

## مدل ارتعاشات سه جزئی ماشین فرز با اتصالات پیوسته

رضا معدولیت<sup>۱</sup> و محمد فرجی قناتی<sup>۲</sup> سید حسام الدین مدنی<sup>۳</sup>

دانشکده مهندسی هوافضا

دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت: ۹۱/۰۴/۱۹؛ تاریخ پذیرش: ۹۲/۰۲/۱۴)

دانشکده مهندسی مکانیک

دانشگاه علم و صنعت ایران

### چکیده

هدف از تحلیل دینامیکی در ماشین فرز، بالا بردن سرعت ماشینکاری و در عین حال کاستن ارتعاشات خودزا در انتهای ابزار است. چنین ارتعاشاتی از صافی سطح قطعات فرز کاری شده می‌کاهد. کاملاً واضح است که پارامترهای تماسی مانند سفتی و میرایی بین اجزا نقش مهمی در خواص دینامیکی مجموعه اسپیندل-هولدر-ابزار در ماشین فرز دارد که در این مقاله با در نظر گرفتن خواص تماسی بین اجزا به مطالعه دینامیک مجموعه پرداخته شده است. در بین این سازه‌ها اسپیندل، هولدر و ابزار دارای هندسه‌هایی می‌باشند که امکان انجام تحلیل آنها با نرم افزارهای المان محدود وجود دارد ولی سازه بدنه ماشین فرز به قدری پیچیده است که تحلیل آن غیرممکن است. در این مقاله روش جدیدی برای انجام چنین تحلیل‌های سازه‌ای ارائه می‌شود. خواص دینامیکی مجموعه ماشین فرز و اسپیندل در انتهای اسپیندل اندازه‌گیری شده و با استفاده از روش جدید کوپل پیوسته دینامیکی، مدل تحلیلی ابزار و هولدر به مجموعه اسپیندل و ماشین فرز متصل می‌شود. نتایج این روش جدید با آخرین روش ارائه شده در مراجع به نام کوپلینگ چند نقطه‌ای مقایسه شده است. در روش جدید امکان کوپل دینامیکی دو قطعه در دو فضای تحلیل متفاوت از جمله فضای مودال و فضای پاسخ فراهم شده است. به این ترتیب جهت کوپل دینامیکی دو جزء نیاز به تبدیل فضای مدل دو جزء نمی‌باشد و از خطاهای عددی حاصل از تبدیل فضا جلوگیری خواهد شد. عمده برتری این روش نسبت به RCSA امکان کوپل پیوسته دو جزء می‌باشد. در این مقاله تماس بین اسپیندل-هولدر و هولدر-ابزار با استفاده از فنرها و میراگرهای جابه‌جایی و پیچشی که به صورت پیوسته در طول تماس پخش شده‌اند، مدل شده است. تحلیل دینامیکی هولدر با معادلات تیر تیموشنکو با استفاده از سری‌های چبیشف انجام شده و تحلیل دینامیکی ابزار نیز با استفاده از روش جدید قطر معادل و استفاده از معادلات تیر اویلر برنولی انجام گرفته است. پارامترهای تماسی بین اجزا با استفاده از روش جدید ارائه شده در نرم افزار ANSYS به دست آمده و به صورت تجربی مورد تأیید قرار گرفته است.

**واژه‌های کلیدی:** چتر، دینامیک ماشین فرز، خواص دینامیکی تماس، کوپلینگ دینامیکی

## Three Component Model with New Continuous Dynamic Coupling Method for Tool-Holder-Spindle Structure

R. Madoliat and M. Faraji-Ghanati

Mech. Eng. Dep't.  
Iran Univ. of Sci. and Tech.

S.H. Madani

Aerospace Eng. Dep't.  
Univ. of Tehran

(Received: 9 July, 2012; Accepted: 4 May, 2013)

### ABSTRACT

In machine dynamics, the tool point frequency response functions (FRFs) are employed to predict the stable machining conditions. A combined analytical-experimental substructuring procedure is proposed to determine the tool point FRFs usable for different holder-tool configurations. Contact interface of holder-spindle and tool-holder is modeled using translational and rotational springs and dampers spread in the length of contact surface. These joint parameters are defined using finite element method. This enables the analyst to introduce the contact stiffness and damping in more detail taking into account variations of normal pressure in the tool-holder and holder-spindle joints. The dynamic analysis of the holder is done using Timoshenko beam theory by chebyshev method. The tool dynamics is modeled by Euler-Bernoulli beam theory using the method of equivalent diameter. For the purpose of shifting the tool stability lobes to a higher level, tool damping parameter is modified by internal frictional damper and the effect is analyzed by analytical methods and experimental study. New method for continuous dynamic coupling is presented. The method employs the measured spindle-machine FRFs and analytical models of the tool and holder to predict the tool tip FRFs. An experimental case study is provided to demonstrate the applicability of the proposed method.

**Keywords:** Continuous Coupling, Connection Dynamic Properties, Machine Tool Dynamics, Joint Interface

۱- دانشیار (نویسنده پاسخگو): madoliat@iust.ac.ir

۲- دانشجوی دکتری: mfarajig@iust.ac.ir

۳- دانشجوی دکتری: h\_madani.mecheng@iust.ac.ir

## ۱- مقدمه

واضح است که خواص دینامیکی اسپیندل- هولدر- ابزار و اتصال آنها به هم، نقش مهمی در کیفیت سطح فرزکاری شده دارد. کیفیت صافی سطح به پاسخ فرکانسی انتهای ابزار بستگی دارد [۱-۳]. مهم‌ترین محدودیت، ارتعاشات خودزایی است که در انتهای ابزار اتفاق می‌افتد و تابعی از پاسخ فرکانسی در انتهای ابزار است [۴ و ۵]. یکی از عوامل مهم در ایجاد چتر، اتصالات انعطاف‌پذیر بین اجزای اسپیندل- هولدر- ابزار است. برای به دست آوردن مدل دینامیکی چنین اجزایی، اشمیت<sup>۱</sup> روش RCSA یا به عبارتی کوپل رسیپتانس را معرفی کرد [۶-۹].

در این روش پاسخ کل سیستم با استفاده از پاسخ تک تک اجزاء در فضای فرکانس حاصل می‌شود. در روش معمول، هولدر به اسپیندل متصل شده و اندازه‌گیری مودال مجموعه به صورت تجربی انجام می‌شود. سپس پاسخ مودال هولدر با استفاده از روش‌های تئوری اندازه‌گیری شده و پاسخ اسپیندل نیز با استفاده از تست به دست خواهد آمد. در مرحله بعد برای هر ترکیب دیگری از هولدر و اسپیندل مربوط، می‌توان با استفاده از روش RCSA پاسخ دینامیکی مجموعه را به دست آورد. عیب عمده این روش در این است که نمی‌توان اتصال را در یک طول پیوسته انجام داد. به عبارتی هر چند اتصال به صورت فیزیکی در یک طول مشخص انجام شده ولی مدل‌سازی در روش RCSA باید در یک نقطه و یا حداقل در چند نقطه انجام گیرد. در این راستا اشمیت مدل چند نقطه‌ای را ارائه کرده است [۱۰-۱۲]. عیب دیگر این روش این است که هر دو جزء باید در یک فضا مورد تحلیل قرار گیرند، به عبارتی دیگر باید هر دو در فضای فرکانسی باید باشند.

اشمیت [۱۳ و ۱۴] در تحلیل‌های خود فقط درجه آزادی جابه‌جایی جانبی را در نظر گرفت. در حقیقت ابزار داخل هولدر نیز دارای خمش بوده و در نظر نگرفتن درجه آزادی چرخشی، خطای زیادی در تحلیل ایجاد می‌کند.

پارک<sup>۲</sup> [۱۵] الگوریتمی برای تعیین پاسخ چرخشی ابزار- هولدر با استفاده از نتایج اندازه‌گیری ارتعاشات جانبی ارائه کرده است. یوشیمورا<sup>۳</sup> [۱۶] یک روند آزمایشگاهی را برای به دست آوردن خواص سفتی و استهلاک خطی معادل اتصالات پیچی به عنوان تابعی از فشار سطح واسط و سطح تماس

ظاهری مورد استفاده قرار داده است. وانگ<sup>۴</sup> [۱۷] در یک روند سنتز آزمایشگاهی، برای محاسبه سفتی دینامیکی یک سازه شامل تأثیرات اتصال را به دست آورده است. وانتابه<sup>۵</sup> [۱۸] روش NLBBA را برای ارزیابی مشخصه‌های پاسخ فرکانسی یک سیستم سازه‌ای شامل فنرهای غیرخطی پیشنهاد نموده است. داوول<sup>۶</sup> [۱۹] روش سنتز مود جزء با یک ضریب لاگرانژی را مورد استفاده قرار داده تا یک تیر با تکیه‌گاه ساده را که با یک سیستم جرم و فنر غیرخطی متصل شده است آنالیز کند.

در این مقاله تماس بین اسپیندل- هولدر- ابزار با استفاده از فنرها و میراگرهای جابه‌جایی و پیچشی که در طول تماس پخش شده‌اند در نظر گرفته شده است. تحلیل هولدر نیز با استفاده از معادلات تیر تیموشنکو انجام پذیرفته است. ابزار با استفاده از روش جدید قطر معادل در تحلیل‌ها در نظر گرفته شده است.

## ۲- مدل‌سازی تماس بین اسپیندل- هولدر- ابزار

مدل اجزای محدود با استفاده از نرم‌افزار ANSYS ساخته شده است. نمونه مجموعه ابزار و هولدر و مونتاژ شده آنها در شکل ۱ نشان داده شده است. در مدل ایجاد شده در نرم افزار از ۶۳۲۴ المان ۲۰ گرهی (SOLID1۸۶)، ۷۶۸ المان تماسی ۸ گرهی تماسی (CONTA1۷۴) و ۷۶۸ المان ۸ گرهی (TARGE1۷۰) استفاده شده است (شکل ۲). المان‌های تماسی بین اسپیندل و قسمت مخروطی هولدر قرار گرفته‌اند (شکل ۳).

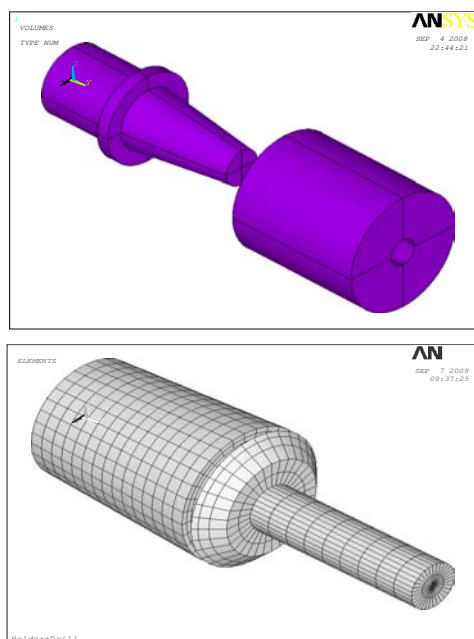
## ۲-۱- مدل‌سازی اتصال مخروطی اسپیندل به هولدر

سطح تماس بین اسپیندل و هولدر با استفاده از دو سطح مخروطی روی هم مدل شده است. هولدر با استفاده از نیروی محوری داخل اسپیندل کشیده می‌شود. اصطکاک بین این دو قطعه، تعیین کننده خواص دینامیکی، یعنی سفتی و میرایی بین آنها است.

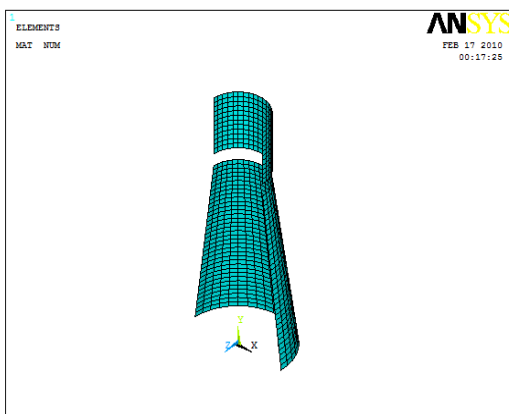
پس از برقراری تماس با توجه به اینکه سطوح درگیر مخروطی است، در اثر تداخل شعاعی در داخل هم گیر کرده و اتصال برقرار می‌شود. هر مقدار که هولدر بیشتر به داخل اسپیندل نفوذ کند تداخل شعاعی بیشتر و اتصال محکم‌تر می‌شود. برای تعیین میزان این تداخل در مدل‌سازی، ابتدا تداخل شعاعی را در مدل ایجاد کرده و نتایج برای چند حالت دیگر مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین مسئله را با تداخل‌های ۵، ۱۰، ۱۵ و ۲۰

1- Schmitz  
2- Park  
3- Yoshimura

4- Wang  
5- Wantabe  
6- Dowell



شکل (۲): مدل اجزای محدود برای قسمت مخروطی هولدر داخل اسپیندل و ابزار داخل هولدر.



شکل (۳): المان‌های تماسی بین اسپیندل و هولدر.

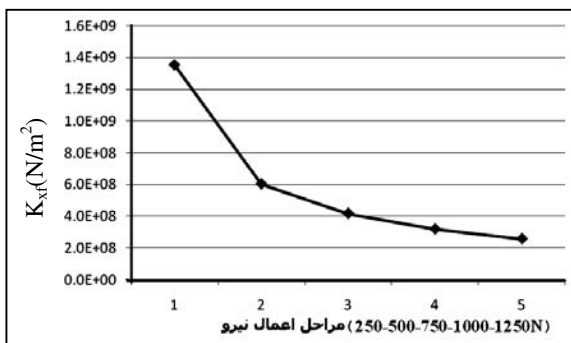
شکل ۴ کانتور فشار جازنی را برای تداخل ۵ تا ۲۰ میکرومتر نشان می‌دهد. همان‌طور که در این شکل ملاحظه می‌شود، فشار تماس در انتهای تماس اسپیندل-هولدر بیشترین مقدار خود را دارد و به تدریج در طول تماس کاهش می‌یابد، اما با توجه به اینکه قسمتی از هولدر توخالی است روال کاهشی منظمی نداشته و در قسمتی از نمودار افزایش و سپس کاهش فشار تماس مشاهده می‌شود. همان‌طور که انتظار می‌رفت افزایش تداخل موجب افزایش فشار تماس می‌شود.

میکرومتر به طور جداگانه مورد بررسی قرار داده و سپس به مقایسه نتایج پرداخته می‌شود.

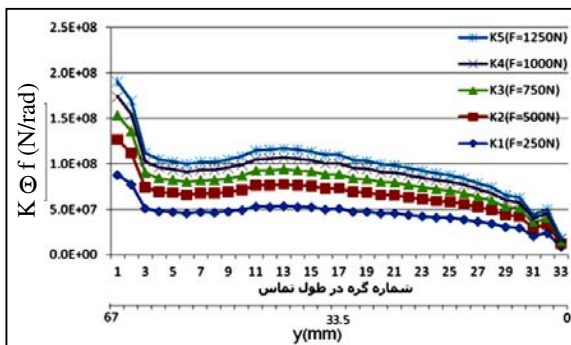
در شکل ۲ پایه اسپیندل ثابت فرض شده و تماس بین دو سطح برای نیروهای کشش متفاوت در ANSYS مدل شده است. با استفاده از المان‌های تماس (شکل ۳) و پس از برقراری تماس و در نظر گرفتن تداخل مورد نظر به حل مسئله پرداخته می‌شود. همچنین اسپیندل و هولدر را تا جای ممکن و قبل از برقراری تماس اولیه به هم نزدیک کرده و با ثابت کردن اسپیندل، برای برقراری تداخل مورد نظر جابه‌جایی لازم در راستای محوری در هولدر ایجاد می‌شود. سپس جهت مدل کردن نیروی کشش هولدر که در ماشین‌های فرز برای محکم کردن هولدر در داخل اسپیندل اعمال می‌شود، نیروی محوری کششی ۱۰ KN را در پنج مرحله به طوری که در هر مرحله ۲ KN وارد می‌شود اعمال کرده تا فرآیند جازنی دو قطعه تکمیل شده و برای اعمال نیروها جهت به دست آوردن خواص تماس آماده شود.



شکل (۱): مجموعه اسپیندل-هولدر و ابزار مورد آزمون.



شکل (۵): شیب خط گراف نیرو- جابه‌جایی در یکی از گره‌های میانی.

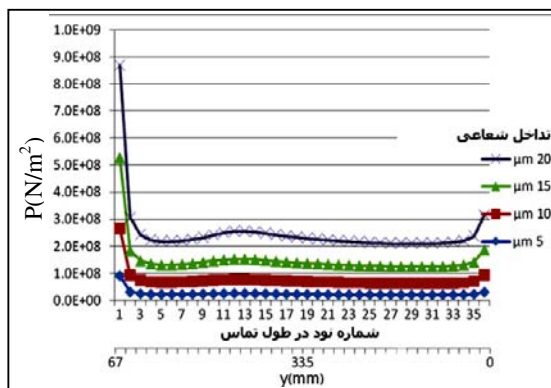


شکل (۶):  $K_{\theta f}$  در طول تماس بین اسپیندل و هولدر برای مقادیر مختلف نیرو اعمال شده در انتهای طول تماس.

به دست آوردن میرایی خطی حاصل از اعمال نیرو: برای به دست آوردن میرایی فرض می‌شود که در طول تماس بین نقاط مقابل هم در اسپیندل و هولدر پس از اعمال نیروهای جانبی در حین کار، لغزش میکرونی به وجود می‌آید و در اثر این لغزش، جابه‌جایی هر دو نقطه مقابل در طول تماس یکسان نیست، بنابراین این لغزش سبب ایجاد میرایی می‌شود. به این ترتیب با استفاده از فشار تماسی گره‌ها، نیروی اصطکاک کولمب محاسبه شده و از آنجا طبق رابطه (۱) می‌توان میرایی ویسکوز معادل را به دست آورد.

$$C_{eq,n} = \frac{4 F_{d,n}}{\pi \omega |Y_n|} \quad (1)$$

در این رابطه،  $Y_n$  اختلاف جابه‌جایی ایجاد شده در دو گره مقابل هم در اسپیندل و هولدر پس از اعمال نیرو است.  $F_{d,n}$  نیز نیروی اصطکاک کولمب در هر المان است. پس از به دست آوردن میرایی ویسکوز در همه المان‌ها، میرایی در هر نقطه از طول محور با استفاده از حاصل جمع کلیه المان‌های تماسی قرار گرفته در آن طول به دست خواهد آمد. شکل ۷ میرایی ویسکوز در طول خط تماس را به واسطه اعمال نیروهای افقی ۲۵۰N و ۱۲۵۰N نشان می‌دهد.



شکل (۴): تغییرات فشار تماس در طول تماس اسپیندل و هولدر با تغییر میزان تداخل.

همچنین در جدول ۱ مشخصات مواد ابزار، اسپیندل و هولدر مشخص شده است.

جدول (۱): خواص مربوط به متریال ابزار، هولدر و اسپیندل که در تحلیل اجزای محدود استفاده شده است.

$\mu$	$\nu$	$(\text{kg/m}^3)\rho$	E(GPa)	
	۰/۲۲	۱۴۴۰۰	۵۶۰	ابزار
۰/۱۵	۰/۲۹	۷۸۵۰	۲۰۰	هولدر
	۰/۲۹	۷۸۵۰	۲۰۰	اسپیندل

به دست آوردن سفتی خطی حاصل از نیرو: پس از اعمال نیروها و حل مسئله جهت تعیین فشار تماسی، مقدار نیروهای جانبی در گره‌های سطح تماس و همچنین جابه‌جایی هر یک از گره‌ها، متناسب با نیروی اعمالی به دست می‌آید. با داشتن این مقادیر، طبق رابطه  $F=K_{xf}.X$  در هر مرحله اعمال نیرو، نمودار  $F$  بر حسب  $X$  به دست آورده می‌شود. شیب این نمودار بیانگر سفتی مربوط به گره مربوطه خواهد بود. این داده‌ها برای ۳۴ گره تماسی به دست آمده و در ۵ مرحله اعمال نیرو استخراج شده‌اند. شکل ۵ وضعیت سفتی یکی از گره‌های میانی را در شرایط اعمال نیرو در ۵ مرحله نشان می‌دهد.

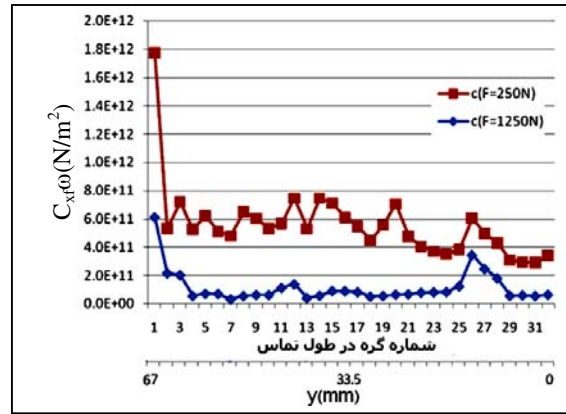
به دست آوردن سفتی زاویه‌ای حاصل از نیرو: برای به دست آوردن سفتی زاویه‌ای ناشی از نیروی اعمالی، با توجه به اینکه المان انتخابی تنها جابه‌جایی و نیروها را در جهت محورهای مختصات می‌دهد، با استفاده از تغییرات  $X$  در مراحل مختلف اعمال نیرو در گره‌های طول تماس، تغییرات زاویه‌ای محاسبه و  $K_{\theta f}$  از رابطه  $F=K_{\theta f}.\theta$  مانند مرحله قبل برای هر گره در سطح تماس به دست می‌آید. سفتی زاویه محاسبه شده برای گره‌های طول تماس برای مقادیر نیروهای مختلف اعمال شده در شکل ۶ نشان داده شده است.

$$\begin{aligned}
 R(x) &= A_1 \cdot \cosh(\beta x) + A_2 \cdot \sinh(\beta x) + A_3 \cdot \cos(\beta x) \\
 &\quad + A_4 \cdot \sin(\beta x), \\
 S(y) &= A_5 \cdot \cosh(\alpha y) + A_6 \cdot \sinh(\alpha y) + A_7 \cdot \cos(\alpha y) \\
 &\quad + A_8 \cdot \sin(\alpha y), \\
 T(z) &= A_9 \cos(\gamma z) \cosh(\gamma z) + A_{10} \cos(\gamma z) \sinh(\gamma z) \\
 &\quad + A_{11} \sin(\gamma z) \cosh(\gamma z) + A_{12} \sin(\gamma z) \sinh(\gamma z),
 \end{aligned}
 \tag{۴}$$

$$\gamma = \sqrt[4]{\frac{K}{4EI}}.$$

در معادلات بالا، دوازده ضریب مجهول وجود دارد که جهت تعیین این ضرایب از شرایط مرزی حاکم بر مسئله استفاده می‌شود.

$$\frac{d^2 R(0)}{dx^2} = 0 \quad \frac{d^3 R(0)}{dx^3} = 0.
 \tag{۵}$$



شکل (۷): میرایی معادل به دست آمده برای تماس بین اسپیندل و هولدر.

به دست آوردن پارامترهای مربوط به اعمال ممان: در تعیین پارامترهای مشابه در خصوص اعمال ممان، روندی که در بالا در مورد اعمال نیرو توضیح داده شد دنبال می‌شود. به این ترتیب خواص دینامیکی مربوط به اعمال ممان هم به دست می‌آید.

### ۳- مدل سازی ابزار

در روش جدید ارائه شده، ابتدا با استفاده از روش تحلیلی، پاسخ فرکانسی انتهای ابزار تعیین شده و سپس در همان نقطه پاسخ فرکانسی دقیق با استفاده از نرم افزار المان محدود مانند ANSYS نیز به دست می‌آید. همچنین با روش بهینه سازی مقدار مجهول مسئله یعنی قطر قسمت کاهش یافته ابزار برای قسمت پره‌ای ابزار معلوم می‌شود. تابع مورد نظر جهت بهینه سازی به صورت زیر است:

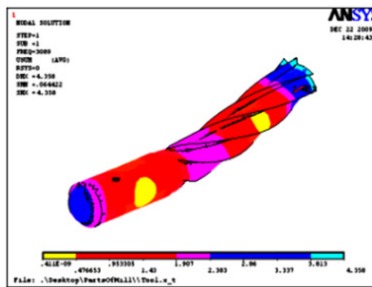
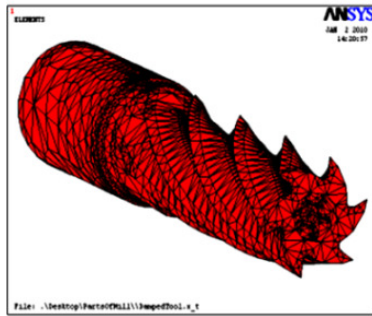
$$obj = \sum_{r=1}^N \left| \log \left| \frac{H_{tool\ end\ point}^{ANSYS}(\omega_r)}{H_{prediction}^{ANSYS}(\omega_r)} \right| \right|.
 \tag{۲}$$

در شکل ۸ مدل ابزار واقعی در نرم افزار ANSYS مشاهده می‌شود. در شکل ۹ مدل کوپلینگ برای هر دو قسمت ابزار نشان داده شده است.

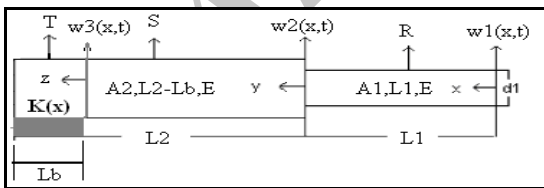
معادلات حاکم بر مسئله مدل که در شکل نشان داده شده است به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 EI_1 \frac{d^4 R}{dx^4} - \rho A_1 \omega^2 R &= 0 & 0 \leq x \leq L_1, \\
 EI_2 \frac{d^4 S}{dy^4} - \rho A_2 \omega^2 S &= 0 & 0 \leq y \leq L_2 - L_b, \\
 EI_2 \frac{d^4 T}{dz^4} - \rho A_2 \omega^2 T + KT &= 0 & 0 \leq z \leq L_b.
 \end{aligned}
 \tag{۳}$$

همچنین حل معادلات بالا به صورت زیر می‌باشد:

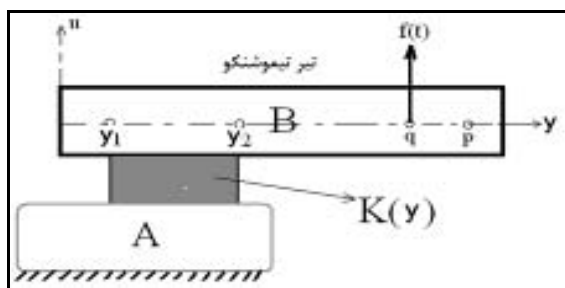


شکل (۸): مدل ابزار در نرم افزار ANSYS و شکل مود اول آن.



شکل (۹): مدل معادل ابزار به صورت تیر دو تکه ای در بستر الاستیک.

معادلات پیوستگی در مورد جابه‌جایی، ممان و نیروهای برشی نیز به صورت زیر است:



شکل (۱۰): تیر تیموشنکو روی بستر الاستیک.

در صورتی که دو جزء جدا از هم فرض شود نیروهای ما بین آنها به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} F^A(x) &= K(x) [U^B(x) - U^A(x)] \\ F^B(x) &= -F^A(x). \end{aligned} \quad (10)$$

با توجه به آنچه در مورد جزء A گفته شد، نتایج حاصل از اندازه‌گیری مودال در دسترس می‌باشد:

$$[H^A(\omega)] = \begin{bmatrix} H_{11}^A & H_{12}^A & \dots & H_{1,m}^A \\ H_{21}^A & H_{22}^A & \dots & H_{2,m}^A \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{m,1}^A & H_{m,2}^A & \dots & H_{m,m}^A \end{bmatrix}. \quad (11)$$

جابه‌جایی المان طولی از جزء A به صورت زیر است:

$$U_i^A = \int_{x_1}^{x_2} H_{i,x}^A(x) K(x) [U^B(x) - U^A(x)] dx, \quad i=1,2,\dots,m. \quad (12)$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود در این رابطه انتگرالی،  $H_{i,x}^A(x)$  تابعی پیوسته است و باید از درونبایی رسیپتانس‌های اندازه‌گیری شده در نقاط خاص با استفاده از سری‌های چبیشف به دست آید. [۲۰]

$$H_{i,x}^A \equiv \sum_{j=1}^m a_{ij} t_{j-1}(x) = [a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{im}] \{t\}, \quad i=1,2,\dots,m. \quad (13)$$

به طوری که  $t_0, \dots, t_{m-1}$  سری‌های چبیشف است.

$$t_0 = 1$$

$$t_1 = x$$

$$t_{n+1}(x) = 2xt_n(x) - t_{n-1}(x)$$

$$\begin{bmatrix} H_{1,x}^A \\ H_{2,x}^A \\ \vdots \\ H_{m,x}^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_0(x) \\ t_1(x) \\ \vdots \\ t_{m-1}(x) \end{bmatrix} = [a] \{t\} \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} H_{11}^A & H_{12}^A & \dots & H_{1,m}^A \\ H_{21}^A & H_{22}^A & \dots & H_{2,m}^A \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{m,1}^A & H_{m,2}^A & \dots & H_{m,m}^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,m} \end{bmatrix} \times$$

$$[\{t(x_1)\} \ \{t(x_2)\} \ \dots \ \{t(x_m)\}] = [a] \{t\}$$

$$\{t(x_i)\} = [1 \ t_1(x_i) \ \dots \ t_{m-1}(x_i)]^T.$$

تابع جابه‌جایی هر دو جزء را می‌توان به صورت سری‌های زیر در نظر گرفت که در مورد جزء A سری چبیشف بوده و در مورد جزء B به صورت سری از شکل مودها است که همگرایی زودتر اتفاق می‌افتد:

$$\begin{aligned} R(L) &= S(0), \quad \frac{dR(L)}{dx} = \frac{dS(0)}{dy}, \\ \frac{d^2R(L)}{dx^2} &= \frac{d^2S(0)}{dy^2}, \quad \frac{d^3R(L)}{dx^3} = \frac{d^3S(0)}{dy^3}, \\ S(L) &= T(L), \quad \frac{dS(L)}{dx} = \frac{dT(L)}{dy}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{d^2S(L)}{dx^2} = \frac{d^2T(0)}{dy^2}, \quad \frac{d^3S(L)}{dx^3} = \frac{d^3T(0)}{dy^3} + \frac{K(0)T(0)}{EI_2}.$$

در نقطه انتهایی نیز شرط مرزی زیر حاکم می‌باشد:

$$\frac{d^2T(L)}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3T(L)}{dx^3} + \frac{K(L)T(L)}{EI_3} = 0. \quad (7)$$

در مجموع دوازده شرط مرزی تعیین کننده دوازده ضریب مجهول خواهند بود که معادله آن به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$[C] \{A\} = 0. \quad (8)$$

این معادله از  $|C| = 0$  به دست می‌آید و برای تعیین شکل مودها نیز از ترکیب  $R(x)$ ,  $T(x)$ ,  $S(s)$  استفاده می‌شود.

#### ۴- مدل‌سازی خواص تماسی بین ابزار و هولدر

مدل‌سازی خواص تماسی بین ابزار و هولدر از جمله مقادیر سفتی و میرایی مشابه روش ارائه شده برای تماس بین اسپیندل و هولدر است.

#### ۵- روش جدید کوپل دینامیکی پیوسته و مقایسه نتایج

##### با روش چندنقطه‌ای RCSA

در این بخش، ابتدا به بیان روش جدید کوپل دینامیکی ارائه شده در این مقاله پرداخته شده و سپس آخرین روش کوپل دینامیکی ارائه شده در مراجع با عنوان کوپل چند نقطه‌ای ذکر و نتایج با هم مقایسه می‌شود.

#### ۵-۱- روش جدید ارائه شده برای کوپل دینامیکی

##### پیوسته بین اجزا

فرض می‌شود که تیر تیموشنکو روی یک بستر دیگر با لایه الاستیک قرار گرفته است (شکل ۱۰) در مورد تیر تیموشنکو مدل تحلیلی بسته وجود دارد اما در مورد بستر الاستیک فرض می‌شود که به دلیل پیچیدگی هندسه امکان نوشتن معادلات بسته وجود نداشته و تنها نتایج حاصل از اندازه‌گیری مودال فراهم است. در اینجا معادلات جدید بسط داده شده برای کوپل پیوسته این دو جزء ارائه می‌شود.

همان‌طور که گفته شد در مورد جزء B مدل تحلیلی وجود دارد.

$$[\Lambda^A] = \begin{bmatrix} \lambda_1^B & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^B \end{bmatrix}, \quad \{\phi^B(x)\} = \begin{Bmatrix} \phi_1^B(x) \\ \phi_2^B(x) \\ \vdots \\ \phi_n^B(x) \end{Bmatrix}. \quad (9)$$

$$[Z] \begin{Bmatrix} \{a\} \\ \{b\} \\ \{c\} \end{Bmatrix} = \{q\}. \quad (25)$$

بعد از تعیین این بردارهای مجهول، پاسخ فرکانسی بین نقاط p و q به صورت زیر به دست می‌آید:

$$G_{pq}^B(\omega) = U^B(x) \Big|_{x=x_p} = \sum_{j=1}^n b_j(\omega) \phi_j^B(x_p). \quad (26)$$

### ۵-۲- روش کوپل رسیپتانس RCSA

در این قسمت، ماتریس رسیپتانس که برای اسپیندل به صورت تجربی در سه نقطه به دست آمده و برای هولدر با استفاده از تحلیل در نرم‌افزار ANSYS به دست آمده است، با استفاده از روش کوپل رسیپتانس چند نقطه‌ای به هم متصل می‌شوند. شکل هولدر و اسپیندل را با سه نقطه تماس (نقاط انتهایی و میانی) با لایه الاستیک نشان می‌دهد. این روش جهت مقایسه نتایج روش کوپل پیوسته و روش چند نقطه‌ای ارائه شده است. مؤلفه‌های جابه‌جایی- دوران برای هولدر با ۴ درجه آزادی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} U_1 &= R_{11}q_1 + R_{12}q_2 + R_{13}q_3 + R_{14}q_4 \\ U_2 &= R_{21}q_1 + R_{22}q_2 + R_{23}q_3 + R_{24}q_4 \\ U_3 &= R_{31}q_1 + R_{32}q_2 + R_{33}q_3 + R_{34}q_4 \\ U_4 &= R_{41}q_1 + R_{42}q_2 + R_{43}q_3 + R_{44}q_4. \end{aligned} \quad (27)$$

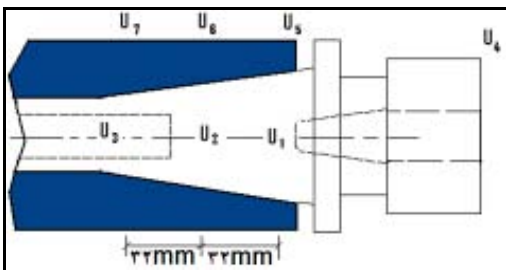
همچنین مؤلفه‌های جابه‌جایی برای اسپیندل با ۳ درجه آزادی به شرح زیر است:

$$\begin{aligned} U_5 &= R_{55}q_5 + R_{56}q_6 + R_{57}q_7 \\ U_6 &= R_{65}q_5 + R_{66}q_6 + R_{67}q_7 \\ U_7 &= R_{75}q_5 + R_{76}q_6 + R_{77}q_7, \end{aligned} \quad (28)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} u_i &= \{y_i \ \theta_i\}^T \\ q_i &= \{f_i \ m_i\}^T \\ R_{ij}(\omega) &= \begin{bmatrix} y_i / f_j & y_i / m_j \\ \theta_i / f_j & \theta_i / m_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{ij} & l_{ij} \\ n_{ij} & p_{ij} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (29)$$

که در این معادله،  $U_3, U_2, U_1$  به ترتیب نقاط ابتدایی، میانی و انتهایی روی هولدر در ناحیه تماس و  $U_4$  بر روی سر هولدر می‌باشد. همچنین  $U_5, U_6, U_7$  مؤلفه‌های مربوط به اسپیندل در همان طول تماس است (شکل ۱۱).



شکل (۱۱): مؤلفه‌های نقاط اتصال اسپیندل - هولدر.

$$U^A(x) = \sum_{j=1}^m a_j t_{j-1}(x) = \{t\}^T \{a\}, \quad (15)$$

$$U^B(x) = \sum_{j=1}^n b_j \phi_j^B(x) = \{\phi^B\}^T \{b\}.$$

با جایگذاری معادله (۱۵) در (۱۲) داریم:

$$\{t(x_i)\}^T \{a\} = \int_{x_1}^{x_2} H_{i,x}^A(x) K(x) \left[ \{\phi^B\}^T \{b\} - \{t\}^T \{a\} \right] dx, \quad i=1,2,\dots,m. \quad (16)$$

معادله بالا به صورت ماتریسی زیر در می‌آید:

$$[T]^T \{a\} = \int_{x_1}^{x_2} K(x) H_x^A(x) \left[ \{\phi^B\}^T \{b\} - \{t\}^T \{a\} \right] dx, \quad i=1,2,\dots,m. \quad (17)$$

از معادله (۱۴) داریم:

$$\begin{aligned} [H^A] &= [a][T] \\ [a] &= [H^A][T]^{-1}. \end{aligned} \quad (18)$$

با ترکیب معادلات (۱۷) و (۱۸) مقادیر زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \{H_x^A\} &= [H^A][T]^{-1}\{t\} \\ [T]^T \{a\} &= \int_{x_1}^{x_2} K(x) [H^A][T]^{-1}\{x\} \left[ \{\phi^B\}^T \{b\} - \{t\}^T \{a\} \right] dx. \end{aligned} \quad (19)$$

معادله نهایی برای جزء A به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} & \left( [T]^T + [H^A][T]^{-1} \int_{x_1}^{x_2} K(x) \{t\} \{t\}^T dx \right) \\ & \{a\} - \left( [H^A][T]^{-1} \int_{x_1}^{x_2} K(x) \{t\} \{\phi^B\}^T dx \right) \{b\} = \{0\}. \end{aligned} \quad (20)$$

معادلات جزء B به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u^B(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi^B}{\partial x} - \chi \frac{\partial^2 u^B(x,t)}{\partial t^2} &= \gamma f^B(x,t), \quad 0 < x < 1, \\ \frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2 \psi^B(x,t)}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial u^B(x,t)}{\partial x} - \psi^B \right) - \frac{\mu}{\sigma} \frac{\partial^2 \psi^B(x,t)}{\partial t^2} &= 0, \quad 0 < x < 1, \end{aligned} \quad (21)$$

که در آن،  $\psi(x,t)$  شیب و  $u(x,t)$  جابه‌جایی جانبی و  $f(x,t)$  نیز نیروی خارجی وارد شده می‌باشد. ضرایب معادلات بالا نیز ضرایب بی‌بعد هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\chi = \frac{mL^2 \omega^2}{kGA}, \quad \mu = \frac{J \omega^2 L^2}{EI}, \quad \gamma = \frac{-L}{kGA}, \quad \sigma = \frac{kGA L^2}{EI}, \quad \eta = \frac{-L^2}{EI}. \quad (22)$$

همچنین نیروی خارجی وارد شده نیز به صورت زیر است:

$$f^B(x,t) = \delta(x-x_q) f_q(t) + K(x) [u^A(x,t) - u^B(x,t)]. \quad (23)$$

بعد از انجام مراحل پیچیده ریاضی و حل فرض شده جابه‌جایی جانبی و شیب، به صورت سری‌های چیشف که به صورت زیر می‌باشند به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} u^A(x,t) &= U^A(x) e^{i\omega t} \equiv \left( \sum_{j=1}^m a_j t_{j-1}(x) \right) e^{i\omega t} \\ u^B(x,t) &= U^B(x) e^{i\omega t} \equiv \left( \sum_{j=1}^n b_j \phi_j^B(x) \right) e^{i\omega t} \\ \psi^B(x,t) &= \psi^B(x) e^{i\omega t} \equiv \left( \sum_{j=1}^r c_j t_{j-1}(x) \right) e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (24)$$

بردارهای مجهول در معادلات نهایی زیر، حل مربوط به جابه‌جایی‌های اجزای A و B و همچنین شیب مربوط به جزء B می‌باشند.

که در آن،  $H_{44-p}(f_i)$  مقدار رسیپتانس برحسب فرکانس مورد نظر حاصل از کوپلینگ بوده و  $H_{44-m}(f_i)$  مقدار رسیپتانس در فرکانس مورد نظر حاصل از تست است. با توجه به این نکته که خطا باید کمینه باشد، مقادیر  $K$  به دست می‌آید. در این مسئله، مدل در نظر گرفته شده برای سفتی با توجه به مقاله نمازی و همکاران [۲۱] به صورت زیر و خطی متناسب با سطح به دست می‌آید:

$$K(x) = K(D_1 + \frac{D_2 - D_1}{x_2 - x_1}x)(1 + i\eta), \quad (36)$$

که در آن،  $D_1, D_2$  به ترتیب قطر شروع و انتهای سطح تماس است و  $x_1 - x_2$  طول سطح تماس می‌باشد و مقدار  $x$  با توجه به فاصله از شروع سطح تماس محاسبه می‌شود. مقدار سفتی برای سه نقطه ۱، ۲ و ۳ به صورت جدول ۲ جایگزین شده است:

جدول (۲): مقادیر سفتی در هر سه نقطه.

$K_1 = 0.437176 \times K \times (1 + i\eta)$	سختی فنر در نقطه ۱
$K_2 = 0.346424 \times K \times (1 + i\eta)$	سختی فنر در نقطه ۲
$K_3 = 0.255672 \times K \times (1 + i\eta)$	سختی فنر در نقطه ۳

با توجه به بهینه‌سازی روش کوپلینگ مقادیر سفتی و خطای بین تست و روش کوپلینگ در جدول ۳ به دست می‌آید:

جدول (۳): جدول مقادیر سفتی و خطای حاصل از کوپلینگ

نسبت به تست.

خطای میانگین نسبت به تست	$\eta$	$K$	مودهای در نظر گرفته شده
٪۲۱/۱۴	۰/۸	$0.99 \times 10^{11}$	دو مود صلب
٪۱۹/۹۴	۰/۸۸	$1.46 \times 10^{11}$	دو مود صلب و یک مود غیر صلب
٪۱۹/۲۵	۰/۹۰	$1.5 \times 10^{11}$	دو مود صلب و دو مود غیر صلب

نمودار قسمت حقیقی و مجازی رسیپتانس نقطه ۴ حاصل از اندازه‌گیری و همچنین مدل کوپلینگ در شکل ۱۲ نشان داده شده است.

همچنین مقادیر  $K_{yf}$  با توجه به مقدار  $K$  به دست آمده از بهینه‌سازی در هر سه نقطه ۱ و ۲ و ۳ به صورت جدول ۴ به دست می‌آید که با مقادیر به دست آمده از روش اجزای محدود مقایسه شده‌اند.

شرایط سازگاری برای نقط مقابل هم در طول تماس به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} K_1(U_5 - U_1) &= q_1 = -q_5 \\ K_2(U_6 - U_2) &= q_2 = -q_6 \\ K_3(U_7 - U_3) &= q_3 = -q_7. \end{aligned} \quad (30)$$

با جایگزینی ماتریس‌های جابه‌جایی در معادلات سازگاری، معادله زیر به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_4 \\ q_4 \\ q_4 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{55} + R_{11} + K_1^{-1} & R_{56} + R_{12} & R_{57} + R_{13} \\ R_{65} + R_{21} & R_{66} + R_{22} + K_2^{-1} & R_{67} + R_{23} \\ R_{75} + R_{31} & R_{76} + R_{32} & R_{77} + R_{33} + K_3^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -R_{14} \\ -R_{24} \\ -R_{34} \end{bmatrix}. \quad (31)$$

ماتریس رسیپتانس مجموعه در سر هولدر و اسپیندل به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$G_{44} = \frac{U_4}{q_4} \quad (32)$$

$$G_{44} = R_{41} \frac{q_1}{q_4} + R_{42} \frac{q_2}{q_4} + R_{43} \frac{q_3}{q_4} + R_{44} \frac{q_4}{q_4}.$$

که در این رابطه، ضرایب  $\frac{q_i}{q_4}$  از معادله (۳۱) و  $R_{4i}$  از [۱۱]

به دست می‌آید.

در معادلات سازگاری،  $K$  ماتریس سفتی سطح تماس است که به شرح زیر می‌باشد:

$$K = \begin{bmatrix} K_{yf} + i\omega c_{yf} & K_{ym} + i\omega c_{ym} \\ K_{\theta f} + i\omega c_{\theta f} & K_{\theta m} + i\omega c_{\theta m} \end{bmatrix}. \quad (33)$$

لازم به ذکر است که در قسمت اول مقاله حاضر به نحوه تعیین مؤلفه‌های سفتی اشاره شده است.

### فرض‌های ساده‌سازی در مسئله:

- با توجه به این نکته که به دست آوردن کامل ماتریس رسیپتانس در تست برای اسپیندل مقدور نمی‌باشد، در این قسمت تنها از  $H$  استفاده شده است یعنی برای تمامی روابط بالا به جای  $R_{ij}$  از  $H_{ij}$  استفاده می‌شود،

- در معادلات سازگاری،  $K$  ماتریس سفتی سطح تماس است که در این مسئله در هر سه نقطه به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$K = K_{yf} + i.K_d, \quad (34)$$

که در این معادله،  $K_{yf}$  سفتی شعاعی (عمودی) و  $K_d$  میرایی سازه‌ای می‌باشد و

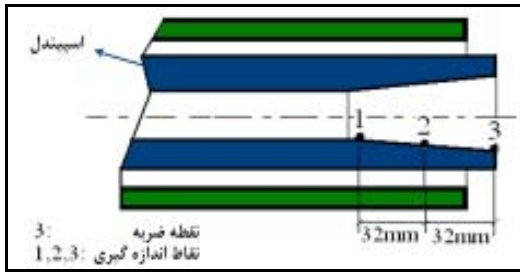
- برای به دست آوردن مقادیر سفتی در هر سه نقطه، به صورت تجربی از بهینه‌سازی به روش زیر استفاده شده و تابع خطا نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E R O R = \sum_1^{90} \left| \log \left( \left| \frac{H_{44-p}(f_i)}{H_{44-m}(f_i)} \right| \right) \right|, \quad (35)$$

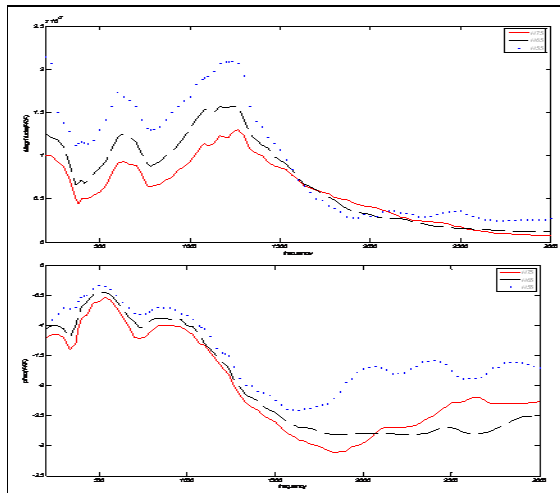


بوده که در شکل ۱۳ نشان داده شده است. نتایج اندازه‌گیری پاسخ فرکانسی مربوط به سه نقطه شکل ۱۳ در شکل ۱۴ نشان داده شده است.

همان‌طور که در روش جدید ارائه شده در این مقاله برای کوپل پیوسته گفته شد، از این اطلاعات پاسخ فرکانسی با استفاده از سری‌های چبیشف، جهت به دست آوردن پاسخ فرکانسی پیوسته مربوط به اسپیندل استفاده می‌شود.



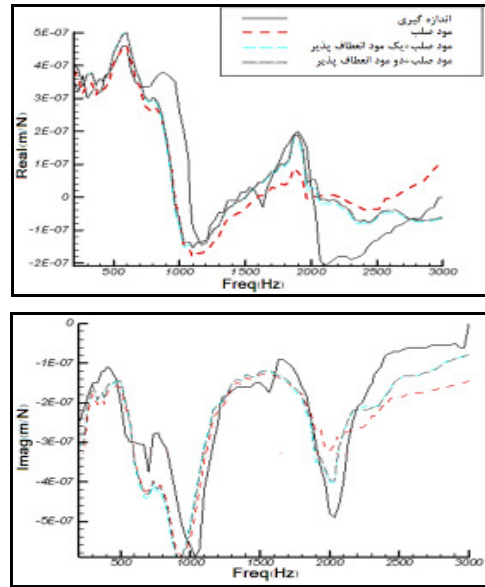
شکل (۱۳): اندازه‌گیری انجام شده روی سه نقطه از اسپیندل.



شکل (۱۴): نتیجه اندازه‌گیری مودال انجام شده روی سه نقطه از اسپیندل.

#### ۸- نتیجه‌گیری

همان‌طور که ذکر شد پاسخ فرکانسی انتهای هولدر توسط سه روش به دست آمد. در شکل ۱۵ نتایج اندازه‌گیری و روش کوپلینگ پیوسته ارائه شده با هم مقایسه شده‌اند. خواص سفتی لایه‌ای بین اسپیندل و هولدر با دو روش نمازی [۲۰] و روش ارائه شده در این مقاله به دست آمده و با هم مقایسه شده‌اند. در واقع تفاوت دو گراف پاسخ فرکانسی تئوری در شکل ۱۵ مربوط به روش به دست آوردن خواص سفتی لایه‌ای بین اسپیندل و هولدر است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، تطابق قابل توجهی بین روش تئوری و اندازه‌گیری دینامیکی وجود دارد. جهت مقایسه تفاوت روش کوپلینگ چند نقطه‌ای با روش



شکل (۱۲): نمودار رسییتانس در نقطه ۴.

جدول (۴): مقادیر  $K_{xf}$  حاصل از بهینه‌سازی ANSYS و

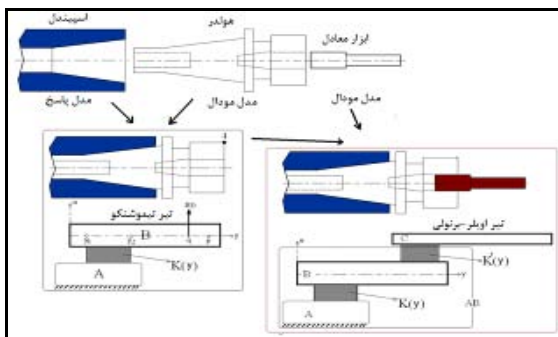
نقطه مورد نظر	مقادیر به دست آمده از Ansys	مقادیر به دست آمده از بهینه‌سازی
۱	$4/521 \times 10^9$	$6/382 \times 10^9$
۲	$3/046 \times 10^9$	$5/057 \times 10^9$
۳	$1/422 \times 10^9$	$3/732 \times 10^9$

#### ۶- تجهیزات مورد استفاده برای آزمون‌ها

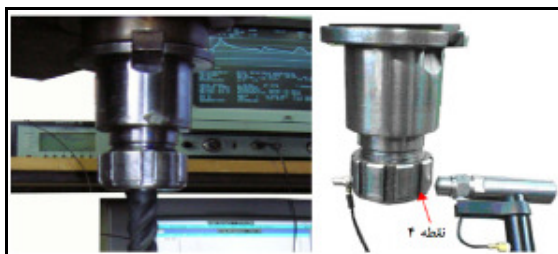
تحریک سیستم با استفاده از چکش B&K مدل (۸۲۰۲) با محدوده فرکانسی ۷۰۰ Hz، ظرفیت ۵۰۰-۵۰۰۰ N و ضریب حساسیت ۴ pc/N انجام گرفته و شتاب سنج تک محوره B&K مدل (۴۳۹۳) با ضریب حساسیت (۲- ۰/۳۱۶ pc/ms) و محدوده فرکانسی ۱۲۰۰۰/۲-۰/۲ Hz و وزن ۲/۴ گرم برای اندازه‌گیری شتاب آنالیز سیگنال دو کاناله مدل (۲۰۳۲) متعلق به همین شرکت به حوزه فرکانس منتقل می‌شود [۲۲ و ۲۳].

#### ۷- نتایج اندازه‌گیری و مقایسه آنها با نتایج حاصل از مدل

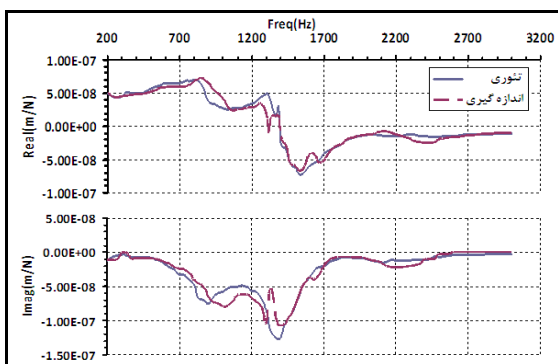
همان‌طور که در شکل ۱۳ نشان داده شد، اندازه‌گیری مودال در سه نقطه از اسپیندل انجام گرفته است. با توجه به هندسه اسپیندل، امکان ضربه چکش فقط در انتهای اسپیندل فراهم



شکل (۱۶): کوپلینگ مجموعه اسپیندل- هولدر- ابزار در ماشین فرز.



شکل (۱۷): اندازه‌گیری مودال در انتهای هولدر نقطه ۴.



شکل (۱۸): پاسخ دینامیکی انتهای ابزار با استفاده از روش کوپل پیوسته.

#### ۹- مراجع

- Schmitz, T. and Ziegert, J. "Examination of Surface Location Error Due to Phasing of Cutter Vibrations", *Precis Eng*; Vol. 23, No. 1, pp. 51-62, 1999.
- Montgomery, D. and Altintas, Y. "Mechanism of Cutting Force and Surface Generation in Dynamic Milling", *J. Eng Ind, Trans ASME*, Vol. 113, No. 2, pp. 160-168, 1991.
- Tobias, S. and Fishwick, W. "The Chatter of Lathe Tools under Orthogonal Cutting Conditions", *Trans ASME*, Vol. 80, No. 2, pp. 1079-1085, 1958.
- Merritt, H. "Theory of Self-Excited Machine-Tool Chatter", *Contribution to Machine Tool Chatter Research-1. J. Eng Ind, Trans ASME*; Vol. 87, No. 3, pp. 447-454, 1965.

کوپلینگ پیوسته ارائه شده شکل‌های ۱۲ و ۱۵ باید مورد توجه قرار گیرد. همان‌طور که در شکل ۱۲ مشاهده می‌شود، با انتخاب ۲ مود ارتعاشی همراه با مود صلب در روش کوپل چند نقطه‌ای نتایج همگرا شده و خطا در حدود ۱۹/۲۵٪ است که این مقدار خطا در روش ارائه شده در حدود ۱۰٪ می‌باشد. در نتیجه تطابق در روش کوپل پیوسته نسبت به روش کوپل چند نقطه‌ای ارائه شده در مراجع [۹-۱۲] بیشتر است. از طرف دیگر، روش ارائه شده توسط اجزای محدود جهت به دست آوردن خواص دینامیکی لایه تماس نیز مورد ارزیابی قرار گرفته است. همان‌طور که شکل ۱۵ ملاحظه می‌شود، تطابق در روش ارائه شده نسبت به روش نمازی [۲۰] به خصوص در فرکانس‌های بالا بیشتر است. با توجه به این شکل، روش جدید ارائه شده با عنوان روش تعیین خواص دینامیکی تماس بین لایه‌ها و کوپل پیوسته دینامیکی بین آنها با عنوان روشی قابل اطمینان معرفی می‌شود.

با استفاده از روش ارائه شده برای تعیین خواص تماسی بین اسپیندل و هولدر و همچنین بین ابزار با هولدر، کوپل پیوسته سه جزء (شکل ۱۶) انجام شده و نتایج پاسخ فرکانسی در انتهای ابزار (شکل ۱۷) به دو روش تئوری و تجربی در شکل ۱۸ با هم مقایسه شده‌اند. ملاحظه می‌شود که دقت روش ارائه شده به اندازه‌ای است که می‌توان در تعیین بهترین شرایط ماشین کاری با استفاده از دیاگرام‌های پایداری مورد استفاده قرار گیرند.



شکل (۱۵): مقایسه پاسخ دینامیکی حاصل از اندازه‌گیری مودال در نقطه ۴ (نقطه انتهای هولدر) و مدل جدید ارائه شده برای کوپلینگ هولدر به اسپیندل.

14. Schmitz, T.L., Powell, K., Won, D., Duncan, G.S., Sawyer, W.G., and Ziegert, J.C. "Shrink Fit Tool Holder Connection Stiffness/Damping Modeling for Frequency Response Prediction in Milling", *Int. J. of Machine Tools & Manufacture*, Vol. 47, No. 9, pp. 1368–1380, 2007.
15. Park, S.S., Altintas, Y., and Movahhedy, M. "Receptance Coupling for End Mills", *Int. J. of Machine Tools and Manufacture*, Vol. 43, No. 9, pp. 889–896, 2003.
16. Yoshimura, M. "Computer Aided Design Improvement of Machine Tool Structure Incorporating Joint Dynamic Data", *Ann. CIRP*, Vol. 28, No. 1, pp. 241–246, 1979.
17. Wang, J.H. and Liou, C.M. "Experimental Substructure Synthesis with Special Consideration of Joints Effects", *Int. J. Analyt. Expl Modal Analysis*, Vol. 5, No. 1, pp. 13–24, 1985.
18. Wantabe, K. and Sato, H. "Development of Nonlinear Building Block Approach", *J. Vibr, Acoust, Stress and Reliability in Des*, Vol. 110, No. 1, pp. 36–41, 1988.
19. Dowell, E.H. "Component Mode Analysis of Nonlinear and Nonconservative Systems", *J. Appl. Mechanics*, Vol. 47, No. 6, pp. 172–176, 1980.
20. Zamanian, M., Mashhadi M.M., and Hosseini, S.A. "Numerical Analysis of Natural Frequencies of Rotating Timoshenko Blads, Using Finite Element Method", Vol. 2, No. 1, pp. 31–43, 2006. (In Persian).
21. Namazia, M., Altintasa, Y., Abeb, T., and Rajapaksea, N. "Modeling and Identification of Tool Holder–Spindle Interface Dynamics", *Int. J. of Machine Tools & Manufacture* Vol. 47, No. 9, pp. 1333–1341, 2007.
22. Ahmadi, K. and Ahmadian, H. "Modelling Machine Tool Dynamics Using a Distributed Parameter Tool Holder Joint Interface", *Int. J. of Machine Tools & Manufacture*, Vol. 47, No's. 12–13, pp. 1916–1928, 2007.
23. Ahmadian, H. and Nourmohammadi, M. "Tool Point Dynamics Prediction by a Three-Component Model Utilizing Distributed Joint Interfaces", *Int. J. of Machine Tools and Manufacture*, Article in Press. Vol. 34, No. 5, pp. 203–207, 2005.
5. Tarn, Y., Liao, C., and Li, H. "A Mechanistic Model for Prediction of the Dynamics of Cutting Forces in Helical End Milling", *Int. J. Model Simul*; Vol.14, No. 2, pp. 92–7, 1994.
6. Schmitz, T. and Duncan, G. "Receptance Coupling for Dynamics Prediction of Assemblies with Coincident Neutral Axes", *J. Sound Vibrat*; Vol. 289, No's. 4–5, pp.1045–1065, 2006.
7. Schmitz, T. and Duncan, G. "Three-Component Receptance Coupling Substructure Analysis for Tool Point Dynamics Prediction", *J. Manuf Sci Eng, Trans ASME*; Vol. 127, No. 4, pp. 781–790, 2005.
8. Schmitz, T., Davies, M., Medicus, K., and Snyder, J. "Improving High-Speed Machining Material Removal Rates by Rapid Dynamic Analysis", *CIRP Ann—Manuf Tech.*, Vol. 50, No. 1, pp. 263–268, 2001.
9. Schmitz, T., Davies, M. and Kennedy, M. "Tool Point Frequency Response Prediction for High-Speed Machining by RCSA", *J. Manuf Sci Eng, Trans ASME*; Vol. 123, No. 23, pp. 700–707, 2001.
10. Schmitz, T.L. and Duncan, G.S. "Receptance Coupling for Dynamic Prediction of Assemblies with Coincident Neutral Axes", *J. of Sound and Vibration*, Vol. 289, No. 52, pp. 1045–1065, 2006.
11. Schmitz, T.L., Powell, K., Won, D., Duncan, G.S., Sawyer, W.G., and Ziegert, J.C. "Shrink Fit Tool Holder Connection Stiffness/Damping Modeling for Frequency Response Prediction in Milling Part 1: Receptance Model", *Proc. of the Second CIRP-HPC, Vancouver, Canada*, 2006.
12. Schmitz, T.L., Powell, K., Won, D., Duncan, G.S., Sawyer, W.G., and Ziegert, J.C. "Shrink Fit Tool Holder Connection Stiffness/Damping Modeling for Frequency Response Prediction in Milling, Part 2: Finite Element Model", *Proc. of the Second CIRP-HPC, Vancouver, Canada*, 2006.
13. Smith, S., Winfough, W.R., and Halley, J. "The Effect of Drawbar Force Onmetal Removal Rate in Milling", *Annals of CIRP* 48/1, Vol. 45, No. 23, pp. 293–296, 1998.