تحلیل غیرخطی خیز ورق دایره‌ای هدفمند با خواص متغیر در دو راستای عرضی و شعاعی

محمد شرعیات [۱]، غلامرضا رضایی دشت آبادی [۲] و علی‌اصغر جعفری [۳]

دانشکده مهندسی مکانیک

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

(تاریخ دریافت: ۹۱/۲/۱۵؛ تاریخ پذیرش: ۹۲/۵/۱)

چکیده

در این مقاله، تحلیل غیرخطی خیز ورق‌های دایره‌ای شکل ساخته شده از مواد هدفمند دوجهته با تغییرات همزمان ویژگی‌های مـواد در راسـتاهای عرضی و شعاعی، مورد بررسی قرار گرفته است. برای یافتن معادلات حاکم بر ورق، از تئوری کلاسیک و روابط کرنش- تغییر مکان غیـرخطـی فـن کارمن استفاده شده است. با توجه به تغییرات دو جهته ویژگی‌های مواد هدفمند، تأثیر مشتقات شعاعی ویژگی‌های مکانیکی مواد و تغییرات عرضی خواص مکانیکی بر عبارات سفتی ورق در معادلات حاکم آشکار شده است. برای حل مسئله، از روش عددی تفاضل محدود استفاده شـده اسـت. در این مقاله نیز نحوه اعمال فرم تفاضل محدود شرایط مرزی بر نقاط مرزی گوناگون ارائه شده است. در مسیر حل مسئله و دست‌یابی به نتـایج کلـی، رفتار ورق‌های ساخته شده از مواد همسانگرد، هدفمند یک جهته با تغییرات ویژگی‌های مواد در راسـتای عرضـی یـا شـعاعی و هدفمنـد دوجهتـه بررسی و نتایج حالت‌های ویژه با نتایج نرم‌افزار آباکوس و همچنین نتایج مراجع معتبر صحه‌گذاری شده است.

واژه‌های کلیدی: ورق دایروی، تحلیل غیرخطی، مواد هدفمند دوجهته، تئوری کلاسیک، اصل هامیلتون، روش تفاضل محدود

Nonlinear Lateral Deflection Analysis of an FGM Circular Plate Whose Material Properties Vary in Transverse and Radial Directions

M. Shariyat, G.R. Rezaei-Dashtabadi, and A.A. Jafari

Mech. Eng. Dep't.

K.N. Toosi Univ. of Tech.

(Receipt: 4 May, 2012; Accept: 23 July, 2013)

ABSTRACT

In the present paper, nonlinear analysis of lateral deflection of bidirectional functionally graded circular plates whose material properties vary in both transverse and radial directions is presented. The governing equations of the plate are derived based on the classical theory and von Karman's nonlinear strain-displacement relations. Due to bidirectional variations of the material properties, influence of the radial derivatives of the material properties and the transverse variations of the properties on the rigidities have appeared in the governing equations. The governing equations are solved by the finite difference method. Incorporation of the finite difference form of the boundary conditions on various points of the boundary is also discussed. Finally, behaviors of plates fabricated from isotropic, transversely-graded, and two-directional-functionally graded materials are investigated and present results are validated against results of the special cases reported in the available well-known references and results of Abaqus software.

Keywords: Circular Plate, Nonlinear Analysis, Bi-Directional Functionally Graded Materials, Classical Plate Theory, Hamilton's Principle, Finite Difference Method

۱- دانشیار (نویسنده پاسخگو): shariyat@kntu.ac.ir

۲- کارشناس ارشد: rezaei.mec@gmail.com

۳- دانشیار: ajafari@kntu.ac.ir

۱- مقدمه

در راستای گسترش روزافزون فناوری‌های نوین، استفاده از مواد پیشرفته‌ای که خواص آنها در راستا و نقاط مختلف سازه‌های مهندسی متفاوت باشند، بیش از پیش اهمیت یافته است. بسیاری از سازه‌ها و قطعات مهندسی مانند سازه‌های هوایی، فضایی، مخازن تحت‌فشار در نیروگاه‌های هسته‌ای و موتورهای احتراق داخلی تحت نیروهای مکانیکی مختلف و نیروهای حرارتی با گرادیان‌های بالا قرار دارند. از این رو در این‌گونه سازه‌ها می‌بایست از موادی استفاده نمود که ضمن دارا بودن ساختاری پیوسته، در برابر بارهای حرارتی با گرادیان‌های بالا مقاوم بوده و در برابر بارهای مکانیکی استحکام لازم را از خود نشان دهند.

در ارتباط با ابداع موادی با تغییرات پیوسته ویژگی‌های مواد، دویز[1] و بور[2] ایده ترکیب دو فاز مختلف با تغییر تدریجی ترکیب فازها در هر لایه به منظور بهبود خواص مکانیکی مواد را برای اولین بار مطرح کردند [۱]. در سال ۱۹۸۴، نیاز صنعتی به استفاده از موادی با ویژگی‌های یاد شده که با عنوان مواد هدفمند شناخته شدند، در کشور ژاپن مطرح و مأموریت تحقیقات در این زمینه به گروهی از دانشمندان در زمینه هوافضا محول گردید.

در ارتباط با بررسی میزان کاهش تنش‌های حرارتی در اثر به کارگیری مواد هدفمند، تحلیلی ترموالاستیک توسط تاناکا[3] و همکاران ارائه شد [۲]. اباتا[4] و نودا[5] تنش‌های ترموالاستیک پدید آمده در شرایط حرارتی پایدار در سیلندر و کره توخالی ساخته شده از مواد هدفمند را بررسی نمودند [۳]. تنش‌های پدید آمده در ورق‌های هدفمند، در شرایط گرادیان حرارتی پایدار توسط ایشیکاوا[6] و همکاران بررسی شدند [۴]. همچنین، حل تحلیلی و عددی پوسته‌های نامتقارن ساخته شده از مواد هدفمند تحت بارهای حرارتی ناشی از گذر سیال، توسط تاکزونو[7] و همکاران ارائه گردید [۵]. همچنین تأثیر استفاده از مواد هدفمند به منظور حذف یا کنترل تغییر شکل حرارتی در میله و ورق توسط ودرهلد[8] و همکاران بررسی شد [۶].

پراوین[9] و ردی[10] پاسخ ورق هدفمند با ساختار سرامیکی-فلزی را به شیوه المان محدود و با در نظر گرفتن نیروهای برش عرضی، اینرسی دورانی و خیزهای بزرگ یافتند [۷]. وو[11] و مگوید[12] روشی تحلیلی برای ورق و پوسته ضخیم ساخته شده از مواد هدفمند ارائه کردند [۸]. چاکرابرتی[13] و همکاران المانی جدید برای بررسی رفتار ترموالاستیک مواد هدفمند ارائه نمودند [۹]. خیز یک ورق مستطیلی از جنس ماده هدفمند با تکیه‌گاه‌های ساده تحت بارهای عرضی توسط چی[14] و چونگ[15] مورد بررسی قرار گرفت [۱۰]. آقایان علی‌نیا و قنادپور به تحلیل غیرخطی صفحه مستطیلی ساخته شده از مواد هدفمند تحت فشاری عرضی پرداختند [۱۱]. نای[16] و ژونگ[17] خمش ورق حلقوی هدفمند دوجهته دارای تقارن محوری را به روش نیمه‌تحلیلی- عددی مورد مطالعه قرار دادند [۱۲]. نای و ژونگ همچنین با گسترش تحقیق خود، به تحلیل دینامیکی ورق حلقوی هدفمند چند جهته به شیوه نیمه‌تحلیلی و عددی پرداختند [۱۳].

تحلیل‌های انجام شده برای ورق‌های حلقوی هدفمند، محدود به ورق‌های دارای تغییرات ویژگی‌های مواد در جهت ضخامت بوده‌اند [۱۴]. در این حالت، فرم معادلات ورق با فرم معادلات ورق‌های همسانگرد همگن کاملاً یکسان است. گنجاندن تغییرات شعاعی همزمان یا مستقل ویژگی‌های مکانیکی مواد، موجب پیدایش عبارات مشتقی جدید در معادلات حاکم می‌شود. در این مقاله، تحلیل غیرخطی خیز ورق‌های دایره‌ای شکل ساخته شده از مواد هدفمند دوجهته با تغییرات همزمان ویژگی‌های مواد در راستاهای عرضی و شعاعی، ارائه شده است. برای یافتن معادلات حاکم بر ورق، از تئوری کلاسیک و روابط کرنش- تغییر مکان غیرخطی فون کارمن[18] استفاده شده است. حل مسئله، به روش عددی تفاضل محدود انجام و نحوه اعمال شرایط مرزی گوناگونی به شیوه تفاضل محدود نیز ارائه شده است.

1- Duwez
2- Bever
3- Tanaka
4- Obata
5- Noda
6- Ishikawa
7- Takezono
8- Wetherhold

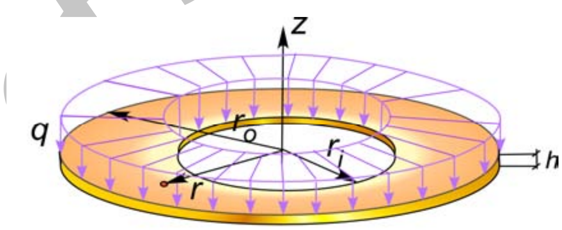
9- Praveen
10- Reddy
11- Woo
12- Meguid
13- Chakraborty
14- Chi
15- Chung
16- Nie
17- Zhong
18- Von Karman

۲- معادلات حاکم بر ورق ساخته شده از مواد هدفمند دو جهته

در این بخش، تعریف مسئله و شرایط هندسی و بارگذاری آن، توصیف تغییرات دوبعدی ویژگی‌های مواد، و معادلات حاکم بر ارتعاش ورق به دست خواهند آمد.

۲-۱- تعریف هندسه مسئله

در مقاله حاضر، ورق هدفمند دو جهته با تغییرات ویژگی‌های مواد در راستاهای ضخامت و شعاعی مورد بحث و تحلیل قرار گرفته است. ورق دایره‌ای شکل توخالی مورد نظر، در شکل **۱** نشان داده شده است. شعاع داخلی، شعاع خارجی و ضخامت ورق به ترتیب با $_1$ ، r_o و h نشان داده شده‌اند. بار اعمالی بر ورق، باری گسترده و عرضی به شدت q بر واحد سطح است. هندسه و بارگذاری دارای تقارن محوری پنداشته شده و از دستگاه مختصات استوانه‌ای برای تحلیل مسئله استفاده شده است.



شکل(۱): هندسه و بارگذاری ورق حلقوی مورد بررسی.

۲-۲- توصیف چگونگی تغییرات ویژگی‌های مکانیکی مواد ورق

ویژگی‌های مکانیکی ماده هدفمند در دو راستای شعاعی و عرضی، به صورت هموار و پیوسته تغییر می‌کنند. مدل‌های متفاوتی برای مدل‌سازی این تغییرات ارائه شده‌اند. برخی محققین از مدل موری- تاناکا[1] برای تعیین تغییرات تدریجی خواص ماده در امتداد ضخامت استفاده کرده‌اند. بسیاری از محققین نیز از مدل‌های تابع توانی[2]، تابع هلالی (S مانند)[3] یا تابع نمایی[4] استفاده نموده‌اند [۱۹- ۱۵].

همچنین در مقاله حاضر، تابع توزیع تغییرات خواص مکانیکی در دو راستای ضخامت و شعاعی، به صورت تابع نمایی در نظر گرفته شده است. فرم این توابع برای مدول الاستیسیته و چگالی جرمی در رابطه (۱) آورده شده است:

1- Mori-Tanaka
2- Power-Law
3- Sigmoid
4- Exponential

$$E(r,z)=E_0 e^{m_1\left(\frac{z+h/2}{h}\right)+n_1\left(\frac{r-a}{b-a}\right)}$$
$$\rho(r,z)=\rho_0 e^{m_2\left(\frac{z+h/2}{h}\right)+n_2\left(\frac{r-a}{b-a}\right)}, \qquad (۱)$$

که در این رابطه، E_0 و ρ_0 مقدار کمیت‌ها در گوشه $(r=a, z=-h/2)$ می‌باشند. همچنین توان‌های m_1، m_2، n_1 و n_2 با توجه به خواص مواد ورق تعیین می‌شوند. برای مثال اگر مقادیر مدول الاستیسیته در گوشه‌های $(r=a, z=h/2)$ و $(r=b, z=-h/2)$ به ترتیب برابر با E_1 و E_2 باشند، آنگاه خواهیم داشت:

$$m_1=\ln\left(\frac{E_1}{E_0}\right)$$
$$n_1=\ln\left(\frac{E_2}{E_0}\right). \qquad (۲)$$

روابط مشابهی برای تعیین توان‌های رابطه چگالی جرمی قابل ارائه می‌باشند.

۲-۳- استخراج معادلات حاکم

میدان جابه‌جایی بر پایه تئوری کلاسیک، به صورت رابطه (۳) در نظر گرفته شده است [۲۳-۲۰]:

$$u_r(r,\theta,z,t)=u_0(r,\theta,t)-z\frac{\partial w_0}{\partial r}$$
$$u_\theta(r,\theta,z,t)=v_0(r,\theta,t)-z\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w_0}{\partial \theta}\right) \qquad (۳)$$
$$u_z(r,\theta,z,t)=w_0(r,\theta,t),$$

که در این رابطه، u_0 مؤلفه شعاعی جابه‌جایی، v_0 مؤلفه محیطی جابه‌جایی و w_0 مؤلفه عرضی جابه‌جایی ورق هدفمند می‌باشند و z از لایه میانی ورق اندازه‌گیری می‌شود. معادلات ارائه شده در رابطه (۳) مربوط به حالت کلی بوده و برای حالت ورق متقارن به فرم رابطه (۴) آشکار می‌شوند:

$$\begin{cases} u_r(r,z,t)=u_0(r,t)-z\dfrac{\partial w_0}{\partial r} \\ u_z(r,z,t)=w_0(r,t). \end{cases} \qquad (۴)$$

در این تحقیق برای افزایش دقت محاسبات از فرض متداول جابه‌جایی‌های بسیار کوچک استفاده نشده است. در ورق دایره‌ای متقارن، روابط کرنش- جابه‌جایی غیرخطی فون کارمن برای جابه‌جایی‌های متوسط طبق رابطه (۵) می‌باشند:

$$\varepsilon_{rr}^{(0)}=\frac{\partial u_0}{\partial r}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial r}\right)^2,\ \varepsilon_{rr}^{(1)}=-\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}$$
$$\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)}=\frac{u_0}{r},\quad \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)}=-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial w_0}{\partial r}\right). \qquad (۵)$$
$$\gamma_{r\theta}^{(0)}=0,\quad \gamma_{r\theta}^{(1)}=0$$

برای استخراج معادلات حاکم بر ورق، از اصل هامیلتون استفاده شده که ارتباط نمو سه کمیت انرژی پتانسیل (U)، انرژی جنبشی (V) و کار نیروهای خارجی (K) در سیستم‌های پایاستار را برقرار می‌سازد.

$$\int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K)\,dt = 0. \qquad (۶)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_0^t \int_\Omega \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{rr}\delta\varepsilon_{rr} + \sigma_{\theta\theta}\delta\varepsilon_{\theta\theta} + \sigma_{r\theta}\delta\gamma_{r\theta})\,dz\,dr\,d\theta\,dt \\ \delta T &= -\int_0^t \int_\Omega \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(\dot u_r \delta\dot u_r + \dot u_\theta \delta\dot u_\theta + \dot u_z \delta\dot u_z)\,dz\,dr\,d\theta\,dt \\ \delta K &= -\int_0^t \int_\Omega q\,\delta w\, r\,dr\,d\theta\,dt, \end{aligned} \qquad (۷)$$

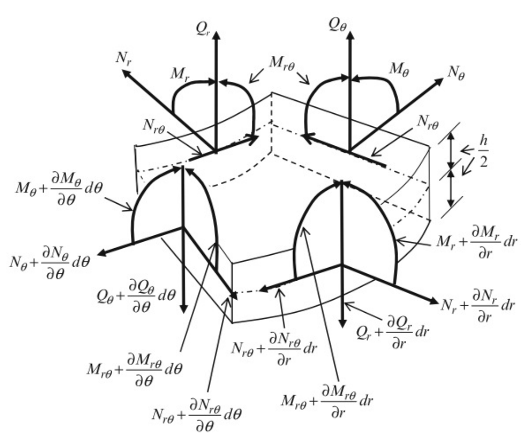
که در این رابطه، q بار گسترده عرضی می‌باشد (شکل ۱). با حذف وابستگی تغییرات نسبت به زاویه، رابطه (۷) برای حالت متقارن به صورت رابطه (۸) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_0^t \int_\Omega \Bigg[N_{rr}\left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial r} + \frac{\partial w_0}{\partial r}\frac{\partial \delta w_0}{\partial r}\right) + N_{\theta\theta}\left(\frac{\delta u_0}{r}\right) \\ &\quad - M_{rr}\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial r^2} - \frac{1}{r}M_{\theta\theta}\left(\frac{\partial \delta w_0}{\partial r}\right) - \frac{2}{r}M_{r\theta}\left(\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial \theta \partial r}\right)\Bigg] r\,dr\,dt \\ \delta T &= -\int_0^t \int_\Omega \left(I_0(\dot u_0 \delta \dot u_0 + \dot w_0 \delta \dot w_0) + I_2 \left(\frac{\partial \dot w_0}{\partial r}\frac{\partial \delta \dot w_0}{\partial r}\right)\right) r\,dr\,dt \\ \delta K &= \int_0^t \int_\Omega (-q\,\delta w_0 + k w_0 \delta w_0)\, r\,dr\,dt. \end{aligned} \qquad (۸)$$

در رابطه (۸)، پارامترهای نیروهای کششی و گشتاورهای خمشی بر واحد طول به صورت رابطه (۹) تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} N_{rr} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{rr}\,dz; \qquad & M_{rr} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\,\sigma_{rr}\,dz; \\ N_{\theta\theta} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\theta\theta}\,dz; \qquad & M_{\theta\theta} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\,\sigma_{\theta\theta}\,dz;. \\ N_{r\theta} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{r\theta}\,dz; \qquad & M_{r\theta} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\,\sigma_{r\theta}\,dz; \end{aligned} \qquad (۹)$$

در شکل **۲** المان سه‌بعدی ورق دایروی به همراه نیروها و گشتاورها بر واحد طول، نشان داده شده است.



شکل (۲): کمیت‌های نیرو و گشتاور بر واحد طول المان.

با جایگذاری رابطه (۸) در رابطه (۶)، معادلات حاکم بر ورق مورد نظر با استفاده از اصل هامیلتون به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} &\delta u_0: -\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rN_{rr}) - N_{\theta\theta}\right] + I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = 0 \\ &\delta w_0: -\frac{1}{r}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rM_{rr}) + \frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r}\left(rN_{rr}\frac{\partial w_0}{\partial r}\right)\right] - q + I_0\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \\ &-I_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w_o}{\partial r}\right)\right] = 0. \end{aligned} \qquad (۱۰)$$

با جایگذاری رابطه (۱) برای توزیع مدول الاستیسیته و چگالی در روابط حاصله، معادلات حاکم به دست می‌آیند. فرم باز شده رابطه (۱۰) به صورت رابطه (۱۱) است:

$$\begin{aligned} &\delta u_0: -\frac{1}{r}\left(N_{rr} + r\frac{\partial N_{rr}}{\partial r} - N_{\theta\theta}\right) + I_0\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \\ &-\frac{N_{rr}}{r} - \frac{\partial N_{rr}}{\partial r} + N_{\theta\theta} + I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = 0 \\ &\delta w_0: -\frac{1}{r}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rM_{rr}) + \frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r}\left(rN_{rr}\frac{\partial w_o}{\partial r}\right)\right] \\ &-q + I_0\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - I_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w_o}{\partial r}\right)\right] = 0 \Rightarrow \\ &-\frac{2}{r}\frac{\partial M_{rr}}{\partial r} - \frac{\partial^2 M_{rr}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial r} - \frac{N_{rr}}{r}\frac{\partial w_o}{\partial r} - \frac{\partial N_{rr}}{\partial r}\frac{\partial w_o}{\partial r} - \\ &N_{rr}\frac{\partial^2 w_o}{\partial r^2} - q + I_0\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - \frac{I_2}{r}\frac{\partial^3 w_o}{\partial r \partial t^2} - I_2\frac{\partial^4 w_o}{\partial r^2 \partial t^2} = 0. \end{aligned} \qquad (۱۱)$$

در نهایت با جایگزینی عبارات نیرو و گشتاور بر واحد طول با هم‌ارز آنها از عبارات جابه‌جایی، معادلات حاکم بر ورق دایروی هدفمند دوجهته بر حسب دو متغیر مکانی شعاعی و عرضی استخراج می‌شوند که به علت گستردگی، روابط در بخش پیوست آورده شده‌اند.

۳- حل معادلات غیرخطی حاکم

برای حل معادلات حاکم استخراج شده، از روش تکرار Picard استفاده شده است [۲۳]. لازم به ذکر است که دستگاه معادلات حاصل، غیرخطی است، به گونه‌ای که ماتریس سفتی سازه به مؤلفه‌های جابه‌جایی وابسته است:

$$K(\delta)\delta = F, \qquad (۱۲)$$

که در آن، δ بردار کمیت‌های جابه‌جایی مجهول و $K(\delta)$ ماتریس سفتی و F نیز بردار کمیت‌های سمت دوم تساوی (بردار نیرو) است.

برای یافتن فرم تفاضل محدود معادلات دیفرانسیل حاکم ارائه شده، باید از یکی از روش‌های گسسته‌سازی استفاده شود. در این مقاله از روش تفاضل محدود برای این منظور استفاده شده است. در این روش، ابتدا ناحیه حل به شبکه‌ای از نقاط گره که

معادلات حاکم در هر یک از نقاط گره آن برقرار است، تجزیه می‌شود. بسته به موقیت نقطه گره نسبت بـه مرزهـا، از یکـی از سه گونه تقریب زیر برای جـایگزینی عبـارات مشـتق معـادلات حاکم بر جابه‌جایی‌های ورق استفاده می‌شود [۲۳ و ۲۴]:

- تفاضل پیشرو[1]
- تفاضل مرکزی[2]
- تفاضل پسرو[3]

در این روش، مشتقات به کمک روابطی که در مراجـع محاسـبات عددی [۲۳ و ۲۴] ارائه شده‌اند، تقریـب زده مـی‌شـوند. فـرم تفاضـل محدود معادلات حاکم بر هر نقطه گره بر پایـه هـر یـک از سـه نـوع تقریب یاد شده، در بخش پیوست آورده شده است. با توجه بـه اینکـه روابط آشکار شده در بخش پیوست، شامل عبارات غیرخطی بـه فـرم حاصل‌ضرب و توانی می‌باشند، برای دست‌یابی به دسـتگاهی بـه فـرم رابطه (۱۲) لازم است از شیوه مناسبی بهره جست. برای نمونه، تـوان سوم مشتق w نسبت به r به صـورت تـوان دوم ضـرب‌در تـوان اول نوشته شده، و توان اول مشتق جـدا شـده را بـر پایـه روابـط اجـزاء محدود تبدیل نموده ولی توان دوم را در مـاتریس سـفتی ($K(\delta)$) به عنـوان کمیـت معلـوم جـای مـی‌دهنـد. در ارتبـاط بـا عبـارات حاصل‌ضرب دیگر نیز مـی‌تـوان یکـی از دو عبـارت را در مـاتریس ضرایب جای داد.

برای حل دستگاه معادلات (۱۲)، از روش تکـرار اسـتفاده شـده است. بدین‌گونه که ابتدا بردار δ حدس زده شده است (برای مثـال، بردار صفر). سپس ماتریس ضراب $K(\delta)$ تشـکیل و بـا حـل دسـتگاه معادلات (۱۲)، مقدار جدیدی برای بردار δ به دست می‌آیـد. بـر پایـه ایـن مقـدار، مـاتریس ضـرائب $K(\delta)$ بـه‌روز شـده و مقـدار دقیق‌تری برای بردار δ حاصل می‌شود. این روال تـا پایـا شـدن بـردار δ ادامه می‌یابد. معیار همگرایی برای مثال می‌تواند طبق رابطـه (۱۳) انتخاب شود:

$$\mathrm{Max}\,\frac{\left|\delta_i^{k+1}-\delta_i^{k}\right|}{\left|\delta_i^{k+1}\right|}\le\beta, \qquad (۱۳)$$

که در آن، i شمارنده مؤلفه جابه‌جایی، k شمارنده مرحلـه تکـرار و β عدد بسیار کوچکی است کـه در پـژوهش کنـونی برابـر بـا ۰/۰۰۰۰۱ اختیار شده است.

همان‌گونه که ملاحظـه مـی‌شـود، مقـدار عناصـر مـاتریس ضـرائب $K(\delta)$ (از جملـه، بخـش‌هـایی از عبـارات غیـرخطـی کـه در ایـن ماتریس جای داده شده‌اند)، بر پایه مقادیر بردار δ مرحله قبـل کـه بردار کاملاً معلومی است، تعیین می‌شود.

1- Forward Difference
2- Central Difference
3- Backward Difference

۴- نتایج

در این بخش، برای صحه‌گذاری و استخراج نتایج، از ترکیبـی از مواد با ویژگی‌های مکانیکی زیر استفاده شده است:

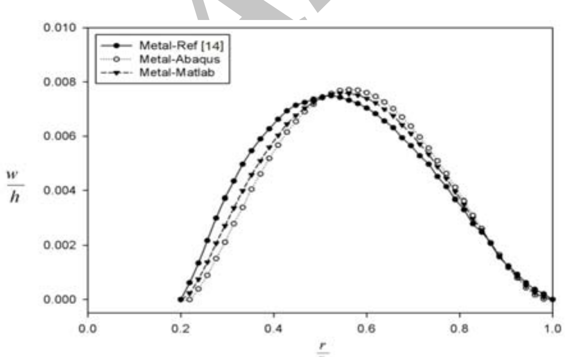
$E_m = 70$ GPa, $E_c = 427$ GPa, $\upsilon = 0.3$,
$r_i = 10$ mm, $r_o = 50$ mm, $h = 7.5$ mm

که در آن، E_m و E_c به ترتیب، مدول الاستیسیته مواد فلـزی و سرامیکی می‌باشند. در شعاع داخلی تکیـه‌گـاه سـاده و در شـعاع خارجی تکیه‌گاه گیردار انتخاب شده است. برخـی از حالـت‌هـای مورد بررسی، جهت صحه‌گذاری نتایج ارائـه شـده و برخـی دیگـر جدید می‌باشند. صحه‌گذاری موارد ویژه به کمک نتایج اسـتخراج شده از نرم‌افزار آباکوس و مقایسه با نتایج مرجع [۱۴] انجام شـده است. برای استخراج نتایج کنـونی، از برنامـه‌نویسـی در نـرم‌افـزار Matlab استفاده شـده‌اسـت. همچنـین در ارائـه نتـایج، بـه طـور ضمنی هم‌ارزی‌های $m=m_1$ و $n=n_1$ به کار گرفته شده‌اند.

۴- ۱- ورق ساخته شده از مواد همسانگرد

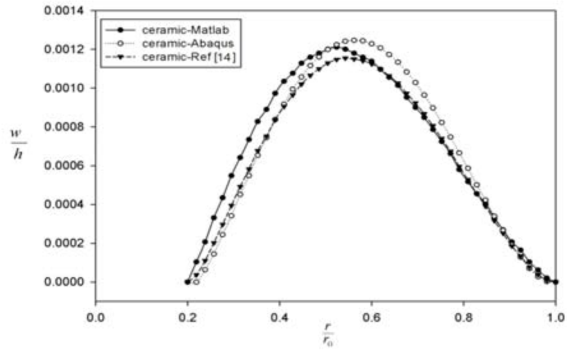
در اولین گام صحه‌گذاری، نتایج تئوری کنونی با نتایج مرجع [۱۴] و نتایج نرم‌افزار اجزاء محدود آباکوس مقایسه شده‌اند. با توجه به اینکه شکل هندسی مسئله و بارگذاری آن متقارن است، می‌توان این مسئله را با المان‌های حجمی متقارن[4] سه‌بعدی درجه سه هشت گرهی (CAX8R) حل کرد ولی برای ارائه یک روش کلی، اقدام به حل آن با استفاده از المان حجمی سه‌بعدی شده است.

نتایج بی‌بعد شده ورق ساخته شده از ماده فلزی خـالص در شکل **۳** و نتایج مربوط به ورق ساخته شـده از مـاده سـرامیکی خالص در شکل **۴** نمایش داده شده‌اند. در شـکل **۵** نیـز نحـوه تغییرات خیز به دسـت آمـده در نـرم‌افـزار آبـاکوس بـرای ورق سرامیکی نشان داده شده است.



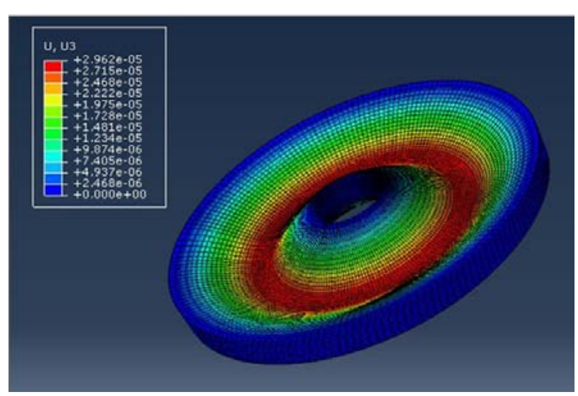
شکل (۳): مقایسه‌ای میان نتایج خیز بی‌بعد صفحه میانی ورق فلزی خالص.

4 Axisymmetric Solid Element



شکل (۴): مقایسه‌ای میان نتایج خیز بی‌بعد صفحه میانی ورق سرامیکی خالص.

همان‌گونه که انتظار می‌رفت، از مقایسه نتایج شکل‌های **۳** و **۴** می‌توان نتیجه گرفت که با توجه به بزرگ‌تر بودن مدول الاستیسیته مواد سرامیکی، میزان خیز بیشینه در ورق سرامیکی نسبت به ورق فلزی کاهش یافته است. همچنین تغییر نوع مواد، تأثیر اندکی بر مکان خیز بیشینه داشته است. مقایسه نتایج نشان داده شده در شکل‌های **۳** و **۴** نشان می‌دهد که تطابق خوبی میان نتایج برقرار است. از آنجا که نتایج نرم‌افزار آباکوس بر پایه تئوری الاستیسیته سه‌بعدی به دست آمده‌اند، نتایج بسیار دقیقی می‌باشند. بزرگ‌ترین اختلاف نتایج کنونی با نتایج نرم‌افزار آباکوس، با وجود آنکه ورق بررسی شده نسبتاً ضخیم می‌باشد، برای ورق‌های فلزی و سرامیکی به ترتیب در حدود ۲/۵ و ۶ درصد می‌باشند. نتایج کنونی، حدوداً مقادیر خیزی مابین نتایج نرم‌افزار آباکوس و نتایج مرجع [۱۴] پیش‌بینی می‌نمایند. از سوی دیگر، نتایج کنونی، مکان خیز بیشینه را اندکی متمایل‌تر به مرز داخلی نشان می‌دهند و در حقیقت همان مقطع است که تحلیل می‌شود (با توجه به اینکه مستقل از δ است).



شکل (۵): شکل اولیه و خیزیافته ورق سرامیکی با استفاده از نرم‌افزار آباکوس.

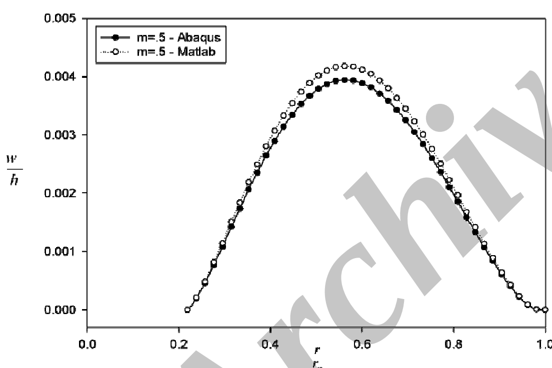
با توجه به شکل‌های **۵-۳** به دلیل شرایط غیریکسان (سفتی خمشی نابرابر) در مجاورت مرزهای داخلی و خارجی، خیز بیشینه در شعاع میانی ورق روی نمی‌دهد. در حقیقت، با توجه به نوع تکیه‌گاه‌های ورق، صلبیت کلی ورق در مجاورت مرز خارجی بیشتر بوده و امکان جابه‌جایی پیرامون ناحیه مجاور مرز داخلی بیشتر است.

۴-۲- اثر تغییرات عرضی ویژگی‌های مواد بر خیز

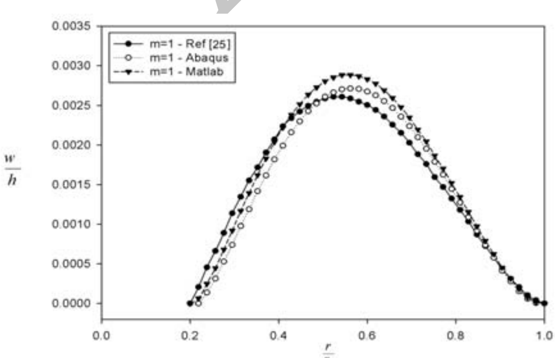
برای بررسی میزان تأثیر تغییرات عرضی ویژگی‌های مواد هدفمند بر خیز ورق، سه حالت متناظر با مقادیر ۰/۵، ۱ و ۲ برای توان m در نظر گرفته شده و نتایج مرتبط به ترتیب در شکل‌های **۸-۶** نشان داده شده‌اند.

با بررسی نتایج نشان داده شده در شکل‌های **۸-۶** مشاهده می‌شود که خیز بیشینه با افزایش m و در نتیجه افزایش مدول الاستیسیته در راستای ضخامت، کاهش می‌یابد.

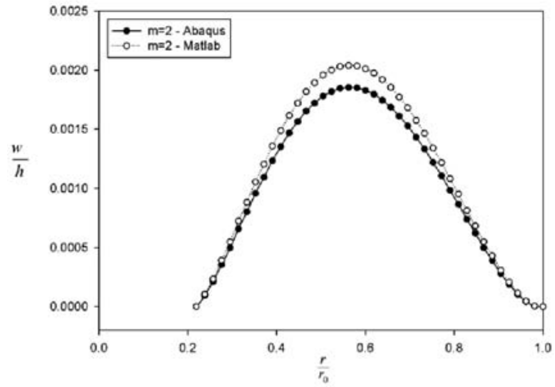
از مقایسه نتایج کنونی با نتایج نرم‌افزار آباکوس مشخص می‌شود که حداکثر خطای حاصل، در حدود ۷ درصد است. بنابراین، جواب‌های کنونی از دقت خوبی برخوردار می‌باشند.



شکل (۶): مقایسه نتایج کنونی خیز بی‌بعد صفحه میانی ورق هدفمند (m=۰/۵) با نتایج نرم افزار آباکوس.



شکل (۷): مقایسه نتایج کنونی خیز بی‌بعد صفحه میانی ورق هدفمند (m=۱) با نتایج نرم افزار آباکوس.



شکل (۸): مقایسه نتایج کنونی خیز بی‌بعد صفحه میانی ورق هدفمند (m=۲) با نتایج نرم افزار آباکوس.

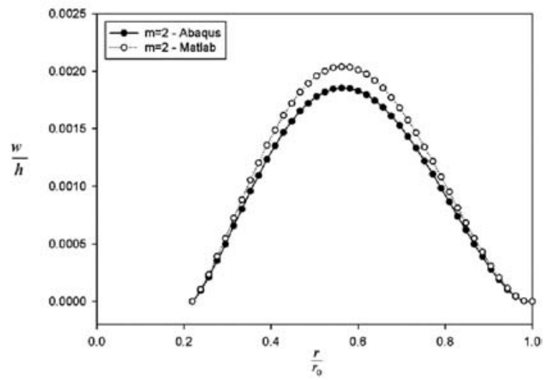
با مشاهده نمودارهای رسم شده برای مقادیر مختلف m مشخص می‌شود که مقادیر خیز با افزایش پارامتر m به طور مرتب کاهش می‌یابند. همچنین از نتایج یاد شده می‌توان دریافت که تغییرات عرضی ویژگی‌های مواد می‌توانند مکان خیز بیشینه را تغییر دهد. نتایج به دست آمده (به ویژه، نتایج به دست آمده از نرم‌افزار آباکوس)، نشان می‌دهند که با افزایش توان m، اثر تکیه‌گاه خارجی بر نحوه تغییرات خیز ناحیه پیرامونی، به صورت بارزتری آشکار می‌شود.

۴- ۳- اثر تغییرات شعاعی ویژگی‌های مواد بر خیز

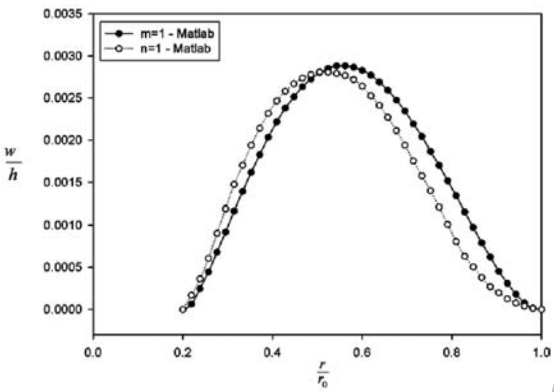
برای مقایسه میزان تفاوت تأثیر توان‌های متناظر با تغییرات ویژگی‌های مواد در راستای ضخامت و تغییرات در راستای شعاعی (m و n)، نمودارهایی همزمان برای مقادیر یکسان m و n رسم و با یکدیگر مقایسه شده‌اند. نمودارهای به دست آمده برای مقادیر ۰/۵ و ۱، به ترتیب در شکل‌های **۹** و **۱۰** نشان داده شده‌اند. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، خیز بیشینه زمانی که ویژگی‌های مواد در راستای شعاعی تغییر می‌نمایند، کاهش بیشتری نسبت به حالتی که تغییرات در راستای ضخامت است، نشان داده و مکان خیز بیشینه به سمت تکیه‌گاه ساده متمایل‌تر می‌شود.

۴-۴- ورق هدفمند با تغییرات همزمان شعاعی و عرضی ویژگی‌های مواد

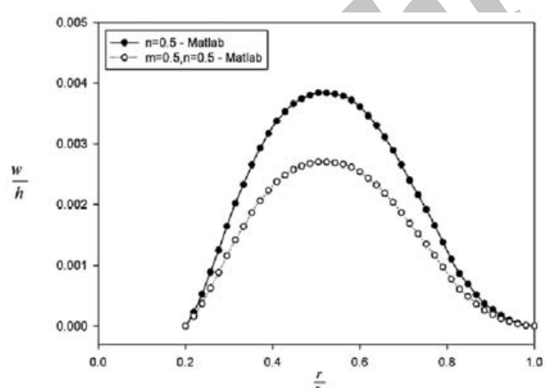
در این بخش، به بررسی اثر تغییرات همزمان ویژگی‌های مواد در دو راستای عرض و شعاعی پرداخته شده است. نتایج خیز به دست آمده برای مقادیر یکسان و متفاوت m و n در شکل‌های **۱۴- ۱۱** نشان داده شده‌اند.



شکل (۹): مقایسه جابه‌جایی‌های بی‌بعد دو ورق هدفمند یک‌جهته با m=۰/۵ و n=۰/۵.

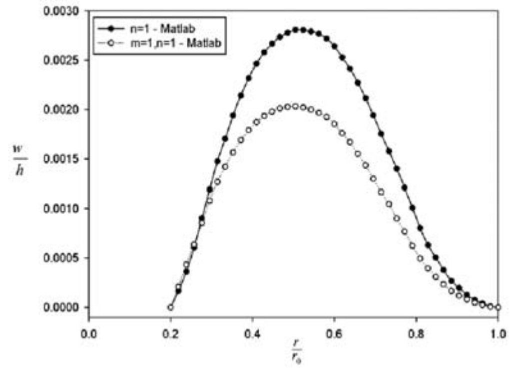


شکل (۱۰): مقایسه خیز دو ورق هدفمند یک‌جهته با m =۱ و n =۱.

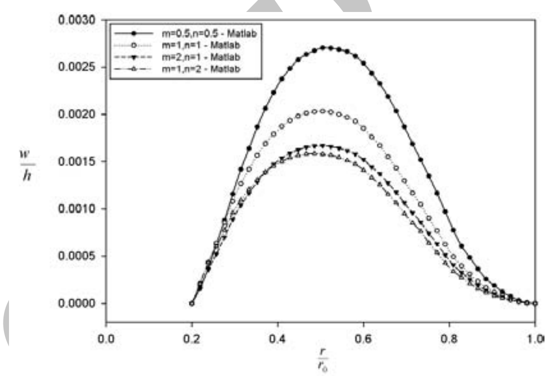


شکل (۱۱): مقایسه خیزهای بی‌بعد ورق هدفمند یک‌جهته با n=۰/۵ و ورق هدفمند دوجهته با m=۰/۵ و n=۰/۵.

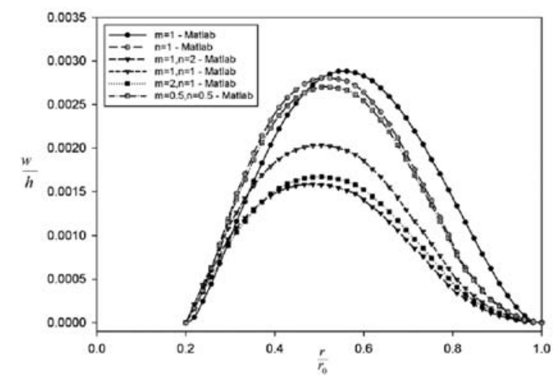
با توجه به شکل‌های **۱۱** و **۱۲** مشخص می شود که وقتی خواص ورق در راستاهای ضخامت وشعاعی تغییر می‌کند، با افزایش همزمان m و n خیز بیشینه کاهش یافته و مکان آن به سمت شعاع داخلی با مدول الاستیسیته کمتر جابه‌جا می‌شود.



شکل (۱۲): مقایسه خیزهای بی‌بعد ورق هدفمند یک‌جهته با n=۱ و ورق هدفمند دوجهته با m=۱ و n=۱.



شکل (۱۳): مقایسه خیز بی‌بعد ورق هدفمند با توان‌های مختلف تغییرات شعاعی و عرضی ویژگی‌های مواد.



شکل (۱۴): مقایسه خیز بی‌بعد ورق هدفمند با توان‌های مختلف تغییرات شعاعی و عرضی ویژگی‌های مواد.

۵- نتیجه‌گیری

نتایج روش ارائه شده با نتایج مراجع معتبر موجود برای حالت‌های ویژه مقایسه و صحه‌گذاری شدند. همچنین، مقایسه نتایج به دست آمده با نتایج نرم‌افزار آباکوس بیانگر خطای قابل چشم‌پوشی نتایج تحلیل غیرخطی کنونی نسبت به تئوری الاستیسیته می‌باشد. بر اساس تحلیل‌های انجام شده، صلبیت ورق دایره‌ای توخالی در نظر گرفته شده، در مجاورت تکیه‌گاه داخلی بزرگ‌تر بوده و در اثر بار گسترده وارده، مکان خیز بیشینه به سمت تکیه‌گاه ساده در شعاع داخلی متمایل می‌شود. همچنین، با افزایش توان m که بیانگر تغییرات ویژگی‌های مواد در راستای ضخامت می‌باشد، خیز بیشینه کاهش می‌یابد. نتایج نشان می‌دهند که برای مقادیر برابری از توان‌های تغییرات ویژگی‌های مواد در دو راستای شعاعی و ضخامت، اثر توان تغییرات در جهت شعاعی (n) بارزتر است. با افزایش مقدار n خیز بیشینه کاهش یافته و مکان آن به سمت شعاع داخلی تغییر مکان می‌دهد.

در حالت کلی، زمانی که تغییرات خواص ورق در هر دو راستای ضخامت و شعاعی مورد نظر قرار گیرند، همان‌طور که از نمودارها مشخص است با افزایش همزمان m و n، خیز بیشینه کاهش یافته و مکان آن به سمت شعاع داخلی متمایل می‌شود.

۶- مراجع

1. Bever, M.B. and Duwez, P.E. "Gradients in Composite Materials", Mater. Sci. Eng., Vol. 10, No. 1, pp. 1–8, 1972.
2. Tanaka, K., Tanaka, Y., Watanabe, H., Poterasu, V.F. and Sugano, Y. "An Improved Solution to Thermoelastic Material Design in Functionally Gradient Materials: Scheme to Reduce Thermal stresses", Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 109, No's. 3-4, pp. 377-389, 1993.
3. Obata, Y. and Noda, N. "Steady Thermal Stresses in a Hollow Circular Cylinder and a Hollow Sphere of Functionally Gradient Material". J. Therm. Stresses, Vol. 17, No. 3, pp. 471–87, 1994.
4. Ishikawa, T. "Thermal Deformation and Thermal Stress of FGM Plates under Steady Graded Temperature Field", Proc. 1st Int. Symp. On FGM, 1990.
5. Takezono, S., Tao, K., Inamura, E. and Inoue, M. "Thermal Stress and Deformation In Functionally Graded Material Shells of Revolution under Thermal Loading Due To Fluid", JSME Int. J. Series A: Mech. Mater. Eng., Vol. 39, No. 4, pp. 573-581, 1996.
6. Wetherhold, R.C., Seelman, S. and Wang, J. "The Use of Functionally Graded Materials to Eliminate or Control Thermal Deformation", Compos. Sci. Tech., Vol. 56, No. 9, pp. 1099-1104, 1996.
7. Praveen, G.V. and Reddy, J.N. "Nonlinear Transient Thermoelastic Analysis of Functionally Graded Ceramic-Metal Plates", Int. J. Solids Struct., Vol. 35, No. 33, pp. 4457-4476, 1998.
8. Woo, J. and Meguid, S.A. "Nonlinear Analysis of Functionally Graded Plates and Shallow Shells", Int. J. Solids Struct. Vol. 38, No's. 42-43, pp. 7409-7421, 2001.
9. Chakraborty, A., Gopalakrishnan, S., and Reddy J.N. "A New Beam Finite Element for the Analysis

of Functionally Graded Materials", Int. J. Mech. Sci, Vol. 45, No. 3, pp. 519-539, 2003.
10. Chi, S.H. and Chung, Y.L. "Mechanical Behavior of Functionally Graded Material Plates under Transverse Load-Part I: Analysis", Int. J. of Solids and Struct. Vol. 43, No. 13, pp. 3657-3674, 2005.
11. Alinia, M.M. and Ghannadpour, S.A.M. "Nonlinear Analysis of Pressure Loaded FGM Plates", Compos. Struct., Vol. 88, No. 3, pp. 354-359, 2009.
12. Nie, G. and Zhong, Z. "Axisymmetric Bending of Two-Directional Functionally Graded Circular and Annular Plates", Acta Mechanica Solida Sinica, Vol. 20, No. 4, pp. 289–295, 2007.
13. Nie, G. and Zhong, Z. "Dynamic Analysis of Multi-Directional Functionally Graded Annular Plates", Appl. Math. Modell. Vol. 34, No. 3, pp. 608-616, 2010.
14. Golmakani, M.E. and Kadkhodayan, M.. "Nonlinear Bending Analysis of Annular FGM Plates Using Higher-Order Shear Deformation Plate Theories", Compos. Struct., Vol. 93, No. 2, pp. 973-982, 2011.
15. Suresh, S. and Mortensen, A. "Fundamentals of Functionally Graded Materials", Proc. Thermomechanical Behavior of Graded Metals and Metal-Ceramic Composites, IOM Communications Ltd., London, 1998.
16. Munir Z.A., Hai W.N., Risbund, S.H., and Mccoy B.J. "Centrifugal Synthesis and Processing of FGM", US Patent, 2000.
17. Yamanouchi, M., Koizumi, M., Hirai, T. and Shiota I. "Proc. of the First Int. Sympos. Functionally Gradient Materials, 1990.
18. Agarwal, S., Chakraborty, A. and Gopalakrishnan, S. "Large Deformation Analysis for Anisotropic and Inhomogeneous Beams Using Exact Linear Static Solutions", Compos. Struct., Vol. 72, No. 1, pp. 91-104, 2006.
19. Ventsel, E. and Krauthammar, T. "Thin Plates and Shells, Theory, Analysis and Application", Mcgraw-Hill, 2001.
20. Reddy, J.N. "Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells Theory and Analysis", CRC Press, 1997.
21. Reddy, J.N. "Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells", CRC Press, 2007.
22. Reddy, J.N. "Introduction to the Finite Element Method", 3rd Ed., Mcgraw-Hill, 2006.
23. Gerald, C.F. and Wheatley, P.O. "Applied Numerical Analysis", Addision Wesley Longman. Inc., 1997
24. Li, Z. "Finite Difference Methods Basics", Center for Research in Scientific Computation & Department of Mathematics North Carolina State Univ., 1998.

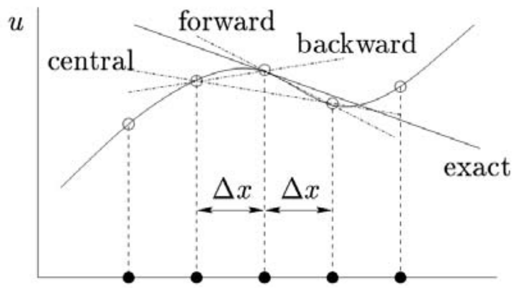
پیوست

پ ۱- فرم تفاضل محدود معادلات حاکم بر ورق گرد توخالی هدفمند با تغییرات دوجهته ویژگی‌های مواد

فرم باز شده معادلات حاکم بر جابه‌جایی‌های هر نقطه از ورق، مطابق رابطه (پ ۱) است:

$$\delta u_0 :\ -\frac{1}{1-\nu^2}\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial u_0}{\partial r}-\frac{1}{2r}\left(\frac{\partial w_0}{\partial r}\right)^2-\frac{\nu}{r^2}u_0\right]\frac{E_0 h}{m_1}e^{n_1\left(\frac{r-a}{b}\right)}(e^{m_1}-1)+\frac{1}{1-\nu^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}+\frac{\nu}{r^2}\frac{\partial w_0}{\partial r}-\frac{\nu}{r^2}u_0\right)\frac{E_0 h^2}{m_1}e^{n_1\left(\frac{r-a}{b}\right)}$$
$$\left(\frac{1}{2}e^{m_1}-\frac{1}{m_1}e^{m_1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{m_1}\right)-\frac{1}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2}+\frac{\partial w_0}{\partial r}\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}+\frac{\nu}{r}\frac{\partial u_0}{\partial r}-\frac{\nu}{r^2}u_0\right)\frac{E_0 h}{m_1}e^{n_1\left(\frac{r-a}{b}\right)}(e^{m_1}-1)+\frac{1}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial r^3}-\frac{\nu}{r^2}\frac{\partial w_0}{\partial r}\right.$$
$$\left.+\frac{\nu}{r}\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}\right)\frac{E_0 h^2}{m_1}e^{n_1\left(\frac{r-a}{b}\right)}\times\left(\frac{1}{2}e^{m_1}-\frac{1}{m_1}e^{m_1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{m_1}\right)+\frac{1}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}+\frac{\nu}{r}\frac{\partial w_0}{\partial r}\right)\left(\frac{1}{2}e^{m_1}-\frac{1}{m_1}e^{m_1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{m_1}\right)\frac{E_0 h^2 n_1}{m_1 b}e^{n_1\left(\frac{r-a}{b}\right)}$$
$$+\frac{1}{1-\nu^2}\left[\frac{\nu}{r}\frac{\partial u_0}{\partial r}+\frac{\nu}{2r}\left(\frac{\partial w_0}{\partial r}\right)^2+\frac{u_0}{r^2}\right]\frac{E_0 h}{m_1}e^{n_1\left(\frac{r-a}{b}\right)}(e^{m_1}-1)-\frac{1}{1-\nu^2}\left(\frac{\nu}{r}\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial w_0}{\partial r}\right)\left(\frac{1}{2}e^{m_1}-\frac{1}{m_1}e^{m_1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{m_1}\right)\frac{E_0 h^2}{m_1}e^{n_1\left(\frac{r-a}{b}\right)}$$
$$+\frac{\rho_0 h}{m_2}e^{n_2\left(\frac{r-a}{b}\right)}(e^{m_2}-1)\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2}=0$$

$$
\begin{aligned}
&\delta w_0 : -\frac{2}{1-\nu^2}\bigg(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w_0}{\partial r}\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}+\frac{\nu}{r^2}\frac{\partial u_0}{\partial r}-\frac{\nu}{r^3}u_0\bigg)\bigg(\frac{1}{2}e^{m_1}-\frac{1}{m_1}e^{m_1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{m_1}\bigg)\frac{E_0h^2}{m_1}e^{n_1\left(\frac{r-a}{b}\right)}-\frac{2}{1-\nu^2}\bigg[\frac{1}{r}\frac{\partial u_0}{\partial r}\\
&+\frac{1}{2r}\bigg(\frac{\partial w_0}{\partial r}\bigg)^2+\frac{\nu}{r^2}u_0\bigg]\bigg(\frac{1}{2}e^{m_1}-\frac{1}{m_1}e^{m_1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{m_1}\bigg)\frac{E_0h^2n_1}{m_1b}e^{n_1\left(\frac{r-a}{b}\right)}+\frac{2}{1-\nu^2}\bigg(\frac{1}{r}\frac{\partial^3 w_0}{\partial r^3}+\frac{\nu}{r^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}-\frac{\nu}{r^3}\frac{\partial w_0}{\partial r}\bigg)\frac{E_0h^2}{m_1}e^{n_1\left(\frac{r-a}{b}\right)}\\
&\bigg(\frac{h}{4}e^{m_1}-e^{m_1}+\frac{2}{m_1}e^{m_1}+\frac{h}{4}-1-\frac{1}{m_1}\bigg)+\frac{2}{1-\nu^2}\bigg(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}+\frac{\nu}{r^2}\frac{\partial w_0}{\partial r}\bigg)\bigg(\frac{h}{4}e^{m_1}-e^{m_1}+\frac{2}{m_1}e^{m_1}+\frac{h}{4}-1-\frac{1}{m_1}\bigg)\frac{E_0h^2n_1}{m_1b}e^{n_1\left(\frac{r-a}{b}\right)}\\
&-\frac{1}{1-\nu^2}\bigg[\frac{\partial^3 u_0}{\partial r^3}+\bigg(\frac{\partial^2 w_0}{\partial^2 r}\bigg)^2+\frac{\partial w_0}{\partial r}\frac{\partial^3 w_0}{\partial^3 r}+\frac{\nu}{r}\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2}-\frac{\nu}{r^2}\frac{\partial u_0}{\partial r}-\frac{\nu}{r^2}\frac{\partial u_0}{\partial r}+\frac{2\nu}{r^3}u_0\bigg]\bigg(\frac{1}{2}e^{m_1}-\frac{1}{m_1}e^{m_1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{m_1}\bigg)\frac{E_0h^2}{m_1}e^{n_1\left(\frac{r-a}{b}\right)}\\
&-\frac{1}{1-\nu^2}\bigg(\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2}+\frac{\partial w_0}{\partial r}\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}+\frac{\nu}{r}\frac{\partial u_0}{\partial r}-\frac{\nu}{r^2}u_0\bigg)\bigg(\frac{1}{2}e^{m_1}-\frac{1}{m_1}e^{m_1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{m_1}\bigg)\frac{E_0h^2n_1}{m_1b}e^{n_1\left(\frac{r-a}{b}\right)}-\frac{1}{1-\nu^2}\bigg(\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2}+\frac{\partial w_0}{\partial r}\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}\\
&+\frac{\nu}{r}\frac{\partial u_0}{\partial r}-\frac{\nu}{r^2}u_0\bigg)\bigg(\frac{1}{2}e^{m_1}-\frac{1}{m_1}e^{m_1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{m_1}\bigg)\frac{E_0h^2n_1}{m_1b}e^{n_1\left(\frac{r-a}{b}\right)}-\frac{1}{1-\nu^2}\bigg[\frac{\partial u_0}{\partial r}+\frac{1}{2}\bigg(\frac{\partial w_0}{\partial r}\bigg)^2+\frac{\nu}{r}u_0\bigg]\bigg(\frac{1}{2}e^{m_1}-\frac{1}{m_1}e^{m_1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{m_1}\bigg)\\
&\bigg(\frac{n_1}{b}\bigg)\frac{E_0h^2}{m_1}e^{n_1\frac{r-a}{b}}+\frac{\rho_0h}{m_2}e^{n_2\frac{r-a}{b}}(e^{m_2}-1)\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2}+\frac{1}{1-\nu^2}\bigg(\frac{\partial^4 w_0}{\partial r^4}-\frac{\nu}{r}\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}+\frac{\nu}{r}\frac{\partial^3 w_0}{\partial r^3}+\frac{2\nu}{r^3}\frac{\partial w_0}{\partial r}-\frac{\nu}{r^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}\bigg)\frac{E_0h^2e^{n_1\left(\frac{r-a}{b}\right)}}{m_1}\\
&\bigg(\frac{h}{4}e^{m_1}-e^{m_1}+\frac{2}{m_1}e^{m_1}+\frac{h}{4}-1-\frac{1}{m_1}\bigg)+\frac{1}{1-\nu^2}\bigg(\frac{\partial^3 w_0}{\partial r^3}+\frac{\nu}{r}\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}-\frac{\nu}{r^2}\frac{\partial w_0}{\partial r}\bigg)\bigg(\frac{h}{4}e^{m_1}-e^{m_1}+\frac{2}{m_1}e^{m_1}+\frac{h}{4}-1-\frac{1}{m_1}\bigg)\\
&\frac{E_0h^2n_1e^{n_1\left(\frac{r-a}{b}\right)}}{m_1b}+\frac{1}{1-\nu^2}\bigg(\frac{\partial^3 w_0}{\partial r^3}-\frac{\nu}{r^2}\frac{\partial w_0}{\partial r}+\frac{\nu}{r}\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}\bigg)\bigg(\frac{h}{4}e^{m_1}-e^{m_1}+\frac{2}{m_1}e^{m_1}+\frac{h}{4}-1-\frac{1}{m_1}\bigg)\frac{E_0h^2n_1e^{n_1\left(\frac{r-a}{b}\right)}}{m_1b}+\frac{1}{1-\nu^2}\bigg(\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}+\frac{\nu}{r}\frac{\partial w_0}{\partial r}\bigg)\\
&\bigg(\frac{h}{4}e^{m_1}-e^{m_1}+\frac{2}{m_1}e^{m_1}+\frac{h}{4}-1-\frac{1}{m_1}\bigg)\bigg(\frac{n_1}{b}\bigg)^2\frac{E_0h^2e^{n_1\left(\frac{r-a}{b}\right)}}{m_1}+\frac{1}{1-\nu^2}\bigg(\frac{\nu}{r}\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2}+\frac{\nu}{r}\frac{\partial w_0}{\partial r}\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}-\frac{u_0}{r^3}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_0}{\partial r}\bigg)\frac{E_0h^2e^{n_1\left(\frac{r-a}{b}\right)}}{m_1}\\
&\bigg(\frac{1}{2}e^{m_1}-\frac{1}{m_1}e^{m_1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{m_1}\bigg)+\frac{1}{1-\nu^2}\bigg[\frac{\nu}{r}\frac{\partial u_0}{\partial r}+\frac{\nu}{2r}\bigg(\frac{\partial w_0}{\partial r}\bigg)^2+\frac{u_0}{r^2}\bigg]\bigg(\frac{1}{2}e^{m_1}-\frac{1}{m_1}e^{m_1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{m_1}\bigg)\frac{E_0h^2n_1e^{n_1\left(\frac{r-a}{b}\right)}}{m_1b}\\
&+\frac{1}{1-\nu^2}\bigg[\frac{\partial^3 w_0}{\partial r^3}\frac{\partial w_0}{\partial r}-\frac{\nu}{r^2}\bigg(\frac{\partial w_0}{\partial r}\bigg)^2+\frac{\nu}{r}\frac{\partial w_0}{\partial r}\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}\bigg]\bigg(\frac{1}{2}e^{m_1}-\frac{1}{m_1}e^{m_1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{m_1}\bigg)\frac{E_0h^2e^{n_1\left(\frac{r-a}{b}\right)}}{m_1}+\frac{1}{1-\nu^2}\\
&\bigg[\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}\frac{\partial w_0}{\partial r}+\frac{\nu}{r}\bigg(\frac{\partial w_0}{\partial r}\bigg)^2\bigg]\bigg(\frac{1}{2}e^{m_1}-\frac{1}{m_1}e^{m_1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{m_1}\bigg)\frac{E_0h^2n_1e^{n_1\left(\frac{r-a}{b}\right)}}{m_1b}-\frac{1}{1-\nu^2}\bigg[\frac{\partial u_0}{\partial r}\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}+\frac{1}{2}\bigg(\frac{\partial w_0}{\partial r}\bigg)^2\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}\\
&+\frac{\nu u_0}{r^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}\bigg](e^{m_1}-1)\frac{E_0hn_1e^{n_1\left(\frac{r-a}{b}\right)}}{m_1b}+\frac{1}{1-\nu^2}\bigg[\bigg(\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}\bigg)^2+\frac{\nu}{r}\frac{\partial w_0}{\partial r}\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}\bigg]\bigg(\frac{1}{2}e^{m_1}-\frac{1}{m_1}e^{m_1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{m_1}\bigg)\frac{E_0h^2e^{n_1\left(\frac{r-a}{b}\right)}}{m_1}-q\\
&+\rho_0\frac{h}{m_2}e^{n_2\left(\frac{r-a}{b}\right)}(e^{m_2}-1)\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}-\bigg(\frac{h}{4}e^{m_2}-e^{m_2}+\frac{2}{m_2}e^{m_2}+\frac{h}{4}-1-\frac{2}{m_2}\bigg)\bigg(\frac{\partial^3 w_0}{\partial r\partial t^2}\times\frac{1}{r}+\frac{\partial^4 w_0}{\partial r^2\partial t^2}\bigg)\rho_0\frac{h^2}{m_2}e^{n_2\left(\frac{r-a}{b}\right)}=0
\end{aligned}
\tag{پ-۱}
$$



شکل (پ-۱): نمایش هندسی پایه سه شیوه تقریب تفاضل محدود.

بر پایه شکل پ-۱، روابط تبدیل مشتقات برای نقطه گره i در هر یک از شیوه‌های تقریب پسرو، پیشرو و مرکزی از روابط (پ-۲) تا (پ-۴) به دست می‌آیند [۲۳]:

- حلقه پسرو:

$$\frac{\partial w_i}{\partial r}=\frac{w_i-w_{i-1}}{h};\quad \frac{\partial^2 w_i}{\partial r^2}=\frac{w_i-2w_{i-1}+w_{i-2}}{h^2};\quad \frac{\partial^3 w_i}{\partial r^3}=\frac{w_i-3w_{i-1}+3w_{i-2}-w_{i-3}}{h^3};\quad \frac{\partial^4 w_i}{\partial r^4}=\frac{w_i-4w_{i-1}+6w_{i-2}-4w_{i-3}+w_{i-4}}{h^4}; \tag{پ-۲}$$

- حلقه پیشرو:

$$\frac{\partial w_i}{\partial r}=\frac{w_{i+1}-w_i}{h};\quad \frac{\partial^2 w_i}{\partial r^2}=\frac{w_{i+2}-2w_{i+1}+w_i}{h^2};\quad \frac{\partial^3 w_i}{\partial r^3}=\frac{w_{i+3}-3w_{i+2}+3w_{i+1}-w_i}{h^3};\quad \frac{\partial^4 w_i}{\partial r^4}=\frac{w_{i+4}-4w_{i+3}+6w_{i+2}-4w_{i+1}+w_i}{h^4}; \tag{پ-۳}$$

- حلقه مرکزی:

$$\frac{\partial w_i}{\partial r}=\frac{w_{i+1}-w_{i-1}}{2h};\quad \frac{\partial^2 w_i}{\partial r^2}=\frac{w_{i+2}-2w_i+w_{i-2}}{4h^2};\quad \frac{\partial^3 w_i}{\partial r^3}=\frac{w_{i+3}-3w_{i+1}+3w_{i-1}-w_{i-3}}{8h^3};\quad \frac{\partial^4 w_i}{\partial r^4}=\frac{w_{i+4}-4w_{i+2}+6w_i-4w_{i-2}+w_{i-4}}{16h^4}; \tag{پ-۴}$$

با جایگذاری روابط (پ-۲) تا (پ-۴) در دو معادله حاکم بر هریک از نقاط گره (رابطه پ-۱)، روابط تفاضل محدود با داشتن ضرایب تعریف شده در روابط (پ- ۵) و (پ-۶) حاصل می‌گردند:

- پارامترهای تعریف شده جهت اختصار معادله حاکم اول:

$$A_1 = E_0\left(h/m_1\right)\left(e^{m_1}-1\right)e^{n_1\frac{r-a}{b-a}},\ B_1 = E_0\left(h^2/m_1\right)\left(\frac{1}{2}e^{m_1}-\frac{1}{m_1}e^{m_1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{m_1}\right)e^{n_1\frac{r-a}{b-a}},$$
$$H_1 = \rho_0\left(h/m_2\right)\left(e^{m_2}-1\right)e^{n_2\frac{r-a}{b-a}},\ E_1 = \frac{E_0 n_1 h^2}{m_1(b-a)}\left(\frac{1}{2}e^{m_1}-\frac{1}{m_1}e^{m_1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{m_1}\right)e^{n_1\frac{r-a}{b-a}},\tag{پ-۵}$$
$$I_1 = \frac{E_0 n_1 h}{m_1(b-a)}\left(e^{m_1}-1\right)e^{n_1\frac{r-a}{b-a}},\ D_1 = B_1,\ G_1 = B_1,\ C_1 = A_1,\ F_1 = A_1$$

- پارامترهای تعریف شده جهت اختصار معادله حاکم دوم:

$$Z = E_0\left(h^3/m_1\right)\left(\frac{1}{4}e^{m_1}-\frac{1}{m_1}e^{m_1}+\frac{2}{m_1^2}e^{m_1}-\frac{h}{4}-\frac{1}{m_1}-\frac{2}{m_1^2}\right)e^{n_1\frac{r-a}{b-a}},$$
$$W = \frac{E_0 n_1 h^3}{m_1(b-a)}\left(\frac{1}{4}e^{m_1}-\frac{1}{m_1}e^{m_1}+\frac{2}{m_1^2}e^{m_1}-\frac{h}{4}-\frac{1}{m_1}-\frac{2}{m_1^2}\right)e^{n_1\frac{r-a}{b-a}};$$
$$X = E_0\left(h/m_1\right)\left(e^{m_1}-1\right)e^{n_1\frac{r-a}{b-a}},\ Y = E_0\left(h^2/m_1\right)\left(\frac{1}{2}e^{m_1}-\frac{1}{m_1}e^{m_1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{m_1}\right)e^{n_1\frac{r-a}{b-a}},$$
$$V = E_0\left(h/m_1\right)\left(e^{m_1}-1\right)e^{n_1\frac{r-a}{b-a}},\ V_1 = \frac{E_0 n_1 h}{m_1(b-a)}\left(e^{m_1}-1\right)e^{n_1\frac{r-a}{b-a}},\tag{پ-۶}$$
$$B = \frac{E_0 m_1 h^2}{m_1(b-a)}\left(\frac{1}{2}e^{m_1}-\frac{1}{m_1}e^{m_1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{m_1}\right)e^{n_1\frac{r-a}{b-a}},\ H = E_0\left(h^2/m_1\right)\left(\frac{n_1}{b-a}\right)^2\left(\frac{1}{2}e^{m_1}-\frac{1}{m_1}e^{m_1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{m_1}\right)e^{n_1\frac{r-a}{b-a}},$$
$$L = E_0\left(h^3/m_1\right)\left(\frac{n_1}{b-a}\right)^2\left(\frac{1}{4}e^{m_1}-\frac{1}{m_1}e^{m_1}+\frac{2}{m_1^2}e^{m_1}-\frac{h}{4}-\frac{1}{m_1}-\frac{2}{m_1^2}\right)e^{n_1\frac{r-a}{b-a}},$$
$$U = \rho_0\left(h^3/m_2\right)\left(\frac{1}{4}e^{m_2}-\frac{1}{m_2}e^{m_2}+\frac{2}{m_2^2}e^{m_2}-\frac{h}{4}-\frac{1}{m_2}-\frac{2}{m_2^2}\right)e^{n_1\frac{r-a}{b-a}},$$
$$T_1 = \rho_0\left(h/m_2\right)\left(e^{m_2}-1\right)e^{n_1\frac{r-a}{b-a}},\ A=Y,\ P=Y,\ E=Y,\ M=Y,\ C=Z,\ I=Z,\ J=W,$$
$$K=W,\ D=W,\ R=V,\ X=V,\ F=B,\ G=B,\ N=B,\ Q=B$$

بر این پایه، فرم تفاضل محدود معادلات حاکم بر نقاط گره مختلف قابل دسترسی خواهند بود:

الف) بر پایه حلقه پیشرو برای نقاط نقاط مجاور مرزهای سمت چپ و زیرین ورق:

$$\left(\frac{B_1}{h_r^3}\right)\underline{w_{i+3}^{j}}+\left[\frac{-3B_1}{h_r^3}+\left(E_1+\frac{B_1}{r_i}\right)\frac{1}{h_r^2}\right]\underline{w_{i+2}^{j}}+\left[\frac{3B_1}{h_r^3}-\frac{2}{h_r^2}\left(E_1+\frac{B_1}{r_i}\right)+\frac{\nu E_1}{h_r r_i}-\frac{A_1}{h_r^3}\left(w_{i+2}^{j-1}-2w_{i+1}^{j-1}+w_i^{j-1}\right)\right.$$
$$+\left(\frac{A_1(-1+\nu)}{2h_r^2 r_i}-\frac{I}{2h_r^2}\right)\left(w_{i+1}^{j-1}-w_i^{j-1}\right)-\left.\frac{B_1}{r^2 h_r}\right]\underline{w_{i+1}^{j}}+\left[\frac{-B_1}{h_r^3}+\left(E_1+\frac{B_1}{r_i}\right)\frac{1}{h_r^2}+\frac{A_1}{h_r^3}\left(w_{i+2}^{j-1}-2w_{i+1}^{j-1}+w_i^{j-1}\right)-\right.$$
$$\left.\left(\frac{A_1(-1+\nu)}{2h_r^2 r_i}-\frac{I}{2h_r^2}\right)\left(w_{i+1}^{j-1}-w_i^{j-1}\right)-\frac{\nu E_1}{h_r r_i}+\frac{B_1}{r^2 h_r}\right]\underline{w_i^{j}}+\left(\frac{A_1}{h_r^2}\right)\underline{u_{i+2}^{j}}+\left(-\frac{A_1}{h_r r_i}-\frac{I}{h_r}-\frac{2A_1}{h_r^2}\right)\underline{u_{i+1}^{j}}+\left[\frac{A_1}{h_r r_i}+\right.$$
$$\left.\frac{I}{h_r}+\frac{A_1}{h_r^2}+\frac{A_1}{r_i^2}-\frac{I\nu}{r_i}\right]\underline{u_i^{j}}+\left[H_1(1-\nu^2)\right]\underline{\ddot{u}_i}=0$$

$$\frac{C}{h_r^4(1-\nu^2)}\underline{w_{i+4}^{j}}+\left[\frac{-4C}{h_r^4(1-\nu^2)}+\frac{2C}{r_i h_r^3(1-\nu^2)}+\frac{2J}{h_r^3(1-\nu^2)}\right]\underline{w_{i+3}^{j}}+\left\{\frac{-3}{h_r^3}\left[\frac{2C}{r_i(1-\nu^2)}+\frac{2J}{1-\nu^2}\right]+\frac{6C}{h_r^4(1-\nu^2)}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{h_r^2}\left[\frac{J(2+\nu)}{r_i(1-\nu^2)}+\frac{L}{1-\nu^2}-\frac{C}{r_i^2(1-\nu^2)}\right]\right\}\underline{w_{i+2}^{j}}+\left\{\frac{1}{h_r^3}\left[\frac{(3\nu-1)A}{r_i(1-\nu^2)}-\frac{B}{1-\nu^2}\right]\left(w_{i+2}^{j-1}-2w_{i+1}^{j-1}+w_i^{j-1}\right)+\left[\frac{(3\nu-2)B}{r_i(1-\nu^2)}\right.\right.$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{H}{2(1-\nu^2)}\Big]\frac{1}{h_r^2}\left(w_{i+1}^{j-1}-w_i^{j-1}\right)+\frac{3}{h_r^2}\left(\frac{2C}{r_i(1-\nu^2)}+\frac{2J}{1-\nu^2}\right)-\frac{4C}{h_r^4(1-\nu^2)}-\frac{2}{h_r^2}\left[\frac{J(2+\nu)}{r_i(1-\nu^2)}+\frac{L}{1-\nu^2}-\frac{C}{r_i^2(1-\nu^2)}\right]\\
&+\frac{\nu L}{r_i h_r(1-\nu^2)}+\frac{C}{r_i^3(1-\nu^2)}-\frac{J}{r_i^2(1-\nu^2)}-\left[\frac{R}{2h_r^4(1-\nu^2)}+\frac{X}{h_r^4(1-\nu^2)}\right]\left(w_{i+1}^{j-1}-w_i^{j-1}\right)\left(w_{i+2}^{j-1}-2w_{i+1}^{j-1}+w_i^{j-1}\right)\\
&+\left[-\frac{R}{2h_r^3(1-\nu^2)}-\frac{X}{2h_r^3 r_i(1-\nu^2)}\right]\left(w_{i+1}^{j-1}-w_i^{j-1}\right)^2+\left[-\frac{R}{h_r^2(1-\nu^2)}-\frac{(\nu+1)X}{h_r^2 r_i(1-\nu^2)}\right]\left(u_{i+1}^{j-1}-u_i^{j-1}\right)\\
&-\frac{X}{h_r^3(1-\nu^2)}\left(u_{i+2}^{j-1}-2u_{i+1}^{j-1}+u_i^{j-1}\right)\Big\}\underline{w_{i+1}^j}+\Big\{-\frac{1}{h_r^3}\left[\frac{(3\nu-1)A}{r_i(1-\nu^2)}-\frac{B}{1-\nu^2}\right]\left(w_{i+2}^{j-1}-2w_{i+1}^{j-1}+w_i^{j-1}\right)-\frac{1}{h_r^2}\left[\frac{(3\nu-2)B}{r_i(1-\nu^2)}-\frac{H}{2(1-\nu^2)}\right]\\
&\left(w_{i+1}^{j-1}-w_i^{j-1}\right)-\frac{1}{h_r^3}\left[\frac{2C}{r_i(1-\nu^2)}+\frac{2J}{1-\nu^2}\right]+\frac{C}{h_r^4(1-\nu^2)}+\frac{1}{h_r^2}\left[\frac{J(2+\nu)}{r_i(1-\nu^2)}+\frac{L}{1-\nu^2}-\frac{C}{r_i^2(1-\nu^2)}\right]-\frac{\nu L}{r_i h_r(1-\nu^2)}\\
&+\left[\frac{R}{2h_r^4(1-\nu^2)}+\frac{X}{h_r^4(1-\nu^2)}\right]\left(w_{i+1}^{j-1}-w_i^{j-1}\right)\left(w_{i+2}^{j-1}-2w_{i+1}^{j-1}+w_i^{j-1}\right)-\frac{C}{r_i^3 h_r(1-\nu^2)}+\frac{J}{r_i^2 h_r(1-\nu^2)}+\Big[\frac{R}{2h_r^3(1-\nu^2)}\\
&+\frac{X}{2h_r^3 r_i(1-\nu^2)}\Big]\left(w_{i+1}^{j-1}-w_i^{j-1}\right)^2+\left[\frac{R}{h_r^2(1-\nu^2)}+\frac{(1+\nu)X}{h_r^2 r_i(1-\nu^2)}\right]\left(u_{i+1}^{j-1}-u_i^{j-1}\right)+\frac{X}{h_r^2(1-\nu^2)}\left(u_{i+2}^{j-1}-2u_{i+1}^{j-1}+u_i^{j-1}\right)\Big\}\underline{w_i^j}\\
&+\left[\frac{1}{h_r^2}\left(\frac{-2A}{r_i(1-\nu^2)}-\frac{2B}{(1-\nu^2)}\right)+\frac{3A}{h_r^3(1-\nu^2)}\right]\underline{u_{i+2}^j}+\left[-\frac{A}{h_r^3(1-\nu^2)}\right]\underline{u_{i+3}^j}+\Big\{\frac{2}{h_r^2}\left[\frac{2A}{r_i(1-\nu^2)}+\frac{2B}{(1-\nu^2)}\right]\\
&+\frac{1}{h_r}\left[\frac{A}{r_i^2(1-\nu^2)}-\frac{(\nu+2)B}{r_i(1-\nu^2)}-\frac{H}{(1-\nu^2)}\right]-\frac{3A}{h_r^3(1-\nu^2)}-\frac{R}{h_r^3(1-\nu^2)}\left(w_{i+2}^{j-1}-2w_{i+1}^{j-1}+w_i^{j-1}\right)\Big\}\underline{u_{i+1}^j}\\
&+\Big\{\frac{1}{h_r^2}\left[-\frac{2A}{r_i(1-\nu^2)}-\frac{2B}{(1-\nu^2)}\right]-\frac{1}{h_r}\left[\frac{A}{r_i^2(1-\nu^2)}-\frac{(\nu+2)B}{r_i(1-\nu^2)}-\frac{H}{(1-\nu^2)}\right]+\frac{A}{h_r^3(1-\nu^2)}+\frac{1}{h_r}\Big[-\frac{A}{r_i(1-\nu^2)}\\
&+\frac{B}{r_i^2(1-\nu^2)}-\frac{\nu H}{r_i(1-\nu^2)}\Big]+\left[\frac{R}{h_r^3(1-\nu^2)}-\frac{\nu R}{h_r^2 r_i(1-\nu^2)}\right]\left(w_{i+2}^{j-1}-2w_{i+1}^{j-1}+w_i^{j-1}\right)\\
&-\frac{\nu R}{h_r r_i(1-\nu^2)}\left(w_{i+1}^{j-1}-w_i^{j-1}\right)\Big\}\underline{u_i^j}-q+\left(T+\frac{U}{r_i h_r}-\frac{U}{h_r^2}\right)\underline{\ddot{w}_i}+\left(-\frac{U}{r_i h_r}+\frac{2U}{h_r^2}\right)\underline{\ddot{w}_{i+1}}+\left(-\frac{U}{h_r^2}\right)\underline{\ddot{w}_{i+2}}=0
\end{aligned}$$
(پ-۷)

ب) بر پایه حلقه پسرو برای نقاط مجاور مرزهای سمت راست و بالای ورق:

$$\begin{aligned}
&\left(-\frac{B_1}{h_r^3}\right)\underline{w_{i-3}^j}+\left[\frac{3B_1}{h_r^3}+\left(E_1+\frac{B_1}{r_i}\right)\frac{1}{h_r^2}\right]\underline{w_{i-2}^j}+\Big\{-\frac{3B_1}{h_r^3}-\frac{2}{h_r^2}\left(E_1+\frac{B_1}{r_i}\right)-\frac{\nu E_1}{h_r r_i}+\frac{A_1}{h_r^3}\left(w_{i-2}^{j-1}-2w_{i-1}^{j-1}+w_i^{j-1}\right)\\
&-\left[\frac{A_1(-1+\nu)}{2h_r^2 r_i}-\frac{I}{2h_r^2}\right]\left(-w_{i-1}^{j-1}+w_i^{j-1}\right)+\frac{B_1}{r^2 h_r}\Big\}\underline{w_{i-1}^j}+\Big\{\frac{B_1}{h_r^3}+\left(E_1+\frac{B_1}{r_i}\right)\frac{1}{h_r^2}-\frac{A_1}{h_r^3}\left(w_{i-2}^{j-1}-2w_{i-1}^{j-1}+w_i^{j-1}\right)\\
&+\left[\frac{A_1(-1+\nu)}{2h_r^2 r_i}-\frac{I}{2h_r^2}\right]\left(-w_{i-1}^{j-1}+w_i^{j-1}\right)+\frac{\nu E_1}{h_r r_i}-\frac{B_1}{r^2 h_r}\Big\}\underline{w_i^j}+\left(\frac{A_1}{h_r^2}\right)\underline{u_{i-2}^j}+\left(\frac{A_1}{h_r r_i}+\frac{I}{h_r}-\frac{2A_1}{h_r^2}\right)\underline{u_{i-1}^j}\\
&+\left(-\frac{A_1}{h_r r_i}-\frac{I}{h_r}+\frac{A_1}{h_r^2}+\frac{A_1}{r_i^2}-\frac{I\nu}{r_i}\right)\underline{u_i^j}+\left[H_1(1-\nu^2)\right]\underline{\ddot{u}_i}=0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{C}{h_r^4(1-\nu^2)}\right]\underline{w_{i-4}^{j}}+\left[\frac{-4C}{h_r^4(1-\nu^2)}-\frac{2C}{r_i h_r^3(1-\nu^2)}-\frac{2J}{h_r^3(1-\nu^2)}\right]\underline{w_{i-3}^{j}}+\Bigg\{\frac{3}{h_r^3}\left[\frac{2C}{r_i(1-\nu^2)}+\frac{2J}{1-\nu^2}\right]\\
&+\frac{6C}{h_r^4(1-\nu^2)}+\frac{1}{h_r^2}\left[\frac{J(2+\nu)}{r_i(1-\nu^2)}+\frac{L}{1-\nu^2}-\frac{C}{r_i^{\,2}(1-\nu^2)}\right]\Bigg\}\underline{w_{i-2}^{j}}+\Bigg\{-\frac{1}{h_r^3}\left[\frac{(3\nu-1)A}{r_i(1-\nu^2)}-\frac{B}{1-\nu^2}\right](w_{i-2}^{j-1}\\
&-2w_{i-1}^{j-1}+w_{i}^{j-1})-\left[\frac{(3\nu-2)B}{r_i(1-\nu^2)}-\frac{H}{2(1-\nu^2)}\right]\frac{1}{h_r^2}(-w_{i-1}^{j-1}+w_{i}^{j-1})-\frac{3}{h_r^2}\left[\frac{2C}{r_i(1-\nu^2)}+\frac{2J}{1-\nu^2}\right]-\frac{4C}{h_r^4(1-\nu^2)}\\
&-\frac{2}{h_r^2}\left[\frac{J(2+\nu)}{r_i(1-\nu^2)}+\frac{L}{1-\nu^2}-\frac{C}{r_i^{\,2}(1-\nu^2)}\right]-\frac{\nu L}{r_i h_r(1-\nu^2)}-\frac{C}{r_i^{\,3}(1-\nu^2)}+\frac{J}{r_i^{\,2}(1-\nu^2)}+\Bigg[\frac{R}{2h_r^{\,4}(1-\nu^2)}\\
&+\frac{X}{h_r^{\,4}(1-\nu^2)}\Bigg](-w_{i-1}^{j-1}+w_{i}^{j-1})(w_{i-2}^{j-1}-2w_{i-1}^{j-1}+w_{i}^{j-1})+\left[\frac{R}{2h_r^{\,3}(1-\nu^2)}+\frac{X}{2h_r^{\,3}r_i(1-\nu^2)}\right]\left(-w_{i-1}^{j-1}+w_{i}^{j-1}\right)^2\\
&+\left[\frac{R}{h_r^{\,2}(1-\nu^2)}+\frac{(\nu+1)X}{h_r^{\,2}r_i(1-\nu^2)}\right](u_{i+1}^{j-1}-u_{i}^{j-1})+\frac{X}{h_r^{\,3}(1-\nu^2)}(u_{i-2}^{j-1}-2u_{i-1}^{j-1}+u_{i}^{j-1})\Bigg\}\underline{w_{i-1}^{j}}+\Bigg\{\frac{1}{h_r^3}\Big(\frac{(3\nu-1)A}{r_i(1-\nu^2)}\\
&-\frac{B}{1-\nu^2}\Big)\times(w_{i-2}^{j-1}-2w_{i-1}^{j-1}+w_{i}^{j-1})+\frac{1}{h_r^2}\left[\frac{(3\nu-2)B}{r_i(1-\nu^2)}-\frac{H}{2(1-\nu^2)}\right](w_{i-1}^{j-1}+w_{i}^{j-1})+\frac{1}{h_r^3}\left[\frac{2C}{r_i(1-\nu^2)}+\frac{2J}{1-\nu^2}\right]\\
&+\frac{C}{h_r^4(1-\nu^2)}+\frac{1}{h_r^2}\left[\frac{J(2+\nu)}{r_i(1-\nu^2)}+\frac{L}{1-\nu^2}-\frac{C}{r_i^{\,2}(1-\nu^2)}\right]+\frac{\nu L}{r_i h_r(1-\nu^2)}+\left[-\frac{R}{2h_r^{\,4}(1-\nu^2)}-\frac{X}{h_r^{\,4}(1-\nu^2)}\right]\\
&(-w_{i-1}^{j-1}+w_{i}^{j-1})(w_{i-2}^{j-1}-2w_{i-1}^{j-1}+w_{i}^{j-1})+\frac{C}{r_i^{\,3}h_r(1-\nu^2)}-\frac{J}{r_i^{\,2}h_r(1-\nu^2)}+\left[-\frac{R}{2h_r^{\,3}(1-\nu^2)}-\frac{X}{2h_r^{\,3}r_i(1-\nu^2)}\right]\\
&(-w_{i-1}^{j-1}+w_{i}^{j-1})^2+\left[-\frac{R}{h_r^{\,2}(1-\nu^2)}-\frac{(1+\nu)X}{h_r^{\,2}r_i(1-\nu^2)}\right](-u_{i-1}^{j-1}+u_{i}^{j-1})-\frac{X}{h_r^{\,2}(1-\nu^2)}(u_{i-2}^{j-1}-2u_{i-1}^{j-1}+u_{i}^{j-1})\Bigg\}\underline{w_{i}^{j}}\\
&+\left\{\frac{1}{h_r^2}\left[\frac{-2A}{r_i(1-\nu^2)}-\frac{2B}{(1-\nu^2)}\right]-\frac{3A}{h_r^3(1-\nu^2)}\right\}\underline{u_{i-2}^{j}}+\left[\frac{A}{h_r^3(1-\nu^2)}\right]\underline{u_{i-3}^{j}}+\Bigg\{\frac{2}{h_r^2}\left[\frac{2A}{r_i(1-\nu^2)}+\frac{2B}{(1-\nu^2)}\right]+\frac{1}{h_r}\\
&\left[-\frac{A}{r_i^{\,2}(1-\nu^2)}+\frac{(\nu+2)B}{r_i(1-\nu^2)}+\frac{H}{(1-\nu^2)}\right]+\frac{3A}{h_r^3(1-\nu^2)}+\frac{R}{h_r^3(1-\nu^2)}(w_{i+2}^{j-1}-2w_{i+1}^{j-1}+w_{i}^{j-1})\Bigg\}\underline{u_{i-1}^{j}}\\
&+\Bigg\{\frac{1}{h_r^2}\left[-\frac{2A}{r_i(1-\nu^2)}-\frac{2B}{(1-\nu^2)}\right]+\frac{1}{h_r}\left[\frac{A}{r_i^{\,2}(1-\nu^2)}-\frac{(\nu+2)B}{r_i(1-\nu^2)}-\frac{H}{(1-\nu^2)}\right]-\frac{A}{h_r^3(1-\nu^2)}+\frac{1}{h_r}\Bigg[-\frac{A}{r_i(1-\nu^2)}\\
&+\frac{B}{r_i^{\,2}(1-\nu^2)}-\frac{\nu H}{r_i(1-\nu^2)}\Bigg]+\left[-\frac{R}{h_r^3(1-\nu^2)}-\frac{\nu R}{h_r^2 r_i(1-\nu^2)}\right](w_{i-2}^{j-1}-2w_{i-1}^{j-1}+w_{i}^{j-1})-\frac{\nu R}{h_r r_i(1-\nu^2)}(-w_{i-1}^{j-1}-w_{i}^{j-1})\Bigg\}\underline{u_{i}^{j}}\\
&-q+\left(T-\frac{U}{r_i h_r}-\frac{U}{h_r^{\,2}}\right)\underline{\ddot{w}_{i}}+\left(\frac{U}{r_i h_r}+\frac{2U}{h_r^{\,2}}\right)\underline{\ddot{w}_{i-1}}+\left(-\frac{U}{h_r^{\,2}}\right)\underline{\ddot{w}_{i-2}}=0
\end{aligned}
$$
(پ-۸)

ج) بر پایه حلقه مرکزی برای نقاط گره میانی ورق:

$$
\begin{aligned}
&\left(-\frac{B_1}{2h_r^3}\right)\underline{w_{i+2}^{j}}+\Bigg\{\frac{-B_1}{h_r^3}+(E_1+\frac{B_1}{r_i})\frac{1}{h_r^2}-\frac{A_1}{2h_r^3}(w_{i+1}^{j-1}-2w_{i}^{j-1}+w_{i-1}^{j-1})+\frac{1}{4h_r^{\,2}}\left[\frac{A_1(-1+\nu)}{4r_i}-\frac{I}{2}\right](-w_{i-1}^{j-1}+w_{i+1}^{j-1})\\
&\frac{\nu E_1}{2h_r r_i}-\frac{B_1}{2r^2h_r}\Bigg\}\underline{w_{i+1}^{j}}+\left[-\frac{2}{h_r^2}(E_1+\frac{B_1}{r_i})\right]\underline{w_{i}^{j}}+\Bigg\{\frac{B_1}{h_r^3}+(E_1+\frac{B_1}{r_i})\frac{1}{h_r^2}-\frac{A_1}{2h_r^3}(w_{i+1}^{j-1}-2w_{i}^{j-1}+w_{i-1}^{j-1})-\frac{1}{4h_r^{\,2}}\\
&\left[\frac{A_1(-1+\nu)}{4r_i}-\frac{I}{2}\right](-w_{i-1}^{j-1}+w_{i+1}^{j-1})-\frac{\nu E_1}{2h_r r_i}+\frac{B_1}{2r^2h_r}\Bigg\}\underline{w_{i-1}^{j}}+\left(-\frac{B_1}{2h_r^2}\right)\underline{w_{i-2}^{j}}+\left(-\frac{A_1}{2h_r r_i}-\frac{I}{2h_r}+\frac{A_1}{h_r^2}\right)\underline{u_{i+1}^{j}}\\
&+\left(-2\frac{A_1}{h_r^2}+\frac{A_1}{r_i^{\,2}}-\frac{I\nu}{r_i}\right)\underline{u_{i}^{j}}+\left(\frac{A_1}{2h_r r_i}+\frac{I}{2h_r}+\frac{A_1}{h_r^2}\right)\underline{u_{i-1}^{j}}+\left[H_1(1-\nu^2)\right]\underline{\ddot{u}_{i}}=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{2C}{2r_i h_r^3(1-\nu^2)}+\frac{2J}{2h_r^3(1-\nu^2)}+\frac{C}{h_r^4(1-\nu^2)}\right]\underline{w_{i+2}^{j}}+\Bigg\{\frac{1}{2h_r^3}\left[\frac{(3\nu-1)A}{r_i(1-\nu^2)}-\frac{B}{1-\nu^2}\right](w_{i+1}^{j-1}-2w_i^{j-1}+w_{i-1}^{j-1})\\
&-\left[\frac{2J}{2h_r^3(1-\nu^2)}+\frac{4C}{2r_i h_r^3(1-\nu^2)}\right]-\frac{4C}{h_r^4(1-\nu^2)}+\frac{1}{h_r^2}\left[\frac{J(2+\nu)}{r_i(1-\nu^2)}+\frac{L}{1-\nu^2}-\frac{C}{r_i^2(1-\nu^2)}\right]+\frac{1}{2h_r}\Bigg[\frac{-J}{r^2(1-\nu^2)}\\
&+\frac{\nu L}{r(1-\nu^2)}+\frac{C}{r_i^3(1-\nu^2)}\Bigg]+\frac{1}{4h_r^2}\left[\frac{(3\nu-2)B}{r_i(1-\nu^2)}-\frac{H}{2(1-\nu^2)}\right](-w_{i-1}^{j-1}+w_{i+1}^{j-1})+\frac{1}{4h_r^4}\left[-\frac{R}{2(1-\nu^2)}-\frac{X}{(1-\nu^2)}\right]\\
&(-w_{i-1}^{j-1}+w_{i+1}^{j-1})(w_{i+1}^{j-1}-2w_i^{j-1}+w_{i-1}^{j-1})+\left[-\frac{R}{4h_r^2(1-\nu^2)}-\frac{(\nu+1)X}{4h_r^2 r_i(1-\nu^2)}\right](u_{i+1}^{j-1}-u_{i-1}^{j-1})+\Bigg[-\frac{R}{16h_r^3(1-\nu^2)}\\
&+\frac{X}{16h_r^3 r_i(1-\nu^2)}\Bigg](-w_{i-1}^{j-1}+w_{i+1}^{j-1})^2-\frac{X}{2h_r^3(1-\nu^2)}(u_{i+1}^{j-1}-2u_i^{j-1}+u_{i-1}^{j-1})\Bigg\}\underline{w_{i+1}^{j}}+\Bigg\{\frac{6C}{h_r^4(1-\nu^2)}-\frac{2}{h_r^2}\Bigg[\frac{J(2+\nu)}{r_i(1-\nu^2)}\\
&+\frac{L}{1-\nu^2}-\frac{C}{r_i^2(1-\nu^2)}\Bigg]\Bigg\}\underline{w_i^{j}}+\Bigg\{-\frac{1}{2h_r^3}\left[\frac{(3\nu-1)A}{r_i(1-\nu^2)}-\frac{B}{1-\nu^2}\right](w_{i+1}^{j-1}-2w_i^{j-1}+w_{i-1}^{j-1})+\left[\frac{2J}{2h_r^3(1-\nu^2)}+\frac{4C}{2r_i h_r^3(1-\nu^2)}\right]\\
&-\frac{4C}{h_r^4(1-\nu^2)}+\frac{1}{h_r^2}\left[\frac{J(2+\nu)}{r_i(1-\nu^2)}+\frac{L}{1-\nu^2}-\frac{C}{r_i^2(1-\nu^2)}\right]-\frac{1}{2h_r}\left[\frac{-J}{r^2(1-\nu^2)}+\frac{\nu L}{r(1-\nu^2)}+\frac{C}{r_i^3(1-\nu^2)}\right]-\Bigg[\frac{(3\nu-2)B}{r_i(1-\nu^2)}\\
&-\frac{H}{2(1-\nu^2)}\Bigg]\frac{1}{4h_r^2}(-w_{i-1}^{j-1}+w_{i+1}^{j-1})-\frac{1}{4h_r^4}\left[-\frac{R}{2(1-\nu^2)}-\frac{X}{(1-\nu^2)}\right](-w_{i-1}^{j-1}+w_{i+1}^{j-1})(w_{i+1}^{j-1}-2w_i^{j-1}+w_{i-1}^{j-1})\\
&-\left[-\frac{R}{4h_r^2(1-\nu^2)}-\frac{(\nu+1)X}{4h_r^2 r_i(1-\nu^2)}\right](u_{i+1}^{j-1}-u_{i-1}^{j-1})+\left[-\frac{R}{16h_r^3(1-\nu^2)}+\frac{X}{16h_r^3 r_i(1-\nu^2)}\right](-w_{i-1}^{j-1}+w_{i+1}^{j-1})^2\\
&+\frac{X}{2h_r^3(1-\nu^2)}(u_{i+1}^{j-1}-2u_i^{j-1}+u_{i-1}^{j-1})\Bigg\}w_{i-1}^{j}+\left[-\frac{2C}{2r_i h_r^3(1-\nu^2)}-\frac{2J}{2h_r^3(1-\nu^2)}+\frac{C}{h_r^4(1-\nu^2)}\right]\underline{w_{i-2}^{j}}\\
&-\frac{A}{h_r^3(1-\nu^2)}\underline{u_{i+2}^{j}}+\Bigg\{\frac{1}{h_r^2}\left[\frac{-2A}{r_i(1-\nu^2)}-\frac{2B}{(1-\nu^2)}\right]+\frac{1}{2h_r}\left[\frac{A}{r_i^2(1-\nu^2)}+\frac{(\nu+2)B}{r_i(1-\nu^2)}-\frac{H}{(1-\nu^2)}\right]\\
&+\frac{A}{h_r^3(1-\nu^2)}-\frac{R}{2h_r^3(1-\nu^2)}(w_{i+1}^{j-1}-2w_i^{j-1}+w_{i-1}^{j-1})\Bigg\}\underline{u_{i+1}^{j}}+\Bigg\{-\frac{2}{h_r^2}\left[-\frac{2A}{r_i(1-\nu^2)}-\frac{2B}{(1-\nu^2)}\right]-\frac{A}{r_i(1-\nu^2)}\\
&+\frac{B}{r_i^2(1-\nu^2)}-\frac{\nu H}{r_i(1-\nu^2)}+\left[-\frac{\nu R}{h_r^2 r_i(1-\nu^2)}\right](w_{i+1}^{j-1}-2w_i^{j-1}+w_{i-1}^{j-1})-\frac{\nu R}{2h_r r_i(1-\nu^2)}(-w_{i-1}^{j-1}-w_{i+1}^{j-1})\Bigg\}\underline{u_i^{j}}\\
&+\Bigg\{\frac{1}{h_r^2}\left[\frac{-A}{r_i(1-\nu^2)}-\frac{2B}{(1-\nu^2)}\right]-\frac{1}{2h_r}\left[\frac{A}{r_i^2(1-\nu^2)}-\frac{(\nu+2)B}{r_i(1-\nu^2)}-\frac{H}{(1-\nu^2)}\right]-\frac{A}{h_r^3(1-\nu^2)}\\
&+\frac{R}{2h_r^3(1-\nu^2)}(w_{i+1}^{j-1}-2w_i^{j-1}+w_{i-1}^{j-1})\Bigg\}\underline{u_{i-1}^{j}}+\frac{A}{h_r^3(1-\nu^2)}\underline{u_{i-2}^{j}}-q+\left(T+2\frac{U}{h_r^2}\right)\underline{\ddot{w}_i}+\left(-\frac{U}{2r_i h_r}-\frac{U}{h_r^2}\right)\underline{\ddot{w}_{i+1}}\\
&+\left(\frac{U}{2r_i h_r}-\frac{U}{h_r^2}\right)\underline{\ddot{w}_{i-1}}=0
\end{aligned}
$$

(پ-۹)