بررسی ارتعاشات اجباری تیر ساندویچی سه‌لایه با هسته انعطاف‌پذیر الاستومر مگنتورئولوژیکال

سید محمد هاشمی نژاد[۱]
دانشکده مهندسی مکانیک
دانشگاه علم و صنعت ایران

محمودرضا جعفری هرندی[۲]
دانشکده مهندسی مکانیک و هوافضا
دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات

محمد اسماعیل آریایی پناه[۳]
دانشکده مهندسی مکانیک
دانشگاه علم و صنعت ایران

(تاریخ دریافت: ۸۹/۱۱/۰۴؛ تاریخ پذیرش: ۹۲/۰۴/۱۶)

چکیده

در مقاله حاضر پاسخ دینامیکی (ارتعاشات‌گذرای) یک تیر ساندویچی سه‌لایه با شرایط مرزی لـولایی و الاسـتومر مگنتورئولوژیکـال در لایـه میـانی تحت بارگذاری‌های گذرای دلخواه بررسی شده است. الاستومر مگنتورئولوژیکال استفاده شده در این مدل‌سازی به صورت یک ماده ویسکوالاستیک با مدل کلوین ویت مدل شده است. اصل همیلتن همراه با معادلات کلاسیک تیر اویلر برنولی و معادلات سازگاری خطی شده تیرهای ساندویچی با هسته انعطاف‌پذیر در جهت عرضی برای استخراج معادلات حرکت کوپله دینامیکی و شرایط مرزی مربوطه به کار گرفته شده است. همچنین بـرای حل مسئله گذرا تحت بارگذاری‌های دلخواه (ضربه، بار متحرک و بار گسترده هارمونیک) و میدان‌های مغناطیسی مختلف از سری فوریه بـه همـراه الگوریتم معکوس تبدیل لاپلاس داربین استفاده شده است. برای اعتبارسنجی مسئله از مقایسه حالت‌های حدی خاص با حل‌های موجـود اسـتفاده شده است.

واژه‌های کلیدی: سازه‌های هوشمند، مواد هوشمند، تیر، هسته MRE، مگنتورئولوژیکال، کاهش ارتعاشات، حوزه زمان، پاسخ گذرا

Transient Vibration of a MRE Based Sandwich Beam

S.M. Hasheminezhad
School of Mechanical Engineering
Iran University of Science and Technology

M.R. Jafari-Harandi
Faculty of Mechanical and Aerospace Engineering
Science and Research Branch, Islamic Azad University

M.E. Aryaee-Panah
School of Mechanical Engineering
Iran University of Science and Technology

(Received: 24 January, 2011; Accepted: 7 July, 2013)

ABSTRACT

Dynamic response (transient vibration) of a magnetorheological elastomer (MRE) based simply supported sandwich beam under various transient loads is investigated. The MRE is modeled as a Kelvin-Voigt viscoelastic material. Hamilton’s principle in conjunction with the classical Euler-Bernoulli beam equations and linearized compatibility relations of sandwich beams with transversely flexible cores is used to derive the equations of motion and pertaining boundary conditions. Fourier series and Durbin’s algorithm for the inversion of Laplace transform are used to solve the equations of motion for different transient loads (i.e. impulse, moving load, and uniformly distributed harmonic load) in different magnetic fields. Limiting cases are compared with the data in the classic literature as verification.

Keywords: Smart Structures, Smart Materials, Beam, MRE Core, Magnetorheological, Vibration Suppression, Time Domain, Transient Response

۱- استاد (نویسنده پاسخگو): hashemi@iust.ac.ir
۲- مربی: mahmoodreza_harandi@yahoo.com
۳- کارشناس ارشد: peyman.aryaee@gmail.com

۱- مقدمه

تیرها به عنوان یکی از انواع اصلی سازه‌ها کاربردهای زیادی در زمینه‌های مختلف مهندسی مانند صنایع هوافضا، هسته‌ای، دریایی، الکترونیک، عمران و حمل و نقل دارند. این سازه‌ها معمولاً در معرض تحریک‌های دینامیکی خارجی مختلفی مانند زلزله، ضربه، انفجار، شوک، بارهای متحرک و غیره قرار می‌گیرند. از آنجایی که این تحریک‌های خارجی قابلیت ناپایدار کردن سازه را دارند، روش‌های مختلفی برای کاهش اینگونه ارتعاشات ارائه شده است. این روش‌ها معمولاً شامل سیستم‌های کنترل ارتعاشات فعال، نیمه‌فعال، غیرفعال و ترکیبی می‌باشند [۱]. مواد هوشمند مانند پیزوالکتریک‌ها [۲-۴] آلیاژهای حافظه‌دار [۵] مواد الکترواستریکتیو [۶] و مواد الکترورئولوژیکال و مگنتورئولوژیکال [۷] معمولاً به عنوان سنسورها و عملگرهای گسترده در سازه‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند. این مواد عموماً به منظور تطبیق با شرایط محیطی و عملکردی به کار گرفته می‌شوند. برای مثال سازه‌های تطبیقی که در آنها از مواد ER و MR استفاده شده است از خواص کنترلی خوبی مانند قابلیت تغییر سریع و برگشت پذیر میرایی و سفتی بر اثر میدان الکتریکی یا مغناطیسی اعمالی خارجی و کنترل‌پذیری آسان به وسیله رایانه برخوردارند [۸ و ۹].

در دهه‌های اخیر مطالعات زیادی بر روی مدل‌سازی و کنترل رفتار دینامیکی تیرهای ایزوتروپیک و کامپوزیتی هوشمند صورت گرفته است. از جمله این مطالعات می‌توان به یالسینتاس[1] و دایی[2] [۱۰] اشاره کرد. آنها در مطالعات خود به جستجوی حل دقیق برای ارتعاشات آزاد تیرساندویچی با تکیه‌گاه لولایی و سیال MR در لایه میانی پرداختند. سان[3] و همکاران [۱۱] نیز ارتعاشات تیر ساندیچی با هسته سیال MR را در حوزه فرکانس بررسی کردند. ژو[4] [۱۰] در سال ۲۰۰۶ به بررسی ارتعاشات آزاد تیر با هسته الاستومر MR و ارائه حل دقیق برای این مسئله پرداخت. دویودی[5] [۱۲] در سال ۲۰۰۹ بررسی ارتعاشات آزاد تیر با هسته الاستومر MR به وسیله روش گلرکین را در دستور کار قرار داد.

چن[6] [۱۳] در سال ۲۰۰۹ به بررسی ارتعاشات یک تیر ساندویچی با هسته متشکل از سیال MR در حوزه زمان پرداخت. راجامهان[7] [۷] نیز در سال ۲۰۱۰ با استفاده از روش المان محدود و روش ریلی ریتز ارتعاشات آزاد تیر با هسته سیال MR را بررسی کرد. یینگ[8] [۱۴] و نی[9] [۱۵] نیز به ترتیب در سال‌های ۲۰۰۹ و ۲۰۱۰ به طور جداگانه به بررسی ارتعاشات آزاد تیرهای ساندویچی با الاستومر MR در لایه وسط پرداختند.

آنچه در بالا بدان اشاره شد نشان‌دهنده این امر است که با وجود پژوهش‌های قابل توجهی که در زمینه ارتعاشات آزاد تیرهای ساندویچی با هسته الاستومر MR انجام شده است، خلأ بزرگی در زمینه حل تحلیلی یا عددی مسئله ارتعاشات اجباری (گذرای) این سازه‌ها وجود دارد. هدف اصلی مقاله حاضر پر کردن این خلأ می‌باشد.

حل نیمه تحلیلی برای پاسخ دینامیکی یک ورق ساندویچی با هسته الاستومر MR با شرایط مرزی لولایی، استفاده شده است. مدل ارائه شده در ابتدا از این لحاظ که حل یک مسئله بنیادی دینامیک سازه می‌باشد دارای اهمیت است. این مسئله دارای ارزش کاربردی برای مهندسان کنترل ارتعاشات، در زمینه بهینه‌سازی عملی یا تئوری خواص ارتعاشاتی تیرهای تطبیقی با هسته الاستومر MR می‌باشد. علاوه بر این، عکس‌العمل سریع و میرایی کافی ناشی از میدان خارجی باعث افزایش کاربرد این سازه‌ها، در مواردی که نیاز به مقاومت سازه در برابر انفجار یا ضربه می‌باشد، شده است. همچنین حل نیمه‌تحلیلی حاضر می‌تواند به عنوان یک کار بنیادی برای مقایسه با حل‌های که فقط عددی یا تقریبی است به کار گرفته شود.

۲- فرمول بندی و حل مسئله

در این بخش به بررسی معادلات بنیادی، معادلات حرکت، شرایط مرزی و در نهایت حل مسئله با استفاده از سری‌های فوریه می‌پردازیم.

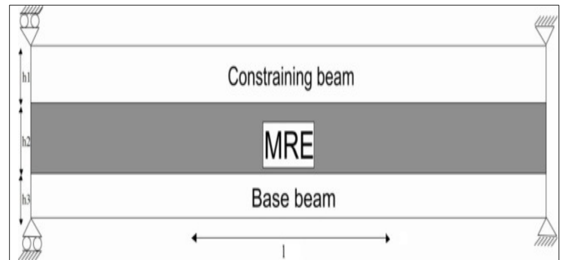
۲-۱- معادلات بنیادی

در شکل **۱**، تصویر کامل مسئله شامل یک تیر ساندویچی به طول l مشاهده می‌شود.

این تیر از سه لایه شامل یک لایه اصلی (به ضخامت h_3)، یک لایه به عنوان محافظ (به ضخامت h_1) و هسته تشکیل شده از الاستومر MR با خواص قابل تغییر (به ضخامت h_2) تشکیل شده است. فرض مسئله بر این است که لایه اصلی و لایه محافظ، تیرهای کامپوزیتی الاستیک می‌باشند و بین لایه میانی

1- Yalcintas
2- Dai
3- Sun
4- Zhou
5- Dwivedy
6- Chen
7- Rajamohan
8- Ying
9- Ni

و لایه‌های بالا و پایین شرط عدم لغزش برقرار است. لایه میانی به صورت یک ماده ویسکوالاستیک انعطاف پذیر در جهت عرضی مدل شده است. فرمول بندی لایه‌های الاستیک بالا و پایین بر اساس تئوری کلاسیک تیر اویلر برنولی صورت گرفته است و بنابراین اثرات تنش‌های عمودی و برشی خارج از صفحه در این لایه‌ها در نظر گرفته نشده است.



شکل (۱): تیر سه‌لایه با تکیه‌گاه لولایی و هسته MRE.

میدان جابه‌جایی در لایه‌های بالا و پایین به صورت زیر می‌باشند:

$$u^{(i)}(x,z) = u_{(i)}(x) - z_i \frac{\partial w_i}{\partial x} \qquad (i = 1,3)$$
$$w^{(i)}(x,z) = w_i(x), \tag{۱}$$

در جایی که $u_{(i)}$ و w_i جابه‌جایی طولی و عرضی لایه‌های میانی می‌باشند.

در صورتی که بارگذاری متمرکز نبوده و کرنش‌ها کوچک باشند، با صرف‌نظر از عبارات غیرخطی می‌توان میدان‌های جابه‌جایی داخل هسته نرم الاستومری را بر حسب جابه‌جایی‌های لایه‌های بالا و پایین به صورت زیر در نظر گرفت [۱۶]:

$$u^{(2)}(x,z_2) = u_1 - \left(\frac{h_1}{2} + z_2\right)\frac{\partial w_1}{\partial x} = u_2 - z_2\frac{\partial w_1}{\partial x}$$
$$w^{(2)}(x,z_2) = w_1\left(1 - \frac{z_2}{h_2}\right) + \frac{w_3\, z_2}{h_2} = w_2 - z_2\left(\frac{w_1}{h_2} - \frac{w_3}{h_2}\right). \tag{۲}$$

در جایی که z_i $(i = 1,3)$ مختصات در جهت ضخامت تیر برای لایه‌های بالا و پایین، واقع در صفحه میانی آنها می‌باشد و:

$$u_2 = u_1 - \frac{h_1}{2}\frac{\partial w_1}{\partial x}$$
$$w_2 = w_1. \tag{۳}$$

روابط بین جابه‌جایی‌ها و کرنش‌ها در لایه‌های بالا و پایین به صورت زیر می‌باشند:

$$\varepsilon_x^{(i)} = \frac{\partial u_i}{\partial x} - z_i\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2}\,. \tag{۴}$$

و در لایه میانی:

$$\varepsilon_z^{(2)} = \frac{\partial w^{(2)}}{\partial z_2} = \frac{1}{h_2}(w_3 - w_1)$$
$$\gamma_{xz}^{(2)} = \frac{\partial u^{(2)}}{\partial z_2} + \frac{\partial w^{(2)}}{\partial x} = \frac{z_2}{h_2}\left(\frac{\partial w_3}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial x}\right). \tag{۵}$$

با در نظر گرفتن حالت تنش صفحه‌ای در لایه‌های الاستیک بالا و پایین معادله زیر به دست می‌آید:

$$\sigma_x^{(i)} = E_i\,\varepsilon_x^{(i)} \quad \text{و} \quad i = 1,3. \tag{۶}$$

الاستومر MR لایه میانی نیز به صورت زیر با مدل ویسکوالاستیک کلوین ویت مدل می‌شود:

$$\sigma_{xz}^{(2)} = \eta^{(2)}\dot{\gamma}_{xz}^{(2)} + G^{(2)}\gamma_{xz}^{(2)}, \tag{۷}$$

$$\sigma_z^{(2)} = \mu^{(2)}\dot{\varepsilon}_z^{(2)} + E^{(2)}\varepsilon_z^{(2)}. \tag{۸}$$

و در صورتی که ضریب پواسن الاستومر مورد نظر ثابت در نظر گرفته شود برای لایه دوم خواهیم داشت:

$$\mu^{(2)} = 2(1+\nu_2)\eta^{(2)}, \tag{۹}$$

$$E^{(2)} = 2(1+\nu_2)G^{(2)}. \tag{۱۰}$$

در جایی که $\eta^{(2)}$، $G^{(2)}$، $\mu^{(2)}$ و $E^{(2)}$ میرایی برشی، مدول برشی، میرایی عمودی و مدول عمودی الاستومر می‌باشند.

۲-۲- معادلات حرکت و شرایط مرزی

در این بخش برای استخراج معادلات حرکت و شرایط مرزی تیر ساندویچی از اصل همیلتن بر پایه تئوری کلاسیک ورق‌های نازک استفاده شده است. برای این منظور می‌بایست انتگرال زمانی تابع لاگرانژین سیستم در بازه زمانی دلخواه کمینه شود:

$$\delta I = \delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt = \delta\int_{t_1}^{t_2}(T - U + W)\,dt = 0. \tag{۱۱}$$

که در این رابطه، δ عملگر وریشنال، W کار انجام شده توسط نیروهای غیر پایستار، L تابع لاگرانژین، T انرژی جنبشی و U انرژی پتانسیل سیستم تیر ساندویچی می‌باشند.

انرژی پتانسیل ناشی از تغییر شکل تیر به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\delta U = \sum_{i=1,3}\int_{V_i}\left(\sigma_x^{(i)}\,\delta\varepsilon_x^{(i)}\right)dV_i + \int_{V_2}\left(\sigma_{xz}^{(2)}\,\delta\gamma_{xz}^{(2)} + \sigma_z^{(2)}\delta\varepsilon_z^{(2)}\right)dV_2 = \sum_{i=1,3}\int_{\Omega}\left(N_x^{(i)}\,\delta\varepsilon_x^{(i)}\right)d\Omega + \int_{\Omega}\left(N_{xz}^{(2)}\,\delta\gamma_{xz}^{(2)} + N_z^{(2)}\delta\varepsilon_z^{(2)}\right)d\Omega, \tag{۱۲}$$

که در آن، $N_x^{(i)}$، $N_{xz}^{(2)}$ و $N_z^{(2)}$ برایند تنش‌ها، V_i حجم لایه iام و Ω سطح تیر می‌باشند. انرژی جنبشی که در محاسبه آن از اینرسی گردشی صرف‌نظر شده است نیز به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\delta T = \sum_{i=1}^{3}\delta\int_{\Omega}\frac{1}{2}\rho_i h_i\left(\dot{u}_i^2 + \dot{w}_i^2\right)d\Omega. \tag{۱۳}$$

کار نیروهای خارجی به همراه نیروی میرایی الاستومر MR به صورت رابطه (۱۴) نوشته می‌شوند.

$$\delta W = \int_{\Omega} \left(q_1\, \delta w_1 + q_3\, \delta w_3\right) d\Omega\ - \eta^{(2)} \int_{V_2} \left(\dot{\gamma}_{xz}^{(2)}\, \delta\gamma_{xz}^{(2)}\right) dV_2 - \mu^{(2)} \int_{V_2} \left(\dot{\varepsilon}_{z}^{(2)}\, \delta\varepsilon_{z}^{(2)}\right) dV_2, \tag{۱۴}$$

که در آن، q_1 و q_3 به ترتیب نیروهایی هستند که روی سطوح بالا و پایین تیر ساندویچی وارد می‌شوند.
جایگذاری روابط (۴ و ۵) در رابطه (۱۲)، عبارت زیر را برای تغییرات انرژی پتانسیل به دست می‌دهد:

$$\delta U = \sum_{i=1,3} \int_{\Omega} \left[N_x^{(i)} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x}\right) - M_x^{(i)} \left(\frac{\partial^2 \delta w_i}{\partial x^2}\right)\right] d\Omega + \int_{\Omega} \left[\frac{1}{h_2} M_{xz}^{(2)} \left(\frac{\partial \delta w_3}{\partial x} - \frac{\partial \delta w_1}{\partial x}\right) + \frac{1}{h_2} N_z^{(2)} (\delta w_3 - \delta w_1)\right] d\Omega. \tag{۱۵}$$

با استفاده از رابطه (۳) و انتگرال‌گیری جزء به جزء، وریشن انرژی جنبشی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T\, dt = -\sum_{i=1}^{3} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \rho_i h_i (\ddot{u}_i \delta u_i + \ddot{w}_i \delta w_i) d\Omega\, dt = -\sum_{i=1,3} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \rho_i h_i (\ddot{u}_i \delta u_i + \ddot{w}_i \delta w_i) d\Omega\, dt - \int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} \rho_2 h_2 \left\{\left(\ddot{u}_1 - \frac{h_1}{2}\frac{\partial \ddot{w}_1}{\partial x}\right)\left(\delta u_1 - \frac{h_1}{2}\frac{\partial \delta w_1}{\partial x}\right) + \ddot{w}_1 \delta w\right\} d\Omega\, dt. \tag{۱۶}$$

با جایگذاری روابط (۱۶- ۱۴) در اصل همیلتن و استفاده از قضیه گرادیان و لما اساسی حساب تغییرات، معادلات حرکت به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
&\delta u_1 : -\left(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2\right)\ddot{u}_1 + \rho_2 \frac{h_1 h_2}{2}\frac{\partial \ddot{w}_1}{\partial x} + E_1 h_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0 \\
&\delta u_3 : -\rho_3 h_3 \ddot{u}_3 + E_3 h_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} = 0 \\
&\delta w_1 : -\left(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2\right)\ddot{w}_1 - \rho_2 \frac{h_1 h_2}{2}\frac{\partial \ddot{u}_1}{\partial x} + \frac{\rho_2 h_1^2 h_2}{4}\frac{\partial^2 \ddot{w}_1}{\partial x^2} - E_1 \frac{h_1^3}{12}\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} - \frac{1}{h_2}\frac{G^{(2)}}{3} h_2^2 \left(\frac{\partial^2 w_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right) + \frac{E^{(2)}}{h_2}(w_3 - w_1) - \eta^{(2)} \frac{h_2^2}{3}\left(\frac{\partial^2 \dot{w}_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \dot{w}_1}{\partial x^2}\right) + \frac{\mu^{(2)}}{h_2}(\dot{w}_3 - \dot{w}_1) + q_1 = 0 \\
&\delta w_3 : -\rho_3 h_3 \ddot{w}_3 - E_3 \frac{h_3^3}{12}\frac{\partial^4 w_3}{\partial x^4} + \frac{G^{(2)}}{3} h_2 - \frac{E^{(2)}}{h_2}(w_3 - w_1) - \eta^{(2)} \frac{h_2^2}{3}\left(-\frac{\partial^2 \dot{w}_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{w}_1}{\partial x^2}\right) - \frac{\mu^{(2)}}{h_2}(\dot{w}_3 - \dot{w}_1) + q_3 = 0.
\end{aligned} \tag{۱۷}$$

شرایط مرزی کلی استخراج شده از اصل همیلتن نیز به صورت رابطه (۱۸) می‌باشند:

(۱۸)

	شرایط مرزی هندسی		شرایط مرزی نیرو
(۱)	$\delta u_1 = 0$	یا	$N_x^{(1)} = 0$
(۲)	$\delta u_3 = 0$	یا	$N_x^{(3)} = 0$
(۳)	$\delta w_1 = 0$	یا	$\rho_2 \frac{h_1 h_2}{2} \ddot{u}_1 - \rho_2 \frac{h_2 h_1^2}{4}\frac{\partial \ddot{w}_1}{\partial x} - \frac{\partial M_x^{(1)}}{\partial x} + \frac{1}{h_2} M_{xz}^{(2)} - \eta^{(2)} \frac{h_2^2}{3}\left(-\frac{\partial \dot{w}_3}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_1}{\partial x}\right) = 0$
(۴)	$\delta w_3 = 0$	یا	$-\frac{\partial M_x^{(3)}}{\partial x} - \frac{1}{h_2} M_{xz}^{(2)} - \eta^{(2)} \frac{h_2^2}{3}\left(\frac{\partial \dot{w}_3}{\partial x} - \frac{\partial \dot{w}_1}{\partial x}\right) = 0$
(۵)	$\delta \frac{\partial w_1}{\partial x} = 0$	یا	$M_x^{(1)} = 0$
(۶)	δ	یا	$M_x^{(3)} = 0.$

برایند نیروها و ممان‌ها نیز به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned}
&N_x^{(i)} = \int_{-h_i/2}^{h_i/2} \sigma_x^{(i)} dz_i = \int_{-h_i/2}^{h_i/2} E_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} - z_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2}\right) dz_i = E_i h_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \\
&M_x^{(i)} = \int_{-h_i/2}^{h_i/2} \sigma_x^{(i)} z_i dz_i = \int_{-h_i/2}^{h_i/2} E_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} - z_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2}\right) z_i dz_i = -E_i \frac{h_i^3}{12}\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2}
\end{aligned} \quad (i=1,3)$$

$$\begin{aligned}
&N_{xz}^{(2)} = \int_0^{h_2} \sigma_{xz}^{(2)} dz_2 = \int_0^{h_2} G^{(2)} \frac{z_2}{h_2}\left(\frac{\partial w_3}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial x}\right) dz_2 = \frac{G^{(2)} h_2}{2}\left(\frac{\partial w_3}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial x}\right) \\
&N_z^{(2)} = \int_0^{h_2} \sigma_z^{(2)} dz_2 = \int_0^{h_2} \frac{E^{(2)}}{h_2}(w_3 - w_1) dz_2 = E^{(2)}(w_3 - w_1) \\
&M_{xz}^{(2)} = \int_0^{h_2} \sigma_{xz}^{(2)} z_2 dz_2 = \frac{G^{(2)} h_2^2}{3}\left(\frac{\partial w_3}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial x}\right) \\
&M_z^{(2)} = \int_0^{h_2} \sigma_z^{(2)} z_2 dz_2 = \frac{E^{(2)} h_2}{2}(w_3 - w_1).
\end{aligned} \tag{۱۹}$$

۲-۳- پاسخ زمانی

هدف این بخش، حل معادلات حرکت (۱۷) با توجه به شرایط مرزی (۱۸) در حوزه زمان است. برای این منظور با توجه به شرایط مرزی لولایی در دو طرف تیر و با در نظر گرفتن شرایط مرزی (۱۸)، جابه‌جایی‌ها به صورت سری‌های فوریه بسط داده می‌شود. باید توجه داشت که طبق تعریف، نیازی به صفر شدن جابه‌جایی افقی در تکیه‌گاه‌ها نیست و سری‌های فوریه تنها باید شرایط مرزی (۱۸) را ارضاء کنند. به طوری که در هر دو طرف تیر شرایط مرزی هندسی (۴- ۱) (که نشان دهنده صفر بودن جابه‌جایی عرضی تیر و صفر بودن δu_1 و δu_3 هستند) و شرایط مرزی نیروی (۵ و ۶) (که نشان دهنده صفر بودن گشتاور هستند) برقرار می باشند:

$$u_i(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi_n^{u_i}(t)\,\cos\left(\frac{n\,\pi}{l}x\right)\qquad (i=1,3) \qquad (۲۰)$$
$$w_i(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi_n^{w_i}(t)\,\sin\left(\frac{n\,\pi}{l}x\right),$$

که در آن l طول تیر و $\chi_n^{u_i}(t)$ و $\chi_n^{w_i}(t)$ ضرایب مجهول تابع زمان هستند. با جایگذاری روابط (۲۰) در معادلات حرکت (۱۷) و استفاده از تعامد توابع مثلثاتی، معادلات حرکت با مشتقات جزئی تبدیل به چهار معادله دیفرانسیل معمولی کوپله در حوزه زمان می‌شوند:

$$\begin{aligned}
&u_1:\quad -\left(\rho_1 h_1+\rho_2 h_2\right)\ddot{\chi}_n^{u_1}(t)+\frac{\rho_2 h_1 h_2}{2}\left(\frac{n\,\pi}{l}\right)\ddot{\chi}_n^{w_1}(t)-E_1 h_1\left(\frac{n\,\pi}{l}\right)^2\chi_n^{u_1}(t)=0\\
&u_3:\quad -\rho_3 h_3\ddot{\chi}_n^{3}(t)-E_3 h_3\left(\frac{n\,\pi}{l}\right)^2\chi_n^{u_3}(t)=0\\
&w_1:\quad -\left(\rho_1 h_1+\rho_2 h_2\right)\ddot{\chi}_n^{w_1}(t)+\frac{\rho_2 h_1 h_2}{2}\left(\frac{n\pi}{l}\right)\ddot{\chi}_n^{u_1}(t)-\frac{\rho_2 h_1^2 h_2}{4}\left(\frac{n\,\pi}{l}\right)^2\ddot{\chi}_n^{w_1}(t)-\\
&E_1\frac{h_1^3}{12}\left(\frac{n\,\pi}{l}\right)^4\chi_n^{w_1}(t)+\left(\frac{G^{(2)}h_2}{3}\left(\frac{n\,\pi}{l}\right)^2+\frac{E^{(2)}}{h_2}\right)\left(\chi_n^{w_3}(t)-\chi_n^{w_1}(t)\right)+\left(\eta^{(2)}\frac{h_2^2}{3}\left(\frac{n\,\pi}{l}\right)^2+\frac{\mu^{(2)}}{h_2}\right)\left(\dot{\chi}_n^{w_3}(t)-\dot{\chi}_n^{w_1}(t)\right)=\\
&-\frac{2}{l}\int_0^l\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)q_1(x,t)dx\\
&w_3:\quad -\rho_3 h_3\ddot{\chi}_n^{w_3}(t)-\frac{E_3 h_3^3}{12}\left(\frac{n\,\pi}{l}\right)^4\chi_n^{w_3}(t)-\left(\frac{G^{(2)}h_2}{3}\left(\frac{n\,\pi}{l}\right)^2+\frac{E^{(2)}}{h_2}\right)\left(\chi_n^{w_3}(t)-\chi_n^{w_1}(t)\right)+\\
&\left(\eta^{(2)}\frac{h_2^2}{3}\left(\frac{n\,\pi}{l}\right)^2+\frac{\mu^{(2)}}{h_2}\right)\left(\dot{\chi}_n^{w_1}(t)-\dot{\chi}_n^{w_3}(t)\right)=-\frac{2}{l}\int_0^l\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)q_3(x,t)dx.
\end{aligned}\qquad (۲۱)$$

برای حل معادلات بالا و دست یافتن به پاسخ زمانی، از معادلات فوق تبدیل لاپلاس گرفته و نتیجه را که چهار معادله چهار مجهول کوپله می باشند به فرم ماتریسی زیر نوشته می‌شود:

$$Z_n(s)\,\xi_n(s)=\ q_n(s). \qquad (۲۲)$$

$$\xi_n(s)=\left[\tilde{\chi}_n^{u_1}(s),\tilde{\chi}_n^{u_3}(s),\tilde{\chi}_n^{w_1}(s),\tilde{\chi}_n^{w_3}(s)\right]^T$$
$$q_n(s)=[\,0,0,\tilde{q}_{1n}(s),\tilde{q}_{3n}(s)]^T, \qquad (۲۳)$$

که در آن، علامت "~" نشان دهنده تبدیل لاپلاس نسبت به زمان بوده و $\tilde{q}_{1n}(s)=\mathcal{L}\left[\int_0^l\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)q_1(x,t)dx\right]$ و $\tilde{q}_{3n}(s)=\mathcal{L}\left[\int_0^l\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)q_3(x,t)dx\right]$ است.

از آنجایی که یافتن معکوس تبدیل لاپلاس حل پیچیده معادله ماتریسی (۲۲) به صورت تحلیلی کار بسیار دشواری می‌باشد، برای یافتن معکوس تبدیل لاپلاس $\tilde{\chi}_n^{w_3}(s)$، از روش عددی داربین استفاده می‌شود. همچنین فرمول تبدیل معکوس لاپلاس به صورت زیر است:

$$\chi_n^{w_3}(t)\ \frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda-j\infty}^{\lambda+j\infty}\tilde{\chi}_n^{w_3}(s)e^{st}ds, \qquad (۲۴)$$

که در آن، $j=\sqrt{-1}$ و λ یک عدد حقیقی دلخواه بزرگ‌تر از قسمت حقیقی تمامی نقاط تکین $\tilde{\chi}_n^{w_3}(s)$ است. روش معکوس لاپلاس‌گیری داربین [۱۷] بر مبنای فرم گسسته انتگرال معکوس لاپلاس (۲۴) در بازه $[0,2T_0]$ می‌باشد [۱۸]:

$$\chi_n^{w_3}(t)=\frac{2e^{\lambda t}}{T_0}\left[\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\tilde{\chi}_n^{w_3}(\lambda)\}+\sum_{l=1}^{N}\left[\mathrm{Re}\left\{\tilde{\chi}_n^{w_3}\left(\lambda+j\frac{2\pi l}{T_0}\right)\right\}\cos\left(\frac{2\pi l}{T_0}t\right)-\mathrm{Im}\left\{\tilde{\chi}_n^{w_3}\left(\lambda+j\frac{2\pi l}{T_0}\right)\right\}\sin\left(\frac{2\pi l}{T_0}t\right)\right]\right], \qquad (۲۵)$$

که در آن، N نشان دهنده تعداد جملات سری می‌باشد. T_0 زمان مورد نظر برای مشاهده پاسخ بوده و طبق پیشنهاد داربین مقدار مناسب λT_0 جهت دست یافتن به پاسخ صحیح بین ۵ و ۱۰ می‌باشد [۱۷]. با توجه به اینکه مقدار T_0 در نتایج عددی برابر ۱۰می‌باشد، مقدار λ برابر با ۰/۵ انتخاب شده است.

۳- نتایج عددی

در این بخش به بررسی پاسخ زمانی تیر سه‌لایه با هسته MRE تحت بارگذاری‌های مختلف و میدان‌های مغناطیسی مختلف پرداخته می‌شود. خواص تیر مورد بررسی در جدول **۱** و خواص الاستومر مورد نظر در میدان‌های مغناطیسی مختلف در جدول **۲** آورده شده است. لازم به ذکر است که خواص ماده MRE مورد نظر از داده‌های تجربی بلام و کاری [۱۹] استخراج شده است. در تمامی موارد پاسخ زمانی در وسط تیر خوانده شده است.

در تحقیق حاضر ابتدا پاسخ زمانی تیر تحت بارگذاری ضربه بررسی می‌شود. بارگذاری ضربه از نظر ریاضی به صورت زیر مدل شده است:

$$q_1(x,t)=\delta(x-x_0)\delta(t-t_0), \qquad (۲۶)$$

که در آن، $\delta(.)$ تابع دلتای دیراک است. شکل **۲** نشان دهنده پاسخ زمانی تیر به بار ضربه به بزرگی ۱ N در وسط تیر در میدان‌های مختلف می‌باشند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، پاسخ زمانی تیر بدون اعمال میدان مغناطیسی میرایی بسیار اندکی دارد که این میرایی ناشی از میرایی ذاتی موجود در ماده MRE است. با اعمال میدان مغناطیسی، میرایی افزایش می‌یابد و در میدان ۰/۳ T به دلیل حداکثر بودن میرایی ماده MRE (به جدول ۲ مراجعه شود) میرایی کل سازه نیز بیشتر می‌باشد. تغییر میدان مغناطیسی بر بزرگی دامنه ارتعاشات نیز تأثیر بسزایی دارد که این امر به دلیل تغییر در سفتی ماده MRE است.

جدول (۱): خواص تیر مورد بررسی.

طول تیر (l)	۱m
ضخامت لایه پایین (h_3)	۱mm
ضخامت لایه بالا (h_1)	۰/۵mm
ضخامت لایه MRE (h_2)	۲mm
چگالی لایه‌های بالا و پایین (ρ_1)	۲۷۰۰ kg/m^3
مدول الاستیسیته لایه‌های بالا و پایین (E_1)	۷۰*۱۰^۹Pa
ضریب پواسن لایه‌های بالا و پایین (ν_1)	۰/۳
چگالی لایه MRE (ρ_2)	۳۷۴۰kg/m^3
ضریب پواسن لایه MRE (ν_2)	۰/۵

شکل **۳** نشان دهنده پاسخ زمانی تیر به نیروی متحرک با سرعت ثابت ۵ m/s و بزرگی ۱ N می‌باشند. مدل ریاضی نیروی متحرک به صورت زیر است:

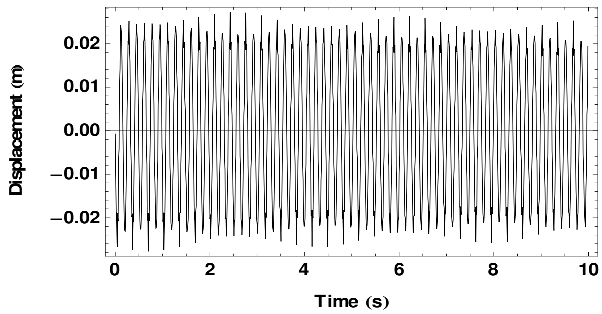
$$q_1(x,t) = \delta(x-(v\,t+x_0)). \tag{۲۷}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود بدون اعمال میدان مغناطیسی میرایی اندکی در سازه وجود دارد و در هنگام اعمال میدان میرایی به طرز چشمگیری افزایش می‌یابد. تغییر ایجاد شده در سفتی ماده MRE به طرز قابل مشاهده‌ای بر فرکانس‌های طبیعی سازه تأثیر می‌گذارد که این امر به وضوح در شکل **۳** مشخص است.

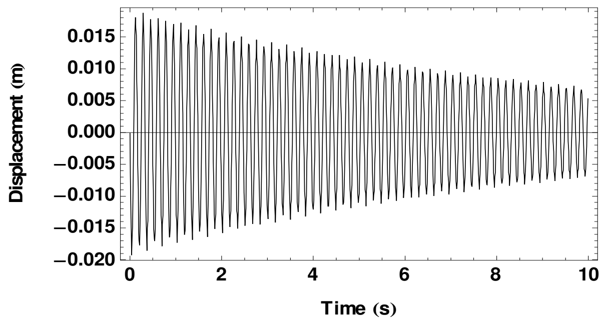
جدول (۲): خواص ماده MRE مورد بررسی در میدان‌های مغناطیسی مختلف [۱۹].

	۰/۸T	۰/۵۵T	۰/۳ T	۰T
مدول برشی MRE ($G^{(2)}$ (pa))	۱/۷۹۶×۱۰^۷	۱/۵۴۲×۱۰^۷	۱/۷۲۵×۱۰^۷	۰/۸۳۲×۱۰^۷
میرایی MRE ($\eta^{(2)}$ ($N.s/m^2$))	۲۲۵۷/۱۵	۲۱۸۷/۳۲	۲۵۵۶/۲۸	۱۳۸۵/۴۴

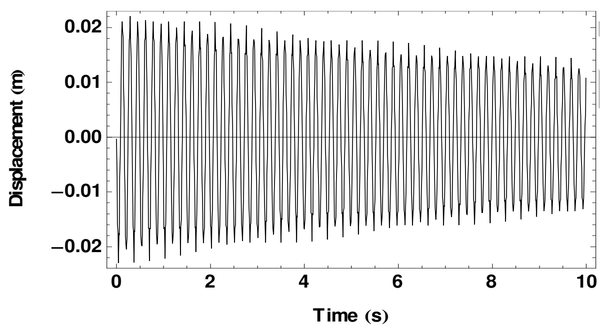
همان طور که مشاهده می‌شود، با افزایش میدان به T ۰/۸ و حاصل شدن حداکثر سفتی در ماده MRE تعداد نوسانات تحت نیروی متحرک نیز افزایش می‌یابد. شکل **۴** نشان دهنده پاسخ زمانی تیر به بارگذاری هارمونیک گسترده بر روی تیر با فرکانس ۵۰Hz می‌باشند. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، بدون اعمال میدان مغناطیسی میرایی بسیار اندکی در سازه قابل مشاهده است. با اعمال میدان مغناطیسی میرایی سازه نیز افزایش می‌یابد، تا جایی که ارتعاشات سازه به شرایط پایدار نزدیک می‌شود.



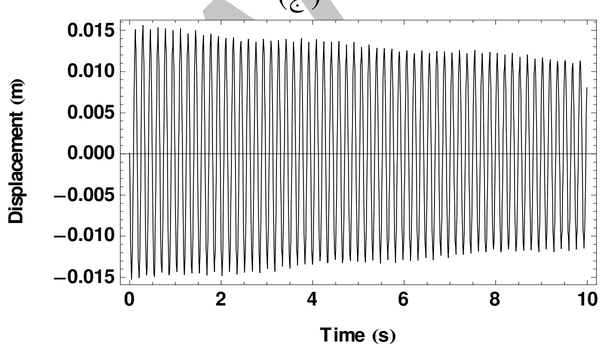
(الف)



(ب)



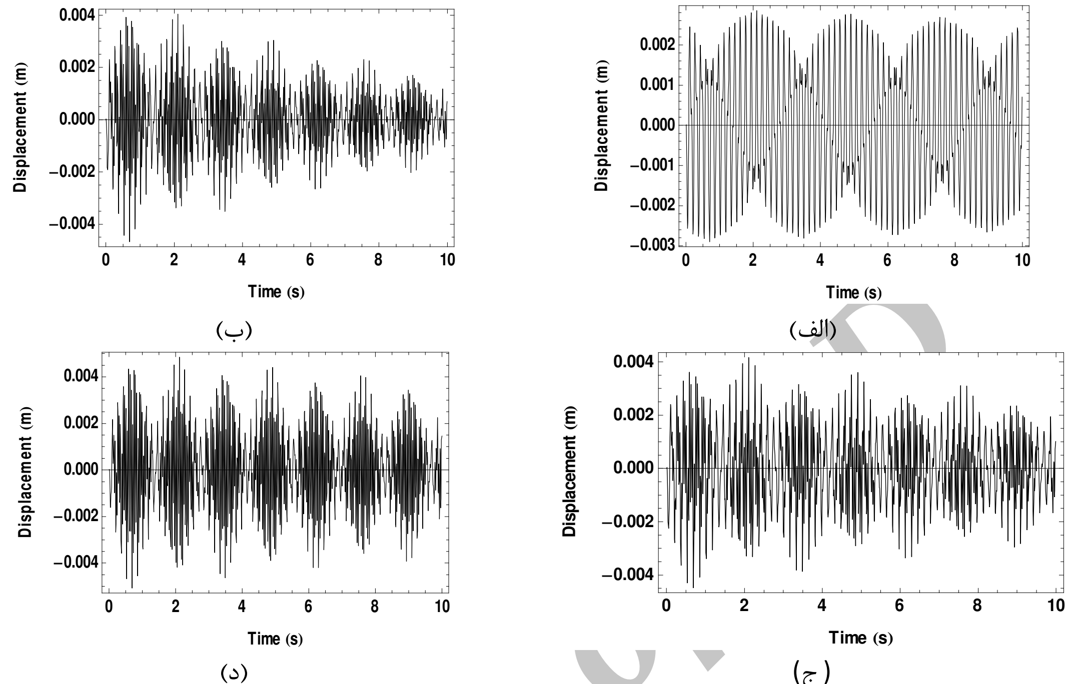
(ج)



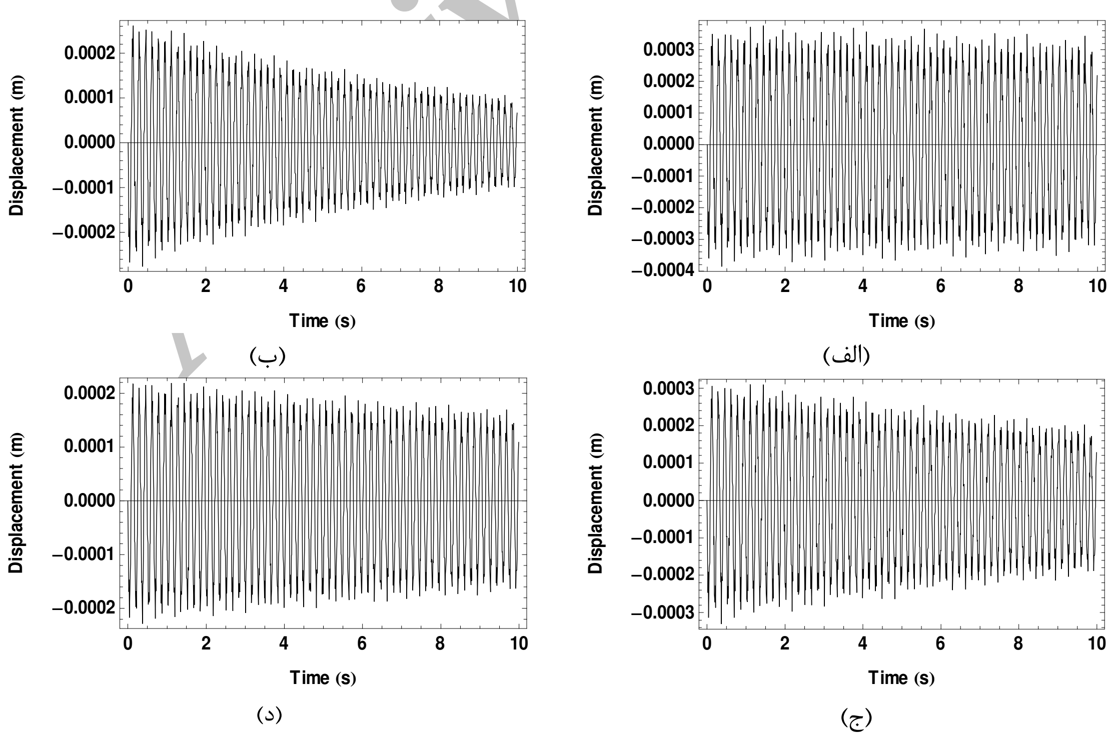
(د)

شکل (۲): الف) پاسخ زمانی به بار ضربه در میدان T، ب) پاسخ زمانی به بار ضربه در میدان T ۰/۳، ج) پاسخ زمانی به بار ضربه در میدان T ۰/۵۵ و د) پاسخ زمانی به بار ضربه در میدان T ۰/۸.

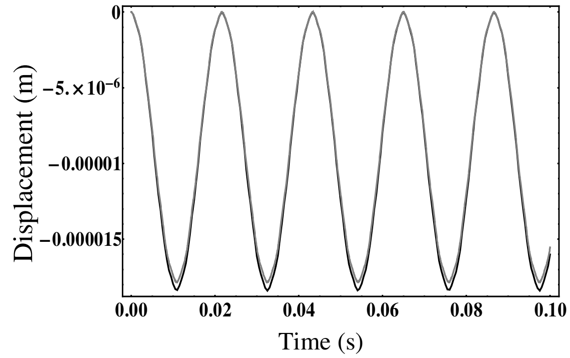
شکل **۵** پاسخ زمانی تیر به بارگذاری پله‌ای در وسط تیـر را در حالت حدی $h_1 = h_2 \to 0$ نشان می‌دهـد. همـان‌طـور کـه مشاهده می‌شود، پاسخ تیر در حالـت حـدی انطبـاق خـوبی بـا مرجع [۲۰] دارد. در این مرجع، حل با روش مـدهـای متعامـد (آنالیز مدال) صورت گرفته و اختلاف اندک موجود می‌توانـد بـه دلیل استفاده از روش عددی معکوس لاپلاس‌گیری باشد.



شکل (۳): الف) پاسخ زمانی به نیروی متحرک در میدان T، ب) پاسخ زمانی به نیروی متحرک در میدان T ۰/۳، ج) پاسخ زمانی به نیروی متحرک در میدان T ۰/۵۵ و د) پاسخ زمانی به نیروی متحرک در میدان T ۰/۸.



شکل (۴): الف) پاسخ زمانی به نیروی هارمونیک در میدان T، ب) پاسخ زمانی به نیروی هارمونیک در میدان T ۰/۳، ج) پاسخ زمانی به نیروی هارمونیک در میدان T ۰/۸ و د) پاسخ زمانی به نیروی هارمونیک در میدان T ۰/۵۵.



شکل (۵) اعتبار سنجی، (مشکی): حل با روش حاضر، (خاکستری): حل از مرجع [۲۰]

۴- نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر، تئوری کلاسیک تیر اویلر برنولی، روابط سازگاری خطی شده تیرها با هسته انعطاف‌پذیر عرضی، اصل همیلتن و بسط فوریه جابه‌جایی‌ها به همراه الگوریتم معکوس لاپلاس‌گیری داربین جهت استخراج یک حل نیمه‌تحلیلی برای ارتعاشات اجباری تیر سه‌لایه با هسته MRE به کار گرفته شده است. تیر مورد نظر تحت بارگذاری‌های گذرای مختلفی از جمله ضربه، نیروی متحرک و نیروی هارمونیک قرار گرفته است. نتایج عددی نشان دهنده تأثیر بسزای اعمال میدان‌های مغناطیسی مختلف بر بزرگی دامنه ارتعاشات و میرایی کل سازه می‌باشند. در میدان ۰/۳ T که الاستومر MR بیشترین میرایی را دارا است، شاهد حداکثر میرایی در کل سازه هستیم. دامنه ارتعاشات نیز در بارگذاری‌های ضربه و هارمونیک در میدان ۰/۸ کمترین میزان خود را دارا می‌باشد که این امر به دلیل حداکثر بودن سفتی ماده MRE در میدان ۰/۸ T است.

۵- مراجع

1. Chopra, I. “Review of State of Art of Smart Structures and Integrated Systems”, AIAA J., Vol. 40, No. 11, pp. 2145-2187, 2002.
2. Gopinathan, S.V., Varadan, V.V., and Varadan, V.K. “A Review and Critique of Theories for Piezoelectric Laminates”, Smart Mater. Struct., Vol. 9, No. 1, pp. 24–48, 2000.
3. Benjeddou, A. “Advances in Piezoelectric Finite Element Modeling of Adaptive Structural Elements: a Survey”, Comput. Struct., Vol. 76, No.1, pp. 347–363, 2000.
4. Jafari, A.A. and Fathabadi, M. “Forced Vibration of FGM Timoshenko Beam with Piezoelectric Layers Carrying Moving Load”, Aerospace Mech. J., Vol. 9, No. 2, pp. 69-77, 2013 (In Persian).
5. Balapgol, B.S., Kulkarni, S.A., and Bajoria, K.M. “A Review on Shape Memory Alloy Structures”, Int. J. Acoustics and Vibrations, Vol. 9, No. 2, pp. 61-68, 2004.
6. Pablo, F., Osmont, D., and Ohayan, R. “Modeling of Plate Structures Equipped with Current Driven Electrostrictive Actuators for Active Vibration Control”, J. Intelligent Material Sys. and Struct., Vol. 14, No. 3, pp. 173-183, 2003.
7. Rajamohan, V., Sedaghati R., and Rakheja, S., “Vibration Analysis of a Multi-Layer Beam Containing Magnetorheological Fluid”, Smart Mater. Struct., Vol 19, No.1, pp. 1-12, 2009.
8. Stanway R., Sproston, J.L., and El-Wahed, A.K. “Application of Electro–Rheological Fluids in Vibration Control: a Survey”, Smart Mater. Struct., Vol. 5, No. 4, pp. 464–482, 1996.
9. Yalcintas, M. and Dai, H. “Magnetorheological and Electrorheological Materials in Adaptive Structures and Their Performance Comparison”, Smart Mater. Struct., Vol. 8, No. 5, pp. 560–573, 1999.
10. Sun, Q., Zhou, J., and Zhang, L. “An Adaptive Beam Model and Dynamic Characteristics of Magnetorheological Materials”, J. Sound and Vibration, Vol. 261, No. 3, pp. 465–481, 2003.
11. Zhou, G.Y. and Wang, Q. “Use of Magnetorheological Elastomer in an Adaptive Sandwich Beam with Conductive Skins. Part II: Dynamic Properties”, Int. J. Solids and Struct., Vol. 43, No. 17, pp. 5403–5420, 2006.
12. Dwivedy, S.K., Mahendra, N., and Sahu, K.C. “Parametric Instability Regions of a Soft and Magnetorheological Elastomer Cored Sandwich Beam”, J. Sound and Vibration, Vol. 325, No. 4-5, pp. 686–704, 2009.
13. Chen, L. “Using Magnetorheological (MR) Fluid as Distributed Actuators for Smart Structures”, ICIEA 2009.
14. Ying, Z.G. and Ni, Y.Q. “Micro-Vibration Response of a Stochastically Excited Sandwich Beam with a Magnetorheological Elastomer Core and Mass”, Smart Mater, Struct., Vol. 18, No. 9, pp. 1-13, 2009.
15. Ni, Y.Q., Ying, Z.G., and Chen, Z.H. “Magneto-Rheological Elastomer (MRE) Based Composite Structures for Micro-Vibration Control”, Earthquake Eng. and Eng. Vibration, Vol. 9, No. 3, pp. 345-356, 2010.
16. Frostig, Y., Baruch, M., Vilnay, O., and Sheinman, I. “High-Order Theory for Sandwich-Beam Behavior with Transversely Flexible Core”, J. Eng. Mech., Vol. 118, No. 5, pp. 1026-1043, 1992.
17. Durbin, F. “Numerical Inversion of Laplace Transforms: an Efficient Improvement to Dubner and Abate’s Method”, Computer J., Vol. 15, No. 3, pp. 371-376, 1972.
18. Hildebrand, F.B. “Advanced Calculus for Engineers”, Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall Inc., 1962.
19. Blom, P. and Kari, L. “Amplitude and Frequency Dependence of Magneto-Sensitive Rubber in a Wide Frequency Range”, Polymer Testing, Vol. 24, No. 25, pp. 656–662, 2005.
20. Rao, S.S. “Vibration of Continuous Systems”, John Wiley and Sons Inc., 2007.