

تحلیل بدون المان مواد مرکب هدفمند

حاوی ترک تحت بارگذاری حرارتی

محمدباقر نظری^۱ و محمود شریعتی^۲ محمدرضا اسلامی^۳ بهروز حسنی^۴
 دانشکده مهندسی مکانیک دانشکده مهندسی مکانیک دانشکده مهندسی مکانیک
 دانشگاه صنعتی شاهرود دانشگاه صنعتی امیرکبیر دانشگاه صنعتی شاهرود
 (تاریخ دریافت: ۸۹/۳/۵؛ تاریخ پذیرش: ۹۲/۲/۳۰)

چکیده

در این مقاله، روش بدون المان گلرکین برای تحلیل شکست مواد مرکب هدفمند که تحت بارگذاری حرارتی قرار دارد به کار گرفته شده است. همچنین ضریب شدت تنش مود I با استفاده از روش انتگرال J و همبستگی تغییر مکان‌ها محاسبه شده و تغییر خصوصیات فیزیکی مواد با کاربرد توابع پیوسته و یا مدل میکرومکانیک بیان شده است. در تحلیل شوک حرارتی، روش نیمه تحلیلی تجزیه مودی برای به دست آوردن توزیع دمایی گذرا به کار رفته است. نتایج نشان می‌دهد که در زمان‌های ابتدایی اعمال شوک، مقدار ضریب شدت تنش به طور قابل ملاحظه‌ای افزایش یافته و می‌تواند نقش مهمی در تحلیل گسیختگی این مواد ایفا نماید.

واژه‌های کلیدی: مواد مرکب هدفمند، روش بدون المان گلرکین، انتگرال J، روش همبستگی تغییر مکان‌ها، تنش حرارتی

Meshless Analysis of Cracked Functionally Graded Plates under Thermal Loading

M.B. Nazari and M. Shariati

Mech. Eng. Dept.
Shahrood Univ. of Tech.

M.R. Eslami

Mech. Eng. Dept.
Amir Kabir Univ. of Tech.

B. Hassani

Mech. Eng. Dept.
shahrood Univ. of Tech.

(Received: 26 May, 2010; Accepted: 20 May, 2013)

ABSTRACT

The element-free Galerkin method which is enriched intrinsically is applied for fracture analysis of functionally graded materials under mode I steady-state and transient thermal loading. The stress intensity factors are evaluated by means of both equivalent domain integral and displacement correlation technique. Continuum functions and the micromechanical model are used to describe the distribution of material properties. For thermal shock analysis, the modal decomposition method which is a semi-discretization approach is implemented to obtain the transient temperature field. The accuracy of numerical results is verified using the available reference solutions. Also, few parametric analyses are performed to study the effect of material gradation on the stress intensity factors. The results imply that the magnitude of the stress intensity factor reaches to its peak at a short while after the thermal shock which indicates its significant role in the fracture failure.

Keywords: Functionally Graded Materials, Element-Free Galerkin Method, Equivalent Domain Integral, Displacement Correlation Technique, Thermal Stresses

۱- استادیار (نویسنده پاسخگو): mbnazari@shahroodut.ac.ir

۲- استاد

۳- استاد

۴- دانشیار

۱- مقدمه

شده‌اند [۱۰ و ۱۱]. ییلدیریم^۷ [۱۲] و دگ^۸ [۱۳] انتگرال ناحیه‌ای معادلی برای محاسبه ضریب شدت تنش مود I تحت بارگذاری حرارتی در مواد مرکب تابعی ایزوتروپیک و ارتوتروپیک ارائه کرده‌اند. دگ و ییلدیریم نیز انتگرال J_I را برای محاسبه ضرایب شدت تنش حرارتی در مواد مرکب تابعی به کار برده‌اند [۱۴]. مطالعات عددی مذکور با کاربرد شبکه‌های ریز از المان‌های معمولی انجام شده است. کی‌سی^۹ و کیم^{۱۰} از انتگرال برهم کنش برای محاسبه ضرایب شدت تنش تحت بار حرارتی پایا استفاده نمودند [۱۵]. چن^{۱۱} با کاربرد انتگرال برهم کنش و روش بدون المان گلرکین ضریب شدت تنش برای یک ترک فصل مشترک بین پوشش مواد مرکب تابعی ارتوتروپیک و هسته ایزوتروپیک را محاسبه نمود [۱۶]. این نتایج با کاربرد توابع پایه چندجمله‌ای مرتبه اول و گره‌بندی متراکم به دست آمد. علاوه بر این، چن مستقل نبودن کامل مقادیر انتگرال برهم کنش و قابل اعتماد نبودن این نتایج برای نواحی انتگرال‌گیری کوچک را در این شرایط مورد بحث قرار داد.

روش بدون المان گلرکین روشی مناسب و قوام‌دار برای تحلیل مسائل مکانیک شکست است. این روش برای تحلیل شکست مواد مرکب تابعی تحت بار مکانیکی [۱۷] و تنش‌های حرارتی پایا [۱۶] مورد استفاده قرار گرفته است. در این مقاله، روش بدون المان گلرکین غنی شده برای بررسی شکست حرارتی مواد مرکب تابعی به کار گرفته شده است. بار حرارتی گذرا به صورت شوک حرارتی اعمال می‌شود. علاوه بر این، تحلیل پارامتری برای بررسی اثر تغییرات خصوصیات حرارتی و مکانیکی ماده روی ضریب شدت تنش انجام می‌شود.

بخش‌های مختلف مقاله به صورت زیر است: در بخش ۲ معادلات حاکم ترموالاستیک مورد بررسی قرار گرفته است. بخش ۳ راجع به معادلات گسسته در روش بدون المان گلرکین است. بخش‌های ۴ و ۵ شامل توضیحاتی در مورد انتگرال ناحیه‌ای معادل و روش همبستگی تغییر مکان‌ها برای محاسبه ضریب شدت تنش در مواد مرکب تابعی می‌باشد. در بخش ۶ روش تجزیه مودی برای محاسبه توزیع دمای گذرا آمده است. بخش ۷ شامل نتایج عددی، تحلیل‌های پارامتری و جنبه‌های قابل ذکر آنها می‌باشد. در بخش ۸ نیز نتیجه‌گیری ذکر شده است.

بسیاری از قطعات ماشین‌ها و اجزای سازه‌ها مثل بدنه هواپیماهای فوق سریع، پره‌های توربین‌های گازی، لوله‌ها و مخازن تحت فشار راکتورهای اتمی در معرض دمای بالا و یا تغییرات شدید دما قرار دارند. مطالعات عددی نشان می‌دهد که طی پرواز یک هواپیمای مافوق صوت با سرعت ۸ ماخ در ارتفاع ۲۶۸۰۰ متر، دما روی سطح خارجی آن بین ۱۰۳۳ K در سطح فوقانی و ۲۰۶۰ K در نوک دماغه متغیر است [۱]. مواردی از این قبیل، تعدادی از محققان را برای توسعه مواد و پوشش‌های ضدحرارت ترغیب نموده است.

مواد مرکب تابعی^۱ نوع جدیدی از مواد مرکب پیشرفته هستند که برای کار در محیط‌های با دما بالا معرفی شده‌اند. تغییر تدریجی ترکیب، ریزساختار و یا ساختار کریستالی در FGMS منجر به تغییر پیوسته خصوصیات مکانیکی و حرارتی می‌شود. در سال‌های اخیر، مواد مرکب تابعی کاربردهای گسترده‌ای یافته‌اند که از جمله می‌توان به سلول‌های پیل سوختی [۲]، ابزارهای ترموالکتریک و پیزوالکتریک [۳ و ۴]، مبدل‌های ترمویونیک [۵] و ایمپلن‌های دندان [۶] اشاره نمود. طبق تحقیقات آزمایشگاهی کاواساکی^۲ و واتانابی^۳، اگر سطح سرامیکی مواد مرکب تابعی سرامیک-فلز تحت سرمایه‌گذاری ناگهانی قرار گیرد، ترک‌های لبه‌ای در آن ایجاد می‌شود [۷]. بنابراین، مطالعه ترک‌های سطحی در مواد مرکب تابعی تحت بارگذاری حرارتی و به خصوص شوک حرارتی در تحلیل گسیختگی این مواد مهم است.

چین^۴ و نودا^۵ شکل کلی میدان‌های ترموالاستیک حوزه نوک ترک در مواد مرکب تابعی را به دست آوردند [۸]. ایشان فرض نمودند خصوصیات ماده به صورت توابعی پیوسته و قطعه‌ای مشتق‌پذیر از متغیرهای مکانی تغییر نماید. طبق این تحقیق، تغییر خصوصیات ماده روی مرتبه تکینگی میدان‌های نوک ترک اثری ندارد. کیشیموتو^۶ و همکارانش نشان دادند که شکل اصلی انتگرال J با وجود بارگذاری حرارتی، مستقل از مسیر نیست و آنها انتگرال مستقل از مسیری شامل اثر حرارتی ارائه نمودند [۹]. کاربرد روش‌های تحلیلی مثل تئوری اغتشاشی و معادلات انتگرالی تکین برای بررسی شکست حرارتی مواد مرکب تابعی به حالت‌های خاص محدود

7- Yildirim
8- Dag
9- KC
10- Kim
11- Chen

1- (Fgms) Functionally Graded Materials
2- Kawasaki
3- Watanabe
4- Jin
5- Noda
6- Kishimoto

۲- معادلات حاکم

جسمی به حجم Ω و محصور به منحنی Γ که همزمان تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی قرار دارد در نظر گرفته می‌شود. شرایط مرزی حرارتی به صورت دمای معلوم \bar{T} روی مرز Γ_T ، شار حرارتی معلوم \bar{q} در جهت n روی مرز Γ_q و دمای محیط معلوم T_∞ روی مرز Γ_c است. شرایط مرزی مکانیکی به صورت نیروی معلوم \bar{T} روی مرز Γ_t و تغییر مکان معلوم \bar{u} روی مرز Γ_u بیان می‌شود. معادلات حاکم ترموالاستیسیته خطی و شبه‌استاتیکی در ناحیه Ω به صورت زیر است:

$$\nabla \cdot \sigma + b = 0, \quad (1)$$

$$-\nabla q + Q = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (2)$$

شار حرارتی نیز بر اساس قانون فوریه محاسبه می‌شود:

$$q = -k \nabla T. \quad (3)$$

همچنین رابطه ساختاری به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma = \tilde{C} : (\varepsilon - \varepsilon^{th}), \quad (4)$$

که در آن:

$$\varepsilon = \nabla_s u, \quad (5)$$

$$\varepsilon^{th} = \alpha(T - T_0)I, \quad (6)$$

در این معادلات، \tilde{C} تانسور مرتبه چهارم تانسور الاستیک، k ضریب هدایت ایزوتروپیک، α ضریب انبساط حرارتی، ρ چگالی و c ظرفیت حرارتی ویژه است. متغیرهای میدان نیز شامل u بردار جابه‌جایی، \mathcal{E} تانسور کرنش کل، ε^{th} تانسور کرنش حرارتی است. همچنین Q منبع حرارتی و b نیروی کالبدی است. شرایط مرزی به صورت زیر است:

$$T = \bar{T} \quad \text{on } \Gamma_T, \quad (7)$$

$$k \nabla T \cdot n = \bar{q} \quad \text{on } \Gamma_q, \quad (8)$$

$$k \nabla T \cdot n + h(T - T_\infty) = \bar{q} \quad \text{on } \Gamma_c. \quad (9)$$

$$u = \bar{u} \quad \text{on } \Gamma_u, \quad (10)$$

$$\sigma \cdot n = \bar{t} \quad \text{on } \Gamma_t, \quad (11)$$

که در آنها، h ضریب همرفتی و n بردار عمودی رو به خارج روی مرز Γ است. به علاوه فرض می‌شود $\Gamma_{(i)}$ قسمتی از مرز Γ است که $\Gamma_i \cap \Gamma_u = \emptyset$ و $\Gamma_i \cup \Gamma_u = \Gamma$ است.

۳- روش بدون‌المان گلرکین در ترموالاستیسیته

در تحقیق حاضر، از روش بدون‌المان گلرکین برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی مسائل ترموالاستیسیته دوبعدی به کار می‌رود. در این روش برای ساخت مدل گسسته فقط به مجموعه‌ای از گره‌ها نیاز است. در روش بدون‌المان گلرکین، تقریب حداقل مربعات متحرک، منجر به پایداری تابع تقریب و کاربرد فرآیند گلرکین سبب به وجود آمدن سیستم دستگاه معادلات پایدار و خوش‌رفتار می‌شود.

۳-۱- مرور روش بدون‌المان گلرکین

در روش بدون‌المان گلرکین، تابع تقریب $u^h(x)$ در هر نقطه $x \in \Omega$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$u^h(x) = \Phi^T(x)U, \quad (12)$$

که در آن، U بردار پارامتری گره‌های و $\Phi^T(x) = [\varphi_1(x) \ \varphi_2(x) \ \dots \ \varphi_n(x)]$ تابع شکل حداقل مربعات متحرک است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Phi^T(x) = \gamma^T(x)B(x), \quad (13)$$

که در آن:

$$A(x)\gamma(x) = p(x), \quad (14)$$

$$A(x) = P^T W(x)P, \quad (15)$$

$$B(x) = P^T W(x). \quad (16)$$

و $W(x) = \text{diag} [w(x-x_i)]$ که $w(x-x_i)$ تابع وزنی گره i ام در نقطه x است. همچنین $P(x)$ بردار توابع پایه است که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P = \begin{bmatrix} p^T(x_1) \\ p^T(x_2) \\ \vdots \\ p^T(x_n) \end{bmatrix}, \quad (17)$$

که در آن، n تعداد گره‌هایی است که نقطه x در ناحیه تکیه‌گاهی آنها قرار دارد. برای گرهی با موقعیت x اندازه ناحیه تکیه‌گاهی d_s به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$d_s = \alpha_s d_c, \quad (18)$$

که در آن، α_s ضریب بدون بعد شعاع ناحیه تکیه‌گاهی و d_c فاصله متوسط گرهی در اطراف نقطه x است که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$d_c = \frac{\sqrt{A_s}}{\sqrt{n_{A_s}} - 1}, \quad (19)$$

$$(K + K^\gamma)U = F + F^\gamma, \quad (27)$$

که در آن، نقطه (۰) نشاتگر مشتق گیری نسبت به زمان است و:

$$C_{ij}^{th} = \int_{\Omega} \rho c \phi_i \phi_j d\Omega, \quad (28)$$

$$K_{ij}^{th} = \int_{\Omega} k B_i^{thT} B_j^{th} d\Omega + \int_{\Gamma_c} h \phi_i \phi_j d\Gamma, \quad (29)$$

$$K_{\gamma ij}^{th} = \gamma \int_{\Gamma_\theta} \phi_i \phi_j d\Gamma, \quad (30)$$

$$F_i^{th} = \int_{\Omega} Q \phi_i d\Omega + \int_{\Gamma_q} \bar{q} \phi_i d\Gamma + \int_{\Gamma_c} h \theta_\infty \phi_i d\Gamma, \quad (31)$$

$$F_{\gamma i}^{th} = \gamma \int_{\Gamma_T} \bar{\theta} \phi_i d\Gamma, \quad (32)$$

که در آن:

$$B_i^{th} = \begin{bmatrix} \partial \phi_i / \partial x_1 \\ \partial \phi_i / \partial x_2 \end{bmatrix}, \quad (33)$$

و همچنین:

$$K_{ij} = \int_{\Omega} D B_i^T B_j d\Omega, \quad (34)$$

$$K_{ij}^\gamma = \gamma \int_{\Gamma_u} \phi_i^T S \phi_j d\Gamma, \quad (35)$$

$$F_i = \int_{\Omega} b \phi_i^T d\Omega + \int_{\Gamma_f} \bar{t} \phi_i^T d\Gamma, \quad (36)$$

$$F_i^\gamma = \gamma \int_{\Gamma_u} S \bar{u} \phi_i d\Gamma, \quad (37)$$

که در آن:

$$S = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix}, \quad (38)$$

$$S_i = \begin{cases} 1 & \text{if } u_i \text{ given on } \Gamma_u \\ 0 & \text{if } u_i \text{ not given on } \Gamma_u \end{cases},$$

$$B_i = \begin{bmatrix} \partial \phi_i / \partial x_1 & 0 \\ 0 & \partial \phi_i / \partial x_2 \\ \partial \phi_i / \partial x_2 & \partial \phi_i / \partial x_1 \end{bmatrix}, \quad (39)$$

$$\phi_i = \begin{bmatrix} \phi_i & 0 \\ 0 & \phi_i \end{bmatrix}. \quad (40)$$

۳-۳- غنی سازی روش بدون المان گلرکین

غنی سازی یک روش مناسب برای رصد میدان های تکین در روش های المان محدود و بدون المان است. به طور کلی، فرآیند غنی سازی بر پایه اطلاعاتی است که از حل های تحلیلی به دست می آید. دو روش برای غنی سازی وجود دارد که عبارت است از غنی سازی توابع پایه و غنی سازی تابع تقریب [۱۹]. در مکانیک شکست، میدان های تکین حوزه نوک ترک، با غنی سازی ساده تر و دقیق تر مدل سازی می شود. در تحقیق حاضر، از روش غنی سازی توابع پایه استفاده می شود. در این

که در آن، A_s اندازه تخمینی ناحیه تکیه گاهی است. با توجه به رابطه (۱۳)، می توان مشتق های تابع شکل را به دست آورد:

$$\Phi_{,i}^T(x) = \gamma_{,i}^T(x) B(x) + \gamma^T(x) B_{,i}(x), \quad (20)$$

که در آن:

$$A(x) \gamma_{,i}(x) = p_{,i}(x) - A_{,i}(x) \gamma(x). \quad (21)$$

با استفاده از تجزیه LU ماتریس $A(x)$ و فرآیند جایگزینی، می توان ضرایب $\gamma(x)$ و $\gamma_{,i}(x)$ را در معادلات (۱۴ و ۱۵) محاسبه نمود.

۳-۲- گسسته سازی معادلات حاکم

روش بدون المان گلرکین بر مبنای فرم ضعیف رابطه تعادل، فرمول بندی می شود. در اینجا روش بدون المان گلرکین برای متغیرهای مکانی استفاده می شود:

$$T(x, t) = \theta(x) \hat{T}(t) = (\Phi^T \Theta) \hat{T}(t), \quad (22)$$

که در آن، Θ بردار دمای گرهی است. در ادامه، علامت (*) برای سادگی حذف می شود. فرض می شود توابع آزمون $\eta^e, \eta^{th} \in H^1$ روی مرزهای اصلی صفر باشند. با فرضیات فوق و استفاده از قضیه دیورژانس، معادلات به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho c \dot{T} \theta \eta^{th} d\Omega + \int_{\Omega} k T \nabla \theta \cdot \nabla \eta^{th} d\Omega - \\ & - \int_{\Omega} Q \eta^{th} d\Omega - \int_{\Gamma_q} \bar{q} \eta^{th} d\Gamma + \int_{\Gamma_\theta} h \theta \eta^{th} d\Gamma - \\ & - \int_{\Gamma_\theta} h \theta_\infty \eta^{th} d\Gamma - \delta W_{ess} = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

و در رابطه (۲۴):

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} D \nabla u \cdot \nabla \eta^e d\Omega - \int_{\Omega} b \eta^e d\Omega - \\ & - \int_{\Gamma_f} \bar{t} \eta^e d\Gamma - \delta W_{ess} = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

که در آن، عبارت δW_{ess} برای اعمال شرایط مرزی اساسی در نظر گرفته شده است. H^1 نشان دهنده فضای سوپولف مرتبه یک است. شرایط مرزی اساسی با روش پنالتی اعمال می شود [۱۸]. بنابراین:

$$W_{ess} = \gamma \int_{\Gamma_x} \|\chi - \bar{\chi}\|^2 d\Gamma, \quad (25)$$

که در آن، $\chi = \theta$ برای مسئله هدایت گرمایی و $\chi = u$ برای مسئله ترموالاستیسیته است. γ پارامتر پنالتی است که در اینجا $\gamma = 10^5 E$ فرض می شود. با جایگزینی تقریب تابع آزمون در فرم ضعیف معادلات، شکل نهایی معادلات گسسته به صورت زیر حاصل می شود:

$$C^{th} \dot{T} + (K^{th} + K_\gamma^{th}) T = F^{th} + F_\gamma^{th}, \quad (26)$$

که در آن، $D(x)$ ماتریس الاستیک و $F(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود که برای حالت کرنش صفحه‌ای:

$$D(x) = \frac{E(x)}{(1+\nu(x))(1-2\nu(x))} \begin{bmatrix} 1-\nu(x) & \nu(x) & 0 \\ \nu(x) & 1-\nu(x) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu(x)}{2} \end{bmatrix}, \quad (46)$$

$$F(x) = 1 + \nu(x). \quad (47)$$

و برای حالت تنش صفحه‌ای:

$$D(x) = \frac{E(x)}{1-\nu(x)^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu(x) & 0 \\ \nu(x) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu(x)}{2} \end{bmatrix}, \quad (48)$$

$$F(x) = 1. \quad (49)$$

در حالت سه‌بعدی تنش، تابع چگالی انرژی کرنشی مکانیکی W به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^m \quad (i, j=1, 2, 3), \quad (50)$$

که در آن، ε_{ij}^m مؤلفه‌های کرنش مکانیکی است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varepsilon_{ij}^m = \varepsilon_{ij} - \alpha \Delta T \delta_{ij}. \quad (51)$$

در حالت کرنش صفحه‌ای، تابع W به صورت زیر ساده می‌شود:

$$W = \mu(\varepsilon_{11}^2 + 2\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{22}^2) + \frac{\lambda}{2}(\varepsilon_{kk})^2 - \beta \Delta T \varepsilon_{kk} + \frac{3}{2} \beta \alpha (\Delta T)^2. \quad (52)$$

و برای حالت تنش صفحه‌ای:

$$W = \mu(\varepsilon_{11}^2 + 2\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2) + \frac{\lambda}{2}(\varepsilon_{kk})^2 - \beta \Delta T \varepsilon_{kk} + \frac{3}{2} \beta \alpha (\Delta T)^2, \quad (53)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\beta}{2\mu + \lambda} \Delta T - \frac{\lambda}{2\mu + \lambda} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}). \quad (54)$$

۲-۴- انتگرال ناحیه‌ای معادل

استفاده از انتگرال J یکی از روش‌های مرسوم محاسبه ضرایب شدت تنش است [۲۰]. انتگرال J به صورت یک انتگرال خطی تعریف می‌شود [۲۱]:

$$J = \int_{\Gamma_A} (W \delta_{1j} - \sigma_{ij} u_{i,1}) n_j d\Gamma_A, \quad (55)$$

که در آن، کانتور Γ_A منحنی بسته دلخواهی شامل نوک ترک می‌باشد و n_j مؤلفه زام بردار عمود و رو به خارج کانتور Γ_A

روش، در نزدیکی نوک ترک علاوه بر توابع پایه چندجمله‌ای، توابع مجانبی میدان جابه‌جایی نیز لحاظ می‌شود:

$$p^T(x) = \left\{ 1, x_1, x_2, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right\}, \quad (41)$$

که در آن، r و θ مختصات قطبی نسبت به نوک ترک می‌باشند. در مسائل شامل ترک، توابع غنی‌سازی پایه برای رصد تکینگی میدان تنش در نوک ترک به کار می‌روند. بنابراین، کاربرد آن برای تمام ناحیه حل لازم نیست. در این موارد، ناحیه حل به سه بخش تقسیم می‌شود: بخش غنی‌سازی در محدوده نوک ترک، استفاده از توابع پایه چندجمله‌ای در ناحیه دور از ترک و بخش میانی که توابع شکل حاصل از توابع پایه چندجمله‌ای و غنی‌سازی به صورت زیر با هم کوپل می‌شوند [۱۸]:

$$\Phi_I = R \Phi_I^{enr} + (1-R) \Phi_I^{lin}, \quad (42)$$

که در آن، R تابع شیب مناسبی است که روی مرز ناحیه غنی‌سازی برابر واحد و روی مرز ناحیه توابع پایه منظم، مقدار صفر را دارا می‌باشد.

۴- انتگرال ناحیه‌ای معادل برای شکست حرارتی

در این بخش رابطه ساختاری و تابع انرژی کرنشی در ترموالاستیسیته و انتگرال ناحیه‌ای معادل بیان می‌شود.

۴-۱- رابطه ساختاری و تابع انرژی کرنشی در ترموالاستیسیته

شکل کلی رابطه ساختاری ترموالاستیک برای یک تابع مرکب تابعی به صورت زیر است:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + (\lambda \varepsilon_{kk} - \beta \Delta T) \delta_{ij} \quad (i, j=1, 2, 3), \quad (43)$$

که در آن، ε_{ij} مؤلفه‌های تانسور کرنش کل، μ و λ ثابت‌های لامه، δ_{ij} تابع دلتای کرونکر و ΔT تغییر دما از دمای مرجع می‌باشد. ضریب β به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\beta = \frac{E}{1-2\nu} \alpha = (3\lambda + 2\mu) \alpha, \quad (44)$$

که در آن، E ضریب الاستیسیته، ν ضریب پواسون و α ضریب انبساط حرارتی است. در ادامه، رابطه ساختاری فوق برای حالت‌های تنش و کرنش صفحه‌ای ساده می‌شود. در حالت کرنش صفحه‌ای $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0$ و برای حالت تنش صفحه‌ای $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$ در این حالت‌ها، رابطه ساختاری به صورت کلی زیر قابل بیان است:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = D(x) \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} - F(x) \begin{Bmatrix} \alpha \Delta T \\ \alpha \Delta T \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (45)$$

اعتماد، معمولاً ضریب شدت تنش برای تعدادی از نقاط همبستگی محاسبه شده و سپس برای نوک ترک، مقدار ضریب شدت تنش برون‌یابی می‌شود. برای مواد مرکب تابعی، خصوصیات ماده در نوک ترک جایگزین می‌شود:

$$K_I = \sqrt{\frac{2\pi}{r_{cor}} \left(\frac{\mu}{\kappa+1} \right)_{tip}} COD(r_{cor}), \quad (61)$$

که در آن، $\kappa_{tip}=3-4\nu_{tip}$ برای حالت کرنش صفحه‌ای و $(1+\nu_{tip})(3-\nu_{tip})$ برای حالت تنش صفحه‌ای می‌باشد. r_{cor} فاصله نقطه همبستگی تا نوک ترک است و $COD(r_{cor})$ بازشدگی ترک در این نقطه را نشان می‌دهد. سادگی روابط این روش، امکان استفاده از آن را برای ارزیابی اولیه نتایج انتگرال J و در نظر گرفتن آن به عنوان فرض اولیه در محاسبه ضرایب شدت تنش مختلط در مواد ارتوتروپیک را فراهم می‌آورد [۲۲].

۶- هدایت گرمایی گذرا

میدان دمای گذرا از حل دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول (۲۶) به دست می‌آید. برای حل دستگاه معادلات مذکور، روش‌های مختلفی وجود دارد که در اینجا از تکنیک تجزیه مودها استفاده می‌شود. تکنیک تجزیه مودها رهیافتی تحلیلی برای حل دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل معمولی است. کاربرد این روش، خطایی را در محاسبه جواب‌ها تحمیل نمی‌کند [۲۳].

روند کلی این روش، تبدیل دستگاه معادلات کوپل شده به معادلات مستقل از هم است که با استفاده از بردارهای ویژه انجام می‌شود. حل کامل دستگاه معادلات را می‌توان به صورت ترکیبی از تمام بردارهای ویژه دستگاه به صورت $T(t) = [T_1 \ T_2 \ \dots \ T_N] \psi(t) = M \psi(t)$ بیان کرد. که در آن، ψ_i سهم هر مود در جواب کلی در لحظه t است و M ماتریس مربعی $N \times N$ است که بردارهای ویژه ستون‌های این ماتریس را تشکیل می‌دهند. با جایگزینی رابطه فوق در دستگاه معادلات (۲۶) و ضرب عبارت حاصل در M^T از چپ، یک مجموعه معادلات مستقل از هم به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$C^{th*} \dot{\psi} + K^{th*} \psi = M^T (F^{th} + F_y^{th}), \quad (62)$$

که در آن:

$$K^{th*} = M^T K^{th} M, \quad C^{th*} = M^T C^{th} M. \quad (63)$$

مجموعه معادلات فوق شامل N معادله مستقل است.

$$\dot{\psi}_i + s_i \psi_i = \frac{\Lambda_i}{C_{ii}^*} \quad (i=1, 2, \dots, N), \quad (64)$$

که در آن، $\Lambda = M^T (F^{th} + F_y^{th})$ است. در این معادلات، شرایط اولیه $\psi(0)$ با توجه به رابطه $T(0) = M \psi(0)$ محاسبه می‌شود.

است. برای سادگی و دقت محاسبات، بهتر است انتگرال خطی J به صورت یک انتگرال ناحیه‌ای معادل بیان شود. با تعریف تابع وزنی q و کاربرد قضیه دیورژانس، شکل ناحیه‌ای انتگرال J به صورت زیر بیان می‌شود:

$$J = \int_A (\sigma_{ij,j} u_{i,1} + \sigma_{ij} u_{i,j,1} - W_{,1}) q dA + \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1} - W \delta_{1j}) q_{,j} dA, \quad (56)$$

که در آن، A سطح محصور به منحنی ΓA می‌باشد. انتگرال نخست شامل $W_{,1}$ مشتق تابع W نسبت به مختصه x_1 است. در مواد مرکب تابعی، توزیع دما و خصوصیات ماده می‌توانند تابع مختصه x_1 و x_2 باشند. با توجه به معادلات (۵۲) و (۵۳)، $W_{,1}$ را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = \sigma_{ij} u_{i,1,j} + (W_{,1})_{expl}, \quad (57)$$

که در آن، $(W_{,1})_{expl}$ مشتق صریح W نسبت به مختصه x_1 به صورت زیر است:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x_1} \right)_{expl} = \frac{\partial W}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial x_1} + \frac{\partial W}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} + \frac{\partial W}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} + \frac{\partial W}{\partial (\Delta T)} \frac{\partial (\Delta T)}{\partial x_1}, \quad (58)$$

که در این رابطه، بخش اول عبارت‌های سمت راست بیانگر مشتق W نسبت به خصوصیات ماده و تغییر دما است. با جایگزینی رابطه (۵۷) در رابطه (۵۶)، شکل نهایی انتگرال J به صورت زیر به دست می‌آید [۱۲]:

$$J = \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1} - W \delta_{1j}) q_{,j} dA + \int_A (W_{,1})_{expl} q dA. \quad (59)$$

در مکانیک شکست خطی، انتگرال J با نرخ رهاش انرژی برابر است. بنابراین می‌توان رابطه انتگرال J را با ضریب شدت تنش مود I به صورت زیر نمایش داد:

$$J = K_I^2 / E_{tip}^*, \quad (60)$$

که در آن، $E_{tip}^* = E_{tip}$ برای حالت تنش صفحه‌ای و $E_{tip}^* = E_{tip} / (1 - \nu_{tip}^2)$ برای حالت کرنش صفحه‌ای است. ν_{tip} و E_{tip} ضرایب الاستیسیته و پواسون در نوک ترک می‌باشند.

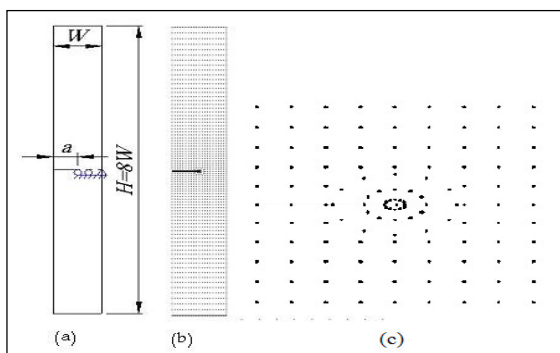
۵- روش همبستگی تغییر مکان‌ها

روش همبستگی تغییر مکان‌ها یکی از ساده‌ترین روش‌ها برای محاسبه ضرایب شدت تنش است. در فرم مرسوم آن، محاسبه عددی مؤلفه‌های جابه‌جایی نقطه‌ای در نزدیکی نوک ترک (به نام نقطه همبستگی) و جایگزینی آن در عبارت تحلیلی میدان جابه‌جایی حوزه نوک ترک منجر به محاسبه ضریب شدت تنش می‌شود. برای رسیدن به نتایج دقیق‌تر و قابل

برای دسته اول خصوصیات ماده، ضرایب غیرهمگنی به صورت اختیاری انتخاب می‌شود تا بتوان به شرایطی دست یافت که حل‌های مرجع در آن به دست آمده‌اند و از طرفی، تغییرات گسترده‌تر مواد اثر آنها را روی ضریب شدت تنش بهتر مشخص می‌کند. در این حالت، از مقادیر زیر استفاده شده است.

$$E(0)=k(0)=\alpha(0)=\rho c(0)=1.0. \quad v(0)=0.3 \quad (72)$$

در حالت دوم، ترکیب سرامیک- فلز $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ با خصوصیات طبق جدول ۱ در نظر گرفته می‌شود. همچنین شرایط مرزی دمایی مختلفی در حالت پایا در نظر گرفته می‌شود. در حالت گذرا نیز از شرایط دما معلوم در دو سطح چپ و راست استفاده می‌شود.



شکل (۱): (a) هندسه صفحه تحت بارگذاری، (b) گره‌بندی کل ناحیه و (c) گره‌بندی نوک ترک.

تغییر دمای یکنواخت: در این حالت صفحه از دمای T_0 به طور یکنواخت تا دمای T سرد می‌شود. در جدول ۲ مقادیر ضرایب شدت تنش به دست آمده با انتگرال J و DCT با نتایج منتشر شده توسط اردگن و وو [۱۰]، کی‌سی و کیم [۱۵] و بیلدریم [۱۲] مقایسه شده است. در این حالت، صفحه از دمای T_0 به طور یکنواخت تا دمای T سرد می‌شود. تطابق قابل قبولی بین مقادیر محاسبه شده و نتایج مذکور وجود دارد. البته این نکته قابل توجه است که مدل مورد استفاده در تحلیل شامل ۱۷۳۵ گره است، در حالی که حل‌های عددی منتشر شده، با تعداد گره‌های بیشتری به این نتایج رسیده‌اند. به طوری که کی‌سی و کیم [۱۵] با استفاده از ۱۹۶۶ المان و ۲۹۳۷ گره کمترین تعداد گره را در میان آنها به کار برده‌اند [۱۵].

شکل‌های ۲ و ۳ اثر دمای سرمایش و طول ترک را روی مقادیر ضرایب شدت تنش نشان می‌دهند. نتایج برای تحلیل‌های کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای به دست آمده‌اند.

با توجه به پیچیدگی طرف راست این معادلات می‌توان آنها را به صورت تحلیلی و یا عددی حل کرد.

۷- نتایج عددی

در مثال‌های ذکر شده، صفحه‌ای از مواد مرکب تابعی همگن حاوی یک ترک لبه‌ای در نظر گرفته شده است. ضخامت صفحه برای تحلیل کرنش صفحه‌ای بسیار بزرگ و برای تحلیل تنش صفحه‌ای به قدر کافی نازک فرض می‌شود. همچنین ترک موازی با جهت گرادیان خصوصیات ماده در نظر گرفته می‌شود. در ابتدا صفحه در دمای ساخت و بدون تنش T_0 قرار دارد که شرایط مرزی دمایی به سطوح $x_1=0$ و $x_1=W$ اعمال می‌شود. سطوح دیگر از جمله سطوح ترک عایق فرض می‌شوند. فرضیات دمایی فوق باعث ایجاد جریان دما در جهت x_1 و به صورت یک بعدی می‌شود. در تمام حالت‌ها، ضریب شدت تنش محاسبه شده با تقسیم به عبارت زیر، نرمالیزه می‌شود:

$$K_I = E(0)\alpha(0)T_0\sqrt{\pi a} / (1-v(0)). \quad (65)$$

۷-۱- صفحه با ترک لبه‌ای و خصوصیات نمایی

یک صفحه از مواد مرکب تابعی شامل ترک لبه‌ای به طول a مطابق شکل ۱ در نظر گرفته می‌شود. در شکل ۱- b گره‌بندی کامل ناحیه حل نمایش داده شده که شامل ۱۶۹۵ گره منظم و ۴۰ گره ستاره‌ای می‌شود. گره‌بندی ستاره‌ای نوک ترک در شکل ۱- c آمده است. در این مثال، از دو دسته خصوصیات ماده استفاده می‌شود که در هر دو، تغییرات به صورت نمایی است. برای مثال، مدول الاستیسیته به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$E(x_1) = E(0)\exp(P_E x_1). \quad (66)$$

ضرایب غیرهمگنی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P_E = \frac{1}{W} \ln \left(\frac{E(W)}{E(0)} \right), \quad (67)$$

$$P_v = \frac{1}{W} \ln \left(\frac{v(W)}{v(0)} \right), \quad (68)$$

$$P_\alpha = \frac{1}{W} \ln \left(\frac{\alpha(W)}{\alpha(0)} \right), \quad (69)$$

$$P_k = \frac{1}{W} \ln \left(\frac{k(W)}{k(0)} \right), \quad (70)$$

$$P_{\rho c} = \frac{1}{W} \ln \left(\frac{\rho c(W)}{\rho c(0)} \right). \quad (71)$$

$$\sigma_{x_2 x_2}^{th} = E(x_1)(C_1 x_1 + C_2 - \alpha(x_1)\Delta T(x_1, t)), \quad (74)$$

که در آنها، ثابت‌های C_1 و C_2 ضرایب مجهولی هستند که از تعادل نیرو و گشتاور در جهت x_1 به دست می‌آیند. مطابق این نتایج، توزیع تنش حرارتی برای حالت کرنش صفحه‌ای برابر مقدار متناظر برای حالت تنش صفحه‌ای ضرب در فاکتور $1/(1-\nu)$ می‌باشد. با توجه به اینکه فاکتور مذکور بزرگ‌تر از یک است بنابراین توزیع تنش حرارتی و در نتیجه ضریب شدت تنش برای حالت کرنش صفحه‌ای بزرگ‌تر از حالت تنش صفحه‌ای است که در شکل‌های ۲ و ۳ نیز دیده می‌شود.

مطابق این نتایج، با نزدیک شدن طول ترک به عرض صفحه، مقدار ضریب شدت تنش به سمت صفر میل می‌کند. این مسئله به دلیل اینکه توزیع تنش حرارتی در صفحه به طور استاتیکی در تعادل است (نیروی مکانیکی به صفحه وارد نمی‌شود) قابل انتظار می‌باشد. علاوه بر این، مقادیر ضریب شدت تنش برای حالت کرنش صفحه‌ای از مقادیر متناظر برای حالت تنش صفحه‌ای بزرگ‌تر است. توزیع تنش حرارتی گذرا برای یک باریکه همگن نامحدود به طور تحلیلی به صورت زیر به دست می‌آید [۲۴]:

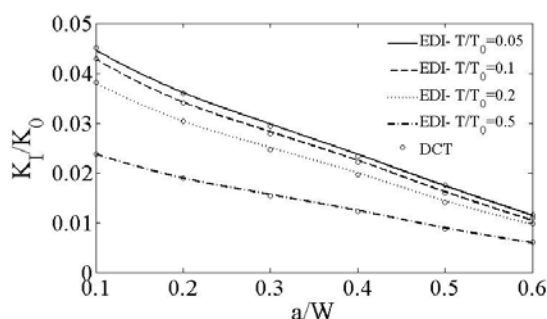
$$\sigma_{x_2 x_2}^{th} = \frac{E(x_1)}{1-\nu^2} (C_1 x_1 + C_2 - \alpha(x_1)(1+\nu)\Delta T(x_1, t)), \quad (75)$$

جدول (۱): خصوصیات فیزیکی ZrO_2 و Ti-6Al-4V.

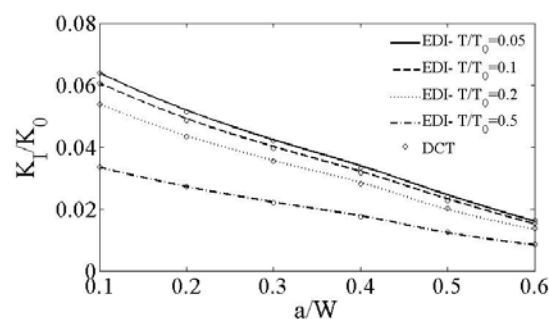
ماده	مدول الاستیسیته (GPa)	ضریب انبساط حرارتی ($10^{-6}/K$)	ضریب هدایت گرمایی (W/(mK))	چگالی (kg/m^3)	گرمای ویژه ($J/(kgK)$)
ZrO ₂	۱۵۱	۰/۳۳	۱۰	۵۳۳۱	۴۵۶/۷
Ti-6Al-4V	۱۱۶/۷	۰/۳۳	۹/۵	۴۴۲۰	۵۳۷

جدول (۲): ضرایب شدت تنش برای سرمایش یکنواخت $WP_E = \ln(5)$ ، $WP_a = \ln(2)$ و P_k اختیاری.

بارگذاری	نوع تحلیل	ضریب شدت تنش نرمالیزه		
		مقادیر محاسبه شده	اردگن و وو [۱۰]	کی سی و کیم [۱۵]
$T_1 = 0.5T_0$ $T_2 = 0.5T_0$	کرنش صفحه‌ای	EDI	۰/۰۱۲۴	۰/۰۱۲۸
	تنش صفحه‌ای	DCT	۰/۰۰۸۸	۰/۰۰۹۰
$T_1 = 0.5T_0$ $T_2 = 0.5T_0$	کرنش صفحه‌ای	EDI	۰/۰۲۴۰	۰/۰۲۴۴
		DCT	۰/۰۲۴۵	-

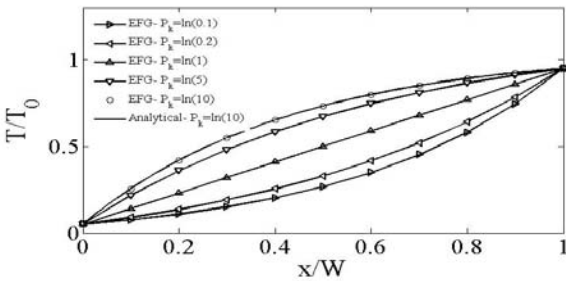


شکل (۳): ضرایب شدت تنش برحسب طول ترک و دمای سرمایش. حالت تنش صفحه‌ای، $WP_E = \ln(10)$ و $WP_a = \ln(2)$.



شکل (۲): ضرایب شدت تنش برحسب طول ترک و دمای سرمایش. حالت کرنش صفحه‌ای، $WP_E = \ln(10)$ و $WP_a = \ln(2)$.

در شکل ۶ میدان دمای پایا برای مقادیر مختلف ضریب غیرهمگنی ضریب هدایت گرمایی رسم شده‌اند. مطابق انتظار، توزیع دما برای $P_k=\ln(1)$ که متناظر با مواد همگن است خطی است. برای مقادیر دیگر، توزیع دما در صفحه به دمای سطحی نزدیک‌تر است که دارای ضریب هدایت گرمایی بزرگ‌تری می‌باشد. علاوه براین، توزیع دمای محاسبه شده با روش بدون‌المان گلرکین با حل تحلیلی آن برای $P_k=\ln(10)$ مقایسه شده است.



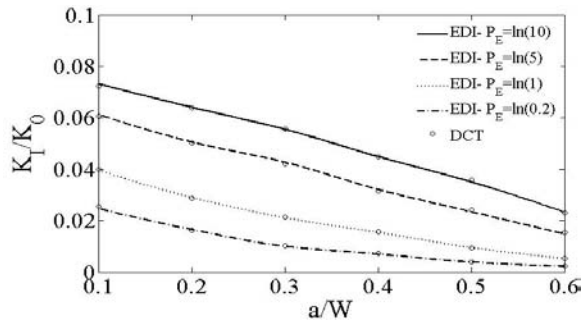
شکل (۶): توزیع دمای پایا برحسب P_k .

در مرحله بعد، نتایج حاصل از تحلیل ترموالاستیک صفحه در جدول ۳ و شکل‌های ۷ و ۸ آمده است. جدول ۳ تطابق قابل قبولی را بین نتایج محاسبه شده با روش‌های EDI و DCT و همچنین با نتایج منتشر شده نشان می‌دهد. در شکل‌های ۷ و ۸ اثر دمای لبه دارای ترک روی مقادیر ضریب شدت تنش برای حالت‌های کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای آمده است. دمای سطح دیگر در $T_1=0.5T_0$ ثابت نگه داشته می‌شود. طبق نتایج به دست آمده، مقادیر ضریب شدت تنش با کاهش نسبت T_1/T_0 افزایش می‌یابد. کاهش نسبت T_1/T_0 افزایش گرادیان دما در نزدیکی لبه ترکدار و در نتیجه افزایش در مقادیر تنش‌های حرارتی و ضریب شدت تنش را در پی دارد.

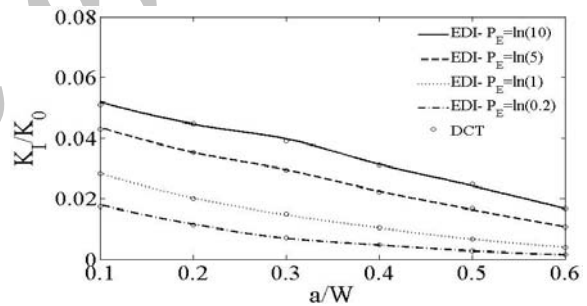
جدول (۳): مقادیر نرمالیزه شده ضریب شدت تنش برای سرمایه‌ش غیریکنواخت پایا $WP_E=\ln(10)$ ، $WP_\alpha=\ln(2)$ و $WP_k=\ln(10)$.

بارگذاری	نوع تحلیل	ضریب شدت تنش نرمالیزه		
		مقادیر محاسبه‌شده	اردگن و وو [۱۰]	کی‌سی و کیم [۱۵]
		EDI	DCT	ییلدریم [۱۲]
$T_1=0.2T_0$ $T_2=0.5T_0$	کرنش صفحه‌ای	۰/۰۳۳۴	۰/۰۳۳۳	۰/۰۳۳۴
	تنش صفحه‌ای	۰/۰۲۳۴	۰/۰۲۳۹	۰/۰۲۴
$T_1=0.5T_0$ $T_2=0.5T_0$	کرنش صفحه‌ای	۰/۰۴۰۵	۰/۰۴۱۱	-

در شکل‌های ۴ و ۵ اثر تغییرات ضریب غیرهمگنی مدول الاستیسیته روی مقادیر ضریب شدت تنش نشان داده شده است. مقادیر ضریب شدت تنش برحسب طول‌های مختلف ترک و برای حالت‌های کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای رسم شده‌اند. مطابق این شکل‌ها، با افزایش ضریب غیرهمگنی مدول الاستیسیته و در نتیجه مدول الاستیسیته در کل صفحه، مقادیر ضریب شدت تنش افزایش می‌یابد.



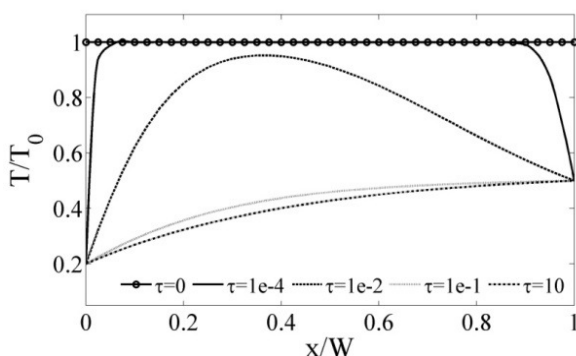
شکل (۴): ضرایب شدت تنش برحسب طول ترک و دمای سرمایش. حالت کرنش صفحه‌ای، $T/T_0=0.1$ و $WP_\alpha=\ln(2)$.



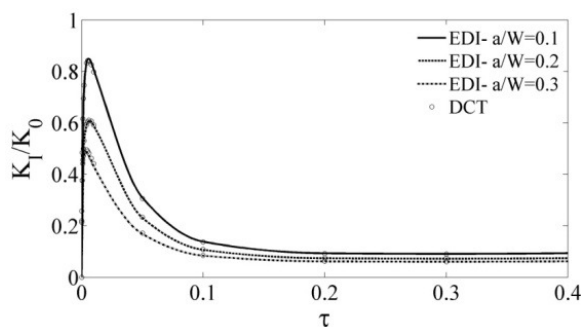
شکل (۵): ضرایب شدت تنش برحسب طول ترک و دمای سرمایش. حالت تنش صفحه‌ای، $T/T_0=0.1$ و $WP_\alpha=\ln(2)$.

سرمایش غیریکنواخت و پایای صفحه: در این حالت، دمای سطوح $x_1=0$ و $x_1=W$ از T_0 تا دماهای T_1 و T_2 کاهش می‌یابد.

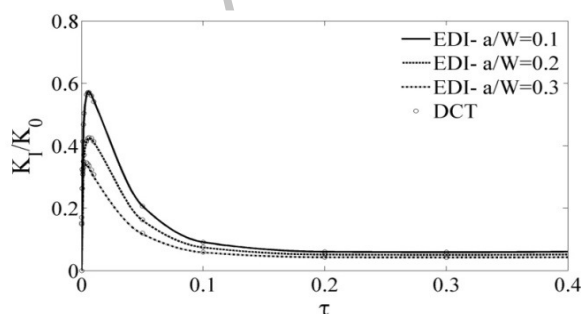
یک مقدار بیشینه افزایش یافته و سپس به سرعت تا مقدار حالت پایا کاهش می‌یابد. این تغییرات زمانی برای تمام طول‌های ترک یکسان است. به علاوه، مقادیر ضریب شدت تنش برای طول‌های کوچک‌تر ترک هم در حالت گذرا و هم در حالت پایا بزرگ‌تر است و در نهایت، مقادیر ضریب شدت تنش برای حالت کرنش صفحه‌ای بزرگ‌تر از حالت تنش صفحه‌ای است.



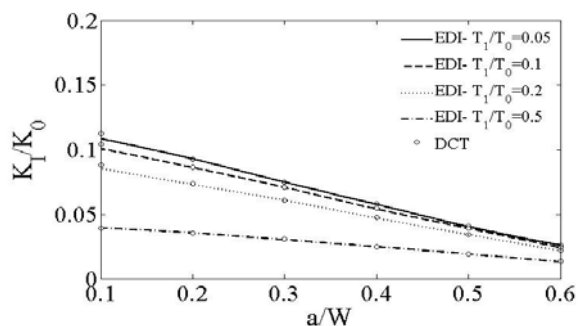
شکل (۹): توزیع دمای گذرا در FGP برحسب زمان نرمال شده.



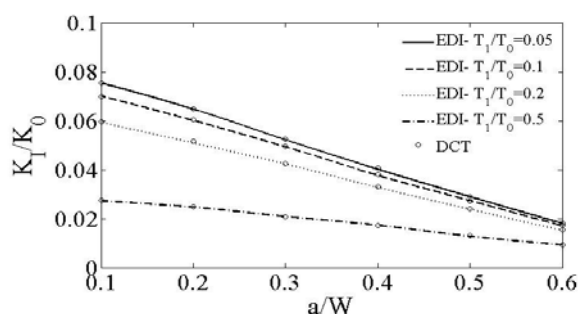
شکل (۱۰): ضرایب شدت تنش گذرا در صفحه $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ برحسب طول ترک در حالت کرنش صفحه‌ای.



شکل (۱۱): ضرایب شدت تنش گذرا در صفحه $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ برحسب طول ترک در حالت تنش صفحه‌ای.



شکل (۷): ضرایب شدت تنش برحسب طول ترک و دمای لبه بدون ترک. حالت کرنش صفحه‌ای، $WP_a = \ln(2)$ ، $WP_E = \ln(10)$ ، $WP_k = \ln(10)$ ، $T_2/T_0 = 0.5$ و $T_1/T_0 = 0.5$.



شکل (۸): ضرایب شدت تنش برحسب طول ترک و دمای لبه بدون ترک. حالت تنش صفحه‌ای، $WP_a = \ln(2)$ ، $WP_E = \ln(10)$ ، $WP_k = \ln(10)$ ، $T_2/T_0 = 0.5$ و $T_1/T_0 = 0.5$.

تغییر دمای گذرا: از آنجایی که ترک‌های سطحی معمولاً حین مرحله سرمایش ایجاد می‌شوند، بنابراین تغییر دمای گذرا به صورت سرمایش در نظر گرفته می‌شود. شوک حرارتی به صورت کاهش ناگهانی دمای سطوح صفحه از دمای مرجع T_0 تا دمای T_1 و T_2 اعمال می‌شود. در این مرحله نتایج با فرض $T_1 = 0.2T_0$ و $T_2 = 0.5T_0$ به دست آمده‌اند. توزیع دمای گذرا در صفحه بر حسب زمان نرمال شده در شکل ۹ رسم شده است. زمان نرمال شده τ به صورت زیر تعریف می‌شود:

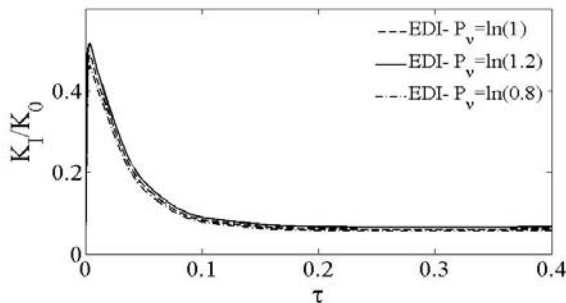
$$\tau = \frac{k(0)/\rho(0)c(0)}{W^2} t. \quad (75)$$

طبق این نتایج، در زمان‌های ابتدایی اعمال شوک حرارتی، گرادیان دما در نزدیکی لبه‌های صفحه قابل توجه است که منجر به تنش‌های کششی بزرگی می‌شود.

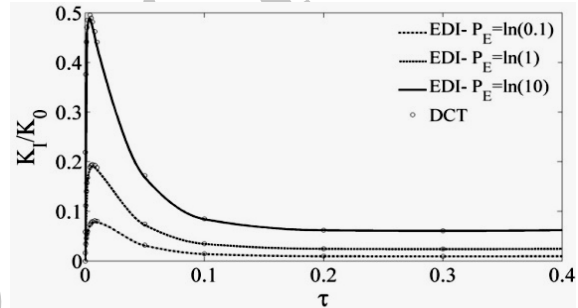
شکل‌های ۱۰ و ۱۱ تغییرات زمانی ضریب شدت تنش حاصل از توزیع گذرای دما در صفحه، بر حسب طول‌های مختلف ترک و برای حالت‌های کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای را نشان می‌دهد. مطابق این نتایج، در ابتدا مقادیر ضریب شدت تنش تا

در این مرحله، اثر تغییرات خصوصیات ماده روی مقدار ضریب شدت تنش در قالب تحلیل حساسیت بررسی می‌شود. در شکل‌های ۱۲ و ۱۳ اثر تغییر پارامترهای الاستیک صفحه یعنی مدول الاستیسیته و ضریب پواسون مطالعه شده است. بررسی‌ها برای $a/W = 0/3$ و حالت کرنش صفحه‌ای انجام شده است. مطابق شکل ۱۲، تغییر ضریب غیرهمگنی P_E اثر قابل توجهی روی مقادیر ضریب شدت تنش و به خصوص مقدار بیشینه آن دارد. نتایج نشان می‌دهد که زمان رسیدن به مقدار بیشینه و زمان رسیدن به حالت پایا برای تمام مقادیر P_E تقریباً یکسان است. این مسئله به خاطر مستقل بودن توزیع دمایی گذرا از تغییرات P_E است. مطابق نتایج، تغییر P_E باعث ایجاد اختلاف زمانی ناچیز بین زمان‌های متناظر با مقادیر بیشینه و رسیدن به حالت پایا می‌شود.

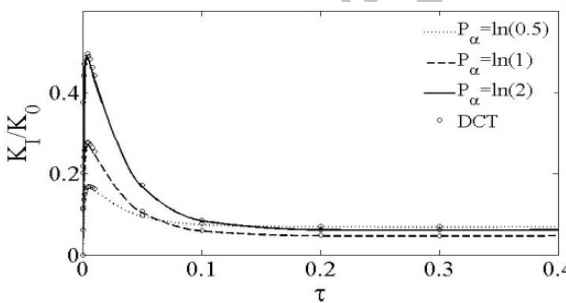
تنش صفحه‌ای مستقل از ضریب پواسون است. اثر تغییر ضرایب غیرهمگنی خصوصیات گرمایی ماده در این مرحله بررسی می‌شود. در شکل ۱۴ اثر تغییر ضرایب غیرهمگنی ضریب انبساط حرارتی P_α روی تغییرات زمانی ضریب شدت تنش رسم شده است. طبق این نتایج، با افزایش ضریب غیرهمگنی P_α ، مقدار بیشینه ضریب شدت تنش به شدت افزایش می‌یابد.



شکل (۱۳): ضرایب شدت تنش گذرا بر حسب ضریب غیرهمگنی P_v ، کرنش صفحه‌ای، $WP_\alpha = \ln(2)$ ، $WP_E = \ln(10)$ و $WP_k = \ln(10)$.



شکل (۱۲): ضرایب شدت تنش گذرا بر حسب ضریب غیرهمگنی P_E ، کرنش صفحه‌ای، $WP_\alpha = \ln(2)$ ، $WP_v = \ln(1)$ و $WP_k = \ln(10)$.

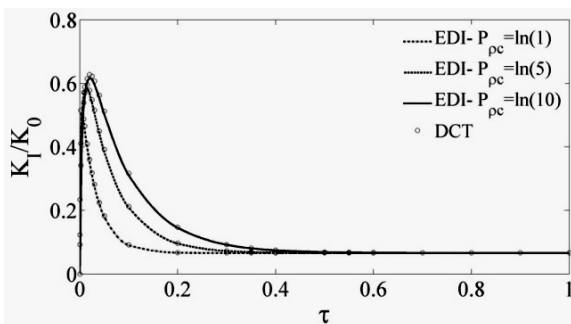


شکل (۱۴): ضرایب شدت تنش گذرا بر حسب ضریب غیرهمگنی P_α ، کرنش صفحه‌ای، $WP_v = \ln(1)$ ، $WP_E = \ln(10)$ و $WP_k = \ln(10)$.

نتایج محاسبه شده برای حالت تنش صفحه‌ای نشان می‌دهد که مقادیر ضریب شدت تنش نسبت به تغییرات ضریب پواسون حساسیتی ندارد و مستقل از آن می‌باشد. لازم به ذکر است که نتایج مذکور در متن نیامده است. حل تحلیلی توزیع

لازم به ذکر است که زمان متناظر با مقدار بیشینه و رسیدن به حالت پایا، به طور تقریبی برای تمام مقادیر P_α یکسان است. با توجه به مقدار P_α ، روند تغییرات زمانی ضریب شدت تنش گذرا بر حسب ضریب غیرهمگنی P_α ، کرنش صفحه‌ای، $WP_v = \ln(1)$ ، $WP_E = \ln(10)$ و $WP_k = \ln(10)$ رسم شده است. تنش برای حالت کرنش صفحه‌ای در شکل ۱۳ رسم شده است. طبق این نتایج، مقادیر ضریب شدت تنش با افزایش مقدار ضریب غیرهمگنی P_v ، مقدار ضریب شدت تنش کمی افزایش می‌یابد.

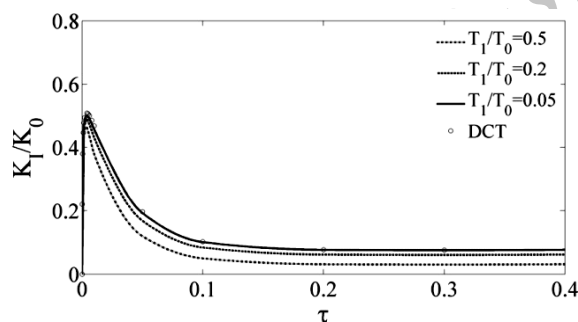
نتایج محاسبه شده برای حالت تنش صفحه‌ای نشان می‌دهد که مقادیر ضریب شدت تنش نسبت به تغییرات ضریب پواسون حساسیتی ندارد و مستقل از آن می‌باشد. لازم به ذکر است که نتایج مذکور در متن نیامده است. حل تحلیلی توزیع



شکل (۱۶): ضرایب شدت تنش گذرا بر حسب ضریب

غیرهمگنی P_{pc} . کرنش صفحه‌ای، $WP_E=\ln(10)$ ، $WP_V=\ln(1.2)$ و $WP_\alpha=\ln(2)$.

اثر تغییر درجه حرارت لبه ترکدار روی تغییرات زمانی ضریب شدت تنش در شکل ۱۷ آمده است. طبق این نتایج، با افزایش مقدار T_0-T_1 ، مقدار ضریب شدت تنش نیز افزایش می‌یابد. کاهش بیشتر دمای لبه صفحه از دمای مرجع باعث ایجاد گرادیان دمای بزرگ‌تر می‌شود که تنش‌های حرارتی بزرگ‌تری را نیز در پی دارد. همچنین زمان متناظر با رسیدن به مقدار بیشینه با افزایش T_0-T_1 افزایش می‌یابد ولی زمان رسیدن به حالت پایا برای تمامی مقادیر T_0-T_1 تقریباً یکسان است.

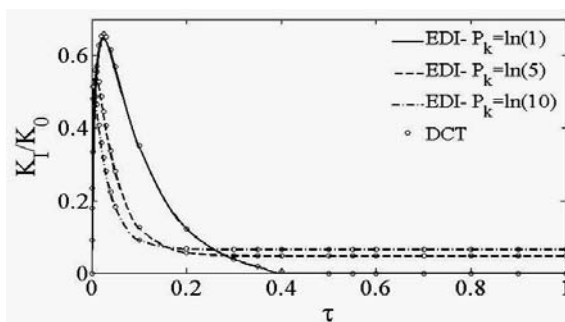


شکل (۱۷): ضرایب شدت تنش گذرا بر حسب دمای لبه بدون ترک. کرنش صفحه‌ای، $WP_E=\ln(10)$ ، $WP_V=\ln(1.2)$ و $WP_\alpha=\ln(2)$.

۷-۲- صفحه مرکب حاوی ترک لبه‌ای

تحلیل ترک در سازه‌های مواد مرکب، مستلزم لحاظ کردن طبیعت قطعه‌ای پیوسته خصوصیات مواد تشکیل‌دهنده آن است. فصل مشترک لایه‌های تشکیل‌دهنده سازه‌های مرکب موجب ناپیوستگی در خصوصیات شده و خطوط ناپیوستگی ضعیف را در ناحیه حل مدل این سازه‌ها به وجود می‌آورند.

شدت تنش ممکن است بسیار متفاوت باشد. برای مثال، اگر چه مقدار پایای ضریب شدت تنش برای $WP_\alpha=\ln(2)$ یا $WP_\alpha=\ln(1)$ کوچک‌تر از مقدار متناظر $WP_\alpha=\ln(5)$ است ولی مقدار بیشینه ضریب شدت تنش برای حالت $WP_\alpha=\ln(2)$ بسیار بزرگ‌تر می‌باشد. تغییرات زمانی ضریب شدت تنش برای مقادیر مختلف ضریب هدایت گرمایی P_k در شکل ۱۵ نشان داده شده است.

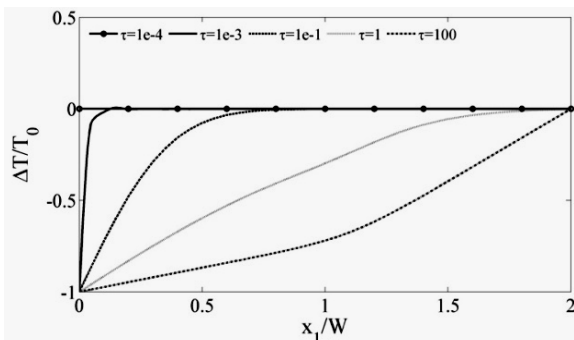


شکل (۱۵): ضرایب شدت تنش گذرا بر حسب ضریب

غیرهمگنی P_k . کرنش صفحه‌ای، $WP_E=\ln(10)$ ، $WP_V=\ln(1.2)$ و $WP_\alpha=\ln(2)$.

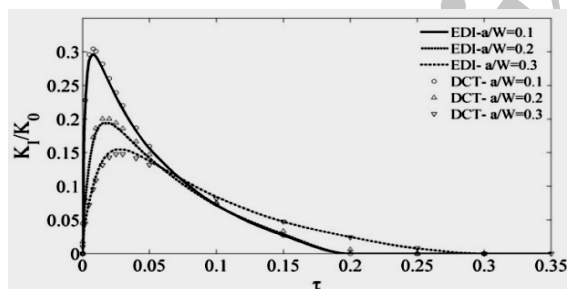
طبق این نتایج، کاهش ضریب غیرهمگنی P_k باعث تأخیر در رسیدن ضریب شدت تنش به مقدار بیشینه و همچنین مقدار حالت پایا می‌شود. البته این موارد دور از انتظار نیست، چون افزایش ضریب هدایت گرمایی موجب افزایش ضریب پخش حرارتی $k/\rho c$ می‌شود. علاوه بر این، کاهش ضریب هدایت گرمایی P_k باعث افزایش مقدار بیشینه می‌شود. برای $WP_k=\ln(1)$ رفتار ترک در حالت گذرا و پایا کاملاً متفاوت است. در ابتدای اعمال شوک، مقدار ضریب شدت تنش افزایش یافته و به یک مقدار بیشینه مثبت می‌رسد و سپس کاهش می‌یابد. تا این بخش، مسئله تحلیل ترک است اما پس از آن، مسئله در حوزه مکانیک تماس قابل تحلیل است. از نتایج فوق می‌توان نتیجه گرفت که تغییرات ضریب هدایت گرمایی، اثر قابل توجهی روی تغییرات زمانی ضریب شدت تنش دارد و گاهی باعث تغییر ماهیت مسئله می‌شود. تغییرات زمانی ضریب شدت تنش بر حسب تغییرات ضریب غیرهمگنی P_k در شکل ۱۶ نمایش داده شده است. همان‌طور که انتظار می‌رفت مقادیر ضریب شدت تنش در حالت پایا مستقل از تغییرات P_k می‌باشد که در شکل ۱۶ نیز قابل مشاهده است. همچنین مقدار بیشینه ضریب شدت تنش زمان متناظر با مقدار بیشینه و رسیدن به حالت پایا با افزایش WP_{Pc} کمی افزایش می‌یابد.

شکل ۱۹ آمده است. توزیع دما در حالت پایا به خوبی اختلاف ضریب هدایت گرمایی در دو لایه طرفینی صفحه را نشان می‌دهد. علاوه براین، در نواحی همگن این دو لایه، توزیع دمای پایا خطی است که مورد انتظار نیز می‌باشد.

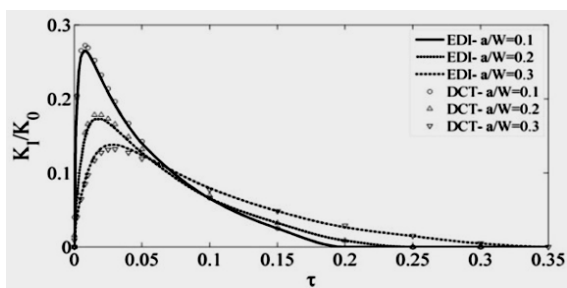


شکل (۱۹): توزیع دمای گذرا در صفحه مرکب.

تغییرات ضریب شدت تنش بر حسب زمان، برای طول‌های مختلف ترک و حالت‌های کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای به ترتیب در شکل‌های ۲۰ و ۲۱ نشان داده شده است. طبق این نتایج، ضریب شدت تنش تا یک مقدار بیشینه افزایش یافته و سپس کاهش می‌یابد تا در نهایت ترک بسته شود. بسته شدن ترک برای تمام طول‌های ترک اتفاق می‌افتد. زمان متناظر با بسته شدن ترک با افزایش طول ترک افزایش می‌یابد.

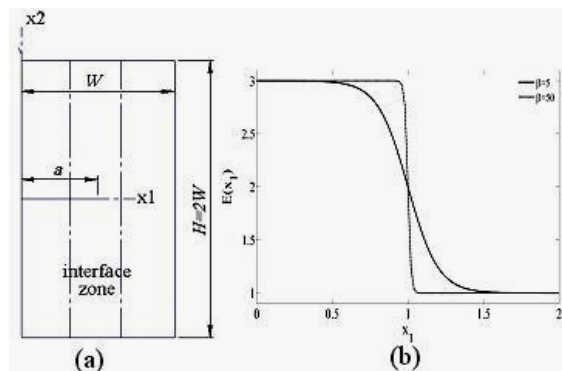


شکل (۲۰): تغییرات ضریب شدت تنش بر حسب زمان، برای طول‌های مختلف ترک و حالت کرنش صفحه‌ای.



شکل (۲۱): تغییرات ضریب شدت تنش بر حسب زمان، برای طول‌های مختلف ترک و حالت تنش صفحه‌ای.

لحاظ کردن آنها در مدل، نیازمند کاربرد روش‌های خاصی مثل روش پنالتی است. از طرف دیگر، در بسیاری از موارد یک لایه مواد مرکب تابعی بین دو لایه همگن از مواد تشکیل دهنده آن ساخته می‌شود و در تحلیل آن، هر سه لایه در نظر گرفته می‌شود. در هر دو مورد، تابع تانژانت هیپربولیک می‌تواند تغییرات خصوصیات مواد را با دقت مناسبی بیان نماید. شکل ۱۸، تغییرات تابع تانژانت هیپربولیک را برای مدل‌سازی مواد مرکب و مدل‌سازی لایه مرکب نشان می‌دهد.



شکل (۱۸): (a) مدل‌سازی لایه مرکب با سه لایه و (b) تغییرات تابع تانژانت هیپربولیک.

در این مثال، صفحه‌ای مرکب از دو ماده مختلف در نظر گرفته شده که یک لایه از مواد مرکب تابعی، آنها را به یکدیگر متصل می‌کند. تغییرات خصوصیات ماده با تابع تانژانت هیپربولیک برای تمام صفحه، به صورت زیر تخمین زده می‌شود:

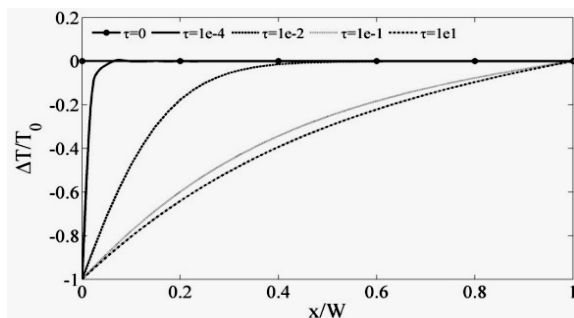
$$E(x_1) = \frac{E(W) + E(0)}{2} + \frac{E(0) - E(W)}{2} \tanh(\eta_E(x_1 + d)), \quad (76)$$

که در این رابطه، پارامتر d محل پرش را تعیین می‌کند. اندازه ناحیه گذرا نیز توسط پارامتر η_E تعیین می‌شود. لازم به ذکر است که تحلیل برای حالت‌های کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای با در نظر گرفتن داده‌های زیر انجام شده است:

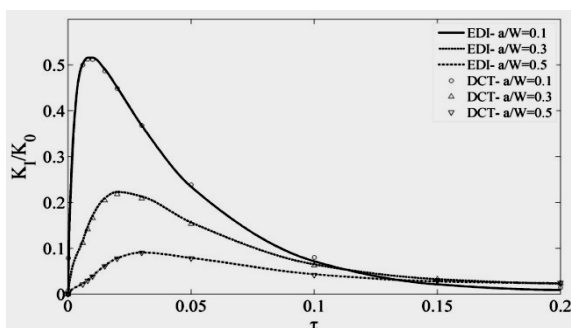
$$\begin{aligned} a/W &= 0.1-0.3, \quad H/W = 2. \\ d &= -0.5, \quad \eta_E = 15, \quad \eta_v = \eta_\alpha = \eta_k = \eta_{pc} = 5 \\ (E(W), E(0)) &= (1, 3), \\ (v(W), v(0)) &= (0.1, 0.3), \\ (\alpha(W), \alpha(0)) &= (0.03, 0.01), \\ (k(W), k(0)) &= (3, 1), \quad (pc(W), pc(0)) = (1, 1) \end{aligned}$$

برای حالت گذرا و اعمال شوک حرارتی، فرض می‌شود دمای لبه حاوی ترک تا $T_1=0$ به طور ناگهانی کاهش می‌یابد، در حالی که دمای لبه دیگر در دمای مرجع $T_2=T_0$ باقی می‌ماند. توزیع دمای گذرا در صفحه، برحسب زمان نرمالیزه شده در

فوق در شکل ۲۳ برای طول‌های مختلف ترک و حالت کرنش صفحه‌ای نشان داده شده است.



شکل (۲۲): توزیع دمای گذرا در FGP با مدل خودسازگار.



شکل (۲۳): تغییرات زمانی SIF برای طول‌های مختلف ترک و حالت کرنش صفحه‌ای.

طبق نتایج به دست آمده، در ابتدای اعمال شوک، مقدار ضریب شدت تنش تا یک مقدار بیشینه به سرعت افزایش یافته و سپس به تدریج کاهش می‌یابد. البته برای طول‌های کوتاه‌تر ترک، مقدار بیشینه به طور قابل ملاحظه‌ای بزرگ‌تر از طول‌های بزرگ‌تر ترک است و همین‌طور نرخ زمانی تغییرات نیز بیشتر است. اما در حالت پایا، ضریب شدت تنش برای طول‌های بزرگ‌تر بیشتر است.

۸- نتیجه‌گیری

در این تحقیق، شکست مواد تابعی تحت میدان دمای پایا و گذرا مطالعه شده است. برای محاسبه ضریب شدت تنش مود I از روش‌های انتگرال ناحیه‌ای و همبستگی تغییر مکان‌ها به همراه روش بدون المان گلرکین استفاده شده است. میدان دمای گذرا با روش نیمه تحلیلی تجزیه مودی به دست آمده است. نتایج قابل ذکر این تحقیق به شرح زیر است:

۷-۳- تعیین خصوصیات صفحه با مدل میکرومکانیک

تخمین خصوصیات مؤثر و ماکروسکوپی مواد مرکب، همواره یکی از مسائل مورد توجه در این حوزه بوده است. برای FGM نیز به عنوان مواد مرکب مدرج، تعدادی از مدل‌های میکرومکانیک مواد مرکب توسعه یافته‌اند. در این مثال، از مدل خودسازگار^۱ برای تعیین خصوصیات ماده استفاده می‌شود.

زوکر^۲ اشاره می‌کند که مدل خودسازگار تخمینی ساده برای برای خصوصیات مؤثر را به دست می‌دهد که در مسائل بهینه سازی مربوط به توزیع ماده به کار می‌رود. علاوه بر این، در این روش خصوصیات ماده به گونه‌ای محاسبه می‌شوند که از اینکه کدام فاز به عنوان ماتریس و کدام فاز به عنوان ماده حل شونده باشند، مستقل می‌باشند [۲۵]. این نکته به خصوص برای FGM اهمیت دارد، چون کسر حجمی مواد تشکیل دهنده آن در محدوده وسیعی تغییر می‌کند. برای FGM متشکل از دو فاز، به طور معمول تغییر کسر حجمی سرامیک به صورت تابع توانی در نظر گرفته می‌شود.

$$V_c = 1 - (x_1/W)^p, \quad (77)$$

که در آن، W طول تغییر خصوصیات ماده است و p پارامتر تعیین پروفیل گرادیان است. در اینجا لبه $x_1=0$ متناظر با سرامیک خالص و $x_1=W$ لبه متناظر با فلز خالص است. برای مواد مرکب دو فازی، خصوصیات مؤثر ماده از روابط زیر به دست می‌آید [۲۵ و ۲۶].

$$\frac{1}{\kappa + 4\mu/3} = \frac{V_c}{\kappa_c + 4\mu_c/3} + \frac{V_m}{\kappa_m + 4\mu_m/3}, \quad (78)$$

$$\left(\frac{V_c \kappa_c}{\kappa_c + 4\mu_c/3} + \frac{V_m \kappa_m}{\kappa_m + 4\mu_m/3} \right) + 5 \left(\frac{V_c \mu_m}{\mu - \mu_m} + \frac{V_m \mu_c}{\mu - \mu_c} \right) + 2 = 0, \quad (79)$$

$$\alpha = \alpha_m + \frac{(\alpha_c - \alpha_m)(1/\kappa - 1/\kappa_m)}{(1/\kappa_c - 1/\kappa_m)}, \quad (80)$$

$$c = c_c V_c + c_m V_m, \quad \rho = \rho_c V_c + \rho_m V_m. \quad (81)$$

برای مثال عددی، صفحه‌ای از FGM به عرض W و ارتفاع $H=8W$ در نظر گرفته می‌شود که حاوی یک ترک است. شرایط مرزی دمایی به صورت کاهش ناگهانی دمای لبه حاوی ترک از دمای مرجع تا $T_1=0$ و حفظ دمای مرجع در لبه دیگر در نظر گرفته شده است. شکل ۲۲ توزیع دمای گذرا در صفحه تحت شرایط مرزی و اولیه ذکر شده را نشان می‌دهد.

تغییرات زمانی ضریب شدت تنش متناظر با توزیع دمای

1- Self-Consistent

2- Zuiker

- Materials”, Eng. Frac. Mech., Vol. 69, No. 14-16, pp. 1713-1728, 2002.
8. Jin, Z.H. and Noda, N. “Crack-Tip Singular Fields in Nonhomogeneous Materials”, J. of Appl. Mech., Trans. ASME, Vol. 61, No. 3, pp. 738-740, 1994.
 9. Kishimoto, K., Aoki, S., and Sakata, M. “On the Path Independent Integral”, J. Eng. Frac. Mech., Vol. 13, No. 4, pp. 841-850, 1980.
 10. Erdogan, F. and Wu, B.H. “Crack Problems in FGM Layers under Thermal Stresses”, J. of Thermal Stresses, Vol. 19, No. 3, pp. 237-265, 1996.
 11. Noda, N. and Guo, L.C. “Thermal Shock Analysis for a Functionally Graded Plate with a Surface Crack”, Acta Mech., Vol. 195, No's. 1-4, pp. 157-166, 2008.
 12. Yildirim, B. “An Equivalent Domain Integral Method for Fracture Analysis of Functionally Graded Materials under Thermal Stresses”, J. of Thermal Stresses, Vol. 29, No. 4, pp. 371-397, 2006.
 13. Dag, S. “Thermal Fracture Analysis of Orthotropic Functionally Graded Materials Using an Equivalent Domain Integral Approach”, Eng. Frac. Mech., Vol. 73, No. 18, pp. 2802-2828, 2006.
 14. Dag, S. and Yildirim, B. “Computation of Thermal Fracture Parameters for Inclined Cracks in Functionally Graded Materials Using Jk-Integral”, J. of Thermal Stresses, Vol. 32, No. 5, pp. 530-556, 2009.
 15. KC, A. and Kim, J.H. “Interaction Integrals for Thermal Fracture of Functionally Graded Materials”, Eng. Frac. Mech., Vol. 75, No. 8, pp. 2542-2565, 2008.
 16. Chen, J. “Determination of Thermal Stress Intensity Factors for an Interface Crack in a Graded Orthotropic Coating-Substrate Structure”, Int. J. Frac., Vol. 133, No. 4, pp. 303-328, 2005.
 17. Rao, B.N. and Rahman, S. “Mesh-Free Analysis of Cracks in Isotropic Functionally Graded Materials”, Eng. Frac. Mech., Vol. 70, No. 1, pp. 1-27, 2003.
 18. Belytschko, T., Lu, Y.Y., and Gu, L. “Crack Propagation by Element-Free Galerkin Methods”, Eng. Frac. Mech., Vol. 51, No. 2, pp. 295-315, 1995.
 19. Fleming, M., Chu, Y.A., Moran, B., and Belytschko, T. “Enriched Element-Free Galerkin Methods for Crack Tip Fields”, Int. J. Num. Meth Eng., Vol. 40, No. 8, pp. 1483-1504, 1997.
 20. Fereidoon, A., Ahmadi Hoseini, S.A., and Mohyeddin, A., “Modeling of Alumina-Epoxy Joints Reinforced by Functionally Graded Materials, Using Finite Element Method”, J. Mech. Aerospace, Vol. 5, No. 4, pp. 1-13, 2009 (In Persian).
 21. Rice, J.R. “A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks”, J. Appl. Mech., Vol. 35, No.5, pp. 379-386, 1968.
 22. Kim, J.H. and Paulino, G.H. “Mixed-Mode J-Integral Formulation and Implementation Using

- مدل‌سازی ترک در مواد مرکب تابعی تحت بار حرارتی با استفاده از روش بدون‌المان گلرکین با گره‌بندی نسبتاً درشت (نسبت به روش FEM و XFEM) منجر به نتایج با دقت قابل قبول می‌شود.

- با کاربرد غنی‌سازی نوک ترک، روش مستقیم همبستگی تغییر مکان‌ها نیز مانند روش‌های انرژی انتگرال J و انتگرال برهم کنش برای محاسبه ضریب شدت تنش قابل استفاده است.

- اعمال بار حرارتی گذرا به صورت شوک سرمایه‌ی، باعث افزایش قابل توجه پارامترهای شکست می‌شود. علی‌رغم اینکه ممکن است این پارامترها در حالت پایا صفر باشند. بنابراین برای سازه‌هایی که تحت بار حرارتی گذرا قرار دارند، تحلیل مسئله در حالت گذرا لازم است و

- گرادبان خصوصیات فیزیکی ماده به خصوص خصوصیات حرارتی، روی مقادیر ضریب شدت تنش حرارتی اثر قابل توجهی دارد. از این مسئله می‌توان برای طراحی FGM و یا حتی موادی که از نظر الاستیک همگن و از نظر خصوصیات حرارتی متغیر می‌باشند در برابر شکست استفاده نمود.

۹- مراجع

1. Noda, N. “Thermal Stresses in Functionally Graded Materials”, J. of Thermal Stresses, Vol. 22, No. 4, pp. 477-512, 1999.
2. Hart, N.T., Brandon, N.P., Day, M.J., and Lapea-Rey, N. “Functionally Graded Composite Cathodes for Solid Oxide Fuel Cells”, J. of Power Sour. Vol. 106, No's. 1-2, pp. 42-50, 2002.
3. Hirano, T., Whitlow, L.W., and Miyajima, M. “Numerical Analysis of Efficiency Improvement in Functionally Gradient Thermoelectric Materials”, Proc. of the Second Int. Symp. on Functionally Gradient Materials, Ceramic Trans., Vol. 34, No. 1, pp. 23-30, 1993.
4. Watanabe, Y., Nakamura, Y., Fukui, Y., and Nakanishi, K. “A Magnetic-Functionally Graded Material Manufactured with Deformation-Induced Martensitic Transformation”, J. of Mat. Sci. Letters, Vol. 12, No. 5, pp. 326-328, 1993.
5. Desplat, J.L. “Recent Developments on Oxygenated Thermionic Energy Converter-Overview”, Proc. of the Fourth Int. Symp. on Functionally Graded Materials 1996.
6. Watari, F., Yokoyama, A., Omori, M., Hirai, T., Kondo, H., Uo, M., and Kawasaki, T. “Biocompatibility of Materials and Development to Functionally Graded Implant for Bio-Medical Application”, Comp. Sci. and Tech., Vol. 64, No. 6, pp. 893-908, 2004.
7. Kawasaki, A. and Watanabe, R. “Thermal Fracture Behavior of Metal/Ceramic Functionally Graded

25. Zuiker, J.R. "Functionally Graded Materials: Choice of Micromechanics Model and Limitations in Property Variation", *Compos. Eng.*, Vol. 5, No. 7, pp. 807-819, 1995.
26. Hill, R. "A Self-Consistent Mechanics of Composite Materials", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 13, No. 4, pp. 213-222, 1965.
- Graded Elements for Fracture Analysis of Nonhomogeneous Orthotropic Materials", *Mech. Mater.*, Vol. 35, No's. 1-2, pp. 107-128, 2003.
23. Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L. "The Finite Element Method", Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000.
24. Noda, N., Hetnarski, R.B., and Tanigawa, Y. "Thermal Stresses", New York: Taylor and Francis, 2003.

Archive of SID