# تحليل غيرخطي خيز ورق دايرهاي هدفمند با خواص متغير

# در دو راستای عرضی و شعاعی

محمد شرعیات ، غلامرضا رضایی دشت آبادی و علی اصغر جعفری "

دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی (تاریغ دریافت: ۹۱/۲/۱۵؛ تاریغ پذیرش: ۲/۵/۱۹)

#### چکیدہ

در این مقاله، تحلیل غیرخطی خیز ورقهای دایرهای شکل ساخته شده از مواد هدفمند دوجهته با تغییرات همزمان ویژگیهای مواد در راستاهای عرضی و شعاعی، مورد بررسی قرار گرفته است. برای یافتن معادلات حاکم بر ورق، از تئوری کلاسیک و روابط کرنش- تغییر مکان غیرخطی فن کارمن استفاده شده است. با توجه به تغییرات دو جهته ویژگیهای مواد هدفمند، تأثیر مشتقات شعاعی ویژگیهای مکانیکی مواد و تغییرات عرضی خواص مکانیکی بر عبارات سفتی ورق در معادلات حاکم آشکار شده است. برای حل مسئله، از روش عددی تفاضل محدود استفاده شده است. در این مقاله نیز نحوه اعمال فرم تفاضل محدود شرایط مرزی بر نقاط مرزی گوناگون ارائه شده است. در مسیر حل مسئله و دستیابی به نتایج کلی، رفتار ورقهای ساخته شده از مواد همسانگرد، هدفمند یک جهته با تغییرات ویژگیهای مواد در راستای عرضی یا شعاعی و هدمند دوجهته بررسی و نتایج حالتهای ویژه با نتایج نرمافزار آباکوس و همچنین نتایج مراجع معتبر صحهگذاری شده است.

واژههای کلیدی: ورق دایروی، تحلیل غیرخطی، مواد هدفمند دوجهته، تئوری کلاسیک، اصل هامیلتون، روش تفاضل محدود

## Nonlinear Lateral Deflection Analysis of an FGM Circular Plate Whose Material Properties Vary in Transverse and Radial Directions M. Shariyat, G.R. Rezaei -Dashtabadi, and A.A. Jafari

Mech. Eng. Dep't. K.N. Toosi Univ. of Tech. (Receipt: 4 May, 2012; Accept: 23 July, 2013)

### ABSTRACT

In the present paper, nonlinear analysis of lateral deflection of bidirectional functionally graded circular plates whose material properties vary in both transverse and radial directions is presented. The governing equations of the plate are derived based on the classical theory and von Karman's nonlinear strain-displacement relations. Due to bidirectional variations of the material properties, influence of the radial derivatives of the material properties and the transverse variations of the properties on the rigidities have appeared in the governing equations. The governing equations are solved by the finite difference method. Incorporation of the finite difference form of the boundary conditions on various points of the boundary is also discussed. Finally, behaviors of plates fabricated from isotropic, transversely-graded, and two-directional-functionally graded materials are investigated and present results are validated against results of the special cases reported in the available well-known references and results of Abaqus software.

Keywords: Circular Plate, Nonlinear Analysis, Bi-Directional Functionally Graded Materials, Classical Plate Theory, Hamilton's Principle, Finite Difference Method

ajafari@kntu.ac.ir - دانشيارwww.SID.ir

۱- دانشیار (نویسنده پاسخگو): shariyat@kntu.ac.ir

۲- کارشناس ارشد: rezaei.mec@gmail.com

#### ۱– مقدمه

در راستای گسترش روزافزون فوناوری های نوین، استفاده از مواد پیشرفتهای که خواص آنها در راستا و نقاط مختلف سازههای مهندسی متفاوت باشند، بیش از پیش اهمیت یافته است. بسیاری از سازهها و قطعات مهندسی مانند سازههای و هوایی، فضایی، مخازن تحتفشار در نیروگاههای هستهای و موتورهای احتراق داخلی تحت نیروهای مکانیکی مختلف و نیروهای حرارتی با گرادیانهای بالا قرار دارند. از این رو در این گونه سازهها می بایست از موادی استفاده نمود که ضمن دارا بودن ساختاری پیوسته، در برابر بارهای حرارتی با گرادیانهای بالا مقاوم بوده و در برابر بارهای مکانیکی استحکام لازم را از خود نشان دهند.

در ارتباط با ابداع موادی با تغییرات پیوسته ویژگیهای مواد، دویز<sup>۱</sup> و بور<sup>۲</sup> ایده ترکیب دو فاز مختلف با تغییر تدریجی ترکیب فازها در هر لایه به منظور بهبود خواص مکانیکی مواد را برای اولین بار مطرح کردند [۱]. در سال ۱۹۸۴، نیاز صنعتی به استفاده از موادی با ویژگیهای یاد شده که با عنوان مواد هدفمند شناخته شدند، در کشور ژاپن مطرح و مأموریت تحقیقات در این زمینه به گروهی از دانشمندان در زمینه هوافضا محول گردید.

در ارتباط با بررسی میزان کاهش تنشهای حرارتی در اثر به کارگیری مواد هدفمند، تحلیلی ترموالاستیک توسط تاناکا<sup>۳</sup> و همکاران ارائه شد [۲]. اباتا<sup>۴</sup> و نودا<sup>۵</sup> تنشهای ترموالاستیک پدید آمده در شرایط حرارتی پایدار در سیلندر و کره توخالی ساخته شده از مواد هدفمند را بررسی نمودند [۳]. تنشهای پدید آمده در ورقهای هدفمند، در شرایط گرادیان حرارتی پایدار توسط ایشیکاوا<sup>۴</sup> و همکاران بررسی شدند [۴]. همچنین، حل تحلیلی و عددی پوستههای نامتقارن ساخته شده از مواد هدفمند تحت بارهای حرارتی ناشی از گذر سیال، توسط تاکزونو<sup>۷</sup> و همکاران ارائه گردید [۵]. همچنین تأثیر استفاده از مواد هدفمند به منظور حذف یا کنترل تغییر شکل حرارتی در میله و ورق توسط ودرهلد<sup>۸</sup> و همکاران بررسی شد [۶].

- 1- Duwez
- 2- Bever
- 3- Tanaka
- 4- Obata 5- Noda
- 6- Ishikawa
- 7- Takezono
- 8- Wetherhold

یــراوین و ردی `` یاســخ ورق هدفمنــد بــا ســاختار سرامیکی-فلزی را به شیوه المان محدود و با در نظر گرفتن نیروهای برش عرضی، اینرسی دورانی و خیزهای بزرگ یافتند [۷]. وو'' و مگوید'' روشی تحلیلی برای ورق و پوسته ضخیم ساخته شده از مواد هدفمند ارائه کردند [۸]. چاکرابرتی <sup>۱۳</sup> و همکاران المانى جديد براى بررسى رفتار ترموالاستيك مواد هدفمند ارائه نمودند [۹]. خیز یک ورق مستطیلی از جنس ماده هدفمند با تکیهگاههای ساده تحت بارهای عرضی توسط چے،<sup>۱۴</sup> و چونگ<sup>۱۵</sup> مورد بررسی قرار گرفت [۱۰]. آقایان علینیا و قنادپور به تحلیل غیرخطی صفحه مستطیلی ساخته شده از مواد هدفمند تحت فشاری عرضی پرداختند [۱۱]. نای<sup>۱۷</sup> و ژونگ<sup>۱۷</sup> خمـش ورق حلقوی هدفمند دوجهته دارای تقارن محوری را به روش نیمه تحلیلی – عددی مورد مطالعه قرار دادند [۱۲]. نای و ژونگ همچنین با گسترش تحقیق خود، به تحلیل دینامیکی ورق حلقوی هدفمند چند جهته به شیوه نیمه تحلیلی و عددی يرداختند [١٣].

تحلیلهای انجام شده برای ورقهای حلقوی هدفمند، محدود به ورقهای دارای تغییرات ویژگیهای مواد در جهت ضخامت بودهاند [۱۴]. در این حالت، فرم معادلات ورق با فرم معادلات ورقهای همسانگرد همگن کاملاً یکسان است. گنجاندن تغییرات شعاعی همزمان یا مستقل ویژگیهای مکانیکی مواد، موجب پیدایش عبارات مشتقی جدید در ورقهای دایرهای شکل ساخته شده از مواد هدفمند دوجهته با تغییرات همزمان ویژگیهای مواد در راستاهای عرضی و شعاعی، ارائه شده است. برای یافتن معادلات حاکم بر ورق، از تئوری کلاسیک و روابط کرنش- تغییر مکان غیرخطی فون کارمن<sup>۱۸</sup> استفاده شده است. حل مسئله، به روش عددی تفاضل محدود انجام و نحوه اعمال شرایط مرزی گوناگونی به شیوه محدود انجام و نحوه اعمال شرایط مرزی گوناگونی به شیوه

- 9- Praveen
- 10- Reddy 11- Woo
- 12- Meguid
- 13- Chakraborty
- 14- Chi
- 15- Chung
- 16- Nie
- 17- Zhong
- 18- Von Karman

## ۲- معادلات حاکم بر ورق ساخته شده از مـواد هدفمنــد دو جهته

در این بخش، تعریف مسئله و شرایط هندسی و بارگذاری آن، توصیف تغییرات دوبعدی ویژگیهای مواد، و معادلات حاکم بـر ارتعاش ورق به دست خواهند آمد.

### ۲-۱- تعريف هندسه مسئله

در مقاله حاضر، ورق هدفمند دو جهته با تغییرات ویژگیهای مواد در راستاهای ضخامت و شعاعی مورد بحث و تحلیل قرار گرفته است. ورق دایرهای شکل توخالی مورد نظر، در شکل ۱ نشان داده شده است. شعاع داخلی، شعاع خارجی و ضخامت ورق به ترتیب با  $r_0$  و h نشان داده شدهاند. بار اعمالی بر ورق، باری گسترده و عرضی به شدت p بر واحد سطح است. هندسه و بارگذاری دارای تقارن محوری پنداشته شده و از دستگاه مختصات استوانهای برای تحلیل مسئله استفاده شده است.



شکل(۱): هندسه و بارگذاری ورق حلقوی مورد بررسی.

## ۲-۲- توصیف چگونگی تغییرات ویژگیهـای مکـانیکی مواد ورق

ویژگیهای مکانیکی ماده هدفمند در دو راستای شعاعی و عرضی، به صورت هموار و پیوسته تغییر میکنند. مدلهای متفاوتی برای مدلسازی این تغییرات ارائه شدهاند. برخی محققین از مدل موری- تاناکا<sup>۱</sup> برای تعیین تغییرات تدریجی خواص ماده در امتداد ضخامت استفاده کردهاند. بسیاری از محققین نیز از مدلهای تابع توانی<sup>۲</sup>، تابع هلالی (S مانند)<sup>۲</sup> یا تابع نمایی<sup>1</sup> استفاده نمودهاند [۱۹– ۱۵].

همچنین در مقاله حاضر، تابع توزیع تغییرات خواص مکانیکی در دو راستای ضخامت و شعاعی، به صورت تابع نمایی در نظر گرفته شده است. فرم این توابع برای مدول الاستیسیته و چگالی جرمی در رابطه (۱) آورده شده است:

ponential

www.SID.ir

$$E(r,z) = E_0 e^{m_1 \left(\frac{z+h/2}{h}\right) + n_1 \left(\frac{r-a}{b-a}\right)}$$
(1)  

$$\rho(r,z) = \rho_0 e^{m_2 \left(\frac{z+h/2}{h}\right) + n_2 \left(\frac{r-a}{b-a}\right)},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{m_2 \left(\frac{z+h/2}{h}\right) + n_2 \left(\frac{r-a}{b-a}\right)},$$

و  $E_1$  و (r=a,z=h/2) و (r=a,z=h/2) به ترتیب برابر با  $E_1$  و (r=a,z=h/2) باشند، آنگاه خواهیم داشت:

$$m_{1} = \ln\left(\frac{E_{1}}{E_{0}}\right)$$

$$n_{1} = \ln\left(\frac{E_{2}}{E_{0}}\right).$$
(7)

روابط مشابهی برای تعیین توانهای رابطه چگالی جرمـی قابـل ارائه میباشند.

#### ۲-۳- استخراج معادلات حاکم

میدان جابهجایی بر پایه تئوری کلاسیک، به صورت رابطـه (۳) در نظر گرفته شده است [۲۳-۲۰]:

$$u_{r}(r,\theta,z,t) = u_{0}(r,\theta,t) - z \frac{\partial w_{0}}{\partial r}$$

$$u_{\theta}(r,\theta,z,t) = v_{0}(r,\theta,t) - z \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w_{0}}{\partial \theta}\right)$$

$$u_{z}(r,\theta,z,t) = w_{0}(r,\theta,t),$$
(7)

که در این رابطه، ۵۵ مؤلفه شعاعی جابهجایی، ۷۵ مؤلف محیطی جابهجایی و ۵۵ مؤلفه عرضی جابهجایی ورق هدفمند می اشند و z از لایه میانی ورق اندازه گیری می شود. معادلات ارائه شده در رابطه (۳) مربوط به حالت کلی بوده و برای حالت ورق متقارن به فرم رابطه (۴) آشکار می شوند:

$$\begin{cases} u_r(r,z,t) = u_0(r,t) - z \frac{\partial w_0}{\partial r} \\ u_z(r,z,t) = w_0(r,t). \end{cases}$$
(\*)

در این تحقیق برای افزایش دقت محاسبات از فرض متداول جابهجاییهای بسیار کوچک استفاده نشده است. در ورق دایرهای متقارن، روابط کرنش- جابهجایی غیرخطی فون کارمن برای جابهجاییهای متوسط طبق رابطه (۵) میباشند:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^{(0)} &= \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial r} \right)^2, \ \varepsilon_{rr}^{(1)} &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(0)} &= \frac{u_0}{r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} &= -\frac{1}{r} \left( \frac{\partial w_0}{\partial r} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\Delta) \\ \gamma_{r\theta}^{(0)} &= 0, \quad \gamma_{r\theta}^{(1)} &= 0 \end{aligned}$$

<sup>1-</sup> Mori-Tanaka

<sup>2-</sup> Power-Law 3- Sigmoid

<sup>4-</sup> Exponential

برای استخراج معادلات حاکم بر ورق، از اصل هامیلتون استفاده شده که ارتباط نمو سه کمیت انرژی پتانسیل (U)، انرژی جنبشی (V) و کار نیروهای خارجی (K) در سیستمهای پایاستار را برقرار میسازد.

$$\int_{0}^{\infty} (\delta U + \delta V - \delta K) dt = 0.$$
 (۶)  
که در آن:

$$\delta U = \int_{0}^{t} \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{rr} \delta \varepsilon_{rr} + \sigma_{\theta\theta} \delta \varepsilon_{\theta\theta} + \sigma_{r\theta} \delta \gamma_{r\theta}) dz dr d\theta dt$$
  
$$\delta T = -\int_{0}^{t} \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho (\dot{u}_{r} \delta \dot{u}_{r} + \dot{u}_{\theta} \delta \dot{u}_{\theta} + \dot{u}_{z} \delta \dot{u}_{z}) dz dr d\theta dt \qquad (Y$$
  
$$\delta K = -\int_{0}^{t} \int_{\Omega} \delta w r dr d\theta dt.$$

$$\begin{split} &\sum_{j_0} \int_{\Omega} q entine dat, \\ &\int_{0} \int_{\Omega} q entine dat, \\ &\sum_{i=1}^{j_0} \int_{\Omega} Q entine dat, \\ &\sum_{i=1}^{j_0} \int_{\Omega} \left[ N_i \left( \frac{\partial \omega_0}{\partial r} + \frac{\partial w_0}{\partial r} \frac{\partial \delta v_0}{\partial r} \right) + N_{\theta\theta} \left( \frac{\partial \omega_0}{r} \right) \\ &\int_{0} \int_{\Omega} \left[ N_i \left( \frac{\partial \delta u_0}{\partial r} + \frac{\partial w_0}{\partial r} \frac{\partial \delta v_0}{\partial r} \right) + N_{\theta\theta} \left( \frac{\partial u_0}{r} \right) \\ &- M_i \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial r^2} - \frac{1}{r} M_{\theta\theta} \left( \frac{\partial \delta w_0}{\partial r} \right) - \frac{2}{r} M_i \left( \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial \theta r} \right) \right] r dr dt \\ &\delta T = - \int_{0}^{t} \int_{\Omega} \left( I_0(u_0 \delta u_0 + w_0 \delta w_0) + I_2(\frac{\partial w_0}{\partial r} \frac{\partial \delta w_0}{\partial r} \right) r dr dt \\ &\delta K = \int_{0}^{t} \int_{\Omega} \left( I_0(u_0 \delta u_0 + w_0 \delta w_0) + I_2(\frac{\partial w_0}{\partial r} \frac{\partial \delta w_0}{\partial r} \right) r dr dt \end{split}$$

$$N_{rr} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{h}} \sigma_{rr} dz; \qquad M_{rr} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{h}} z \, \sigma_{rr} dz;$$

$$N_{\theta\theta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\theta\theta} dz; \qquad M_{\theta\theta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \, \sigma_{\theta\theta} dz;. \qquad (9)$$

$$N_{r\theta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{r\theta} dz; \qquad M_{r\theta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \, \sigma_{r\theta} dz;$$

در شکل ۲ المان سهبعدی ورق دایروی به همراه نیروها و گشتاورها بر واحد طول، نشان داده شده است.



شکل (۲): کمیتهای نیرو و گشتاور بر واحد طول المان.

www.SID.ir

با جایگذاری رابطـه (۸) در رابطـه (۶)، معـادلات حـاکم بـر ورق مورد نظر بـا اسـتفاده از اصـل هـامیلتون بـه صـورت زیـر به دست میآیند:

$$\begin{split} \delta u_{0} &: -\frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r N_{\pi}) - N_{\theta \theta} \right] + I_{0} \frac{\partial^{2} u_{0}}{\partial t^{2}} = 0 \\ \delta w_{0} &: -\frac{1}{r} \left[ \frac{\partial^{2}}{\partial r^{2}} (r M_{\pi}) + \frac{\partial M_{\theta \theta}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r N_{\pi} \frac{\partial w_{0}}{\partial r} \right) \right] - q + I_{0} \frac{\partial^{2} w_{0}}{\partial t^{2}} \qquad (1 \cdot ) \\ - I_{2} \frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w_{0}}{\partial r} \right) \right] = 0. \end{split}$$

با جایگذاری رابطه (۱) برای توزیع مدول الاستیسیته و چگالی در روابط حاصله، معادلات حاکم به دست میآیند. فرم باز شده رابطه (۱۰) به صورت رابطه (۱۱) است:

$$\begin{aligned} \delta u_{0} &: -\frac{1}{r} \left( N_{\pi} + r \frac{\partial N_{\pi}}{\partial r} - N_{\theta \theta} \right) + I_{0} \frac{\partial^{2} u_{0}}{\partial t^{2}} = 0 \Longrightarrow \\ &- \frac{N_{\pi}}{r} - \frac{\partial N_{\pi}}{\partial r} + N_{\theta \theta} + I_{0} \frac{\partial^{2} u_{0}}{\partial t^{2}} = 0 \\ \delta v_{0} &: -\frac{1}{r} \left[ \frac{\partial^{2}}{\partial r^{2}} (rM_{\pi}) + \frac{\partial M_{\theta \theta}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left( rN_{\pi} \frac{\partial v_{o}}{\partial r} \right) \right] \end{aligned}$$
(11)  
$$- q + I_{0} \frac{\partial^{2} w_{0}}{\partial t^{2}} - I_{2} \frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w_{o}}{\partial r} \right) \right] = 0 \Longrightarrow \\ \frac{2}{r} \frac{\partial M_{\pi}}{\partial r} - \frac{\partial^{2} M_{\pi}}{\partial r^{2}} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{\theta \theta}}{\partial r} - \frac{N_{\pi}}{r} \frac{\partial w_{o}}{\partial r} - \frac{\partial N_{\pi}}{\partial r} \frac{\partial w_{o}}{\partial r} - \\ N_{\pi} \frac{\partial w_{o}}{\partial r^{2}} - q + I_{0} \frac{\partial^{2} w_{0}}{\partial t^{2}} - \frac{I_{2}}{r} \frac{\partial w_{o}}{\partial r \partial t^{2}} - I_{2} \frac{\partial w_{o}}{\partial r^{2} \partial t^{2}} = 0. \end{aligned}$$

در نهایت با جایگزینی عبارات نیرو و گشتاور بر واحد طول با همارز آنها از عبارات جابهجایی، معادلات حاکم بر ورق دایروی هدفمند دوجهته بر حسب دو متغیر مکانی شعاعی و عرضی استخراج میشوند که به علت گستردگی، روابط در بخش پیوست آورده شدهاند.

که در آن، δ بردار کمیتهای جابهجایی مجهـول و (K(δ مـاتریس سفتی و F نیز بردار کمیـتهـای سـمت دوم تسـاوی (بـردار نیـرو) است.

برای یافتن فرم تفاضل محدود معادلات دیفرانسیل حاکم ارائه شده، باید از یکی از روشهای گسستهسازی استفاده شود. در این مقاله از روش تفاضل محدود برای این منظور استفاده شده است. در این روش، ابتدا ناحیه حل به شبکهای از نقاط گره که

معادلات حاکم در هر یک از نقاط گره آن برقرار است، تجزیه می شود. بسته به موقیت نقطه گره نسبت به مرزها، از یکی از سه گونه تقریب زیر برای جایگزینی عبارات مشتق معادلات حاکم بر جابه جایی های ورق استفاده می شود [۲۳ و ۲۴]:

- تفاضل پيشرو
- تفاضل مرکزی<sup>۲</sup>
  - تفاضل پسرو<sup>۳</sup>

در این روش، مشتقات به کمک روابطی که در مراجع محاسبات عددی [۲۳ و ۲۴] ارائه شدهاند، تقریب زده می شوند. فرم تفاضل محدود معادلات حاکم بر هر نقطه گره بر پایه هر یک از سه نوع تقریب یاد شده، در بخش پیوست آورده شده است. با توجه به اینکه روابط آشکار شده در بخش پیوست، شامل عبارات غیرخطی به فرم حاصل ضرب و توانی می باشند، برای دستیایی به دستگاهی به فرم رابطه (۱۲) لازم است از شیوه مناسبی بهره جیست. برای نمونه، توان سوم مشتق w نسبت به r به صورت توان دوم ضرب در توان اول نوشته شده، و توان اول مشتق جدا شده را بر پایه روابط اجزاء محدود تبدیل نموده ولی توان دوم را در ماتریس سفتی ( (K(δ)) به عنوان کمیت معلوم جای می دهند. در ارتباط با عبارات حاصل ضرب دیگر نیز می توان یکی از دو عبارت را در ماتریس

برای حل دستگاه معادلات (۱۲)، از روش تکرار استفاده شده است. بدین گونه که ابتدا بردار  $\delta$  حدس زده شده است (برای مثال، بردار صفر). سپس ماتریس ضراب ( $K(\delta)$  تشکیل و با حل دستگاه معادلات (۱۲)، مقدار جدیدی برای بردار  $\delta$  به دست میآید. بر پایه این مقدار، ماتریس ضرائب ( $K(\delta)$  به دو تمدار دقیق تری برای بردار  $\delta$  حاصل میشود. این روال تا پایا شدن بردار  $\delta$  ادامه می یابد. معیار همگرایی برای مثال می تواند طبق رابطه (۱۳) انتخاب شود:

$$\operatorname{Max} \frac{\left| \delta_{i}^{t+1} - \delta_{i}^{t} \right|}{\left| \delta_{i}^{t+1} \right|} \leq \beta, \tag{17}$$

که در آن، i شمارنده مؤلفه جابهجایی، k شمارنده مرحله تکرار و عدد بسیار کوچکی است که در پژوهش کنونی برابر با ۰/۰۰۰۰ اختیار شده است.

همانگونه که ملاحظه میشود، مقدار عناصر ماتریس ضرائب (δ) (از جمله، بخشهایی از عبارات غیرخطی که در این ماتریس جای داده شدهاند)، بر پایه مقادیر بردار δ مرحله قبل که بردار کاملاً معلومی است، تعیین میشود.

www.SID.ir

۴- نتایج

در این بخش، برای صحه گذاری و استخراج نتایج، از ترکیبی از مواد با ویژگیهای مکانیکی زیر استفاده شده است:  $E_m = 70$  GPa,  $E_c = 427$  GPa, v = 0.3,  $r_i = 10$  mm,  $r_o = 50$  mm, h = 7.5 mm 50 cm, n = 7.5 mm c = 10 mm,  $r_o = 50$  mm, h = 7.5 mm c = 10 mm,  $r_o = 50$  mm, h = 7.5 mm c = 10 mm,  $r_o = 50$  mm, h = 7.5 mm c = 10 mm,  $r_o = 50$  mm, h = 7.5 mm c = 10 mm,  $r_o = 50$  mm, h = 7.5 mm c = 10 mm,  $r_o = 50$  mm, h = 7.5 mm c = 10 mm,  $r_o = 50$  mm, h = 7.5 mm c = 10 mm,  $r_o = 50$  mm, h = 7.5 mm c = 10 mm,  $r_o = 50$  mm, h = 7.5 mm c = 10 mm,  $r_o = 50$  mm, h = 7.5 mm c = 10 mm,  $r_o = 50$  mm, h = 7.5 mm c = 10 mm,  $r_o = 50$  mm, h = 7.5 mm c = 10 mm c =

### ۴- ۱- ورق ساخته شده از مواد همسانگرد

در اولین گام صحه گذاری، نتایج تئوری کنونی با نتایج مرجع [۱۴] و نتایج نرمافزار اجزاء محدود آباکوس مقایسه شدهاند. با توجه به اینکه شکل هندسی مسئله و بارگذاری آن متقارن است، میتوان این مسئله را با المانهای حجمی متقارن<sup>†</sup> سهبعدی درجه سه هشت گرهی (CAX8R) حل کرد ولی برای ارائه یک روش کلی، اقدام به حل آن با استفاده از المان حجمی سهبعدی شده است.

نتایج بی بعد شده ورق ساخته شده از ماده فلزی خالص در شکل ۳ و نتایج مربوط به ورق ساخته شده از ماده سرامیکی خالص در شکل ۴ نمایش داده شدهاند. در شکل ۵ نیز نحوه تغییرات خیز به دست آمده در نرمافزار آباکوس برای ورق سرامیکی نشان داده شده است.



4 Axisymmetric Solid Element

<sup>1-</sup> Forward Difference

<sup>2-</sup> Central Difference 3- Backward Difference

<sup>3-</sup> Backward Difference



شکل (۴): مقایسهای میان نتایج خیز بیبعد صفحه میانی ورق سرامیکی خالص.

همان گونه که انتظار می فت، از مقایسه نتایج شکلهای ۳ و ۴ می توان نتیجه گرفت که با توجه به بزرگتر بودن مدول الاستيسيته مواد سراميكي، ميزان خيز بيشينه در ورق سراميكي نسبت به ورق فلزی کاهش یافته است. همچنین تغییر نوع مواد، تأثیر اندکی بر مکان خیز بیشینه داشته است. مقایسه نتایج نشان داده شده در شکلهای ۳ و ۴ نشان میدهد که تطابق خوبی میان نتایج برقرار است. از آنجا که نتایج نرمافزار آباکوس بر یایه تئوری الاستیسیته سهبعدی به دست آمدهاند، نتایج بسیار دقیقی میباشند. بزرگترین اختلاف نتایج کنونی با نتایج نرمافزار آباکوس، با وجود آنکه ورق بررسی شـده نسـبتاً ضـخیم میباشد، برای ورقهای فلزی و سرامیکی به ترتیب در حدود ۲/۵ و ۶ درصد می باشند. نتایج کنونی، حدوداً مقادیر خیزی مابین نتایج نرمافزار آباکوس و نتایج مرجع [۱۴] پیشبینی مینمایند. از سوی دیگر، نتایج کنونی، مکان خیز بیشینه را اندکی متمایل تر به مرز داخلی نشان میدهند و در حقیقت همان مقطع است که تحلیل می شود (با توجه به اینکه مستقل از δ است).



**شکل (۵):** شکل اولیه و خیزیافته ورق سرامیکی با استفاده از نرمافزار آباکوس.

با توجه به شکلهای ۵–۳ به دلیل شرایط غیریکسان (سفتی خمشی نابرابر) در مجاورت مرزهای داخلی و خارجی، خیز بیشینه در شعاع میانی ورق روی نمیدهد. در حقیقت، با توجه به نوع تکیهگاههای ورق، صلبیت کلی ورق در مجاورت مرز خارجی بیشتر بوده و امکان جابهجایی پیرامون ناحیه مجاور مرز داخلی بیشتر است.

### ۲-۴- اثر تغییرات عرضی ویژگیهای مواد بر خیز

برای بررسی میزان تأثیر تغییرات عرضی ویژگیهای مواد هدفمند بر خیز ورق، سه حالت متناظر با مقادیر ۰۱،۰/۵ و ۲ برای توان m در نظر گرفته شده و نتایج مرتبط به ترتیب در شکلهای ۸-۶ نشان داده شدهاند.

با بررسی نتایج نشان داده شده در شکلهای ۸-۶ مشاهده میشود که خیز بیشینه با افزایش m و در نتیجه افزایش مـدول الاستیسیته در راستای ضخامت، کاهش مییابد.

از مقایسه نتایج کنونی با نتایج نرمافزار آباکوس مشخص میشود که حداکثر خطای حاصل، در حدود ۷ درصد است. بنابراین، جوابهای کنونی از دقت خوبی برخوردار میباشند.







**شکل (۸):** مقایسه نتایج کنونی خیز بیبعد صفحه میانی ورق هدفمند (m=۲) با نتایج نرم افزار آباکوس.

با مشاهده نمودارهای رسم شده برای مقادیر مختلف m مشخص می شود که مقادیر خیز با افزایش پارامتر m به طور مرتب کاهش می یابند. همچنین از نتایج یاد شده می توان دریافت که تغییرات عرضی ویژگیهای مواد می توانند مکان خیز بیشینه را تغییر دهد. نتایج به دست آمده (به ویژه، نتایج به دست آمده از نرمافزار آباکوس)، نشان می دهند که با افزایش توان m، اثر تکیه گاه خارجی بر نحوه تغییرات خیز ناحیه پیرامونی، به صورت بارزتری آشکار می شود.

### ۴- ۳- اثر تغییرات شعاعی ویژگیهای مواد بر خیز

برای مقایسه میزان تفاوت تأثیر توانهای متناظر با تغییرات ویژگیهای مواد در راستای ضخامت و تغییرات در راستای شعاعی (m و n)، نمودارهایی همزمان برای مقادیر یکسان m و n رسم و با یکدیگر مقایسه شدهاند. نمودارهای به دست آمده برای مقادیر ۰/۵ و ۱، به ترتیب در شکلهای ۹ و ۱۰ نشان داده شدهاند. همانگونه که مشاهده میشود، خیز بیشینه زمانی که ویژگیهای مواد در راستای شعاعی تغییر مینمایند، کاهش بیشتری نسبت به حالتی که تغییرات در راستای ضخامت است، نشان داده و مکان خیا بیشینه به سمت تکیه گاه ساده متمایل تر میشود.

## ۴–۴– ورق هدفمند با تغییرات همزمان شعاعی و عرضـی ویژگیهای مواد

در این بخش، به بررسی اثر تغییرات همزمان ویژگیهای مواد در دو راستای عرض و شعاعی پرداخته شده است. نتایج خیز به دست آمده برای مقادیر یکسان و متفاوت m و n در شکلهای ۱۴- ۱۱ نشان داده شدهاند.



**شکل (۹):** مقایسه جابهجاییهای بیبعد دو ورق هدفمند یکجهته با m=۰/۵ و m=۰/۵.





با توجه به شکلهای ۱۱ و ۱۲ مشخص می شود که وقتی خواص ورق در راستاهای ضخامت وشعاعی تغییر میکند، با افزایش همزمان m و n خیز بیشینه کاهش یافته و مکان آن به سمت شعاع داخلی با مدول الاستیسیته کمتر جابهجا می شود.

ورق دایرهای توخالی در نظر گرفته شده، در مجاورت تکیهگاه داخلی بزرگتر بوده و در اثر بار گسترده وارده، مکان خیز بیشینه به سمت تکیهگاه ساده در شعاع داخلی متمایل میشود. همچنین، با افزایش توان m که بیانگر تغییرات ویژگیهای مواد در راستای ضخامت میباشد، خیز بیشینه کاهش مییابد. نتایج نشان میدهند که برای مقادیر برابری از توانهای تغییرات ویژگیهای مواد در دو راستای شعاعی و ضخامت، اثر توان تغییرات در جهت شعاعی (n) بارزتر است. با افزایش مقدار n خیز بیشینه کاهش یافته و مکان آن به سمت شعاع داخلی تغییر مکان میدهد.

در حالت کلی، زمانی که تغییرات خواص ورق در هر دو راستای ضخامت و شعاعی مورد نظر قرار گیرند، همان طور که از نمودارها مشخص است با افزایش همزمان m و n، خیـز بیشینه کاهش یافته و مکان آن به سمت شعاع داخلی متمایل میشود.

- 6- مراجع
- Bever, M.B. and Duwez, P.E. "Gradients in Composite Materials", Mater. Sci. Eng., Vol. 10, No. 1, pp. 1–8, 1972.
- Tanaka, K., Tanaka, Y., Watanabe, H., Poterasu, V.F. and Sugano, Y. "An Improved Solution to Thermoelastic Material Design in Functionally Gradient Materials: Scheme to Reduce Thermal stresses", Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 109, No's. 3-4, pp. 377-389, 1993.
- Obata, Y. and Noda, N. "Steady Thermal Stresses in a Hollow Circular Cylinder and a Hollow Sphere of Functionally Gradient Material". J. Therm. Stresses, Vol. 17, No. 3, pp. 471–87, 1994.
- Ishikawa, T. "Thermal Deformation and Thermal Stress of FGM Plates under Steady Graded Temperature Field", Proc. 1<sup>st</sup> Int. Symp. On FGM, 1990.
- Takezono, S., Tao, K., Inamura, E. and Inoue, M. "Thermal Stress and Deformation In Functionally Graded Material Shells of Revolution under Thermal Loading Due To Fluid", JSME Int. J. Series A: Mech. Mater. Eng., Vol. 39, No. 4, pp. 573-581, 1996.
- Wetherhold, R.C., Seelman, S. and Wang, J. "The Use of Functionally Graded Materials to Eliminate or Control Thermal Deformation", Compos. Sci. Tech., Vol. 56, No. 9, pp. 1099-1104, 1996.
- Praveen, G.V. and Reddy, J.N. "Nonlinear Transient Thermoelastic Analysis of Functionally Graded Ceramic-Metal Plates", Int. J. Solids Struct., Vol. 35, No. 33, pp. 4457-4476, 1998.
- Woo, J. and Meguid, S.A. "Nonlinear Analysis of Functionally Graded Plates and Shallow Shells", Int. J. Solids Struct. Vol. 38, No's. 42-43, pp. 7409-7421, 2001.
- 9. Chakraborty, A., Gopalakrishnan, S., and Reddy J.N. "A New Beam Finite Element for the Analysis



شکل (۱۲): مقایسه خیزهای بیبعد ورق هدفمند یکجهته

با n=۱ و ورق هدفمند دوجهته با m=۱ و n=۱.



سکل ( ۱۱): مفایسه خیر بیبعد ورق هدفمند با نوانهای مختلف تغییرات شعاعی و عرضی ویژگیهای مواد.



سکل (۱۴): مفایسه خیر بیبعد ورق هدفمند با توانهای مختلف تغییرات شعاعی و عرضی ویژگیهای مواد.

## ۵– نتیجه گیری

نتایج روش ارائه شده با نتایج مراجع معتبر موجود برای حالتهای ویژه مقایسه و صحهگذاری شدند. همچنین، مقایسه نتایج به دست آمده با نتایج نرمافزار آباکوس بیانگر خطای قابل چشمپوشی نتایج تحلیل غیرخطی کنونی نسبت به تئوری الاستیسیته میباشد. بر اساس تحلیلهای انجام شده، صلبیت

- Yamanouchi, M., Koizumi, M., Hirai, T. and Shiota I. "Proc. of the First Int. Sympos. Functionally Gradient Materials, 1990.
- Agarwal, S., Chakraborty, A. and Gopalakrishnan, S. "Large Deformation Analysis for Anisotropic and Inhomogeneous Beams Using Exact Linear Static Solutions", Compos. Struct., Vol. 72, No. 1, pp. 91-104, 2006.
- Ventsel, E. and Krauthammar, T. "Thin Plates and Shells, Theory, Analysis and Application", Mcgraw-Hill, 2001.
- Reddy, J.N. "Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells Theory and Analysis", CRC Press, 1997.
- 21. Reddy, J.N. "Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells", CRC Press, 2007.
- 22. Reddy, J.N. "Introduction to the Finite Element Method", 3<sup>rd</sup> Ed., Mcgraw-Hill, 2006.
- Gerald, C.F. and Wheatley, P.O. "Applied Numerical Analysis", Addision Wesley Longman. Inc., 1997
- Li, Z. "Finite Difference Methods Basics", Center for Research in Scientific Computation & Department of Mathematics North Carolina State Univ., 1998.

of Functionally Graded Materials", Int. J. Mech. Sci, Vol. 45, No. 3, pp. 519-539, 2003.

- Chi, S.H. and Chung, Y.L. "Mechanical Behavior of Functionally Graded Material Plates under Transverse Load-Part I: Analysis", Int. J. of Solids and Struct. Vol. 43, No. 13, pp. 3657-3674, 2005.
- Alinia, M.M. and Ghannadpour, S.A.M. "Nonlinear Analysis of Pressure Loaded FGM Plates", Compos. Struct., Vol. 88, No. 3, pp. 354-359, 2009.
- Nie, G. and Zhong, Z. "Axisymmetric Bending of Two-Directional Functionally Graded Circular and Annular Plates", Acta Mechanica Solida Sinica, Vol. 20, No. 4, pp. 289–295, 2007.
- Nie, G. and Zhong, Z. "Dynamic Analysis of Multi-Directional Functionally Graded Annular Plates", Appl. Math. Modell. Vol. 34, No. 3, pp. 608-616, 2010.
- Golmakani, M.E. and Kadkhodayan, M.. "Nonlinear Bending Analysis of Annular FGM Plates Using Higher-Order Shear Deformation Plate Theories", Compos. Struct., Vol. 93, No. 2, pp. 973-982, 2011.
- Suresh, S. and Mortensen, A. "Fundamentals of Functionally Graded Materials", Proc. Thermomechanical Behavior of Graded Metals and Metal-Ceramic Composites, IOM Communications Ltd., London, 1998.
- Munir Z.A., Hai W.N., Risbund, S.H., and Mccoy B.J. "Centrifugal Synthesis and Processing of FGM", US Patent, 2000.

پ ۱- فرم تفاضل محدود معادلات حاکم بر ورق گرد توخالی هدفمند با تغییرات دوجهته ویژگیهای مواد

فرم باز شده معادلات حاکم بر جابهجاییهای هر نقطه از ورق، مطابق رابطه (پ ۱) است.

$$\begin{split} \delta u_{0} &: -\frac{1}{1-\nu^{2}} \Biggl[ -\frac{1}{r} \frac{\partial u_{0}}{\partial r} - \frac{1}{2r} \Biggl( \frac{\partial w_{0}}{\partial r} \Biggr)^{2} - \frac{\nu}{r^{2}} u_{0} \Biggr] \frac{E_{0}h}{m_{1}} e^{n_{1} \left( \frac{r-a}{b} \right)} (e^{m_{1}} - 1) + \frac{1}{1-\nu^{2}} \Biggl( \frac{1}{r} \frac{\partial^{2}w_{0}}{\partial r^{2}} + \frac{\nu}{r^{2}} \frac{\partial w_{0}}{\partial r} - \frac{\nu}{r^{2}} u_{0} \Biggr) \frac{E_{0}h^{2}}{m_{1}} e^{n_{1} \left( \frac{r-a}{b} \right)} \\ &\left( \frac{1}{2} e^{m_{1}} - \frac{1}{m_{1}} e^{m_{1}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{m_{1}} \Biggr) - \frac{1}{1-\nu^{2}} \Biggl( \frac{\partial^{2}u_{0}}{\partial r^{2}} + \frac{\partial w_{0}}{\partial r} \frac{\partial^{3}w_{0}}{\partial r^{2}} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial u_{0}}{\partial r} - \frac{\nu}{r^{2}} u_{0} \Biggr) \frac{E_{0}h}{m_{1}} e^{n_{1} \left( \frac{r-a}{b} \right)} (e^{m_{1}} - 1) + \frac{1}{1-\nu^{2}} \Biggl( \frac{\partial^{3}w_{0}}{\partial r} - \frac{\nu}{r^{2}} \frac{\partial w_{0}}{\partial r} - \frac{\nu}{r^{2}} \frac{\partial w_{0}}{\partial r} \Biggr) \\ &+ \frac{\nu}{r} \frac{\partial^{2}w_{0}}{\partial r^{2}} \Biggr) \frac{E_{0}h^{2}}{m_{1}} e^{n_{1} \left( \frac{r-a}{b} \right)} \times \Biggl( \frac{1}{2} e^{m_{1}} - \frac{1}{m_{1}} e^{m_{1}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{m_{1}} \Biggr) + \frac{1}{1-\nu^{2}} \Biggl( \frac{\partial^{2}w_{0}}{\partial r^{2}} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w_{0}}{\partial r} \Biggr) \Biggl( \frac{1}{2} e^{m_{1}} - \frac{1}{m_{1}} e^{m_{1}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{m_{1}} \Biggr) \frac{E_{0}h^{2}}{m_{1}b} e^{n_{1} \left( \frac{r-a}{b} \right)} \\ &+ \frac{1}{1-\nu^{2}} \Biggl[ \frac{\nu}{r} \frac{\partial u_{0}}{\partial r^{2}} + \frac{\nu}{2r} \Biggl( \frac{\partial w_{0}}{\partial r} \Biggr)^{2} + \frac{u_{0}}{r^{2}} \Biggr] \frac{E_{0}h}{m_{1}} e^{n_{1} \left( \frac{r-a}{b} \right)} (e^{m_{1}} - 1) - \frac{1}{1-\nu^{2}} \Biggl( \frac{\nu}{r} \frac{\partial^{2}w_{0}}{\partial r^{2}} + \frac{1}{r^{2}} \frac{\partial w_{0}}{\partial r} \Biggr) \Biggl( \frac{1}{2} e^{m_{1}} - \frac{1}{m_{1}} e^{m_{1}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{m_{1}} \Biggr) \frac{E_{0}h^{2}}{m_{1}b} e^{n_{1} \left( \frac{r-a}{b} \right)} \\ &+ \frac{1}{1-\nu^{2}} \Biggl[ \frac{\nu}{r} \frac{\partial u_{0}}{\partial r^{2}} + \frac{\nu}{2r} \Biggl( \frac{\partial w_{0}}{\partial r} \Biggr)^{2} + \frac{u_{0}}{r^{2}} \Biggr] \frac{E_{0}h}{m_{1}} e^{n_{1} \left( \frac{r-a}{b} \right)} (e^{m_{1}} - 1) - \frac{1}{1-\nu^{2}} \Biggl( \frac{\nu}{r} \frac{\partial^{2}w_{0}}{\partial r^{2}} + \frac{1}{r^{2}} \frac{\partial w_{0}}{\partial r} \Biggr) \Biggl( \frac{1}{2} e^{m_{1}} - \frac{1}{m_{1}} e^{m_{1}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{m_{1}} \Biggr) \frac{E_{0}h^{2}}{m_{1}} e^{n_{1} \left( \frac{r-a}{b} \right)} \\ &+ \frac{\mu}{p_{0}h} e^{n_{2} \left( \frac{r-a}{b} \right)} (e^{m_{2}} - 1) \frac{\partial^{2}u_{0}}{\partial r^{2}} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{split} \delta v_{0} : & \frac{2}{1-\nu'} \Big[ \frac{1}{r} \frac{\partial u_{0}}{\partial x^{2}} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial u_{0}}{\partial x} - \frac{\nu}{r'} u_{0} \Big) \Big[ \frac{1}{2} e^{n} - \frac{1}{m_{t}} e^{n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{m_{t}} \Big) \frac{E_{t}h^{2}}{m_{t}} e^{n\left(\frac{\pi}{r}\right)^{2}} - \frac{2}{1-\nu'} \Big[ \frac{1}{r} \frac{\partial u_{0}}{\partial x} - \frac{\nu}{r^{2}} \frac{\partial u_{0}}{\partial x} - \frac{2}{r^{2}} \Big] \\ & + \frac{1}{2} \Big( \frac{\partial u_{0}}{\partial x} \Big)^{2} + \frac{\nu}{r^{2}} u_{0} \Big] \Big[ \frac{1}{2} e^{n} - \frac{1}{m_{t}} e^{n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{m_{t}} \Big) \frac{E_{t}h^{2}}{m^{2}} e^{n\left(\frac{\pi}{r}\right)^{2}} + \frac{2}{r^{2}} \frac{\partial u_{0}}{\partial x} + \frac{\nu}{r^{2}} \frac{\partial u_{0}}}{\partial x} + \frac{\nu}{r^{2}} \frac{\partial u$$



**شکل (پ-۱):** نمایش هندسی پایه سه شیوه تقریب تفاضل محدود.

بر پایه شکل پ-۱، روابط تبدیل مشتقات برای نقطه گره i در هر یک از شیوههای تقریب پسرو، پیشرو و مرکزی از روابط (پ-۲) تا (پ-۴) به دست می آیند [۲۳]: - حلقه پسرو:  $\frac{\partial w_i}{\partial r} = \frac{w_i - w_{i-1}}{h};$  $\frac{\partial^2 w_i}{\partial r^2} = \frac{w_i - 2w_{i-1} + w_{i-2}}{h^2};$ (پ-۲)  $\frac{\partial^3 w_i}{\partial r^3} = \frac{w_i - 3w_{i-1} + 3w_{i-2} - w_{i-3}}{h^3};$  $\frac{\partial^4 w_i}{\partial r^4} = \frac{w_i - 4w_{i-1} + 6w_{i-2} - 4w_{i-3} + w_{i-4}}{\mu^4};$ 170 - حلقه پيشرو:  $\frac{\partial w_i}{\partial r} = \frac{w_{i+1} - w_i}{h};$  $\frac{\partial^2 w_i}{\partial r^2} = \frac{w_{i+2} - 2w_{i+1} + w_i}{h^2};$ (پ-۳)  $\frac{\partial^3 w_i}{\partial r^3} = \frac{w_{i+3} - 3w_{i+2} + 3w_{i+1} - w_i}{h^3}$  $\frac{\partial^4 w_i}{\partial r^4} = \frac{w_{i+4} - 4w_{i+3} + 6w_{i+2} - 4w_{i+1} + w_i}{h^4};$ - حلقه مرکزی:  $\frac{\partial w_i}{\partial r} = \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h}$  $\frac{\partial^2 w_i}{\partial r^2} = \frac{w_{i+2} - 2w_i + w_{i-2}}{4h^2};$ (پ-۴)  $\frac{\partial^3 w_i}{\partial r^3} = \frac{w_{i+3} - 3w_{i+1} + 3w_{i-1} - w_{i-3}}{8h^3};$  $\frac{\partial^4 w_i}{\partial r^4} = \frac{w_{i+4} - 4w_{i+2} + 6w_i - 4w_{i-2} + w_{i-4}}{16h^4};$ 

با جایگذاری روابط (پ-۲) تا (پ-۴) در دو معادله حاکم بر هریک از نقاط گره (رابطه پ-۱)، روابط تفاضل محدود با داشتن ضرایب تعریف شده در روابط (پ-۵) و (پ-۶) حاصل میگردند: - پارامترهای تعریف شده جهت اختصار معادله حاکم اول: www.SID.ir

$$\begin{aligned} A_{1} &= E_{0} \left( h / m_{1} \right) \left( e^{m_{1}} - 1 \right) e^{n_{1} \frac{r-a}{b-a}}, \ B_{1} &= E_{0} \left( h^{2} / m_{1} \right) \left( \frac{1}{2} e^{m_{1}} - \frac{1}{m_{1}} e^{m_{1}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{m_{1}} \right) e^{n_{1} \frac{r-a}{b-a}}, \\ H_{1} &= \rho_{0} \left( h / m_{2} \right) \left( e^{m_{2}} - 1 \right) e^{n_{2} \frac{r-a}{b-a}}, \ E_{1} &= \frac{E_{0} n_{1} h^{2}}{m_{1} (b-a)} \left( \frac{1}{2} e^{m_{1}} - \frac{1}{m_{1}} e^{m_{1}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{m_{1}} \right) e^{n_{1} \frac{r-a}{b-a}}, \\ I_{1} &= \frac{E_{0} n_{1} h}{m_{1} (b-a)} \left( e^{m_{1}} - 1 \right) e^{n_{1} \frac{r-a}{b-a}}, \ D_{1} &= B_{1}, \ G_{1} &= B_{1}, \ C_{1} &= A_{1}, \ F_{1} &= A_{1} \end{aligned}$$

- پارامترهای تعریف شده جهت اختصار معادله حاکم دوم:

$$Z = E_{0} \left(h^{3} / m_{1}\right) \left(\frac{1}{4}e^{m_{1}} - \frac{1}{m_{1}}e^{m_{1}} + \frac{2}{m_{1}^{2}}e^{m_{1}} - \frac{h}{4} - \frac{1}{m_{1}} - \frac{2}{m_{1}^{2}}\right) e^{n_{1}\frac{r-a}{b-a}},$$

$$W = \frac{E_{0}n_{1}h^{3}}{m_{1}(b-a)} \left(\frac{1}{4}e^{m_{1}} - \frac{1}{m_{1}}e^{m_{1}} + \frac{2}{m_{1}^{2}}e^{m_{1}} - \frac{h}{4} - \frac{1}{m_{1}} - \frac{2}{m_{1}^{2}}\right) e^{n_{1}\frac{r-a}{b-a}};$$

$$X = E_{0} \left(h / m_{1}\right) \left(e^{m_{1}} - 1\right) e^{n_{1}\frac{r-a}{b-a}}, \quad Y = E_{0} \left(h^{2} / m_{1}\right) \left(\frac{1}{2}e^{m_{1}} - \frac{1}{m_{1}}e^{m_{1}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{m_{1}}\right) e^{n_{1}\frac{r-a}{b-a}},$$

$$V = E_{0} \left(h / m_{1}\right) \left(e^{m_{1}} - 1\right) e^{n_{1}\frac{r-a}{b-a}}, \quad V_{1} = \frac{E_{0}n_{1}h}{m_{1}(b-a)} \left(e^{m_{1}} - 1\right) e^{n_{1}\frac{r-a}{b-a}}, \quad H = E_{0} \left(h^{2} / m_{1}\right) \left(\frac{n_{1}}{b-a}\right)^{2} \left(\frac{1}{2}e^{m_{1}} - \frac{1}{m_{1}}e^{m_{1}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{m_{1}}\right) e^{n_{1}\frac{r-a}{b-a}},$$

$$E = \frac{E_{0}m_{1}h^{2}}{m_{1}(b-a)} \left(\frac{1}{2}e^{m_{1}} - \frac{1}{m_{1}}e^{m_{1}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{m_{1}}\right) e^{n_{1}\frac{r-a}{b-a}}, \quad H = E_{0} \left(h^{2} / m_{1}\right) \left(\frac{n_{1}}{b-a}\right)^{2} \left(\frac{1}{2}e^{m_{1}} - \frac{1}{m_{1}}e^{m_{1}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{m_{1}}\right) e^{n_{1}\frac{r-a}{b-a}},$$

$$L = E_{0} \left(h^{3} / m_{1}\right) \left(\frac{n_{1}}{b-a}\right)^{2} \left(\frac{1}{4}e^{m_{1}} - \frac{1}{m_{1}}e^{m_{1}} + \frac{2}{m_{1}^{2}}e^{m_{1}} - \frac{h}{4} - \frac{1}{m_{1}} - \frac{2}{m_{2}^{2}}\right) e^{n_{1}\frac{r-a}{b-a}},$$

$$U = \rho_{0} \left(h^{3} / m_{2}\right) \left(\frac{1}{4}e^{m_{2}} - \frac{1}{m_{2}}e^{m_{2}} + \frac{2}{m_{2}^{2}}e^{m_{2}} - \frac{h}{4} - \frac{1}{m_{2}} - \frac{2}{m_{2}^{2}}\right) e^{n_{1}\frac{r-a}{b-a}},$$

$$T_{1} = \rho_{0} \left(h / m_{2}\right) \left(e^{m_{2}} - 1\right) e^{n_{1}\frac{r-a}{b-a}}, \quad A = Y, \quad P = Y, \quad E = Y, \quad M = Y, \quad C = Z, \quad I = Z, \quad J = W, \quad K = W, \quad D = W, \quad R = V, \quad X = V, \quad F = B, \quad G = B, \quad N = B, \quad Q = B$$

بر این پایه، فرم تفاضل محدود معادلات حاکم بر نقاط گره مختلف قابل دسترسی خواهند بود: الف) بر پایه حلقه پیشرو برای نقاط نقاط مجاور مرزهای سمت چپ و زیرین ورق:

$$\begin{split} & \left(\frac{B_{1}}{h_{r}^{3}}\right) \underbrace{w_{i+3}^{j}}_{i+3} + \left[\frac{-3B_{1}}{h_{r}^{3}} + \left(E_{1} + \frac{B_{1}}{r_{i}}\right) \frac{1}{h_{r}^{2}}\right] \underbrace{w_{i+2}^{j}}_{i+2} + \left[\frac{3B_{1}}{h_{r}^{3}} - \frac{2}{h_{r}^{2}}\left(E_{1} + \frac{B_{1}}{r_{i}}\right) + \frac{VE_{1}}{h_{r}r_{i}} - \frac{A_{1}}{h_{r}^{3}}\left(w_{i+2}^{j-1} - 2w_{i+1}^{j-1} + w_{i}^{j-1}\right) \right) \\ & + \left(\frac{A_{1}(-1+\nu)}{2h_{r}^{2}r_{i}} - \frac{I}{2h_{r}^{2}}\right) \left(w_{i+1}^{j-1} - w_{i}^{j-1}\right) - \frac{B_{1}}{r^{2}h_{r}}\right] \underbrace{w_{i+1}^{j}}_{i+1} + \left[\frac{-B_{1}}{h_{r}^{3}} + \left(E_{1} + \frac{B_{1}}{r_{i}}\right) \frac{1}{h_{r}^{2}} + \frac{A_{1}}{h_{r}^{3}}\left(w_{i+2}^{j-2} - 2w_{i+1}^{j-1} + w_{i}^{j-1}\right) - \left(\frac{A_{1}(-1+\nu)}{2h_{r}^{2}r_{i}} - \frac{I}{2h_{r}^{2}}\right) \left(w_{i+1}^{j-1} - w_{i}^{j-1}\right) - \frac{VE_{1}}{h_{r}r_{i}} + \frac{B_{1}}{r^{2}h_{r}}\right] \underbrace{w_{i}^{j}}_{i+1} + \left(\frac{A_{1}}{h_{r}^{2}}\right) \underbrace{u_{i+2}^{j}}_{i+2} + \left(-\frac{A_{1}}{h_{r}r_{i}} - \frac{I}{h_{r}^{2}}\right) \underbrace{u_{i+1}^{j}}_{i+1} + \left[\frac{A_{1}}{h_{r}r_{i}} + \frac{I}{h_{r}r_{i}} + \frac{A_{1}}{h_{r}^{2}}\right] \underbrace{u_{i+2}^{j}}_{i+2} + \left(\frac{A_{1}}{h_{r}r_{i}} - \frac{I}{h_{r}^{2}}\right) \underbrace{u_{i+1}^{j}}_{i+1} + \left[\frac{A_{1}}{h_{r}r_{i}} + \frac{I}{h_{r}r_{i}} + \frac{I}{h_{r}^{2}}\right] \underbrace{u_{i+2}^{j}}_{i+2} + \left(\frac{A_{1}}{h_{r}r_{i}} - \frac{I}{h_{r}^{2}}\right) \underbrace{u_{i+1}^{j}}_{i+1} + \left[\frac{A_{1}}{h_{r}r_{i}} + \frac{I}{h_{r}r_{i}} + \frac{I}{h_{r}^{2}}\right] \underbrace{u_{i+2}^{j}}_{i+2} + \left(\frac{A_{1}}{h_{r}r_{i}} - \frac{I}{h_{r}^{2}}\right) \underbrace{u_{i+1}^{j}}_{i+1} + \left[\frac{A_{1}}{h_{r}r_{i}} + \frac{I}{h_{r}r_{i}} + \frac{I}{h_{r}r_{i}^{2}}\right] \underbrace{u_{i+1}^{j}}_{i+1} + \left[\frac{A_{1}}{h_{r}r_{i}} + \frac{I}{h_{r}r_{i}^{2}}\right] \underbrace{u_{i+2}^{j}}_{i+2} + \left(\frac{A_{1}}{h_{r}r_{i}^{2}}\right) \underbrace{u_{i+1}^{j}}_{i+1} + \left[\frac{A_{1}}{h_{r}r_{i}} + \frac{I}{h_{r}r_{i}} + \frac{I}{h_{r}^{2}}\right] \underbrace{u_{i+1}^{j}}_{i+1} + \left[\frac{A_{1}}{h_{r}r_{i}^{2}}\right] \underbrace{u_{i+1}^{j}}_{i+1} + \left[\frac{A_{1}$$

$$\begin{split} & (-\frac{B_{1}}{h_{r}^{3}}) \underbrace{w_{i-3}^{j} + \left[\frac{3B_{1}}{h_{r}^{3}} + \left(E_{1} + \frac{B_{1}}{r_{i}}\right)\frac{1}{h_{r}^{2}}\right]}_{l} \underbrace{w_{i-2}^{j} + \left\{-\frac{3B_{1}}{h_{r}^{3}} - \frac{2}{h_{r}^{2}}(E_{1} + \frac{B_{1}}{r_{i}}) - \frac{\nu E_{1}}{h_{r}r_{i}} + \frac{A_{1}}{h_{r}^{3}}(w_{i-2}^{j-1} - 2w_{i-1}^{j-1} + w_{i}^{j-1})}{2h_{r}^{2}(I_{1} + W_{i}^{j-1})} \\ & - \left[\frac{A_{1}(-1+\nu)}{2h_{r}^{2}r_{i}} - \frac{I}{2h_{r}^{2}}\right] \left(-w_{i-1}^{j-1} + w_{i}^{j-1}\right) + \frac{B_{1}}{r^{2}h_{r}}\right] \underbrace{w_{i-1}^{j} + \left\{\frac{B_{1}}{h_{r}^{3}} + (E_{1} + \frac{B_{1}}{r_{i}}\right\}}{\frac{W_{i-2}^{j} + (E_{1} + \frac{B_{1}}{r_{i}})}{\frac{H_{1}}{r_{r}^{2}}} - \frac{A_{1}}{h_{r}^{2}}(w_{i-2}^{j-1} - 2w_{i-1}^{j-1} + w_{i}^{j-1})}{2h_{r}^{2}(I_{r}^{j-1} + w_{i}^{j-1})} \\ & + \left[\frac{A_{1}(-1+\nu)}{2h_{r}^{2}r_{i}} - \frac{I}{2h_{r}^{2}}\right] \left(-w_{i-1}^{j-1} + w_{i}^{j-1}\right) + \frac{\nu E_{1}}{h_{r}r_{i}} - \frac{B_{1}}{R^{2}h_{r}^{2}}\right) \underbrace{w_{i}^{j} + \left(\frac{A_{1}}{h_{r}^{2}}\right)}{\frac{U_{i-2}^{j}}{r_{i}^{2}}} + \left(\frac{A_{1}}{h_{r}r_{i}} + \frac{I}{h_{r}} - \frac{2A_{1}}{h_{r}^{2}}\right)}{\frac{U_{i-1}^{j}}{u_{i-1}^{j}}} \\ & + \left(-\frac{A_{1}}{h_{r}r_{i}} - \frac{I}{h_{r}^{2}} + \frac{A_{1}}{h_{r}^{2}} - \frac{I\nu}{r_{i}^{2}}\right) \underbrace{w_{i}^{j}}{u_{i}^{j}} + \left[H_{1}(1-\nu^{2})\right] \underbrace{\ddot{u}_{i}}{u_{i}} = 0 \end{split}$$

۴۷

$$\begin{split} & \left[\frac{C}{h_{\tau}^{1}(1-v^{2})}\right] w_{\tau=4}^{r=4} + \left[\frac{-4C}{h_{\tau}^{3}(1-v^{2})} - \frac{2C}{r_{\tau}^{3}(1-v^{2})} - \frac{2J}{h_{\tau}^{3}(1-v^{2})}\right] w_{\tau=2}^{r=4} + \left\{\frac{3}{h_{\tau}^{3}}\left[\frac{2C}{r_{\tau}(1-v^{2})} + \frac{2J}{1-v^{2}}\right] \\ & + \frac{6C}{h_{\tau}^{4}(1-v^{2})} + \frac{1}{h_{\tau}^{2}}\left[\frac{J(2+v)}{r_{\tau}(1-v^{2})} + \frac{L}{1-v^{2}} - \frac{C}{r_{\tau}^{3}(1-v^{2})}\right] w_{\tau=2}^{r=4} + \left\{-\frac{1}{h_{\tau}^{3}}\left[\frac{3v-1}{r_{\tau}(1-v^{2})} - \frac{B}{1-v^{2}}\right] w_{\tau=2}^{r=4} \\ & -2wr_{\tau}^{1-4} + wr^{r-1}\right) - \left[\frac{3(v-2)B}{r_{\tau}(1-v^{2})} - \frac{H}{2(1-v^{2})}\right] \frac{1}{h_{\tau}^{2}}(-wr_{\tau}^{1-4} + wr^{1-3}) - \frac{3}{h_{\tau}^{2}}\left[\frac{2C}{r_{\tau}(1-v^{2})} + \frac{2J}{1-v^{2}}\right] - \frac{4C}{h_{\tau}^{3}(1-v^{2})} \\ & -\frac{2}{h_{\tau}^{2}}\left[\frac{J(2+v)}{r_{\tau}(1-v^{2})} + \frac{L}{1-v^{2}} - \frac{C}{r_{\tau}^{3}(1-v^{2})}\right] - \frac{vL}{r_{\tau}h_{\tau}(1-v^{2})} + \frac{C}{r_{\tau}^{3}(1-v^{2})} + \frac{J}{r_{\tau}^{3}(1-v^{2})} + \frac{L}{h_{\tau}^{3}(1-v^{2})} \\ & + \frac{K}{h_{\tau}^{3}(1-v^{2})}\right] \left[-wr_{\tau}^{1-4} + wr_{\tau}^{1-1}\right] - \frac{2}{r_{\tau}^{3}(1-v^{2})} - \frac{VL}{r_{\tau}h_{\tau}(1-v^{2})} + \frac{C}{r_{\tau}^{3}(1-v^{2})} + \frac{L}{2h_{\tau}^{3}(1-v^{2})} \right] \left[-wr_{\tau}^{1-4} + wr_{\tau}^{1-1}\right]^{2} \\ & + \frac{K}{h_{\tau}^{3}(1-v^{2})}\right] \left[-wr_{\tau}^{1-4} + wr_{\tau}^{1-1}\right] + \frac{K}{h_{\tau}^{3}(1-v^{2})} - \frac{C}{r_{\tau}^{3}(1-v^{2})} + \frac{L}{2h_{\tau}^{3}(1-v^{2})} + \frac{L}{2h_{\tau}^{3}(1-v^{2})} \right] \left[-wr_{\tau}^{1-4} + wr_{\tau}^{1-1}\right]^{2} \\ & + \frac{K}{h_{\tau}^{3}(1-v^{2})}\right] \left[-wr_{\tau}^{1-4} + wr_{\tau}^{1-1}\right] + \frac{K}{h_{\tau}^{3}(1-v^{2})} \left[-wr_{\tau}^{1-4} + ur_{\tau}^{1-1}\right] \right] w_{\tau}^{1-4} \\ & + \frac{L}{h_{\tau}^{3}(1-v^{2})} \left[-wr_{\tau}^{1-4} + wr_{\tau}^{1-1}\right] + \frac{K}{h_{\tau}^{3}(1-v^{2})} \left[-wr_{\tau}^{1-4} + ur_{\tau}^{1-1}\right] \right] w_{\tau}^{1-4} \\ & + \frac{L}{h_{\tau}^{3}(1-v^{2})} + \frac{L}{h_{\tau}^{2}(1-v^{2})} - \frac{L}{h_{\tau}^{2}(1-v^{2})} \right] \left[-wr_{\tau}^{1-4} + wr_{\tau}^{1-1}\right] + \frac{K}{h_{\tau}^{3}(1-v^{2})} \left[-wr_{\tau}^{1-4} + ur_{\tau}^{1-1}\right] \frac{W}{h_{\tau}^{3}(1-v^{2})} \right] \frac{W}{h_{\tau}^{1-4}} + \frac{K}{h_{\tau}^{3}(1-v^{2})} + \frac{L}{h_{\tau}^{3}(1-v^{2})} \right] \\ & + \frac{L}{h_{\tau}^{2}}\left[\frac{L}{r_{\tau}(1-v^{2})} + \frac{L}{h_{\tau}^{2}}\left[\frac{L}{r_{\tau}(1-v^{2})} - \frac{L}{h_{\tau}^{2}(1-v^{2})}\right] \frac{W}{h_{\tau}^{1-4}} + \frac{L}{h_{\tau}^{3}(1-v^{2})} + \frac{L}{h_{\tau}^{3}(1-v^{2})} - \frac{L}{h_{\tau}^{3}(1-$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$$\begin{split} & \left[\frac{2C}{2r_{t}h_{t}^{2}(1-v^{2})} + \frac{2J}{2h_{t}^{2}(1-v^{2})} + \frac{C}{h_{t}^{4}(1-v^{2})}\right] w_{t+2}^{t} + \left\{\frac{1}{2h_{t}^{2}}\left[\frac{(3v-1)A}{r_{t}(1-v^{2})} - \frac{B}{1-v^{2}}\right] (w_{t+1}^{t-1} - 2v_{t}^{t-1} + w_{t+1}^{t-1}) \right] \\ & - \left[\frac{2J}{2h_{t}^{2}(1-v^{2})} + \frac{4C}{2r_{t}h_{t}^{2}(1-v^{2})}\right] - \frac{4C}{h_{t}^{4}(1-v^{2})} + \frac{1}{h_{t}^{2}}\left[\frac{J(2+v)}{r_{t}(1-v^{2})} + \frac{L}{1-v^{2}} - \frac{C}{r_{t}^{2}(1-v^{2})}\right] + \frac{1}{2h_{t}}\left[\frac{-J}{r_{t}^{2}(1-v^{2})}\right] \\ & + \frac{VL}{r(1-v^{2})} + \frac{C}{r_{t}^{2}(1-v^{2})}\right] + \frac{1}{4h_{t}^{2}}\left[\frac{(3v-2)B}{r_{t}(1-v^{2})} - \frac{H}{2(1-v^{2})}\right] (w_{t+1}^{t-1} + w_{t+1}^{t-1}) + \frac{1}{4h_{t}^{2}}\left[\frac{-J}{r_{t}(1-v^{2})}\right] \\ & \left(w_{t+1}^{t-1} + w_{t+1}^{t-1})(w_{t+1}^{t-1} - 2w_{t}^{t-1} + w_{t+1}^{t-1}) + \left[-\frac{R}{4h_{t}^{2}(1-v^{2})} - \frac{(V+1)X}{4h_{t}^{2}r_{t}(1-v^{2})}\right] (w_{t+1}^{t-1} - W_{t+1}^{t-1}) + \frac{1}{4h_{t}^{2}}\left[\frac{J(2+v)}{r_{t}(1-v^{2})}\right] \\ & \left(w_{t+1}^{t-1} + w_{t+1}^{t-1})(w_{t+1}^{t-1} - 2w_{t}^{t-1} + w_{t+1}^{t-1}) + \left[-\frac{R}{16h_{t}^{2}(1-v^{2})} - \frac{(V+1)X}{4h_{t}^{2}(1-v^{2})}\right] (w_{t+1}^{t-1} - 2w_{t}^{t-1} + w_{t+1}^{t-1}) + \left[-\frac{R}{16h_{t}^{2}(1-v^{2})} - \frac{2}{h_{t}^{2}}\left[\frac{J(2+v)}{r_{t}(1-v^{2})}\right] \\ & + \frac{L}{1-v^{2}} - \frac{C}{r_{t}^{2}(1-v^{2})}\right] w_{t}^{t} + \left\{-\frac{1}{2h_{t}^{2}}\left[\frac{(3v-1)A}{r_{t}(1-v^{2})} - \frac{B}{1-v^{2}}\right] (w_{t+1}^{t-1} - 2w_{t}^{t-1} + w_{t+1}^{t-1}) + \left[-\frac{R}{2h_{t}^{2}(1-v^{2})} + \frac{4C}{2h_{t}^{2}(1-v^{2})}\right] \\ & - \frac{4C}{h_{t}^{4}(1-v^{2})} + \frac{1}{h_{t}^{2}}\left[\frac{J(2+v)}{r_{t}(1-v^{2})} + \frac{L}{1-v^{2}} - \frac{C}{r_{t}^{2}(1-v^{2})}\right] - \frac{1}{2h_{t}}\left[\frac{-J}{r_{t}^{2}(1-v^{2})} + \frac{vL}{v(1-v^{2})}\right] \\ & - \frac{4C}{h_{t}^{4}(1-v^{2})} + \frac{1}{h_{t}^{2}}\left[\frac{J(2+v)}{r_{t}(1-v^{2})} + \frac{L}{1-v^{2}} - \frac{C}{r_{t}^{2}(1-v^{2})}\right] - \frac{1}{2h_{t}}\left[\frac{-J}{r_{t}^{2}(1-v^{2})} + \frac{vL}{v(1-v^{2})}\right] \\ & - \frac{1}{h_{t}^{2}(1-v^{2})} + \frac{L}{h_{t}^{2}}\left[\frac{J(2+v)}{r_{t}(1-v^{2})} + \frac{L}{v_{t}^{2}}\left[\frac{J(2+v)}{r_{t}^{2}(1-v^{2})}\right] \\ & - \frac{L}{h_{t}^{2}(1-v^{2})} - \frac{L}{h_{t}^{2}(1-v^{2})}\right] \\ & - \frac{L}{h_{t}^{2}(1-v^{2})} - \frac{L}{h_{t}^{2}(1-v^{2})} \\ & - \frac{L}{h_{t}^{2}(1-v^{$$

www.SID.ir

(پ-۹)