Archive of SID

ارتعاشات اجباری تیر تیموشنکو از جنس مواد هدفمند

با لایه پیزوالکتریک تحت بار متحرک

علىاصغر جعفرى و مرتضى فتح آبادى ً

دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی (تاریخ دریافت:۲۹ /۱۱/ ۹۰، تاریخ پذیرش: ۹۱/۰۹/۲۲)

چکیدہ

در این مقاله، ارتعاشات اجباری تیر تیموشنکو ساخته شده از FGM با لایههای پیزوالکتریک بررسی شده که بارگذاری آن از نوع بار متحرک با سرعت ثابت است. میدان جابهجایی با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی تیرها به دست آورده شده و معادلات حرکت تیر با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده است. رفتار دینامیکی تیر نیز با استفاده از روش ناویر به دست آورده شده که نتایج به دست آمده با نتایج تحلیلی ارائه شده توسط محققان دیگر مطابقت دارد. همچنین اثر افزایش سرعت بار متحرک بر بیشینه خیز وسط تیر و سرعت بحرانی در توزیعهای مختلف FGM به دست آورده شده است.

واژههای کلیدی: تیر تیموشنکو، FGM، بار متحرک، پیزوالکتریک

Forced Vibration of FGM Timoshenko Beam with Piezoelectric Layers Carrying Moving Load

A.A. Jafari and M. Fathabadi

Mech. Eng. Dep't. Kh.N.Toosi Univ. of Tech. (Received:18 February, 2012; Accepted:12 December, 2012)

ABSTRACT

In this paper forced vibration of FGM Timoshenko beam with piezoelectric layers are analyzed based on the first shear deformation beam theory. The governing equations of motion are derived using Hamilton's principle. Dynamic behaviors of beam are investigated by navier solution and the results obtained from this solution are compared with the existing theoretical results and showed relatively good agreements. Furthermore the effects of increasing the velocity of moving load in maximum deflection center of beam is studied and the critical velocity in different distribution models of FGM are investigated.

Keywords: Timoshenko Beam, FGM, Moving Load, Piezoelectric

ajafari@kntu.ac.ir :- دانشيار (نويسنده پاسخگو) w.SID.ir کارشناس ارشد: worteza_Fathabadi@yahoo.com

۱– مقدمه

پیشرفت روزاف زون بشر، استفاده از مواد نو را به امری اجتناب ناپذیر و غیرقابل انکار بدل نموده است. امروزه فلزاتی نظیر آهن و مس دیگر نمی توانند به تنهایی پاسخگوی نیازهای بشر باشند، در نتیجه رفع نمودن این نیازها مستلزم تمرکز بیشتر بر تحقیق و بررسی در زمینه مواد نو می باشد. پا دو جهت بر اساس تابعی از قبل تعیین شده و به طور پیوسته یا دو جهت بر اساس تابعی از قبل تعیین شده و به طور پیوسته مرکدام از مؤلفه های تشکیل دهنده خود را دارا می باشند. به عنوان مثال در ترکیبات سرامیک فلز، علاوه بر آنکه مقاومت خوردگی یا حرارتی سرامیکها را دارا هستند، از استحکام و مقاومت مکانیکی فلزات نیز بهرهمند می باشند.

FGMها مواد کامپوزیتی میباشند که از نظر میکروسکوپی غیرهمگن بوده و دارای خصوصیات ساختاری شامل نوع توزیع و اندازه فازها بوده و به طور تدریجی از سطحی به سطح دیگر تغییر میکنند و همین تغییر تدریجی منجر به تغییر تدریجی خواص در FGM میشود. این مواد از مخلوط سرامیک با فلز و یا ترکیبی از فلزات مختلف ساخته میشوند.

ماده سرامیک مقاومت دمایی بالایی را به خاطر رسانایی گرمایی کم دارا است و از طرفی ماده فلزی چکشخوار، از بهوجود آمدن شکستگی یا ترک به خاطر تنش حرارتی ممانعت به عمل میآورد.

برادران پیر و جاکوس کوری خاصیت مستقیم پیزوالکتریک را در کریستالهای تورمالین کشف کردند. آنها دریافتند که تغییر شکل مکانیکی در جهات ویژهای سبب میشود که صفحات الکتریکی مقابل هم، در روی صفحات کریستالهایی که عمود بر تغییر شکل مکانیکیاند، باردار شوند. این خاصیت که در کوارتز و سایر کریستالهای بدون مرکز تقارن کشف شد، خاصیت پیزوالکتریک نامیده شده است. خاصیت پیزوالکتریکی معکوس به صورت آزمایشگاهی توسط برادران کوری اثبات شد.

مواد پیزوالکتریک از گذشته در بسیاری از کاربردها از جمله کنترل فعال تا از بین بردن پارازیت استفاده می شوند. ویژگیهای خاص آنها مانند وزن کم، اندازه کوچک و پاسخ فرکانسی مطلوب باعث شده است که در سازهها به عنوان عملگر و حسگر کاربرد زیادی یابند. در سازه های متشکل از عملگر و حسگر برای مشاهده اثر کنترل سازه، ولتاژ حسگر با SID.ir

پیزوالکتریکها در ترکیبهایی با مواد کامپوزیت برای کنتری Archive برای کنتری Archive را تعاش آزاد ارتعاشات این سازهها به کار میروند. در زمینه ارتعاش آزاد چنین سازههایی، تحقیقات زیادی انجام یافته ولی کمتر به بررسی ارتعاش اجباری آنها کمتر پرداخته شده است.

> جائی- هانگ هان و این لی^۱ [۱] در سال ۱۹۹۸ آنالیز یک ورق کامپوزیتی با لایه پیزوالکتریک حسگر و عملگر برای کنترل ارتعاشات با استفاده از تئوری لایه گون^۲ انجام دادند. چاین چانگ لین^۳ و همکاران [۲] در سال ۱۹۹۹ کنترل ارتعاشات یک تیر- ورق را که با لایه های پیزوالکتریک حسگر و محرک بررسی کردند. معادلات با استفاده از اصل همیلتون استخراج و از روش المان محدود برای حل معادلات استفاده کردند. نریانان^۹ و همکاران [۳] در سال ۲۰۰۳ روش المان محدود را برای مدلسازی سازههای هوشمند با لایه پیزوالکتریک جهت کنترل فعال با لایه های عملگر و حسگر انجام دادند.

> حیدری و اسلامی [۴] در سال ۲۰۰۶ کنترل ارتعاشات اجباری یک ورق کامپوزیتی ترموالاستیک را با پیزوالکتریک انجام دادند. معادلات حرکت را با استفاده از اصل همیلتون استخراج کرده و از روش المان محدود برای حل استفاده کردند. عباسزاده بیدختی، صدوق ونینی و اسلامی [۵] در سال پیزوالکتریک حسگر و عملگر را بررسی کردند. معادلات حرکت پیزوالکتریک حسگر و عملگر را بررسی کردند. معادلات حرکت استخراج شد. کارگر نوین و همکارانش [۶] در سال ۲۰۰۷ به پیزوالکتریک عملگر و حسگر تحت شارژ الکتریکی ثابت پیزوالکتریک ملاح و حسگر تحت شارژ الکتریکی ثابت پیزوالکتریک ملاح و حسگر تحت شارژ الکتریکی ثابت پرداختند. آنها بر پایه تئوری کلاسیک ورقها معادلات حرکت ورق دور مفصل را با استفاده از اصل همیلتون استخراج کردند.

> آزاد یک تیر از جنس FGM را با لایههای پیزوالکتریک را تحت افزایش دما و ولتاژ بررسی کردند. آنها با در نظر گرفتن مقدار دقیق کشش طولی و بر مبنای تئوری کلاسیک تیرها معادلات حرکت تیر را در شرایط بارگذاری الکتریکی و حرارتی به دست آوردند. شیشمک و کوچاتورک³ [۸] در سال ۲۰۰۹ ارتعاش آزاد و اجباری تیر از جنس FGM را تحت بار متحرک بررسی کردند. آنها در این تحقیق بر پایه تئوری کلاسیک تیرها و با

- 4- Naryanan
- 5- Shi- Rong LI

¹⁻ Jae-Hang Han and In Lee

²⁻Layerwise

³⁻ Chain-Chang Lin

⁶⁻ S, ims, ek and Kocatürk

استفاده از روش لاگرانیژ معادلات حرکت استخراج کردند. همچنین شیشمک [۹] در سال ۲۰۱۰ آنالیز ارتعاش غیرخطے یک تیر تیموشنکو FGM را تحت بار متحرک با تحریک هارمونیک بررسی کرد. وی نتایج آنالیز غیرخطی بر پایه تئوری تیموشنکو را با تحلیل خطی بر پایه تئوری کلاسیک مقایسه کرد. خلیلی، جعفری و افتخاری [۱۰] در سال ۲۰۱۰ ترکیبی از روش ریلی ریتز و DQM را برای بررسی رفتار دینامیکی تیر از جنس FGM تحت بار متحرک ارائه کردند. آنها معادلات حرکت را بر پایه تئوری کلاسیک تیرها و با استفاده از روش لاگرانژ استخراج کرده و نتایج تحقیق خود را با نتایج تحقیق شیشمک و کوچاتورک [۸] مقایسه کردند.

در این مقاله، ارتعاشات اجباری تیر از جنس FGM با لایههای پیزوالکتریک تحت بار متحرک با سرعتی ثابت بررسی شده که لایه پیزو پایینی از نوع حسگر و لایه پیزو بالایی از نوع عملگر در نظر گرفته شده است. برای اعمال اثر کنترل بر روی سازه، ولتاژ اعمالي بر لايه پيزو عملگر با ضريب بهره G به ولتاژ خروجی از حسگر نسبت داده شده است. معادلات حرکت تیر بر پایه تئوری مرتبه اول برشی تیرها (و با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده و شرایط مرزی مکانیکی در دو انتهای تیر از نوع تکیه گاه ساده ۲ در نظر گرفته شده است. همچنین فرض شده که تیر در انتها نیرویی در راستای طولی تحمل نمـیکنـد و در واقع جابهجایی در راستای طولی در هر دو انتها صفر نمی باشد. معادلات نیز با استفاده از روش ناویر ⁷ حل شده و نتایج به ازای حالتی خاص با نتایج تحقیقات پیشین مقایسه شده و همچنین اثرات سرعت بار متحرک بر بیشینه خیز وسط تیر بررسی شده است. از دیگر نتایج بررسی اثر نسبت حجمی FGM بر بیشینه خیز وسط تیر و بحث بر روی مقادیر سرعت بحرانی به ازای نسبتهای مختلف FGM می باشد. در انتها قابل ذکر است که اثر ضریب بهره G بر بیشینه خیز بدون بعد وسط تیر و مقادیر سرعت بحرانی بررسی شده است.

۲- استخراج معادلات حرکت

در تئوری مرتبه اول برشی با در نظر گرفتن اثر کرنش برشی، به ویژه برای تیرهای ضخیم، تخمین بهتری زده می شود. در شکل ۱ سینماتیک تیر قبل و بعد از تغییر شکل برای تئوریهای کلاسیک و تیموشنکو^{[†] نشان داده شده است.}

1- First Shear Deformation Beam Theory

3- Navier 4- Timoshenko

rchive میدان جابه جایی بر پایه تئوری مرتبه اول برشی به صورت
$$(x, z, t) = u_0(x, t) + z \psi(x),$$

 $u(x, z, t) = u_0(x, t) + z \psi(x),$
 $v = 0,$
 $w = w_0(x, t),$
(1)

t t . . .

که در آن، u_0 و w_0 جابهجایی لایـه میـانی تیـر بـه ترتیـب در راستای z, x می باشند. $\psi(x)$ چرخش سطح مقطع تیر است. همچنین میدان کرنش با استفاده از روابط کرنش – جابهجایی به صورت زیر به دست خواهد آمد [۱۱]:

1 . 1 . 1.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x} &= \frac{\partial u_{0}}{\partial x} + z \frac{\partial \psi(x)}{\partial x}, \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w_{0}}{\partial x} + \psi(x), \\ \varepsilon_{y}, \varepsilon_{y}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz} &= 0. \end{aligned}$$
(7)

$$\int_{0}^{2} (\delta U + \delta V - \delta T) dt = 0.$$
⁽⁷⁾



شکل (۱): سینماتیک تیر قبل و بعد از تغییر شکل برای تئوري هاي مختلف [١٢].

در رابطه (۳)، t_2, t_1 دو زمان دلخواه هستند. T، V و U به ترتیب انرژیهای جنبشی، پتانسیل و کار نیروهای خارجی مىباشند كه اولين تغييرات أنها به صورت زير تعريف مىشوند شوند [۱۱]:

$$\delta U = \iiint_{V} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dx dy dz,$$

$$\delta T = \iiint_{V} \rho \dot{u}_{i} \delta \dot{u}_{i} dx dy dz,$$

$$\delta V = -b \int_{o}^{l} P(x, t) \delta w dx.$$
(*)

6- First Variation

Archive of SID.

²⁻ Simply Support

Archive of
$$SI_{P_{2}(z+\frac{h}{P_{2}})}^{P_{1}(z+\frac{h}{P_{2}})}, P_{12} = P_{1} - P_{2},$$

 $P(z) = P_{2}e^{\frac{1}{h}n\frac{P_{1}}{P_{2}}(z+\frac{h}{2})},$
(Y)

$$P(z) = (1 - \frac{1}{2} (\frac{h/2 - z}{h})^p) P_1 + [1 - (1 - \frac{1}{2} (\frac{h/2 - z}{h})^p)] P_2, \quad (\Lambda)$$

for $0 \le z \le h/2,$

$$P(z) = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{h/2+z}{h}\right)^{p}\right) P_{1} + \left[1 - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{h/2+z}{h}\right)^{p}\right)\right] P_{2},$$

$$for - h/2 \le z \le 0.$$
(9)

بنابراین تنشها در لایه FGM به صورت زیر تعریف میشوند:

$$\sigma_{xx}^{FGM} = \frac{E^{FGM}}{1 - v^2} z(\frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \psi(x)}{\partial x}),$$

$$\sigma_{xz}^{FGM} = \frac{E^{FGM}}{2(1 + v)} k_5(\psi(x) + \frac{\partial w_0}{\partial x}).$$
(1.)

۲-۲- روابط لایه پیزوالکتریک
روابط پیزوالکتریک به صورت اندیسی در زیر آورده
شده است [۱۵]:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \mathcal{E}_{kl} - e_{kij} E_k,$$

$$D_i = e_{ikl} \mathcal{E}_{kl} + \in_{ik} E_k.$$
(11)

به دلیل نازکی لایه پیزو، از ترم برشی در این لایـه صـرف نظـر کـرده و در نتیجـه در روابـط (۱۲)، بـرای لایـه پیزوالکتریـک خواهیم داشت:

$$\sigma_{xx} = c_{11}\varepsilon_{xx} - e_{31}E_z,$$

$$\begin{cases} D_x \\ D_z \end{cases} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{cases} E_x \\ E_z \end{cases} - \begin{pmatrix} 0 & e_{15} \\ e_{31} & 0 \end{pmatrix} \begin{cases} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{xz} \end{cases}.$$
(17)

به دلیل ناز کی لایه پیزوالکتریک می توان از جابهجایی الکتریکی در دو راستای دیگر لایه پیزوالکتریک صرفنظر کرد. در نهایت، روابط پیزوالکتریک لایهها به صورت روابط زیر تقلیل خواهند یافت:

$$\sigma_{xx} = c_{11}\varepsilon_{xx} - e_{31}E_z,$$

$$D_z = \epsilon_{33}E_z - e_{31}\varepsilon_{xx}.$$
(117)

۲-۳- روابط لایه حسگر

از آنجایی که در حسگر هیچ گونه شارژ الکتریکی خارجی وجود ندارد، بنابراین جابهجایی الکتریکی این لایه در راستای ضخامت صفر خواهد شد، با توجه به موارد ذکر شده رابطه (۱۴) به شرح زیر است:

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} = I_1 \ddot{u_0}(x,t) + I_2 \ddot{\psi}(x,t),$$

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} - Q_x = I_2 \ddot{u_0}(x,t) + I_3 \ddot{\psi}(x,t),$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + P(x,t) = I_1 \ddot{w_0}(x,t),$$
(Δ)

که منتجههای ممان و تنش و ضرایب (I_{i(=1 to 3} در معادلات (۵) به صورت زیر تعریف میشوند:

$$M_{xx} = \int_{z_2}^{z_1} \sigma_{xx}^{FGM} z dz + \int_{z_3}^{z_2} \sigma_{xx}^s z dz + \int_{z_1}^{z_0} \sigma_{xx}^a z dz,$$

$$Q_x = \int_{z_2}^{z_1} \sigma_{xz}^{FGM} dz,$$

$$(I_1, I_2, I_3) = \int_{z_b}^{z_1} \rho(1, z, z^2) dz.$$

$$(I_2, I_3) = \int_{z_0}^{z_1} \rho(1, z, z^2) dz.$$

$$(I_3, I_3) = \int_{z_0}^{z_0} \rho(1, z, z^2) dz.$$

FGM و لایههای پیزوالکتریک حسگر و عملگر مطابق شـکل ۲ کافیست مقادیر تنش را در رابطه (۶) جایگذاری کنیم.

FGM روابط لايه

در FGM خـواص *P* و *E* بـه ترتیـب چگـالی و مـدول الاستیسیته، تابع ضخامت میباشند. این خـواص بـا مـدلهـای توانی و نمایی و سیگموئیدی به ترتیـب در روابـط (۹-۷) بیـان شدهاند.



P در روابط زیـر بیـانگر خـواص FGM (E, p) مـیباشـد [۱۳ و ۱۴].

www.SID.ir

کـه ضـرايب (A_{i(i=1 to 5} و (I_{i(i=1 to 3} در پيوسـت (الـف) تعريـف شدهاند.

۳- حل معادلات حرکت

با در نظر گرفتن شرایط مرزی تکیهگاه ساده، در ابتدا و انتهای تیر برای شرایط مرزی نیرویی و جابهجایی در تیر مورد نظر خواهیم داشت:

 $w, N_{xx}, M_{xx} = 0$ at x = 0 & x = l. (۲۵) سپس با در نظر گرفتن تقریب سری فوریه [۱۶] برای مؤلفههای جابهجایی به صورت زیر خواهیم داشت:

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(t) \cos \frac{m\pi x}{l},$$

$$\psi(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m(t) \cos \frac{m\pi x}{l},$$

$$w(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m(t) \sin \frac{m\pi x}{l},$$

$$P(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} P_m(t) \sin \frac{m\pi x}{l}.$$
(Y9)

در روابط (۲۶) m بیانگر مود میباشد.

برای به دست آوردن (P_m(t) ، از آخرین معادله از روابط (۲۶) در راستای طول تیر انتگرالگیری کـرده و بـا اسـتفاده از اصـل تعامد رابطه زیر برای (P_m(t) به دست خواهد آمد:

$$P_{m}(t) = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} P(x, t) \sin \frac{m\pi x}{l} dx.$$
 (YV)

بار متحرک با سرعت ثابت با استفاده از تابع دلتای دیـراک بـا رابطه زیر حاصل می شود:

$$D_{z} = \epsilon_{33} E_{z} + e_{31} \left(\frac{\partial u_{0}}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_{x}}{\partial x}\right)^{s} = 0,$$

$$E_{z}^{s} = -\frac{e_{31}}{\epsilon_{33}} \left(\frac{\partial u_{0}}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_{x}}{\partial x}\right)^{s}.$$
(14)

:بر این اساس رابطه تنش حسگر به صورت زیر به دست می اید:

$$\sigma_{xx}^{s} = (c_{11} + \frac{e_{31}^{2}}{\epsilon_{33}})(\frac{\partial u_{0}}{\partial x} + z\frac{\partial \psi_{x}}{\partial x})^{s}.$$
(1۵)

بر این پایه با برابر قرار دادن شدت میدان الکتریکی در حسگر و رابطه تجربی $\phi_i = \phi_i$ (باطه تجربی در راستای Z خواهیم داشت:

$$V^{s} = -\frac{e_{31}h_{s}}{\epsilon_{33}} \left(\frac{\partial u_{0}}{\partial x} + h_{m}^{s} \frac{\partial \psi_{x}}{\partial x}\right), \quad h_{m}^{s} = \frac{z_{2} + z_{3}}{2}.$$
 (19)

۲-۴- روابط لایه عملگر

برای به دست آوردن معادلات حاکم بر عملگر می توان فرض
کرد که توزیع پتانسیل الکتریکی درون عملگر به صورت یک
تابع مرتبه دوم [۶] در رابطه (۱۷) آورده شده است:
$$\varphi^{a} = \varphi_{0} + z\varphi_{1} + z^{2}\varphi_{2}.$$
 (۱۷)
حال با توجه به اینکه در عملگر اختلاف پتانسیل الزامی است،
بنابراین شرایط مرزی الکتریکی زیر برای آن در نظر گرفته
می شود:

$$\varphi = V^a \quad at \quad z = z_0 = h/2 + h_a ,$$

$$\varphi = 0 \quad at \quad z = z_1 = h/2.$$
(1A)

با اعمال شرایط مرزی فوق و استفاده از رابطـه ماکسـول [۱۵] رابطه زیر برای توزیع پتانسیل الکتریکی به دست خواهد آمد:

$$\varphi^{a} = \varphi_{0}^{a} + z\left(\frac{V^{a}}{h_{a}} - h_{m}^{a} \frac{e_{31}}{\epsilon_{33}} \frac{\partial \psi_{x}}{\partial x}\right) + z^{2} \frac{e_{31}}{2\epsilon_{33}} \frac{\partial \psi_{x}}{\partial x}.$$
(19)

بر این اساس برای
$$E_z$$
 رابطه زیر را خواهیم داشت [۱۵]:
 $E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{V^a}{h_a} + \frac{e^a_{31}}{\epsilon^a_{33}}(h^a_m - z)\frac{\partial \psi_x}{\partial x}.$
(۲۰)

بر این اساس رابطه تنش عملگر به صورت زیر به دست خواه د آمد:

$$\sigma_{xx}^{a} = c_{11} \left(\frac{\partial u_{0}}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_{x}}{\partial x}\right)^{a} + e_{31} \frac{V^{a}}{h_{a}},$$

$$-\frac{e_{31}^{2}}{\epsilon_{33}} (h_{m}^{a} - z)^{a} \frac{\partial \psi_{x}}{\partial x}.$$
 (71)

برای مشاهده اثر کنترل بر روی سازه، ولتاژ خروجی از حسگر با رابطه زیر به ولتاژ عملگر مربوط می شود: $V^{a} = GV^{s} = -\frac{e_{31}h_{s}G}{\epsilon_{33}}(\frac{\partial u_{0}}{\partial x} + h_{m}^{s}\frac{\partial \Psi_{x}}{\partial x}).$ (۲۲) www.SID.ir

Archive	هندسی تیر مطابق (SID)	خواص و مشخصات	جدول (۱):
	$\rho = 1.9 \text{ AP/9 } kg / m^3$ $E = 1/.9 \text{ Ax} 1.17 \text{ Pa}$	$\mathcal{U} = \cdot / \Upsilon$	تیر از جنس ایزوتروپیک
	$b = h = \cdot / \cdot \cdot \mathfrak{srd} m$ $I = \mathfrak{rd}/\mathfrak{sarr} mm^4$	$l = \cdot / \cdot \cdot r$	مشخصات هندسی



شکل (۳): مقایسه رفتار دینامیکی بیشینهخیز بیبعد وسط تیر با مقاله خلیلی و همکاران [۱۰].

همان طور که در شکل ۳ دیده می شود، حداکثر اختلاف مقاله حاضر با مقاله خلیلی و همکاران اختلاف ۸/۴٪ و مربوط به سرعت ۶۲/۴ m/s است. در مقاله خلیلی و همکاران [۱۰]، اثر کرنش برشی در نظر گرفته نشده است و این بر میزان اختلاف کار حاضر با مقاله ذکر شده مؤثر خواهد بود.

برای بررسی بیشتر، تیری از جنس FGM مطابق تحقیق مرجع [۸] در جدول ۲ در نظر گرفته شده است. بار متحرک با بزرگی ۱۰۰ kN وارد شده است.

جدول (۲): خواص و مشخصات تیر مطابق [۸].

Steel: $E_t = r \cdot GPa$,	
$ρ_t = $ Ψ٩۶· kg / m ³ ,	
Alumina: $E_b = 71 \cdot GPa$,	جنس FGM
$\rho_{\rm b} = \forall \lambda \cdot \cdot kg / m^3,$	
$\upsilon = \cdot / \Upsilon \Upsilon \Upsilon,$	
$l = \mathbf{r} \cdot \mathbf{m}, h = \cdot / \mathbf{q} \mathbf{m}, b = \cdot / \mathbf{r} \mathbf{m},$	مشخصات
	ھندسی

در جدول ۳ نتایج کار حاضر برای بیشینه خیز تیر بدون بعد وسط تیر به ازای سرعت های مختلف بار متحرک و توزیع های نمایی و توانی با [۸ و۱۰] مقایسه شده است.

$$P(x,t) = P_0 \delta(x - Vt) \tag{7A}$$

که در رابطه (۲۸) V و P_0 به ترتیب سرعت بار متحرک و دامنه بار متحرک میباشد. با جایگذاری رابطه (۲۸) در رابطـه (۲۷) رابطـه زیـر بـرای

ب جینیندری رابطت (۱۲) در رابطت (۱۲) رابطت ریز جرای $P_m(t)$

$$P_m(t) = \frac{2P_0}{l} \sin \frac{m\pi V t}{l}.$$
 (79)

بر این اساس، با جایگذاری روابط (۲۶) در معادلات (۲۴) و حذف توابع مکانی از طرفین، معادلات حرکت به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\begin{bmatrix} M \end{bmatrix} \vec{X} + \begin{bmatrix} K \end{bmatrix} \vec{X} = \vec{F}.$$
^(T•)

در رابطه (۳۰) ماتریس های K و M به ترتیب ماتریس سفتی و جرم هستند، بردار F بردار نیرو میباشد که در پیوست (ب) آمده است. بردار X نیز به صورت زیر تعریف میشود: $\overline{X} = \begin{cases} u_m(t) \\ \psi_m(t) \\ w_m(t) \end{cases}$ (۳۱)

معادلات (۳۱) سه معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم زمانی است که با روش رانگکوتا حل شده است.

۴- نتایج و بحث

در این بخش صحهگذاری از طریق مقایسه نتایج مقاله حاضر با نتایج مراجع [۸ و۱۰] انجام شده است. سپس اثر افزایش سرعت بار متحرک و ضریب بهره بر خیز تیر بررسی شده است. همچنین تاثیر توزیع FGM و نسبت حجمی آنها بر مقدار سرعت بحرانی نیز مورد مطالعه قرار گرفته است.

۴–۱–صحهگذاری نتایج

برای بررسی صحت ارتعاشات اجباری تحت بار هارمونیک در حالتی که تیر همسانگرد است، رفتار دینامیکی تیر تحت بار متحرک با سرعت ثابت در مقالـه حاضر با مقالـه خلیلـی و همکاران [۱۰] مقایسه شده که با یکدیگر مطابقت داشته است. مشخصات هندسـی و خـواص مکانیکی تیر از جـنس FGM مطابق [۱۰] در جدول ۱ آورده شده است. برای بیبعـد کردن خیز تیر، بیشینه خیز وسط تیر بر ۲ ۸۴ / $R_{cs} = pl^3$ تقسیم شده که رابطه آشنای خیز تیر در اثر بار متمرکز در وسط تیـر است و مقدار نیروی وارده ۸ ۴/۵ میباشد. برای بیبعد کردن بازه زمانی بر زمان نهایی V/l = T تقسیم شده است.

در شکل ۳ رفتار دینامیکی بیشینهخیز بدون بعد وسط تیر با مقاله خلیلی و همکاران [۱۰] مقایسه شده است. www.SID.ir

اختلاف کار حاضر در توزیع نمایی FGM با مرجع [۸] و مقالـه خلیلـی و همکـاران [۱۰] بـه ترتیـب ۴/۷٪ و ۴/۸٪ اسـت کـه مطابقـت ایـن کـار را بـا تحقیقـات قبلـی نشـان میدهد. لازم به ذکر است که این دو تحقیق اثر کرنش برشی را در نظر نگرفتهاند.

جدول (۳): مقایسه بیشینه خیز بی بعد با [۱۰و ۸].

Method	Exponential V=\A•m/s	P=1 V=1Y9m/s	P=r V=194m/s	
present	١/٢١۵٩	١/١٩٢٠	1/2400	
[٨]	1/7734	1/2488	١/٣٣۵٩	
[1.]	1/2404	١/٢۵٠٣	1/8408	

۲-۴ - بررسی اثر افزایش سرعت بار متحرک بر خیز تیر در این حالت به تیری مطابق جدول ۲ لایههای پیزو با خواصی مطابق جدول ۴ اضافه شده است (ضخامت هر یک از لایههای پیزو cm ۱ است).

با توجه به شکل **۴** با افزایش سرعت بار متحرک ابتدا خیز تیر افزایش یافته سپس بعد از رسیدن به مقداری بیشینه (سرعت بحرانی) کاهش مییابد. سرعت بحرانی برای هر نمودار متفاوت بوده و مقادیری بین۳/s ۱۷۵ تا ۲۲۵ m/s را داراست. برای مقایسه کمینه خیز بیبعد وسط تیر برای حالتی که FGM بدون لایههای پیزو باشد نیز آورده شده است.

با افزایش ضریب بهره کمینهخیز بی بعد وسط تیر در همه سرعتهای بار متحرک کاهش می یابد و در واقع سفتی تیر افزایش می یابد. از سوی دیگر با افزایش ضریب بهره سرعت بحرانی در مقادیر بالاتری از سرعت بار متحرک روی می دهد. به همین منظور در بررسی دیگر در هر سرعت اثر افزایش ضریب بهره بر بیشینه خیز بی بعد وسط بررسی شده است.

۴–۳- بررسی تأثیر نسـبت حجمـی FGM بـر سـرعت بحرانی

۵ در توزیع نمایی و چند توزیع توانی برای FGM در جدول تغییرات بیشینه خیز بدون بعد وسط تیر به ازای سرعتهای مختلف به دست آورده شده است (تیر بدون لایه های پیزو در نظر گرفته شده و بیشینه خیز وسط تیر بر EA /۴/ ۶/۱۳ تقسیم شده که خواص تیر در این رابطه از جنس فولاد در نظر گرفته شده است).

زوالكتريك. Archive of SID	جدول (۴): مشخصات لایههای پ
---------------------------	------------------------------------

$e_{31} = -9/\Delta Coulomb / m^2$	$c_{11} = 119 Gpa$
$\in_{33} = 1/\Upsilon \cdot \Upsilon \times 1 \cdot^{-h} C / (Volt.m)$	$\rho = Y \Delta \cdot \cdot kg / m^3$



مقادیر سرعت بحرانی در جدول ۵ از سایر مقادیر به صورت برجسته در هر ستون نشان داده شده است. با توجه به جدول ۵ دریافته می شود که با حرکت از ستون فولاد تا آلومینا و در نتیجه با افزایش نسبت حجمی سرامیک، سرعت بحرانی در مقدار بیشتری اتفاق می افتد. پس می توان نتیجه گرفت با افزایش سفتی تیر، سرعت بحرانی افزایش خواهد یافت.

۴–۴– بررسی اثر افزایش ضریب بهره بر خیز تیر از جنس FGM با لایههای پیزوالکتریک در سرعت ثابت توزیع خواص در لایه FGM در همه سرعتها نمایی در نظر گرفته شده و لایههای پیزو مانند حالت قبل در نظر گرفته شده است. برای تیری که بار متحرک با بزرگی ۱۰۰kN وارد شده،

بیشینه خیز وسط تیر در چند سرعت بحرانی به ازای افزایش ضریب بهره بررسی شده است. در شکل ۵ این بررسی نشان داده شده است.

همان طور که گفته شد، در سرعت بحرانی و نزدیک به آن، دامنه ارتعاشات بیشتر می شود، از طرفی با توجه به شکل **۵** با افزایش ضریب بهره در سرعتهایی نزدیک به سرعت بحرانی می توان از میزان خیز کاست و این یک حسن می تواند باشد به این صورت که در این سرعتها می توان با اعمال ولتاژ، خیز را کاهش داد. از طرفی جالب توجه است که در سرعتهای دیگر میزان تغییرات خیز با ولتاژ بسیار کم است به نحوی که قابل چشمپوشی است. افزایش می یابد. در بررسی دیگر نشان داده شده کر گرم Archive می افرایش می یابد. در بررسی دیگر نشان داده شده کریب بهره سرعتهای نزدیک به مقدار سرعت بحرانی افزایش ضریب بهره باعث کاهش بیشینه خیز وسط تیر می شود در حالی که در سرعتهای دیگر افزایش در ضریب بهره بر کاهش بیشینه خیز بی بعد بی اثر است. از سوی دیگر با افزایش ضریب بهره به طور کلی خیز تیر کاهش یافته و می توان از این عامل برای کنترل دامنه ارتعاشات تیر سود جست. با افزایش نسبت حجمی سرامیک در FGM سرعت بحرانی نیز افزایش خواهد یافت.

8- مراجع

- Han, J.H. and Lee, I. "Analysis of Composite Plates with Piezoelectric Actuators for Vibration Control Using Layerwise Displacement Theory", Composites Part B. Vol. 29B, No. 5, pp. 621–632, 1998.
- Lin, C. C. and Huang, H. N. "Vibration Control of Beam-Plates with Bonded Piezoelectric Sensors and Actuators", Computers and Struct., Vol. 73, No. 1, PP. 239-248, 1999.
- Narayanan, S. and Balamurugan, V. "Finite Element Modeling of piezolaminated Smart Structures for Active Vibration Control with Distributed Sensors and Actuators", J. Sound and Vibration, Vol. 262, No. 3, pp. 529–562, 2003.
- Heidary, F. and Eslami, M.R. "Piezo-Control of Forced Vibrations of a Thermoelastic Composite Plate", Composite Struct., Vol. 74, No. 1, pp. 99– 105, 2006.
- Abbaszadeh Bidokhti, A., Sadough Vanini, A., and Eslami, M.R. "Active Control of Piezo-FGM Beams", MATERIAUX Dijon France, 13-17 November 2006.
- Kargarnovin, M.H., Najafzadeh, M.M., and Viliani, N.S. "Vibration Control of Functionally Graded Material Plate Patched with Piezoelectric Actuators and Sensors Under a Constant Electric Charge", Smart Mater. Struct. Vol. 16, No. 4, pp. 1252-1259, 2007.
- Li, S.R., Batra R.C., and Lian-Sheng Ma. "Free Vibration of Functionally Graded Material Beams with Surface-Bonded Piezoelectric Layers in Thermal Environment", Applied Mathematics and Mech. (English Edition), Vol. 30, No. 8, pp. 969– 982, 2009.
- Şimşek M. and Kocatürk, T. "Free and Forced Vibration of Functionally Graded Beam Subjected to a Concentrated Moving Harmonic Load". Composite struct., Vol. 90, No.4, pp. 465-473, 2009.
- Şimşek, M. "Non-Linear Vibration Analysis of a Functionally Graded Timoshenko Beam Under Action of a Moving Harmonic Load", Composite Struct., Vol. 92, No. 10, pp. 2532–2546, 2010.
- Khalili, S.M.R., Jafari, A.A., and Eftekhari, S.A. "A Mixed Ritz-DQ Method for Forced Vibration of Functionally Graded Beams Carrying Moving

ے (ω). بررسے آپر توزیع FOIVI و نسبت حجمے مواد بر	جدول	>
--	------	---

1. 7

مقدار سرعت بحرائي.					
V(m/s)	فولاد	P=1	P=2	آلومينيوم	توزيع
					نمایی
۲.	1/0408	• /٧٣٢٢	•/8848	• /۵۳• λ	•/४۴٩٩
4.	۱/•٧•١	•/VA98	•/7774	•/۵۳۹۲	•/A•۵V
۶.	1/7716	•/٧۴۵۵	•/٧٢•٧	• /۵۴۶۳	•/V۵۴۸
٨٠	1/4911	•/9147	•/٨١•۵	•/۵۵۹۶	•/9774
۱۰۰	۱/۶۰۰۷	1/0889	•/9890	•/۶۲۷۳	۱/•۵۳۵
180	1/8488	1/1881	1/•٣٢٢	•/४१९٣	١/١۵١٩
۱۵۰	1/8410	1/1780	1/0284	•/٧٩۶۴	१/१९८१
۱۷۵	١/۵٩٠٩	1/19+8	1/1114	•/እ۴٣•	١/٢١٣٣
۲۰۰	1/0744	1/1887	1/11&1	•/እ۶٩٣	1/5111
222	1/4494	1/1880	۱/۱۰۸۸	• /٨٨٣ ١	1/1811
۲۵۰	1/8858	1/1898	۱/•۸٨•	•/8896	1/1001
270	١/٢•٨٢	۱/•۹۵۱	1/•698	•/\\\\\	1/1808
٣٠٠	١/•٩٢٨	1/0887	1/•29•	• /۸۷۸۳	1/•226
		1			



۵– نتیجه گیری

در این تحقیق با بررسی اثر افزایش سرعت بار متحرک بر خیز، نشان داده شد که با افزایش سرعت بار متحرک یک سرعت بحرانی خواهیم داشت که مقدار آن با افزایش ضریب بهره www.SID.ir پيوستھا

$$(\mathbf{i}\mathbf{k})$$

$$A_{1} = \int_{z_{2}}^{z_{1}} c_{11}^{FGM} dz + (c_{11} + \frac{e_{31}^{2}}{\epsilon_{33}})h_{s} + (c_{11} - \frac{e_{31}^{2}h_{s}G}{h_{a}\epsilon_{33}})h_{a},$$

$$A_{2} = \int_{z_{2}}^{z_{1}} c_{11}^{FGM} z dz + (c_{11} + \frac{e_{31}^{2}}{\epsilon_{33}})(\frac{z_{0}^{2} + z_{2}^{2} - z_{1}^{2} - z_{3}^{2}}{2}) - \frac{e_{31}^{2}}{\epsilon_{33}}(\frac{h_{s}}{h_{a}}Gh_{m}^{s} + h_{m}^{a})h_{a},$$

$$A_{3} = \int_{z_{2}}^{z_{1}} c_{11}^{FGM} z dz + (c_{11} - \frac{e_{31}^{2}h_{s}G}{h_{a}\epsilon_{33}})(\frac{z_{0}^{2} - z_{1}^{2}}{2}) + (c_{11} + \frac{e_{31}^{2}}{\epsilon_{33}})(\frac{z_{0}^{2} - z_{1}^{2}}{2}) + (c_{11} + \frac{e_{31}^{2}}{\epsilon_{33}})(\frac{z_{0}^{2} - z_{1}^{2}}{2}),$$

$$A_{4} = \int_{z_{2}}^{z_{1}} c_{11}^{FGM} z^{2} dz + (c_{11} + \frac{e_{31}^{2}}{\epsilon_{33}})(\frac{z_{0}^{3} + z_{2}^{3} - z_{1}^{3} - z_{3}^{3}}{3}) - \frac{e_{31}^{2}}{\epsilon_{33}}(\frac{h_{s}}{h_{a}}Gh_{m}^{s} + h_{m}^{a})(\frac{z_{0}^{2} - z_{1}^{2}}{2}),$$

$$A_{5} = \int_{z_{2}}^{z_{1}^{2}} c_{55}^{FGM} dz,$$

$$I_{1} = \rho_{a}h_{a} + \rho_{s}h_{s} + \int_{z_{2}}^{z_{1}} \rho^{FGM} dz,$$

$$I_{2} = \rho_{a}\frac{z_{0}^{2} - z_{1}^{2}}{2} + \rho_{s}\frac{z_{2}^{2} - z_{3}^{2}}{2} + \int_{z_{2}}^{z_{1}} \rho^{FGM} z dz,$$

$$I_{3} = \rho_{a}\frac{z_{0}^{3} - z_{1}^{3}}{3} + \rho_{s}\frac{z_{2}^{3} - z_{3}^{3}}{3} + \int_{z_{2}}^{z_{1}} \rho^{FGM} z^{2} dz.$$

$$(\mathbf{\psi})$$

$$[M] = \begin{pmatrix} I_1 & I_2 & 0 \\ I_2 & I_3 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 \end{pmatrix},$$

$$[K] = \begin{pmatrix} A_1(m\pi/l)^2 & A_2(m\pi/l)^2 & 0 \\ A_3(m\pi/l)^2 & A_4(m\pi/l)^2 & k_5A_5(m\pi/l) \\ +k_5A_5 & k_5A_5(m\pi/l) \\ 0 & k_5A_5(m\pi/l) & k_5A_5(m\pi/l)^2 \end{pmatrix},$$

$$\vec{F} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \frac{2P_0}{l} \sin \frac{m\pi Vt}{l} \end{cases}.$$

Loads", Composite struct., Vol. 92, No. 10, pp. 2497-2915, 2010.

- Sina, S.A., Navazi, H.M., and Haddadpour, H. "An Analytical Method for Free Vibration Analysis of Functionally Graded Beams", Materials and Design, Vol. 30, No. 3, pp. 741–747, 2009.
- Kadoli, R., Akhtar, K., and Ganesan, N. "Static analysis of functionally graded beams using higher order shear deformation theory", Applied Mathematical Modelling, Vol. 32, No. 12, pp. 2509-2525, 2008.
- Trindade, M.A. and Benjeddou, A. "Refined Sandwich Model for the Vibration of Beams with Embedded Hear Piezoelectric Actuators and Sensors", Computers and Struct., Vol. 86, No. 3, pp. 859–869, 2008.
- 14. Isvandzibaei, M.R., Setareh, M., and Jahani, A. "Comparison of Clamped-Clamped and Clamped-Free Boundary Conditions for Free Vibration of FGM Cylindrical Shell with Ring Support, Based on Third Order Shear Deformation Theory", Aerospace Mech. J., Vol. 6, No. 3, pp. 25-38, 2010 (In Persian).
- 15. Tiersten, H.F. "Linear Piezoelectric Plate Vibration", plenum press, 1969.
- 16. Qatu, M. S. "Vibration of laminated shells and plates. Academic Press", 2004.