

# تحلیل کمانش مکانیکی پوسته‌های استوانه‌ای باز تقویت شده

## با نانولوله‌های کربنی تک‌جداره

سعید جعفری مهرآبادی<sup>۱</sup>، رسول کریمی ثمر<sup>۲</sup> و میلاد بهلولی<sup>۳</sup>

دانشکده فنی مهندسی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد اراک

(تاریخ دریافت: ۹۱/۱/۲۷؛ تاریخ پذیرش: ۹۱/۵/۱۵)

### چکیده

در این مقاله به تحلیل کمانش مکانیکی پوسته استوانه‌ای باز تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تک‌جداره تحت بار محوری پرداخته شده است. معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی و با توجه به فرضیات غیرخطی دائل در پوسته‌های استوانه‌ای با به کارگیری معادلات اویلر به دست آمده است. برای تعیین خواص جنس پوسته تقویت شده مذکور، از قانون اصلاح شده مخلوط‌ها استفاده شده است. پس از حل معادلات مذکور، با توجه به شرایط مرزی در نظر گرفته شده، تأثیرات مشخصات هندسی پوسته و خواص مصالح بر بار بحرانی کمانش پوسته مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین از مقایسه جواب‌های به دست آمده با مراجع معتبر دیگر در حالت‌های خاص، از نحوه حل مسئله اطمینان کافی حاصل شده است.

**واژه‌های کلیدی:** کمانش مکانیکی، پوسته استوانه‌ای باز، نانولوله کربنی، بار بحرانی

## Mechanical Buckling Analysis of Open Circular Cylindrical Shells Reinforced with Single walled Carbon Nanotubes

S.J. Mehrabadi, R. Karimi Samar, and M. Bohluli

Faculty Eng. Tech.

Arak Branch, Islamic Azad Univ.

(Received: 15 April, 2012; Accepted: 5 August, 2012)

### ABSTRACT

In this paper, mechanical buckling analysis of open circular cylindrical shell reinforced by single-walled carbon nanotubes subject to axial loading is studied. Based on the first order shear deformation theory, the equilibrium and stability equations have been derived using the total potential energy equations and Euler equations. To estimate the material properties, the rule of mixture has been used. The governing equations are solved by considering the boundary conditions of problem and the effects of geometrical parameters and material properties on the critical buckling load have been studied. In order to validate obtained results, comparison study with other available literature has been carried out.

**Keywords:** Mechanical Buckling, Open Cylindrical Shell, Carbon Nanotube, Critical Load

۱- استادیار (نویسنده پاسخگو): sjmamir@iau-arak.ac.ir

۲- کارشناس ارشد: karimirasul@gmail.com

۳- کارشناس ارشد: milad.arak88@gmail.com

## ۱- مقدمه

به تازگی دسته‌ای از مواد، تحت عنوان نانولوله‌های کربنی توجه خاصی را به خود جلب کرده‌اند. آزمایش‌ها و شبیه‌سازی‌ها نشان داده‌اند که این نانولوله‌ها خواص مکانیکی بهتری نسبت به فیبرهای کربنی دارند [۱]. از آنجا که خواص مکانیکی کامپوزیت‌ها به طور مستقیم به رفتار مکانیکی فیبرهای قرار گرفته درون آنها بستگی دارد، می‌توان با جایگذاری فیبرهای کربنی سابق با نانولوله‌های کربنی خواص کامپوزیت‌ها از قبیل مقاومت کششی و مدول الاستیک را بهبود بخشید. بیشتر تحقیقات در زمینه کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی روی خواص مواد متمرکز شده‌اند.

تحقیقات متعدد نشان داده است که افزودن یک درصد کوچک از نانولوله‌ها در یک ماتریس، خواص مکانیکی، الکتریکی و حرارتی را به طور قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌دهد [۶-۲]. وایت<sup>۱</sup> و همکارانش [۷] نشان دادند که سختی تیرهای کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی را می‌توان با انتشار یکنواخت یک درصد کوچک از نانولوله‌ها بهبود بخشید. وادنیچاروا<sup>۲</sup> و همکارانش [۸] خمش خالص تیرهای کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی را مطالعه کردند. فرمیکا<sup>۳</sup> و همکارانش [۹] رفتار ارتعاشی صفحات کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی را با به کار بردن یک مدل پیوسته معادل، بر اساس روش موری-تاناکا بررسی کرده‌اند.

آزمایش‌ها و مطالعات بر روی کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی نشان داده‌اند که توزیع یکنواخت نانولوله‌ها به عنوان تقویت‌کننده در ماتریس باعث بهبود متوسطی در خواص مکانیکی می‌شود [۱۰ و ۱۱]. نوع دیگر توزیع نانولوله‌ها در کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی، توزیع غیرهمگن نانولوله‌های کربنی با یک شیب خاص است که برای بهبود بخشیدن به رفتار کمناشی کامپوزیت استفاده می‌شود. شن<sup>۴</sup> [۱۲] دریافت که رفتار غیرخطی خمش را می‌توان با توزیع مدرج تابعی (FG) نانولوله‌های کربنی در ماتریس بهبود بخشید. تأثیر کسر حجمی نانولوله‌های کربنی روی رفتار پس‌کمانش فشاری و پس‌کمانش حرارتی یک صفحه کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی به صورت  $FG^5$  توسط شن و همکارانش [۱۳] بررسی شده است. کی<sup>۶</sup> و همکارانش [۱۴] ارتعاشات تیر تیموشنکو تقویت شده با

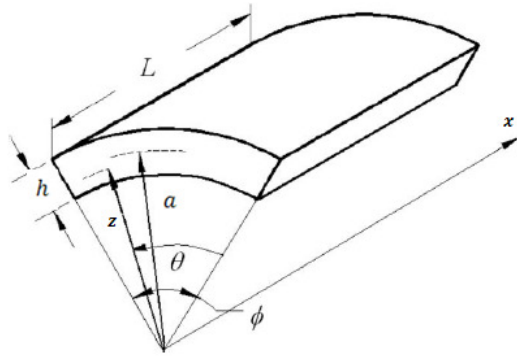
نانولوله‌های کربنی به صورت FG را بررسی کرده‌اند. آنها دریافت‌اند که برای هر دو حالت فرکانس‌های خطی و غیرخطی در حالت توزیع FG نانولوله‌های کربنی بیشتر از حالت توزیع یکنواخت (UD) یا نامتقارن نانولوله‌هاست.

این تحقیق روی آنالیز کمانش مکانیکی پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تک‌جداره تحت فشار محوری متمرکز شده است. مسئله اصلی در اینجا، محاسبه بار بحرانی کمانش، برای پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تحت کسر حجمی‌های مختلف از نانولوله‌ها است. فرض می‌شود که خواص مواد نانولوله‌های کربنی تک‌جداره وابسته به دما و اندازه بوده و از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی به دست آمده‌اند. همچنین فرض شده که خواص کامپوزیت تقویت شده با نانولوله‌های کربنی به صورت FG در راستای ضخامت مدرج شده و به وسیله یک مدل میکرومکانیکال که در آن پارامتر کارایی نانولوله مدنظر قرار گرفته، از قانون مخلوط‌ها تعیین شده است. معادلات دیفرانسیل تعادل حاکم بر مسئله بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی با روابط کرنش-تغییر مکان غیرخطی دانل و با کاربرد معادلات اویلر به دست آمده‌اند. معادلات پایداری نیز از روش همسایگی نقاط مجاور با ایجاد نمو در مؤلفه‌های تغییر مکان به دست آمده‌اند. معادلات به دست آمده از روش موج حل شده و تأثیر پارامترهای مختلف در بار بحرانی کمانش مورد بررسی قرار گرفته است.

## ۲- خواص مکانیکی کامپوزیت تقویت شده با نانولوله‌های کربنی

با توجه به تحقیقات قبلی انجام شده در زمینه خواص نانو کامپوزیت‌ها از میان مدل‌های مکانیکی مختلف، مدل موری-تاناکا از دقت بسیار خوبی برخوردار بوده است. از طرفی قانون اصلاح شده مخلوط‌ها به دلیل سادگی و راحتی و همچنین به دلیل مطابقت بسیار عالی با مدل موری-تاناکا بیشترین کاربرد را در تحقیقات اخیر در زمینه نانوکامپوزیت به خود اختصاص داده است. بنابراین همان‌طور که در قبل اشاره شد، در این تحقیق از قانون اصلاح شده مخلوط‌ها برای تعیین خواص نانوکامپوزیت تقویت شده استفاده شده است. با نشان دادن خواص ماتریس با اندیس  $m$  و خواص مربوط به ذرات تقویتی با اندیس  $f$  روابط مربوط به کسر حجمی به صورت زیر بیان می‌شود [۱۵].

- 1- Wuite
- 2- Vodenitcharova
- 3- Formica
- 4- Shen
- 5-Functionally Graded
- 6- Ke



شکل (۱): هندسه پیل استوانه‌ای و سیستم مختصات در نظر گرفته شده برای آن.

روابط کرنش- تغییر مکان بر اساس تئوری غیرخطی دائل عبارتند از [۱۶]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2, \\ \varepsilon_\theta &= \frac{v_{,\theta} + w}{a} + \frac{1}{2} \left( \frac{w_{,\theta}}{a} \right)^2, \\ \varepsilon_{x\theta} &= \frac{u_{,\theta}}{a} + v_{,x} + \frac{w_{,x} w_{,\theta}}{a}, \\ \varepsilon_{xz} &= u_{,z} + w_{,x} \varepsilon_{\theta z} = v_{,z} + \frac{w_{,\theta}}{a}, \end{aligned} \quad (7)$$

$\varepsilon_x, \varepsilon_\theta$  کرنش‌های عمودی و  $\varepsilon_{x\theta}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{\theta z}$  کرنش‌های برشی و کما نشان دهنده مشتق جزئی است. همچنین  $u, v$  و  $w$  به ترتیب تغییر مکان‌های پوسته استوانه‌ای در جهات  $x, \theta$  و  $z$  می‌باشند. با در نظر گرفتن تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی، فرض قابل صرف نظر بودن اینرسی دورانی و کرنش‌های برشی جانبی  $\varepsilon_{\theta z}$  و  $\varepsilon_{xz}$  معتبر نمی‌باشد و تنها مؤلفه کرنش نرمال ( $\varepsilon_z$ ) صفر در نظر گرفته می‌شود. میدان تغییر مکان پوسته بر اساس این تئوری عبارت است از [۱۷]:

$$\begin{aligned} u(x, \theta, z) &= u_0(x, \theta) + z u_1(x, \theta), \\ v(x, \theta, z) &= v_0(x, \theta) + z v_1(x, \theta), \\ w(x, \theta, z) &= w_0(x, \theta), \end{aligned} \quad (8)$$

$u_0, v_0$  و  $w_0$  به ترتیب تغییر مکان‌های صفحه میانی ( $z=0$ ) در جهت‌های  $x, \theta$  و  $z$  پوسته و  $u_1$  و  $v_1$  به ترتیب دوران‌های صفحه میانی حول محورهای  $\theta$  و  $x$  هستند. با جایگذاری معادله (۸) در روابط کرنش تغییر مکان (۷) روابط سینماتیکی به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_{x\theta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \varepsilon_{x\theta}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_x \\ k_\theta \\ k_{x\theta} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{\theta z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{xz}^0 \\ \varepsilon_{\theta z}^0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (9)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} V_f &= w(z) V_f^*, \\ V_f^* &= \frac{w_f}{w_f + \frac{\rho_f}{\rho_m} \frac{p_f}{\rho_m} (w_f)}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$V_f + V_m = 1,$$

این روابط با فرض تغییرات مدرج تابعی (FG) برای خصوصیات کامپوزیت مورد مطالعه در جهت محور  $z$  آورده شده است. در حالت  $w(z) = 1$  توزیع ذرات تقویتی در ماتریس به صورت توزیع یکنواخت (UD) خواهد بود. در رابطه (۱) کمیت‌های  $V, w$  و  $\rho$  به ترتیب معرف کسر حجمی، کسر جرمی و دانسیته می‌باشند.

کسر حجمی زیر برای توزیع FG نانولوله‌ها در بالا و پایین صفحه میانی در نظر گرفته شده است [۱۵]:

$$V_{CN} = \frac{4|z|}{t} V_{CN}^*, \quad (2)$$

$$V_{CN}^* = \frac{w_{CN}}{w_{CN} + (\rho_{CN}/\rho_m) - (\rho_{CN}/\rho_m) w_{CN}}, \quad (3)$$

اندیس (CN) مربوط به نانولوله‌های کربنی تک جداره است. در حالت توزیع (UD) نانولوله‌های کربنی در ماتریس کسر حجمی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V_{CN} = V_{CN}^*, \quad (4)$$

طبق قانون مخلوط‌ها، برای مدول الاستیسیته طولی و برشی روابط زیر پیشنهاد شده است [۱۵]:

$$\begin{aligned} E_{11} &= \eta_1 V_{CN} E_{11}^{CN} + V_m E^m, \\ \frac{\eta_2}{E_{22}} &= \frac{V_{CN}}{E_{22}^{CN}} + \frac{V_m}{E^m}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{\eta_3}{G_{12}} = \frac{V_{CN}}{G_{12}^{CN}} + \frac{V_m}{G^m},$$

که  $E_{11}^{CN}$  و  $E_{22}^{CN}$  مدول یانگ و  $G_{12}^{CN}$  مدول برشی نانولوله‌های کربنی است.  $E^m$  و  $G^m$  نیز خواص مربوط به ماتریس می‌باشند.  $\eta$  ضریب بهره‌وری یا کارایی نانولوله نامیده می‌شود و با ادغام مدول الاستیکی کامپوزیت تقویت شده با نانولوله کربنیاز متد دینامیک مولکولی با نتایج عددی به دست آمده از قوانین مخلوط‌ها محاسبه می‌شود. با توجه به اینکه ضریب پواسون  $\nu$  وابستگی کمی به درجه حرارت و موقعیت دارد، برای آن توزیع UD در نظر گرفته شده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$v_{12} = V_{CN}^* v_{12}^{CN} + V_m v^m. \quad (6)$$

### ۳- مدل‌سازی مسئله و معادلات حاکم بر آن

مطابق شکل ۱ پوسته استوانه‌ای باز با شعاع صفحه میانی  $a$  ضخامت  $h$  و طول  $L$  در نظر گرفته شده و سیستم مختصات  $(x, \theta, z)$  که  $x$  در جهت محور پوسته،  $\theta$  در جهت مماسی و  $z$  در جهت عمود بر صفحه میانی، برای آن در نظر گرفته شده است.

که در آن:

$$\begin{aligned}
 B_{11} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} dz, B_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{12} dz, B_{22} = \\
 &\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{22} dz, B_{44} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{44} dz, \\
 B_{55} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{55} dz, B_{66} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{66} dz, \\
 B'_{11} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} z dz, B'_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{12} z dz, \\
 B'_{22} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{22} z dz, B'_{66} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{66} z dz, \\
 B''_{11} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} z^2 dz, B''_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{12} z^2 dz, \\
 B''_{22} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{22} z^2 dz, B''_{66} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{66} z^2 dz.
 \end{aligned} \tag{۱۵}$$

در تحقیق حاضر، برای دستیابی به معادلات تعادل، از روش انرژی استفاده شده است. انرژی پتانسیل کل  $V$  برای پوسته، وقتی که  $U$  انرژی کرنشی و  $\Omega$  انرژی پتانسیل نیروهای مکانیکی اعمالی (کار نیرو های خارجی) بر پوسته باشد عبارت است از [۱۶]:

$$V = U + \Omega, \tag{۱۶}$$

انرژی پتانسیل  $\Omega$  وقتی که پوسته تحت بار محوری لبه‌ای فشاری باشد عبارت است از:

$$\Omega = \iint_{\Omega} \frac{P}{\theta} u_{,x} d\theta dx, \tag{۱۷}$$

بنابراین انرژی پتانسیل کل را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{a}{2} \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \sigma_{x\theta} \varepsilon_{x\theta} + \\
 &\sigma_{xz} \varepsilon_{xz} + \sigma_{\theta z} \varepsilon_{\theta z}] dz d\theta dx + \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{P}{\theta} u_{,x} d\theta dx,
 \end{aligned} \tag{۱۸}$$

از طرف دیگر داریم:

$$V = \iint F dx d\theta. \tag{۱۹}$$

با جایگذاری روابط (۹ و ۱۱) در رابطه (۱۸) و اعمال معادلات اوپلر بر فانکشنال انرژی پتانسیل کل، معادلات تعادل به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
 aN_{x,x} + N_{x\theta,\theta} &= 0, \\
 aN_{x\theta,x} + N_{\theta,\theta} &= 0, \\
 N_\theta - aN_x w_{0,xx} - 2N_{x\theta} w_{0,x\theta} - aQ_{x,x} - \\
 \frac{N_\theta}{a} (w_{0,\theta\theta}) - Q_{\theta,\theta} &= 0, Q_x - M_{x,x} - \frac{1}{a} M_{x\theta,\theta} = 0, \\
 Q_\theta - M_{x\theta,x} - \frac{1}{a} M_{\theta,\theta} &= 0,
 \end{aligned} \tag{۲۰}$$

فرض می‌شود که حالت تعادل پوسته استوانه‌ای تحت بارگذاری مکانیکی، توسط میدان جابه‌جایی  $(u_0^0, v_0^0, w_0^0, u_1^0, v_1^0)$  تعریف شود، در این صورت مؤلفه‌های جابه‌جایی در همسایگی حالت تعادل اولیه به صورت  $(u_0^1, v_0^1, w_0^1, u_1^1, v_1^1)$  تعریف می‌شوند به طوری که:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \varepsilon_{x\theta}^0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u_{0,x} + \frac{1}{2} w_{0,x}^2 \\ \frac{v_{0,\theta} + w_0}{a} + \frac{1}{2} \left(\frac{w_{0,\theta}}{a}\right)^2 \\ \frac{u_{0,\theta}}{a} + v_{0,x} + \frac{w_{0,x} w_{0,\theta}}{a} \end{bmatrix}, \\
 \begin{bmatrix} k_x \\ k_\theta \\ k_{x\theta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{u_{1,x}}{a} \\ \frac{v_{1,\theta}}{a} \\ \frac{u_{1,\theta}}{a} + v_{1,x} \end{bmatrix}, \\
 \begin{bmatrix} \varepsilon_{xz}^0 \\ \varepsilon_{\theta z}^0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u_1 + w_{0,x} \\ v_1 + \frac{w_{0,\theta}}{a} \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{۱۰}$$

همچنین روابط تنش-کرنش برای صفحات ارتوتروپیک به صورت زیر است [۱۸]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \tau_{x\theta} \\ \tau_{\theta z} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_{x\theta} \\ \varepsilon_{\theta z} \\ \varepsilon_{xz} \end{bmatrix}, \tag{۱۱}$$

که در آن،  $Q$  ماتریس سختی است و درایه‌های آن به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \\
 Q_{12} &= \frac{\nu_{21} E_{11}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \\
 Q_{22} &= \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \\
 Q_{66} &= G_{12},
 \end{aligned} \tag{۱۲}$$

ضرایب  $E_{11}, E_{22}, \nu_{12}, \nu_{21}, G_{23}$  از روابط اصلاح شده قانون مخلوطها محاسبه می‌شوند.

نیروها و ممان‌های منتجه به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۶]:

$$\begin{aligned}
 (N_i, M_i) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_i(1, z) dz, \quad i = x, \theta, x\theta, \\
 Q_i &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{iz} dz, \quad i = x, \theta,
 \end{aligned} \tag{۱۳}$$

با جایگذاری روابط (۹ و ۱۱) در معادلات (۱۳)، معادلات ساختاری برای پوسته استوانه‌ای به صورت زیر به دست خواهند آمد:

$$\begin{aligned}
 N_x &= B_{11} \varepsilon_x^0 + B_{12} \varepsilon_\theta^0 + B'_{11} k_x + B'_{12} k_\theta M_x = \\
 B'_{11} \varepsilon_x^0 + B'_{12} \varepsilon_\theta^0 + B''_{11} k_x + B''_{12} k_\theta N_\theta &= B_{12} \varepsilon_x^0 + \\
 B_{22} \varepsilon_\theta^0 + B'_{12} k_x + B'_{22} k_\theta M_\theta &= B'_{12} \varepsilon_x^0 + B'_{22} \varepsilon_\theta^0 \cdot \\
 B'_{12} k_x + B'_{22} k_\theta, \\
 N_{x\theta} &= B_{66} \varepsilon_{x\theta}^0 + B'_{66} k_{x\theta} M_{x\theta} = B'_{66} \varepsilon_{x\theta}^0 + \\
 B'_{66} k_{x\theta} Q_x &= B_{66} \varepsilon_{x\theta}^0 Q_\theta = B_{44} \varepsilon_{\theta z}^0,
 \end{aligned} \tag{۱۴}$$

علاوه بر آن، عبارات متشکل از حاصل ضرب نمو جابه‌جایی در نمو نیرو و ممان به دلیل کوچکی قابل صرف نظر بوده و عبارات باقی مانده، تشکیل معادلات پایداری را می‌دهند:

$$aN_{x1,x} + N_{x\theta1,\theta} = 0,$$

$$aN_{x\theta1,x} + N_{\theta1,\theta} = 0,$$

$$N_{\theta1} - aN_{x0}w_{0,xx}^1 - 2N_{x\theta0}w_{0,x\theta}^1 - aQ_{x1,x} - \frac{N_{\theta0}}{a}(w_{0,\theta\theta}^1) - Q_{\theta1,\theta} = 0, \quad (26)$$

$$Q_{x1} - M_{x1,x} - \frac{1}{a}M_{x\theta1,\theta} = 0,$$

$$Q_{\theta1} - M_{x\theta1,x} - \frac{1}{a}M_{\theta1,\theta} = 0,$$

که  $N_{x0}, N_{\theta0}, N_{x\theta0}$  نیروهای پیش کمانش هستند.

#### ۴- آنالیز کمانش مکانیکی پِنل استوانه‌ای

با فرض اینکه پوسته مورد نظر تحت بار محوری  $P$  قرار گرفته باشد نیروهای منتهجه پیش از کمانش به کمک روابط زیر محاسبه می‌شوند [۱۶]:

$$N_{x\theta0} = 0, \quad N_{\theta0} = 0, \quad N_{x0} = -\frac{P}{a\theta}, \quad (27)$$

با توجه به شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در دو سر پوسته، روابط زیر برقرار می‌باشند:

$$w_0^1 = v_0^1 = M_x = 0, \quad (28)$$

با توجه به شرایط مرزی در نظر گرفته شده برای پوسته، مؤلفه‌های جابه‌جایی با معادلات زیر برابر می‌شوند:

$$\begin{aligned} u_0^1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{x0} \sin(\beta_m \theta) \cos(P_n x), \\ v_0^1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{\theta0} \cos(\beta_m \theta) \sin(P_n x), \\ w_0^1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{z0} \sin(\beta_m \theta) \sin(P_n x), \\ u_1^1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{x1} \sin(\beta_m \theta) \cos(P_n x), \\ v_1^1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{\theta1} \cos(\beta_m \theta) \sin(P_n x), \end{aligned} \quad (29)$$

که در آن:

$$\beta_m = \frac{m\pi}{\theta}, \quad P_n = \frac{n\pi}{L},$$

$n$  و  $m$  مقادیر ثابتی هستند.  $U_{x0}, U_{x1}, U_{\theta0}, U_{z0}, U_{\theta1}$  به ترتیب تعداد موج‌ها در جهت  $\theta$  و  $x$  هستند و عباراتند از  $m, n = 1, 2, 3, \dots$  با جایگذاری جواب‌های بالا در معادلات پایداری، به معادلاتی می‌رسیم که به صورت ماتریس زیر قابل نمایش است (درایه‌های این ماتریس در پیوست الف آمده است).

$$\begin{aligned} u_0 &= u_0^0 + u_0^1, \\ v_0 &= v_0^0 + v_0^1, \\ w_0 &= w_0^0 + w_0^1, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1^0 + u_1^1, \\ v_1 &= v_1^0 + v_1^1, \end{aligned}$$

در روابط بالا، بالا نویس (0) معرف وضعیت تعادل و بالا نویس (1) معرف یک نمو بسیار کوچک دلخواه است. حال با نوشتن قسمت خطی روابط کرنش - تغییر مکان با  $e_{ij}$  روابط، به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= e_x + \frac{1}{2}(w_{0,x}^2), \\ \varepsilon_\theta &= e_\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{w_{0,\theta}}{a}\right)^2, \\ \varepsilon_{x\theta} &= e_{x\theta} + \frac{w_{0,x}w_{0,\theta}}{a}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\varepsilon_{xz} = e_{xz},$$

$$\varepsilon_{\theta z} = e_{\theta z},$$

مؤلفه‌های کرنش خطی به دو بخش در حالت تعادل اولیه با زیر نویس (0) و انحراف از حالت تعادل اولیه با زیر نویس (1) تجزیه می‌شوند:

$$\begin{aligned} e_x &= e_{x0} + e_{x1}, \quad e_\theta = e_{\theta0} + e_{\theta1}, \\ e_{x\theta} &= e_{x\theta0} + e_{x\theta1}, \quad e_{xz} = e_{xz0} + e_{xz1}, \\ e_{\theta z} &= e_{\theta z0} + e_{\theta z1}, \end{aligned} \quad (23)$$

که در روابط فوق:

$$\begin{aligned} e_{x0} &= u_{0,x}^0, \quad e_{x1} = u_{1,x}^1, \\ k_{x0} &= u_{1,x}^0, \quad k_{x1} = u_{1,x}^1, \\ e_{\theta0} &= \frac{v_{0,\theta}^0 + w_{0,\theta}^0}{a}, \quad e_{\theta1} = \frac{v_{0,\theta}^1 + w_{0,\theta}^1}{a}, \\ k_{\theta0} &= \frac{v_{1,\theta}^0}{a}, \quad k_{\theta1} = \frac{v_{1,\theta}^1}{a}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$e_{x\theta0} = \frac{u_{0,\theta}^0}{a} + v_{0,x}^0, \quad e_{x\theta1} = \frac{u_{0,\theta}^1}{a} + v_{0,x}^1,$$

$$k_{x\theta0} = v_{1,x}^0 + \frac{u_{1,\theta}^0}{a}, \quad k_{x\theta1} = v_{1,x}^1 + \frac{u_{1,\theta}^1}{a},$$

$$e_{xz0} = u_1^0 + w_{0,x}^0, \quad e_{xz1} = u_1^1 + w_{0,x}^1,$$

$$e_{\theta z0} = v_1^0 + \frac{w_{0,\theta}^0}{a}, \quad e_{\theta z1} = v_1^1 + \frac{w_{0,\theta}^1}{a},$$

با روشی مشابه، مؤلفه‌های نیروی منتهجه قابل تجزیه به نیروهای منتهجه در حالت تعادل و انحراف یافته از تعادل اولیه می‌باشند:

$$\begin{aligned} N_i &= N_{i0} + N_{i1}, \\ Q_i &= Q_{i0} + Q_{i1}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$M_i = M_{i0} + M_{i1},$$

به منظور دستیابی به معادلات پایداری، از روش همسایگی تعادل استفاده می‌شود. مطابق با این روش، مؤلفه‌های جابه‌جایی و نیرو در همسایگی حالت تعادل که به میزان بسیار اندکی از وضعیت تعادل انحراف یافته است در معادلات تعادل پوسته جایگذاری می‌شوند. عبارات شامل  $N_{i0}, M_{i0}, Q_{i0}$  تشکیل معادلات تعادل اولیه ورق را داده و حذف می‌شوند.

$v = 0.3$  در نظر گرفته شده است. می‌توان دریافت که به ازای یک مقدار معین  $\delta$  تنش کمانش مستقل از  $\frac{L}{a}$  بوده و برابر با مقدار محاسبه شده از معادله (۳۱) است.

### ۶- نتایج عددی

در این بخش به بررسی کمانش مکانیکی پوسته نانوکامپوزیتی، با ماتریس پلی‌متیل متاکریلت تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تک‌جداره (۱۰ و ۱۰) تحت شرایط تکیه‌گاهی ساده در اثر بارگذاری محوری فشاری، در دو حالت توزیع یکنواخت و توزیع مدرجی نانولوله‌ها پرداخته شده است. برای این منظور، در ابتدا نیاز به تعیین خواص مادی کامپوزیت تقویت شده با نانولوله‌های کربنی داریم. همچنین به منظور مشخص‌تر شدن سازه تقویت شده مورد نظر، در شکل‌های ۲ و ۳ توزیع نانولوله‌ها در مقطع پوسته نشان داده شده است.

خواص نانولوله‌های کربنی از نوع (۱۰ و ۱۰) در جدول ۲ درج شده که در آن،  $L$  طول،  $R$  شعاع،  $h$  ضخامت و  $v$  ضریب پواسون می‌باشد. جدول ۳ نیز وابستگی مدول الاستیک و مدول برشی نانولوله‌های کربنی را به دما نشان می‌دهد. در این مقاله، مقادیر در دمای اتاق (۳۰۰ K) در نظر گرفته شده‌اند.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{x0} \\ U_{\theta 0} \\ U_{z0} \\ U_{x1} \\ U_{\theta 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (30)$$

شرط داشتن جواب غیر صفر برای دستگاه معادلات (۳۰) این است که دترمینان ضرایب مساوی صفر باشد. با به دست آوردن بار کمانش بر حسب توابعی از پارامترهای  $m$  و  $n$  و کمینه کردن آن نسبت به این دو پارامتر، بار بحرانی کمانش به دست خواهد آمد.

### ۵- مقایسه نتایج با دیگر مراجع

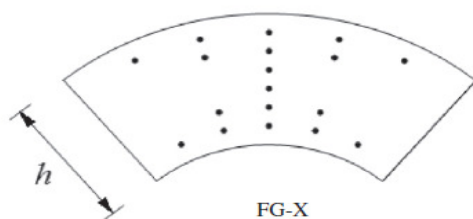
در پوسته‌های استوانه‌ای ساخته شده از مواد همگن، رابطه تنش بدون بعد کمانش  $(\frac{\sigma_{cr}}{E})$  به عنوان تابعی از پارامتر هندسی  $\delta = \frac{a}{h}$  (نسبت شعاع به ضخامت) به صورت زیر است [۱۶]:

$$\frac{\sigma_{cr}}{E} = \frac{1}{\delta \sqrt{3(1-\nu^2)}}, \quad (31)$$

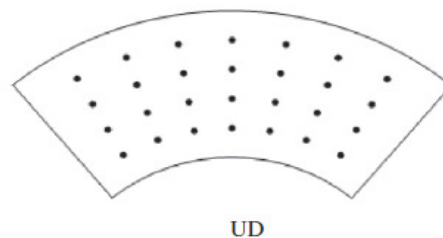
تنش‌های کمانش محوری بدون بعد برای مقادیر مختلف  $\delta$  و  $\frac{L}{a}$  محاسبه شده از رابطه (۳۰) با فرض  $V_{CN}^* = 0$  (پوسته همگن) با مقادیر محاسبه شده از معادله (۳۱) در جدول ۱ مقایسه شده‌اند. همچنین فرضیات  $(\times 10^{-2})$  و  $\frac{\sigma_{cr}}{E}$

جدول (۱): مقادیر تنش بحرانی کمانش (بی‌بعد) در پوسته‌های استوانه‌ای همگن.

a/h	L/a=۱	L/a=۲	L/a=۳	L/a=۴	L/a=۵	مراجع [۱۶]
۲۰۰	۰/۳۰۲۵	۰/۳۰۲۵	۰/۳۰۲۶	۰/۳۰۲۵	۰/۳۰۲۷	۰/۳۰۲۶
۴۰۰	۰/۱۵۱۷	۰/۱۵۱۷	۰/۱۵۱۷	۰/۱۵۱۷	۰/۱۵۱۳	۰/۱۵۱۳
۶۰۰	۰/۱۰۱۳	۰/۱۰۱۳	۰/۱۰۱۹	۰/۱۰۰۸	۰/۱۰۰۸	۰/۱۰۰۸
۸۰۰	۰/۰۷۵۶	۰/۰۷۵۸	۰/۰۷۵۸	۰/۰۷۵۸	۰/۰۷۵۶	۰/۰۷۵۶
۱۰۰۰	۰/۰۶۰۵	۰/۰۶۱۲	۰/۰۶۱۲	۰/۰۶۱۲	۰/۰۶۰۵	۰/۰۶۰۵

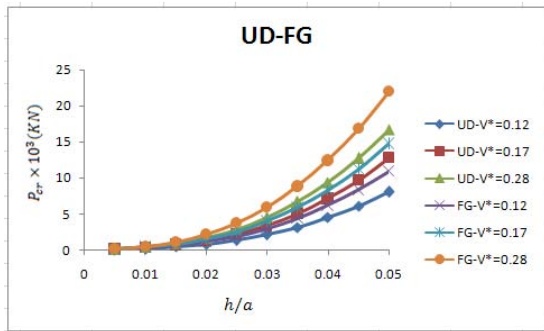


شکل (۳): توزیع نانولوله‌ها در مقطع پانل به صورت مدرج تابعی.



شکل (۲): توزیع نانولوله‌ها در مقطع پانل به صورت یکنواخت.

می‌دهند. شکل ۶ نیز بار بحرانی کمانش پوسته را بر حسب زاویه دهانه آن نشان می‌دهد.



شکل (۴): نتایج بار بحرانی کمانش حسب  $h/a$  در توزیع FG و UD نانو لوله‌ها ( $L=1m, \phi=\pi/6$ ).

با دقت در نمودارهای ترسیم شده در شکل ۴ مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت  $h/a$  بار بحرانی کمانش با افزایش کسر حجمی نانو لوله‌های کربنی افزایش داشته و در توزیع مدرج تابعی نسبت به توزیع یکنواخت، مقدار بیشتری را به خود اختصاص داده است. نکته جالب این است که تا محدوده  $h/a$  کمتر از  $0.03$  افزایش بار بحرانی کمانش به صورت تدریجی و از آن به بعد به صورت محسوس‌تری صورت پذیرفته است. با بررسی دقیق‌تر رقم‌های به دست آمده (که در اینجا به دلیل تکراری نشدن نتایج حاصل آورده نشده است) می‌توان دریافت که بیشترین اختلاف بین بار بحرانی کمانش در وضعیت  $V_{cn}=0.28$  بین حالات مختلف از توزیع نانو لوله‌ها (حالت یکنواخت و حالت مدرج تابعی) است، به طوری که در این حالت برای استوانه‌ای با  $h/a=0.05$  افزایش بار حالت مدرج تابعی نسبت به یکنواخت  $49.7\%$  است.

در نمودارهای ترسیم شده در شکل ۵ که بار بحرانی کمانش بر حسب نسبت  $L/a$  ترسیم شده، ملاحظه می‌شود که با افزایش این نسبت، بار بحرانی تا محدوده  $L/a < 0.06$  کاهش ناگهانی و از آن به بعد ثابت مانده است. با بررسی دقیق‌تر نمودارها ملاحظه می‌شود که در استوانه‌های کوتاه، نحوه توزیع نانو لوله‌ها و همچنین کسر حجمی آنها در بار بحرانی کمانش تأثیر بسزایی داشته در حالی که در استوانه‌های بلندتر این موارد پارامترهای مهم و تأثیرگذاری در بار بحرانی کمانش پوسته نمی‌باشند.

در تحقیق حاضر، از جمله عوامل مهم و تأثیرگذار در بار بحرانی، کمانش زاویه دهانه پوسته است که تأثیر آن در شکل ۶

جدول (۲): خواص مادی نانولوله‌های کربنی تک جداره ( $10$  و  $10$ ) [۱۵].

نوع نانولوله	L	R	h	
SWCNT ( $10, 10$ )	$9/26nm$	$0/68nm$	$0/067nm$	$0/175$

جدول (۳): وابستگی خواص مادی نانولوله‌های کربنی تک جداره ( $10$  و  $10$ ) به دما [۱۵].

دما (K)	$E_{11}^{CN} (TPa)$	$E_{22}^{CN} (TPa)$	$G_{12}^{CN} (TPa)$
۳۰۰	۵/۶۴۶۶	۷/۰۸۰۰	۱/۹۴۴۵
۵۰۰	۵/۵۳۰۸	۶/۹۳۴۸	۱/۹۶۴۳
۷۰۰	۵/۴۷۴۴	۶/۸۶۴۱	۱/۹۶۴۴
۱۰۰۰	۵/۲۸۱۴	۶/۶۲۲۰	۱/۹۴۵۱

همچنین برای خواص مادی ماتریس پلی متاکریلیت (PMMA) نیز داریم [۱۵]

$$E^m = 2.5 \text{ GPa}$$

$$\nu^m = 0.34$$

$$G^m = 0.933 \text{ GPa}$$

جدول (۴): نتایج حاصل از دینامیک مولکولی و قوانین مخلوط‌ها [۱۵].

	دینامیک مولکولی		قانون مخلوط‌ها			
	$E_{11} (TPa)$	$E_{22} (TPa)$	$E_{11} (TPa)$	$\eta_1$	$E_{22} (TPa)$	$\eta_2$
۰/۱۲	۹۴/۶	۲/۹	۹۹۴/۷۸	۰/۱۳۷	۲/۹	۱/۰۲۲
۰/۱۷	۱۳۸/۹	۴/۹	۱۳۸/۶۸	۰/۱۴۲	۴/۹	۱/۶۲۶
۰/۲۸	۲۲۴/۲۲	۵/۵	۲۲۴/۵	۰/۱۴۱	۵/۵	۱/۵۸۵

همان‌طور که در جدول ۴ مشاهده می‌شود، قوانین بهبودیافته مخلوط‌ها از انطباق بسیار خوبی با نتایج دینامیک مولکولی برخوردار است. البته برای دقت بیشتر مقادیر، ضریب کارایی نانولوله‌ها را با ادغام روابط قانون مخلوط‌ها و نتایج دینامیک مولکولی می‌توان محاسبه کرد. با بررسی تحقیقات قبلی انجام شده در زمینه نانوکامپوزیت‌ها، در این تحقیق نیز فرضیات،  $G_{12} = G_{23} = G_{13}$  و  $\eta_3 = \eta_2$  در نظر گرفته شده است. شکل‌های ۴ و ۵ به ترتیب مقادیر بار بحرانی کمانش را برای پنل استوانه‌ای تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی تک جداره از نوع ( $10$  و  $10$ ) تحت بار محوری فشاری در دو حالت توزیع یکنواخت (UD) و توزیع تابعی مدرج (FG) به ازای مقادیر مختلف کسر حجمی نانو لوله‌های کربنی بر حسب پارامترهای  $L/a$  (شعاع/طول) و  $h/a$  (شعاع/ضخامت) نشان

( $L/a < 0.6$ ) نحوه چیدمان نانولوله‌ها در بار بحرانی کمانش تأثیر بسزایی ندارد،

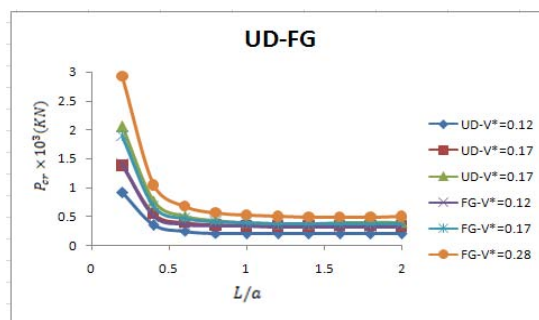
ج- با افزایش زاویه دهانه پانل، بار بحرانی کمانش افزایش می‌یابد و در پوسته استوانه‌ای کامل، به بیشینه مقدار خود می‌رسد،

د- میزان افزایش بار بحرانی کمانش پوسته در توزیع یکنواخت نانولوله‌ها از کسر حجمی  $v_{CN}^* = 0.12$  به  $v_{CN}^* = 0.17$  بیشتر از میزان افزایش آن از کسر حجمی  $v_{CN}^* = 0.17$  و  $v_{CN}^* = 0.28$  است اما در توزیع مدرج تابعی نانولوله‌ها این موضوع بر عکس است.

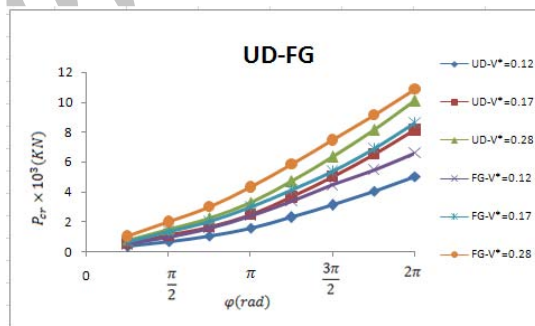
#### ۸- منابع

1. Sun, C.H., Li, F., Cheng, H.M., and Lu, G.Q. "Axial Young's Modulus Prediction of Single Walled Carbon Nanotube Arrays with Diameters from Nanometer to Meter Scales", Appl. Phys. Lett.: Vol. 87, No. 19, pp. 193-201, 2005.
2. Fidelus, J.D., Wiesel, E., Gojny, F.H., Schulte, K., and Wagner, H.D. "Thermo-Mechanical Properties of Randomly Oriented Carbon/Epoxy Nanocomposites", Composites Part A, Vol. 36, No. 11, pp. 1555-1561, 2005.
3. Song, Y.S. and Youn, J.R. "Modeling of Effective Elastic Properties for Polymer Based carbon Nanotube Composites", Polymer, Vol. 47, No. 5, pp. 1741-1748, 2006.
4. Han, Y. and Elliott, J. "Molecular Dynamics Simulations of the Elastic Properties of Polymer/Carbon Nanotube Composites", Comput Mater Sci, Vol. 39, No. 2, pp. 315-323, 2007.
5. Zhu, R., Pan, E., and Roy, A.K. "Molecular Dynamics Study of the Stress-Strain Behavior of Carbon-Nanotube Reinforced Epon862 Composites", Mater Sci. Eng. A, Vol. 447, No. 1, pp. 51-57, 2007.
6. Gribel M., Hamaekers J. "Dynamic Simulation of the Elastic Moduli of Polymer-Carbon Nanotube Composites", Comput Methods Appl. Mech. Eng. Vol. 193, No's. 17-20, pp. 1773-1787, 2004.
7. Kordani, N., Fereidoon, A., Sadoddin, S., and Ghorbanzadeh Ahangari M. "Investigation of Mechanical and Thermal Behavior of Reinforced Polypropylene with Single Walled Carbon Nanotube", Aerospace Mech. J.; Vol. 6, No. 4, pp. 1-10, 2011 (In Persian).
8. Vodenitcharova, T. and Zhang, L.C. "Bending and Local Buckling of a Nanocomposite Beam Reinforced by a Single-Walled Carbon Nanotube", Int. J. Solids Struct., Vol. 43, No. 10, pp. 3006-3024, 2006.
9. Formica, G., Lacarbonara, W., and Alessi, R. "Vibrations of Carbon Nanotube-Reinforced Composites", J. Sound Vib., Vol. 329, No. 10, pp. 1875-1889, 2010.

نشان داده شده است. با بررسی این نمودارها، ملاحظه می‌شود که افزایش در زاویه دهانه پوسته باعث افزایش بار بحرانی کمانش آن شده، به طوری که بیشترین بار کمانش مربوط به پوسته استوانه‌ای کامل است. با بررسی دقیق‌تر نمودارها می‌توان دریافت که بار بحرانی کمانش تا محدوده  $\varphi < \pi$  وابستگی کمتری به نحوه توزیع نانولوله‌ها داشته و از آن به بعد این وابستگی بیشتر شده است.



شکل (۵): نتایج بار بحرانی کمانش بر حسب  $L/a$  در توزیع UD و FG نانولوله‌ها ( $h=0.01m$ ,  $\varphi=\pi/6$ ).



شکل (۶): نتایج بار بحرانی کمانش بر حسب زاویه دهانه پانل در توزیع UD و FG نانولوله‌ها ( $a=L=1m$ ,  $h=0.01m$ ).

#### ۷- نتیجه‌گیری

الف- با افزایش نسبت ضخامت به شعاع پوسته، در تمامی مقادیر کسر حجمی نانولوله‌ها در هر دو حالت از توزیع نانولوله‌ها، افزایش در بار بحرانی کمانش ملاحظه می‌شود. نکته قابل توجه این است که در حالت توزیع نانولوله‌ها به صورت مدرج تابعی بار بحرانی کمانش نسبت به حالت توزیع یکنواخت بیشتر است،

ب- با افزایش نسبت طول به شعاع پوسته در یک ضخامت ثابت در هر دو حالت توزیع یکنواخت و توزیع مدرج تابعی بار بحرانی تا محدوده  $L/a < 0.6$  کاهش ناگهانی و از آن به بعد ثابت مانده است. علاوه بر این، می‌توان گفت که در پانل‌های بلندتر



## پیوست

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -B_{11}P_n^2 - \frac{B_{66}}{a^2}\beta_m^2 a_{12} = -\left(\frac{B_{12}}{a} + \frac{B_{66}}{a}\right)P_n\beta_m a_{13} = \frac{B_{12}}{a}P_n a_{14} = B'_{11}P_n^2 - \frac{B'_{66}}{a^2}\beta_m^2 a_{15} = \\
& -\left(\frac{B'_{12}}{a} + \frac{B'_{66}}{a}\right)P_n\beta_m \\
a_{21} &= a_{12}a_{22} = -B_{66}P_n^2 - \frac{B_{22}}{a^2}\beta_m^2 a_{23} = \\
& \frac{B_{22}}{a^2}\beta_m a_{24} = -\left(\frac{B_{66}}{a} + \frac{B'_{12}}{a}\right)P_n\beta_m a_{25} = -B'_{66}P_n^2 - \\
& \frac{B'_{22}}{a^2}\beta_m^2 a_{31} = \frac{B_{12}}{a}P_n a_{32} = \frac{B_{22}}{a^2}\beta_m a_{33} = -\frac{B_{22}}{a^2} - \\
& (N_{x0} + B_{66})P_n^2 - \frac{B_{44}}{a^2}\beta_m^2 a_{34} = \left(\frac{B'_{12}}{a} - B_{66}\right)P_n a_{35} = \\
& \left(\frac{B'_{22}}{a^2} - \frac{B_{44}}{a}\right)\beta_m a_{41} = a_{14} \\
a_{42} &= a_{24} \\
a_{43} &= a_{34}a_{44} = -B_{66} - B'_{11}P_n^2 - \frac{B'_{66}}{a^2}\beta_m^2 a_{45} = \\
& -\left(\frac{B'_{12}}{a} + \frac{B'_{66}}{a}\right)P_n\beta_m a_{51} = a_{15} \\
a_{52} &= a_{25} \\
a_{53} &= a_{35} \\
a_{54} &= a_{45} \\
a_{55} &= -B_{44} - B'_{66}P_n^2 - \frac{B'_{22}}{a^2}\beta_m^2
\end{aligned}$$

10. Seidel, G.D. and Lagoudas, D.C. "Micromechanical Analysis of the Effective Elastic Properties of Carbon Nanotube Reinforced Composites", *Mech. Mater.*, Vol. 38, No. 8, pp. 884–907, 2006.
11. Qian, D., Dickey, E.C., Andrews, R., and Rantell, T. "Load Transfer and Deformation Mechanisms in Carbon Nanotube-Polystyrene Composites", *Appl. Phys. Lett.*, Vol. 76, No. 20, pp. 2868–2873, 2000.
12. Shen, H.S. "Nonlinear Bending of Functionally Graded Carbon Nanotube-Reinforced Composite Plates in Thermal Environments", *Compos. Struct.*, Vol. 91, No. 1, pp. 9–19, 2009.
13. Shen, H.S. and Zhu, Z.H. "Buckling and Postbuckling Behavior of Functionally Graded Nanotube-Reinforced Composite Plates in Thermal Environments", *Comput. Mater. Continua*, Vol. 18, No. 2, pp. 155–162, 2010.
14. Ke, L.L., Yang, J., and Kitipornchai, S. "Nonlinear Free Reinforced Composite Beams". *Compos. Struct.*, Vol. 92, No. 3, pp. 676–683, 2010.
15. Shen, H.S. "Postbuckling of Nanotube-Reinforced Composite Cylindrical Shells in Thermal Environments", Part I: Axially-Loaded Shells, 2011.
16. Brush, D.O. and Almorh, B.O. "Buckling of Bars, Plates, and Shells", New York, McGraw-Hill, 1975.
17. Reddy, J.N. "Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. Theory and Analysis", Boca Raton, CRC Press LLC, 2004.
18. Shen, H.S. and chen-Li., "Thermal Buckling and Postbuckling Behavior of Functionally Graded Carbon Nanotube-Reinforced Composite Plates", *Materials and Design*, Vol.31, No. 7, pp. 3403-3411, 2010.

Archive