶] در رابطه (۱۷) آورده شده است:

$$\varphi^a = \varphi_0 + z\varphi_1 + z^2\varphi_2. \quad (17)$$

حال با توجه به اینکه در عملگر اختلاف پتانسیل الزامی است، بنابراین شرایط مرزی الکتریکی زیر برای آن در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} \varphi = V^a \quad \text{at } z = z_0 = h/2 + h_a, \\ \varphi = 0 \quad \text{at } z = z_1 = h/2. \end{aligned} \quad (18)$$

با اعمال شرایط مرزی فوق و استفاده از رابطه ماکسول [۱۵] رابطه زیر برای توزیع پتانسیل الکتریکی به دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} \varphi^a = \varphi_0^a + z \left(\frac{V^a}{h_a} - h_m^a \frac{e_{31}}{\epsilon_{33}} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) + \\ z^2 \frac{e_{31}}{2\epsilon_{33}} \frac{\partial \psi_x}{\partial x}. \end{aligned} \quad (19)$$

بر این اساس برای E_z رابطه زیر را خواهیم داشت [۱۵]:

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{V^a}{h_a} + \frac{e_{31}^a}{\epsilon_{33}} (h_m^a - z) \frac{\partial \psi_x}{\partial x}. \quad (20)$$

بر این اساس رابطه تنش عملگر به صورت زیر به دست خواهد آمد:

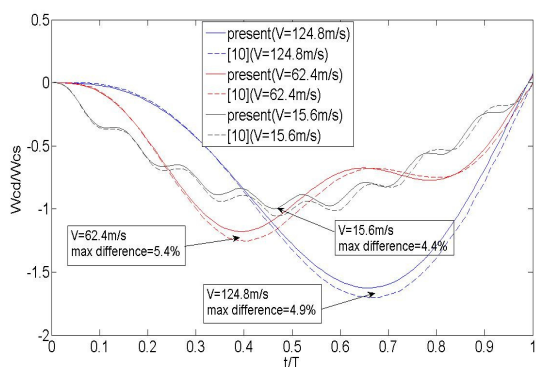
$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^a = c_{11} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right)^a + e_{31} \frac{V^a}{h_a} - \\ - \frac{e_{31}^2}{\epsilon_{33}} (h_m^a - z)^a \frac{\partial \psi_x}{\partial x}. \end{aligned} \quad (21)$$

برای مشاهده اثر کنترل بر روی سازه، ولتاژ خروجی از حسگر با رابطه زیر به ولتاژ عملگر مربوط می‌شود:

$$V^a = GV^s = -\frac{e_{31} h_s G}{\epsilon_{33}} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + h_m^s \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right). \quad (22)$$

جدول (۱): خواص و مشخصات هندسی تیر مطابق [۱۰].

$\rho = 10686/9 \text{ kg/m}^3$ $E = 21068 \times 10^{11} \text{ Pa}$	$\nu = 0.23$	تیر از جنس ایزوتروپیک
$b = h = 0.10635 \text{ m}$ $I = 135/4832 \text{ mm}^4$	$l = 0.1016 \text{ m}$	مشخصات هندسی



شکل (۳): مقایسه رفتار دینامیکی بیشینه خیز بی بعد وسط تیر با مقاله خلیلی و همکاران [۱۰].

همان طور که در شکل ۳ دیده می شود، حداکثر اختلاف مقاله حاضر با مقاله خلیلی و همکاران اختلاف ۵/۴٪ و مربوط به سرعت ۶۲/۴ m/s است. در مقاله خلیلی و همکاران [۱۰]، اثر کرنش برشی در نظر گرفته نشده است و این بر میزان اختلاف کار حاضر با مقاله ذکر شده مؤثر خواهد بود. برای بررسی بیشتر، تیری از جنس FGM مطابق تحقیق مرجع [۸] در جدول ۲ در نظر گرفته شده است. بار متحرک با بزرگی ۱۰۰ kN وارد شده است.

جدول (۲): خواص و مشخصات تیر مطابق [۸].

Steel: $E_t = 390 \text{ GPa}$, $\rho_t = 3960 \text{ kg/m}^3$, Alumi na: $E_b = 210 \text{ GPa}$, $\rho_b = 7800 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 0.227$,	جنس FGM
$l = 2 \text{ m}$, $h = 0.19 \text{ m}$, $b = 0.14 \text{ m}$.	مشخصات هندسی

در جدول ۳ نتایج کار حاضر برای بیشینه خیز تیر بدون بعد وسط تیر به ازای سرعت های مختلف بار متحرک و توزیع های نامی و توانی با [۸ و ۱۰] مقایسه شده است.

$$P(x, t) = P_0 \delta(x - Vt) \quad (28)$$

که در رابطه (۲۸) V و P_0 به ترتیب سرعت بار متحرک و دامنه بار متحرک می باشد.

با جایگذاری رابطه (۲۸) در رابطه (۲۷) رابطه زیر برای $P_m(t)$ به دست خواهد آمد:

$$P_m(t) = \frac{2P_0}{l} \sin \frac{m\pi Vt}{l} \quad (29)$$

بر این اساس، با جایگذاری روابط (۲۶) در معادلات (۲۴) و حذف توابع مکانی از طرفین، معادلات حرکت به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$[M] \ddot{\bar{X}} + [K] \bar{X} = \bar{F} \quad (30)$$

در رابطه (۳۰) ماتریس های K و M به ترتیب ماتریس سختی و جرم هستند، بردار F بردار نیرو می باشد که در پیوست (ب) آمده است. بردار X نیز به صورت زیر تعریف می شود:

$$\bar{X} = \begin{Bmatrix} u_m(t) \\ \psi_m(t) \\ w_m(t) \end{Bmatrix} \quad (31)$$

معادلات (۳۱) سه معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم زمانی است که با روش رانگ کوتا حل شده است.

۴- نتایج و بحث

در این بخش صحت گذاری از طریق مقایسه نتایج مقاله حاضر با نتایج مراجع [۸ و ۱۰] انجام شده است. سپس اثر افزایش سرعت بار متحرک و ضریب بهره بر خیز تیر بررسی شده است. همچنین تاثیر توزیع FGM و نسبت حجمی آنها بر مقدار سرعت بحرانی نیز مورد مطالعه قرار گرفته است.

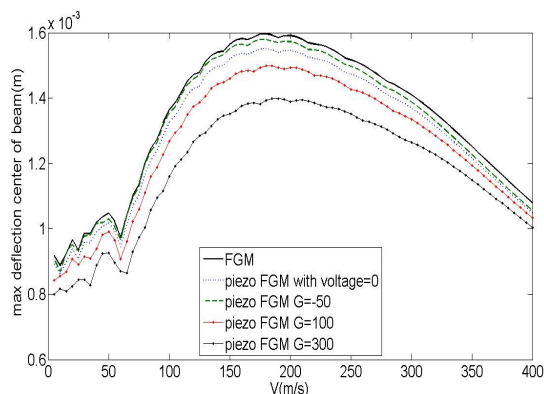
۴-۱- صحت گذاری نتایج

برای بررسی صحت ارتعاشات اجباری تحت بار هارمونیک در حالتی که تیر همسانگرد است، رفتار دینامیکی تیر تحت بار متحرک با سرعت ثابت در مقاله حاضر با مقاله خلیلی و همکاران [۱۰] مقایسه شده که با یکدیگر مطابقت داشته است. مشخصات هندسی و خواص مکانیکی تیر از جنس FGM مطابق [۱۰] در جدول ۱ آورده شده است. برای بی بعد کردن خیز تیر، بیشینه خیز وسط تیر بر $W_{cs} = pl^3 / 48EI$ تقسیم شده که رابطه آشنای خیز تیر در اثر بار متمرکز در وسط تیر است و مقدار نیروی وارده ۴/۴۵ N می باشد. برای بی بعد کردن بازه زمانی بر زمان نهایی $T = l/V$ تقسیم شده است.

در شکل ۳ رفتار دینامیکی بیشینه خیز بدون بعد وسط تیر با مقاله خلیلی و همکاران [۱۰] مقایسه شده است.

جدول (۴): مشخصات لایه‌های پیزوالکتریک.

$e_{31} = -6/5 \text{ Coulomb} / \text{m}^2$	$c_{11} = 126 \text{ Gpa}$
$\epsilon_{33} = 1/3 \cdot 2 \times 10^{-11} \text{ C} / (\text{Volt} \cdot \text{m})$	$\rho = 7500 \text{ kg} / \text{m}^3$



شکل (۴): بررسی اثر افزایش سرعت بار متحرک بر

بیشینه خیز وسط تیر $P_0=100 \text{ kN}$

مقادیر سرعت بحرانی در جدول ۵ از سایر مقادیر به صورت برجسته در هر ستون نشان داده شده است. با توجه به جدول ۵ دریافته می‌شود که با حرکت از ستون فولاد تا آلومینا و در نتیجه با افزایش نسبت حجمی سرامیک، سرعت بحرانی در مقدار بیشتری اتفاق می‌افتد. پس می‌توان نتیجه گرفت با افزایش سفتی تیر، سرعت بحرانی افزایش خواهد یافت.

۴-۴- بررسی اثر افزایش ضریب بهره بر خیز تیر از

جنس FGM با لایه‌های پیزوالکتریک در سرعت ثابت

توزیع خواص در لایه FGM در همه سرعت‌ها نمایی در نظر گرفته شده و لایه‌های پیزو مانند حالت قبل در نظر گرفته شده است. برای تیری که بار متحرک با بزرگی 100 kN وارد شده، بیشینه خیز وسط تیر در چند سرعت بحرانی به ازای افزایش ضریب بهره بررسی شده است. در شکل ۵ این بررسی نشان داده شده است.

همان‌طور که گفته شد، در سرعت بحرانی و نزدیک به آن، دامنه ارتعاشات بیشتر می‌شود، از طرفی با توجه به شکل ۵ با افزایش ضریب بهره در سرعت‌هایی نزدیک به سرعت بحرانی می‌توان از میزان خیز کاست و این یک حسن می‌تواند باشد به این صورت که در این سرعت‌ها می‌توان با اعمال ولتاژ، خیز را کاهش داد. از طرفی جالب توجه است که در سرعت‌های دیگر میزان تغییرات خیز با ولتاژ بسیار کم است به نحوی که قابل چشم‌پوشی است.

اختلاف کار حاضر در توزیع نمایی FGM با مرجع [۸] و مقاله خلیلی و همکاران [۱۰] به ترتیب $4/8\%$ و $4/7\%$ است که مطابقت این کار را با تحقیقات قبلی نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که این دو تحقیق اثر کرنش برشی را در نظر نگرفته‌اند.

جدول (۳): مقایسه بیشینه خیز بی بعد با [۸] و [۱۰].

Method	Exponential $V=180 \text{ m/s}$	$P=1$ $V=179 \text{ m/s}$	$P=2$ $V=164 \text{ m/s}$
present	1/2159	1/1920	1/2755
[۸]	1/2737	1/2486	1/3359
[۱۰]	1/2754	1/2503	1/3376

۴-۲- بررسی اثر افزایش سرعت بار متحرک بر خیز تیر

در این حالت به تیری مطابق جدول ۲ لایه‌های پیزو با خواص مطابق جدول ۴ اضافه شده است (ضخامت هر یک از لایه‌های پیزو 1 cm است).

با توجه به شکل ۴ با افزایش سرعت بار متحرک ابتدا خیز تیر افزایش یافته سپس بعد از رسیدن به مقداری بیشینه (سرعت بحرانی) کاهش می‌یابد. سرعت بحرانی برای هر نمودار متفاوت بوده و مقادیری بین 175 m/s تا 225 m/s را داراست. برای مقایسه کمینه خیز بی بعد وسط تیر برای حالتی که FGM بدون لایه‌های پیزو باشد نیز آورده شده است.

با افزایش ضریب بهره کمینه خیز بی بعد وسط تیر در همه سرعت‌های بار متحرک کاهش می‌یابد و در واقع سفتی تیر افزایش می‌یابد. از سوی دیگر با افزایش ضریب بهره سرعت بحرانی در مقادیر بالاتری از سرعت بار متحرک روی می‌دهد. به همین منظور در بررسی دیگر در هر سرعت اثر افزایش ضریب بهره بر بیشینه خیز بی بعد وسط بررسی شده است.

۴-۳- بررسی تأثیر نسبت حجمی FGM بر سرعت

بحرانی

در توزیع نمایی و چند توزیع توانی برای FGM در جدول ۵ تغییرات بیشینه خیز بدون بعد وسط تیر به ازای سرعت‌های مختلف به دست آورده شده است (تیر بدون لایه‌های پیزو در نظر گرفته شده و بیشینه خیز وسط تیر بر $W_{cs} = pl^3 / 48 EI$ تقسیم شده که خواص تیر در این رابطه از جنس فولاد در نظر گرفته شده است).

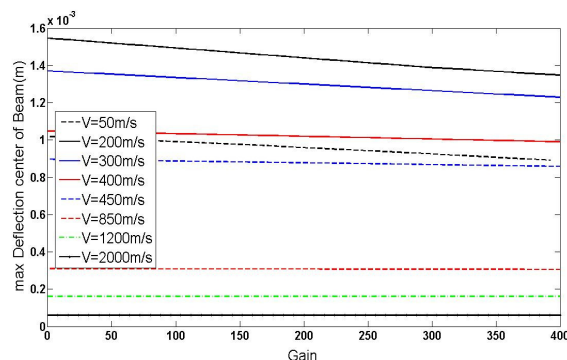
افزایش می‌یابد. در بررسی دیگر نشان داده شده که در سرعت‌های نزدیک به مقدار سرعت بحرانی افزایش ضریب بهره باعث کاهش بیشینه خیز وسط تیر می‌شود در حالی که در سرعت‌های دیگر افزایش در ضریب بهره بر کاهش بیشینه خیز بی‌بعد بی‌اثر است. از سوی دیگر با افزایش ضریب بهره به طور کلی خیز تیر کاهش یافته و می‌توان از این عامل برای کنترل دامنه ارتعاشات تیر سود جست. با افزایش نسبت حجمی سرامیک در FGM سرعت بحرانی نیز افزایش خواهد یافت.

۶- مراجع

- Han, J.H. and Lee, I. "Analysis of Composite Plates with Piezoelectric Actuators for Vibration Control Using Layerwise Displacement Theory", Composites Part B. Vol. 29B, No. 5, pp. 621–632, 1998.
- Lin, C. C. and Huang, H. N. "Vibration Control of Beam-Plates with Bonded Piezoelectric Sensors and Actuators", Computers and Struct., Vol. 73, No. 1, pp. 239-248, 1999.
- Narayanan, S. and Balamurugan, V. "Finite Element Modeling of piezolaminated Smart Structures for Active Vibration Control with Distributed Sensors and Actuators", J. Sound and Vibration, Vol. 262, No. 3, pp. 529–562, 2003.
- Heidary, F. and Eslami, M.R. "Piezo-Control of Forced Vibrations of a Thermoelastic Composite Plate", Composite Struct., Vol. 74, No. 1, pp. 99–105, 2006.
- Abbaszadeh Bidokhti, A., Sadough Vanini, A., and Eslami, M.R. "Active Control of Piezo-FGM Beams", MATERIAUX Dijon France, 13-17 November 2006.
- Kargarnovin, M.H., Najafzadeh, M.M., and Viliani, N.S. "Vibration Control of Functionally Graded Material Plate Patched with Piezoelectric Actuators and Sensors Under a Constant Electric Charge", Smart Mater. Struct. Vol. 16, No. 4, pp. 1252-1259, 2007.
- Li, S.R., Batra R.C., and Lian-Sheng Ma. "Free Vibration of Functionally Graded Material Beams with Surface-Bonded Piezoelectric Layers in Thermal Environment", Applied Mathematics and Mech. (English Edition), Vol. 30, No. 8, pp. 969–982, 2009.
- Şimşek M. and Kocaturk, T. "Free and Forced Vibration of Functionally Graded Beam Subjected to a Concentrated Moving Harmonic Load". Composite struct., Vol. 90, No.4, pp. 465-473, 2009.
- Şimşek, M. "Non-Linear Vibration Analysis of a Functionally Graded Timoshenko Beam Under Action of a Moving Harmonic Load", Composite Struct., Vol. 92, No. 10, pp. 2532–2546, 2010.
- Khalili, S.M.R., Jafari, A.A., and Eftekhari, S.A. "A Mixed Ritz-DQ Method for Forced Vibration of Functionally Graded Beams Carrying Moving

جدول (۵): بررسی اثر توزیع FGM و نسبت حجمی مواد بر مقدار سرعت بحرانی.

توزیع نمایی	آلومینیوم	P=2	P=1	فولاد	V(m/s)
۰/۷۴۹۹	۰/۵۳۰۸	۰/۶۸۴۶	۰/۷۳۲۲	۱/۰۴۵۶	۲۰
۰/۸۰۵۷	۰/۵۳۹۲	۰/۷۲۲۴	۰/۷۸۹۶	۱/۰۷۰۱	۴۰
۰/۷۵۴۸	۰/۵۴۶۳	۰/۷۲۰۷	۰/۷۴۵۵	۱/۲۸۱۴	۶۰
۰/۹۲۷۴	۰/۵۵۹۶	۰/۸۱۰۵	۰/۹۱۴۷	۱/۴۹۱۷	۸۰
۱/۰۵۳۵	۰/۶۲۷۳	۰/۹۲۹۵	۱/۰۳۶۹	۱/۶۰۰۷	۱۰۰
۱/۱۵۱۹	۰/۷۱۹۳	۱/۰۳۲۲	۱/۱۳۲۱	۱/۶۴۸۶	۱۲۵
۱/۱۹۶۱	۰/۷۹۶۴	۱/۰۸۶۴	۱/۱۷۳۵	۱/۶۴۱۰	۱۵۰
۱/۲۱۳۳	۰/۸۴۳۰	۱/۱۱۱۴	۱/۱۹۰۶	۱/۵۹۰۹	۱۷۵
۱/۲۱۱۱	۰/۸۶۹۳	۱/۱۱۸۱	۱/۱۸۶۷	۱/۵۲۴۴	۲۰۰
۱/۱۶۱۱	۰/۸۸۳۱	۱/۱۰۸۸	۱/۱۶۳۵	۱/۴۴۹۴	۲۲۵
۱/۱۵۵۱	۰/۸۸۹۴	۱/۰۸۸۰	۱/۱۲۹۸	۱/۳۲۵۳	۲۵۰
۱/۱۲۰۲	۰/۸۸۵۸	۱/۰۵۹۲	۱/۰۹۵۱	۱/۲۰۸۲	۲۷۵
۱/۰۸۲۴	۰/۸۷۸۳	۱/۰۲۹۰	۱/۰۵۶۲	۱/۰۹۲۸	۳۰۰



شکل (۵): بررسی تأثیر افزایش ضریب بهره بر بیشینه خیز وسط تیر.

۵- نتیجه‌گیری

در این تحقیق با بررسی اثر افزایش سرعت بار متحرک بر خیز، نشان داده شد که با افزایش سرعت بار متحرک یک سرعت بحرانی خواهیم داشت که مقدار آن با افزایش ضریب بهره

پیوست‌ها

(الف)

$$A_1 = \int_{z_2}^{z_1} c_{11}^{FGM} dz + (c_{11} + \frac{e_{31}^2}{\epsilon_{33}})h_s + (c_{11} - \frac{e_{31}^2 h_s G}{h_a \epsilon_{33}})h_a,$$

$$A_2 = \int_{z_2}^{z_1} c_{11}^{FGM} z dz + (c_{11} + \frac{e_{31}^2}{\epsilon_{33}})(\frac{z_0^2 + z_2^2 - z_1^2 - z_3^2}{2}) -$$

$$\frac{e_{31}^2}{\epsilon_{33}}(\frac{h_s}{h_a} Gh_m^s + h_m^a)h_a,$$

$$A_3 = \int_{z_2}^{z_1} c_{11}^{FGM} z dz + (c_{11} - \frac{e_{31}^2 h_s G}{h_a \epsilon_{33}})(\frac{z_0^2 - z_1^2}{2}) +$$

$$(c_{11} + \frac{e_{31}^2}{\epsilon_{33}})(\frac{z_2^2 - z_3^2}{2}),$$

$$A_4 = \int_{z_2}^{z_1} c_{11}^{FGM} z^2 dz + (c_{11} + \frac{e_{31}^2}{\epsilon_{33}})(\frac{z_0^3 + z_2^3 - z_1^3 - z_3^3}{3}) -$$

$$\frac{e_{31}^2}{\epsilon_{33}}(\frac{h_s}{h_a} Gh_m^s + h_m^a)(\frac{z_0^2 - z_1^2}{2}),$$

$$A_5 = \int_{z_2}^{z_1} c_{55}^{FGM} dz,$$

$$I_1 = \rho_a h_a + \rho_s h_s + \int_{z_2}^{z_1} \rho^{FGM} dz,$$

$$I_2 = \rho_a \frac{z_0^2 - z_1^2}{2} + \rho_s \frac{z_2^2 - z_3^2}{2} + \int_{z_2}^{z_1} \rho^{FGM} z dz,$$

$$I_3 = \rho_a \frac{z_0^3 - z_1^3}{3} + \rho_s \frac{z_2^3 - z_3^3}{3} + \int_{z_2}^{z_1} \rho^{FGM} z^2 dz.$$

(ب)

$$[M] = \begin{pmatrix} I_1 & I_2 & 0 \\ I_2 & I_3 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 \end{pmatrix},$$

$$[K] = \begin{pmatrix} A_1(m\pi/l)^2 & A_2(m\pi/l)^2 & 0 \\ A_3(m\pi/l)^2 & A_4(m\pi/l)^2 & k_5 A_5(m\pi/l) \\ 0 & k_5 A_5(m\pi/l) & k_5 A_5(m\pi/l)^2 \end{pmatrix},$$

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2P_0}{l} \sin \frac{m\pi Vt}{l} \end{pmatrix}.$$

Loads”, Composite struct., Vol. 92, No. 10, pp. 2497-2915, 2010.

11. Sina, S.A., Navazi, H.M., and Haddadpour, H. “An Analytical Method for Free Vibration Analysis of Functionally Graded Beams”, Materials and Design, Vol. 30, No. 3, pp. 741–747, 2009.
12. Kadoli, R., Akhtar, K., and Ganesan, N. “Static analysis of functionally graded beams using higher order shear deformation theory”, Applied Mathematical Modelling, Vol. 32, No. 12, pp. 2509-2525, 2008.
13. Trindade, M.A. and Benjeddou, A. “Refined Sandwich Model for the Vibration of Beams with Embedded Hear Piezoelectric Actuators and Sensors”, Computers and Struct., Vol. 86, No. 3, pp. 859–869, 2008.
14. Isvandzibaei, M.R., Setareh, M., and Jahani, A. “Comparison of Clamped-Clamped and Clamped-Free Boundary Conditions for Free Vibration of FGM Cylindrical Shell with Ring Support, Based on Third Order Shear Deformation Theory”, Aerospace Mech. J., Vol. 6, No. 3, pp. 25-38, 2010 (In Persian).
15. Tiersten, H.F. “Linear Piezoelectric Plate Vibration”, plenum press, 1969.
16. Qatu, M. S. “Vibration of laminated shells and plates. Academic Press”, 2004.