حل معادله هدایت هذلولوی در جسم کروی همراه با شرط مرزی غیرخطی

سیف ا... سعد الدین[۱] و علیرضا نصیری‌کیا[۲]
دانشکده مهندسی مکانیک
دانشگاه سمنان
(تاریخ دریافت: ۹۲/۰۹/۱۳؛ تاریخ پذیرش: ۹۳/۰۲/۰۷)

چکیده

در مقاله حاضر معادله هدایت گرمای هذلولوی در یک جسم کروی که سطح خارجی آن تحت تأثیر منبع گرمایی لیزر تابع زمان و خنک‌کاری جابه‌جایی- تشعشعی ترکیبی قرار دارد، با استفاده از روش تبدیل لاپلاس حل شده است. برای به‌کارگیری این روش، شرط مرزی غیرخطی با کمک بسط سری تیلور خطی شده است. از روش تقریب مجموع ریمان نیز برای به‌دست آوردن معکوس تبدیل لاپلاس استفاده شده است. توزیع دما برای مقادیر مختلف زمان آسایش، مدت پالس، نسبت جابه‌جایی- هدایت و نسبت تشعشع به هدایت مورد بررسی قرار گرفته و حل معادلات فوریه و هذلولوی با یکدیگر مقایسه شده است. نتایج این روش با نتایج حل تحلیلی موجود با شرایط مرزی ساده‌تر تأیید شده است.

واژه‌های کلیدی: هدایت گرمای هذلولوی، روش تبدیل لاپلاس، شرط مرزی غیرخطی، کره

Solution of Hyperbolic Heat Conduction Equation in Spherical Media with Nonlinear Boundary Condition

S. Saedodin and A. Nasirikia
Mechanical Engineering Department
Semnan University
(Received: 04 December, 2013; Accepted: 27 April, 2014)

ABSTRACT

In this paper hyperbolic heat conduction equation in spherical media with its outer surface subjected to time dependent laser heat source and combined convective-radiative cooling is solved using Laplace transform method. In order to perform this method, the nonlinear boundary condition is linearized by Taylor's series expansion. The Riemann-sum approximation method is used to obtain the inverse of Laplace transform. The temperature distribution is studied for different values of thermal relaxation time, pulse duration, convection-conduction and radiation-conduction parameters and the solutions of hyperbolic and Fourier equations are also compared. The results of the present method is verified by being compared with available analytical solution results under a simpler boundary condition.

Keywords: Hyperbolic Heat Conduction, Laplace Transform Method, Nonlinear Boundary Condition, Sphere

۱- دانشیار (نویسنده پاسخگو): s_sadodin@iust.ac.ir
۲- کارشناس ارشد: ar.nasirikia@gmail.com

۱- مقدمه

مسائل هدایت گرمایی در مهندسی با استفاده از معادله بقای انرژی همراه با یک رابطه متشکله[1] حل می‌شوند. معادله بقای انرژی در حالت کلی به‌صورت زیر است:

$$\rho c \frac{\partial T(\vec{r},t)}{\partial t} + \nabla . q(\vec{r},t) - G(\vec{r},t) = 0, \qquad (۱)$$

که در رابطه فوق، $q(\vec{r},t)$ بردار شار حرارتی و G نرخ تولید انرژی داخلی بر واحد حجم می‌باشد. رابطه متشکله تئوری کلاسیک هدایت گرمایی، رابطه فوریه است. صورت کلی این رابطه در حالت سه‌بعدی به‌صورت زیر است:

$$q(\vec{r},t) = -k\,\vec{\nabla} T(\vec{r},t), \qquad (۲)$$

در رابطه فوق، بردار شار حرارتی به‌طور مستقیم متناسب با بردار تغییر دما است و بین آنها هیچ‌گونه اختلاف زمانی وجود ندارد و به‌محض به‌وجود آمدن تغییرات دما در جسم، شار حرارتی در آن به‌وجود می‌آید. در این رابطه ثابت تناسب k، ضریب هدایت گرمایی است. ترکیب رابطه فوریه با معادله بقای انرژی به معادله زیر منجر می‌شود:

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T(\vec{r},t)}{\partial t} = \Delta T(\vec{r},t) + \frac{1}{k} G(\vec{r},t), \qquad (۳)$$

معادله فوق، توزیع دما را در حالت سه‌بعدی و ناپایدار ارائه می‌دهد که این رابطه، یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی از نوع سهموی است و پخش[2] حرارت درون جسم را توصیف می‌کند. حل این رابطه به شرایط مرزی بر روی تمامی سطوح جسم و تنها یک شرط اولیه نیاز دارد. این رابطه از زمان ارائه توسط فوریه تا چند دهه قبل تنها رابطه متشکله موجود در بحث هدایت گرمایی بود و با تمامی نتایج تجربی سازگاری داشت. اما با پیشرفت فناوری، در مواردی بین نتایج آزمایشگاهی و پاسخ پیش‌بینی شده از رابطه فوریه ناسازگاری مشاهده شد. از جمله این موارد عدم سازگاری می‌توان به توزیع دما در نزدیکی صفر مطلق، در اجسام تحت تأثیر شار حرارتی بالا و فرآیندهای گذرای بسیار سریع اشاره کرد. دلیل این ناسازگاری، فرض پاسخ آنی به تغییرات شرایط مرزی است که در رابطه فوریه وجود دارد. این فرض مستلزم بی‌نهایت بودن سرعت انتشار امواج گرمایی[3] است. این فرض از لحاظ فیزیکی نادرست است، اما سرعت انتشار امواج گرمایی در بسیاری از مواد بالا بوده و بنابراین در بسیاری از کاربردهای متعارف مهندسی این رابطه نتایج قابل قبولی ارائه می‌دهد، اما در موارد مذکور این فرض صحیح نمی‌باشد و در نتیجه بین مشاهدات تجربی و رابطه فوریه ناسازگاری ایجاد می‌گردد.

تلاش‌های زیادی برای رفع این ناسازگاری توسط دانشمندان مختلف انجام گرفته که به ارائه روابط متشکل جدید منجر شده است. از جمله این روابط که کاربرد بسیاری نیز پیدا کرده است می‌توان به روابط متشکله یک‌پسفازی[4] (SPL) و دوپسفازی[5] (DPL) اشاره کرد. رابطه متشکل یک‌پسفازی توسط کاتانئو[6] [۱] و ورنوت[7] [۲] ارائه شده که با نام CV شناخته می‌شود و به‌صورت زیر است:

$$q(\vec{r},t+\tau_{relax}) = -k\,\vec{\nabla} T(\vec{r},t). \qquad (۴)$$

در این رابطه، بین شار گرمایی و توزیع دما یک اختلاف زمانی τ_{relax} وجود دارد که زمان آسایش[8] نامیده می‌شود. وجود این اختلاف زمانی بدین معنی است که در این معادله متشکل، بر خلاف معادله فوریه، ایجاد گرادیان دما بلافاصله باعث به‌وجود آمدن شار حرارتی درون جسم نمی‌گردد، بلکه بین آنها یک اختلاف زمانی که زمان آسایش نامیده می‌شود، وجود دارد. زمان آسایش خاصیتی از ماده است. با استفاده از بسط تیلور و چشم‌پوشی از مشتقات مرتبه دوم و بالاتر، معادله (۴) به‌صورت زیر در می‌آید [۳]:

$$q(\vec{r},t) + \tau_{relax}\frac{\partial q(\vec{r},t)}{\partial t} = -k\,\vec{\nabla} T(\vec{r},t). \qquad (۵)$$

با ترکیب معادله بقای انرژی و رابطه فوق، معادله انتقال گرمای یک‌پسفازی به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\tau_{relax}}{\alpha}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \Delta T + \frac{1}{k}\left(G + \tau_{relax}\frac{\partial G}{\partial t}\right). \qquad (۶)$$

این معادله بر خلاف معادله (۳) یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی هذلولوی[9] است. برای حل این معادله، علاوه بر شرایط مرزی به دو شرط اولیه برای تعیین پاسخ نیاز است که در ادامه ارائه خواهد شد.

تفاوت عمده روابط متشکله (۳ و ۶) در سرعت انتشار امواج گرمایی است. بر خلاف معادله فوریه که در آن سرعت انتشار امواج حرارتی بی‌نهایت فرض می‌شود، در معادله انتقال گرمای یک‌پسفازی سرعت انتشار امواج گرمایی محدود درنظر گرفته

1- Constitutive Relation
2- Diffusion
3- Heat Wave

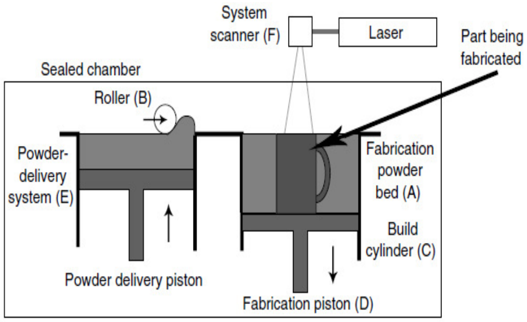
4- Single-Phase Lag
5- Dual-Phase Lag
6- Cattaneo & Vernotte
7- Vernotte
8- Relaxation Time
9- Hyperbolic

می‌شود. سرعت انتشار امـواج در معادلـه مـذکور از رابطـه زیـر به‌دست می‌آید:

$$V_{CV} = \sqrt{\frac{k}{\rho c \tau_{relax}}}. \qquad (۷)$$

از موارد کاربرد معادله هدایت گرمای یک پسفازی در مختصات کروی می‌توان به فرآیند تف‌جوشی انتخابی به‌وسیله لیزر[۱] اشاره کرد. در این فرآیند که یک روش نمونه‌سازی سریع[۲] است، ابتدا مدل سه‌بعدی جسم با استفاده از یکی از نرم‌افزارهای طراحـی و ساخت با کمک رایانه[۳] ایجاد می‌شـود. سـپس سـطح یـا حجـم مدل شده به فایل با فرمت STL[۴] تبدیل مـی‌گـردد. در مرحلـه بعد این فایل به تعداد زیادی سطح مقطع نازک تقسـیم شـده و اطلاعات هندسی مربوط به هر سطح، به دسـتگاه نمونـه‌سـازی ارسال می‌شود. در این دستگاه نخست یک لایـه نـازک از پـودر زودگـداز بـر روی محفظـه سـاخت قطعـه پاشـیده مـی‌شـود. در مرحله بعد پایین‌ترین سـطح مقطـع جسـم بـا کمـک لیـزر به‌صورت انتخابی ایجاد می‌شود. در این فرآیند بـرهمکنش لیـزر با پودر دمای سطح آن را تا دمای ذوب بالا می‌بـرد و در نتیجـه ذرات پودر گداخته شده به هم متصـل و یـک جـسم جامـد را تشـکیل می‌دهند که به این پدیده تف‌جوشی گفتـه مـی‌شـود. پس از ایجاد هر سطح، بستر به میزان ضخامت لایه ایجاد شـده پایین رفته و یک لایه جدید پودر بر روی لایـه قبلـی بـا کمـک یک سازوکار غلتکی پاشیده می‌شود. این فرآیند تا اتمام ساخت قطعه ادامه مـی‌یابـد. پـس از اتمـام فرآینـد، قطعـه از محفظـه ساخت خارج می‌شود. ذرات پودری که خارج از محدوده سطوح بوده و تحت تابش اشعه لیزر قـرار نگرفتـه‌انـد نیـز بـه‌آسـانی از جسم جدا می‌شوند. این ذرات نقش نگهدارنده[۵] را در حین ایـن فرآیند بر عهده دارند و بنـابراین در روش فـوق نیـازی بـه یـک نگهدارنده خارجی نمی‌باشد. نمای کلی این فرآینـد در شـکل **۱** ارائه شده است [۶-۴].

پژوهش‌های زیادی برای مـدل‌سـازی فرآینـد نمونـه‌سـازی انجام گردیده که در برخی از آنها از رابطه فوریه اسـتفاده شـده است [۷ و ۸]. همچنین تحقیقات گوناگونی بـرای حـل معادلـه هدایت گرمای هذلولوی در هندسه‌ها و شـرایط مـرزی مختلـف انجام گرفته است. جیانگ[۶] ایـن معادلـه را در کـره توخـالی بـا شرط مرزی دما ثابت در سطح داخلی و خارجی حل کرده است [۹]. لواندوفسکا[۷] بـا اسـتفاده از روش تبـدیل لاپـلاس، معادلـه یک‌پسفازی را برای یک جامد نیمه‌بی‌نهایت تحت تـابش لیـزر، مورد تحلیل و بررسی قرار داده است [۱۰].



شکل (۱): نمای کلی فرآیند تف‌جوشی انتخابی به‌وسیله لیزر.

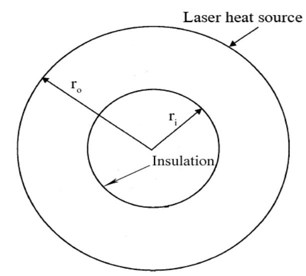
دای[۸] و همکـاران پاسـخ معادلـه دوپسـفازی بـرای ذرات در مقیاس میکرو را با استفاده از روش تفاضل محدود بـه‌دسـت آورده‌اند [۱۱]. رضا شیرمحمدی توزیع دما را در یک کره تحت تابش لیزر با استفاده از معادله یک‌پسفازی بـه روش جداسـازی متغیرها و قضیه انتگرال دوهامل[۹] محاسبه کرده اسـت [۱۲]. در مقاله دیگری وی به‌همراه امین موسایی، این معادله را با شـرط مرزی تناوبی حل نمـوده اسـت [۱۳]. بابـایی و چـن[۱۰] معادلـه هدایت گرمایی یک‌پسفازی را در کره توخالی با خواص تابعی[۱۱] مورد بررسی قرار داده‌انـد [۱۴]. چـن و چـن، تغییـرات دمـا در راستای شعاعی در مختصات استوانه‌ای و کروی را با اسـتفاده از تابع گرین و تبدیل لاپلاس محاسبه کرده‌انـد [۱۵]. در مراجـع مختلف، معادله با شرایط مرزی ساده مورد تحلیل قرار گرفتـه و تاکنون اثر شار حرارتی لیزر و خنک‌کاری تشعشعی و جابه‌جایی به‌صورت هم‌زمان درنظر گرفته نشده است.

۲- فرمولاسیون مسئله

در ابتـدا یـک جسـم کـروی هماننـد شـکل **۲** درنظـر گرفتـه می‌شود. این جسم ابتدا در دمای ثابت T_0 کـه برابـر بـا دمـای محیط می‌باشد، قرار دارد.

1- Selective Laser Sintering (Sls)
2- Rapid Prototyping
3- Cad/Cam Software
4- Standard Transform Language
5- Support

6- Jiang
7- Lewandowska
8- Dai
9- Duhamel's Integral Theorem
10- Chen
11- Functionally Graded



شکل (۲): نمودار شماتیک کره.

در این مقاله توزیع دما در دو حالت کره توپر و کره توخالی بررسی می‌شود. شعاع خارجی جسم در هر دو حالت برابر r_o و در حالت کره تو خالی شعاع داخلی کره برابر r_i است.

معادله هدایت گرمای یک‌پسفازی برای جسم کروی فاقد منبع تولید انرژی داخلی، در حالت یک‌بعدی به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\tau_{relax}}{\alpha}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}. \qquad (۸)$$

در لحظه $t=0$ سطح این کره تحت تابش یک لیزر از نوع Q-S[1] قرار می‌گیرد. توان لیزر وابسته به‌زمان و به‌صورت زیر می‌باشد [۱۲]:

$$Q(t)=q_0\frac{t}{t_p^2}\exp(-\frac{t}{t_p}), \qquad (۹)$$

که در این رابطه، q_0 توان لیزر بر واحد سطح مقطع پرتو لیزر و t_p زمان مشخصه[2] لیزر است. لازم به‌ذکر است که زمان مشخصه، متناسب با مدت زمان تابش لیزر می‌باشد. در تحلیل مسئله فرض می‌شود تمامی انرژی وارده از سوی لیزر، در سطح کره جذب می‌گردد. خواص ماده نیز ثابت درنظر گرفته می‌شود. در این مسئله شرط مرزی در سطح خارجی کره با توجه به معادله متشکله به‌صورت زیر می‌باشد:

$$k\left.\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right|_{r=ro}=(q_t(t)+\tau_{relax}\frac{\partial q_t(t)}{\partial t}), \qquad (۱۰)$$

در رابطه فوق، $q_t(t)$ شار حرارتی کلی بوده و با درنظر گرفتن منبع گرمایی لیزر تابع زمان و خنک‌کاری جابه‌جایی- تشعشعی ترکیبی از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$q_t(t)=q_{laser}-q_{convection}-q_{radiation}. \qquad (۱۱)$$

با ترکیب معادلات (۱۰ و ۱۱)، شرط مرزی در سطح خارجی در نهایت به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} k\left.\dfrac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right|_{r=ro}=\dfrac{q_0}{t_p}(q(t)+\tau_{relax}\dfrac{\partial q(t)}{\partial t})- \\ h((T-T_0)+\tau_{relax}\dfrac{\partial (T-T_0)}{\partial t}) \\ -\varepsilon\sigma((T^4-T_0^4)+\tau_{relax}\dfrac{\partial (T^4-T_0^4)}{\partial t}) \\ q(t)=\dfrac{t}{t_p}\exp(-\dfrac{t}{t_p}), \end{cases} \qquad (۱۲)$$

که در رابطه فوق، h ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی، ε ضریب صدور کره و σ ثابت استفان- بولتزمان می‌باشد.

در حالت کره توپر شرط مرزی در مرکز به‌صورت زیر است:

$$\left.\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right|_{r=0}=0. \qquad (۱۳)$$

در حالت کره توخالی سطح داخلی کره به‌صورت عایق درنظر گرفته می‌شود:

$$\left.\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right|_{r=ri}=0. \qquad (۱۴)$$

در ابتدا به لزوم وجود دو شرط اولیه برای حل معادلات با مشتقات جزئی هذلولوی اشاره شد. شرط اولیه نخست به‌شرح زیر است:

$$T(r,0)=T_0. \qquad (۱۵)$$

این شرط اولیه با حالت سهموی مشترک است. در مراجع مختلف شرط اولیه دوم [۱۲، ۱۶ و ۱۷] به‌صورت زیر ارائه شده که برای حل معادله از آن استفاده می‌شود:

$$\left.\frac{\partial T(r,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0. \qquad (۱۶)$$

برای بی‌بعدسازی و حل مسئله، متغیرهای زیر معرفی می‌شود:

$$\eta=\frac{r}{r_0} \quad \tau=\frac{\alpha t}{r_o^2} \quad Ve^2=\frac{\alpha\tau_{relax}}{r_o^2}$$
$$\theta=\frac{(T-T_0)}{T_r} \quad \tau_p=\frac{\alpha t_p}{r_o^2} \quad T_r=\frac{q_0}{\rho c r_0} \qquad (۱۷)$$
$$N_c=\frac{h r_0}{k} \quad N_r=\frac{\varepsilon\sigma r_o}{k}T_r^3,$$

در این رابطه، η شعاع بی‌بعد، τ زمان بی‌بعد، N_c نسبت جابه‌جایی به هدایت یا عدد بیوت و N_r نسبت تشعشع به هدایت است. T_r نیز دمای مرجع نامیده می‌شود [۱۸]. با استفاده از متغیرهای فوق، معادله به‌صورت بدون بعد درمی‌آید:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\eta^2}+\frac{2}{\eta}\frac{\partial\theta}{\partial\eta}=\frac{\partial\theta}{\partial\tau}+Ve^2\frac{\partial^2\theta}{\partial\tau^2}. \qquad (۱۸)$$

صورت بدون بعد شرایط اولیه به‌صورت زیر است:

1- Q-Switched
2- Characteristic Time

$$\theta(\eta,0)=0, \tag{۱۹}$$

$$\left.\frac{\partial\theta(\eta,\tau)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}=0. \tag{۲۰}$$

شرط مرزی در سطح خارجی جسم نیز با استفاده از متغیرهای رابطه (۱۷) به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial\theta(\eta,\tau)}{\partial\eta}\right|_{\eta=1}&=\frac{1}{\tau_p^2}\exp(-\frac{\tau}{\tau_p})[\tau(1-\frac{Ve^2}{\tau_p})+Ve^2]\\&-N_c(\theta+Ve^2\frac{\partial\theta}{\partial\tau})-N_r[(\theta+\frac{T_0}{T_r})^4-(\theta_\infty+\frac{T_0}{T_r})^4\\&+Ve^2\frac{\partial}{\partial\tau}((\theta+\frac{T_0}{T_r})^4-(\theta_\infty+\frac{T_0}{T_r})^4)].\end{aligned} \tag{۲۱}$$

واضح است اگر N_r مخالف صفر باشد، شرط مرزی (۲۱) به‌صورت غیرخطی درمی‌آید، تحلیل مسائل غیرخطی دشوار بوده و به‌همین علت شرط مرزی در سطح خارجی کره باید خطی شود. این خطی‌سازی با استفاده از تقریب سری تیلور [۱۸ و ۱۹] انجام گرفته و شکل خطی شده شرط مرزی به‌صورت زیر است:

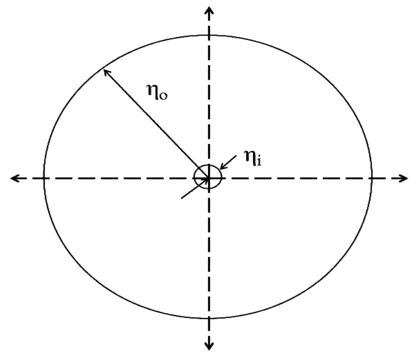
$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial\theta(\eta,\tau)}{\partial\eta}\right|_{\eta=1}&=\frac{1}{\tau_p^2}\exp(-\frac{\tau}{\tau_p})[\tau(1-\frac{Ve^2}{\tau_p})+Ve^2]-\\&N_c(\theta+Ve^2\frac{\partial\theta}{\partial\tau})-N_r[4(\bar{\theta}+\frac{T_0}{T_r})^3(\theta+\frac{T_0}{T_r})\\&-3(\bar{\theta}+\frac{T_0}{T_r})^3-(\theta_\infty+\frac{T_0}{T_r})^4+Ve^2\frac{\partial}{\partial\tau}(4(\bar{\theta}+\frac{T_0}{T_r})^3(\theta+\frac{T_0}{T_r})\\&-3(\bar{\theta}+\frac{T_0}{T_r})^3-(\theta_\infty+\frac{T_0}{T_r})^4)].\end{aligned} \tag{۲۲}$$

در این رابطه، $\bar{\theta}$ یک عدد تخمینی و یا مقدار θ در تکرار قبلی است. صورت بدون بعد شرط مرزی دوم برای کره توخالی و برای کره توپر به ترتیب با معادلات (۲۳ و ۲۴) بیان می‌شود:

$$\left.\frac{\partial\theta(\eta,\tau)}{\partial\eta}\right|_{\eta=\eta i}=0 \tag{۲۳}$$

$$\left.\frac{\partial\theta(\eta,\tau)}{\partial\eta}\right|_{\eta=0}=0 \tag{۲۴}$$

نکته مهم در محاسبه توزیع دما در کره توپر، وجود یک نقطه تکین در مرکز کره می باشد. لازم به‌ذکر است که تعیین دما در این نقطه ممکن نمی‌باشد، چون پاسخ معادلات به عدد ثابت تقسیم بر صفر که معادل بی‌نهایت است، منجر می‌شود. با استفاده از روش ارائه شده در مراجع [۲۰ و ۲۱] این مشکل رفع می‌گردد و برای حذف این نقطه تکین شعاع داخلی یک مقدار بسیار کوچک اما مخالف صفر (همانند شکل ۳) فرض می شود. در نتیجه این نقطه از قلمرو محاسبات خارج می‌شود.



شکل (۳): حذف نقطه تکین از قلمرو محاسبات.

۳- حل معادله با استفاده از تبدیل لاپلاس

یکی از روش‌های حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، استفاده از تبدیلات لاپلاس و فوریه است. این شیوه برای حل معادله هدایت فوریه‌ای در حالت پایدار و گذرا در مسائل مختلف به‌کار گرفته شده است [۲۵-۲۲]. برای حل معادله هدایت فوریه‌ای در حالت گذرا، از تبدیل لاپلاس استفاده می‌شود. برای حل معادله هدایت گرمای هذلولوی نیز از این تبدیل می‌توان استفاده کرد [۹ و ۱۵]. در مقاله حاضر برای حل معادله (۱۸) به‌همراه شرایط اولیه (۱۹ و ۲۰) و نیز شرط مرزی (۲۲) به‌همراه شرط مرزی (۲۳) یا (۲۴) از تبدیل لاپلاس استفاده می‌شود. با کمک این تبدیل عبارت‌های مشتق نسبت به زمان حذف شده و معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی به معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌گردد. تبدیل لاپلاس دمای بی‌بعد به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L[\theta(\eta,\tau)]=\int_0^\infty\theta(\eta,\tau)e^{-s\tau}d\tau. \tag{۲۵}$$

با اعمال این تبدیل به معادله (۱۸) معادله زیر حاصل می‌شود:

$$L[\frac{\partial^2\theta}{\partial\eta^2}]+L[\frac{2}{\eta}\frac{\partial\theta}{\partial\eta}]=L[\frac{\partial\theta}{\partial\tau}]+Ve^2L[\frac{\partial^2\theta}{\partial\tau^2}]. \tag{۲۶}$$

تبدیل لاپلاس مشتق اول و دوم نسبت به زمان با کمک روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$L[\frac{\partial\theta}{\partial\tau}]=s\tilde{\theta}(\eta,s)-\theta(\eta,0), \tag{۲۷}$$

$$L[\frac{\partial^2\theta}{\partial\tau^2}]=s^2\tilde{\theta}(\eta,s)-s\theta(\eta,0)-\left.\frac{\partial\theta(\eta,\tau)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}. \tag{۲۸}$$

با استفاده از شرایط اولیه (۱۹ و ۲۰) روابط فوق به‌صورت زیر ساده می‌شوند:

$$L[\frac{\partial\theta}{\partial\tau}]=s\tilde{\theta}(\eta,s), \quad (۲۹)$$

$$L[\frac{\partial^2\theta}{\partial\tau^2}]=s^2\tilde{\theta}(\eta,s). \quad (۳۰)$$

تبدیل لاپلاس در اصل متغیر زمان را از مسئله حذف می‌کند و همان‌طور که دیده می‌شود، شرایط اولیه تنها در تعیین تبدیل لاپلاس مشتق جزئی مرتبه اول و دوم نسبت به زمان مؤثر هستند و در حل معادله نقشی به‌صورت مستقل ندارند. این تبدیل تأثیری بر روی مشتقات اول و دوم دما نسبت به مکان بی‌بعد ندارد و تنها دما را به حوزه لاپلاس منتقل می‌کند. در نتیجه با کمک روابط (۲۹ و ۳۰) معادله (۳۱) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{\partial^2\tilde{\theta}}{\partial\eta^2}+\frac{2}{\eta}\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial\eta}=s\tilde{\theta}(\eta,s)+Ve^2s^2\tilde{\theta}(\eta,s) \quad (۳۱)$$

با اعمال این تبدیل به معادله (۲۲)، شرایط مرزی در سطح خارجی جسم در حوزه لاپلاس به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial\tilde{\theta}(\eta,\tau)}{\partial\eta}\right|_{\eta=1} &=\frac{1}{\tau_p^2}[(1-\frac{Ve^2}{\tau_p})(\frac{\tau_p}{s\tau_p+1})^2+\\ &Ve^2\frac{\tau_p}{s\tau_p+1}]-N_c(1+Ve^2s)\tilde{\theta}(\eta,s)\\ &-N_r(1+Ve^2s)[4(\bar{\theta}+\frac{T_0}{T_r})^3(\tilde{\theta}(\eta,s)+\frac{T_0}{sT_r})\\ &-\frac{3}{s}(\bar{\theta}+\frac{T_0}{T_r})^3-\frac{1}{s}(\theta_\infty+\frac{T_0}{T_r})^4].\end{aligned} \quad (۳۲)$$

در محاسبات صورت گرفته، دمای اولیه کره برابر با دمای محیط درنظر گرفته شده است. نمودارهای توزیع دما نیز برای $\frac{T_0}{T_r}=0.1$ ارائه شده است. همچنین در سطح داخلی با توجه به معادلات (۲۳و۲۴)، شرایط مرزی در حوزه لاپلاس به‌شرح زیر می‌باشد:

$$\left.\frac{\partial\tilde{\theta}(\eta,s)}{\partial\eta}\right|_{\eta=\eta i}=0, \quad (۳۳)$$

$$\left.\frac{\partial\tilde{\theta}(\eta,s)}{\partial\eta}\right|_{\eta=0}=0. \quad (۳۴)$$

در نتیجه اعمال تبدیل لاپلاس، یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم با دو شرط مرزی در هر دو حالت کره توپر و کره توخالی حاصل می‌گردد. پاسخ این معادله با استفاده از دستور حل معادله دیفرانسیل معمولی در نرم‌افزارهای محاسبات نمادین ریاضی مانند MAPLE و MATHEMATICA به‌صورت تحلیلی به‌دست می‌آید که این جواب طولانی بوده و برای رعایت اختصار در اینجا ارائه نمی‌شود.

۴- محاسبه لاپلاس معکوس تابع پاسخ

برای محاسبه توزیع دما در کره می‌بایست تبدیل لاپلاس معکوس پاسخ به‌دست آمده در قسمت قبل را محاسبه کرد، اما این کار به‌روش تحلیلی ارائه شده در کتاب‌های معادلات دیفرانسیل مقدماتی و با استفاده از جداول تبدیل لاپلاس امکان‌پذیر نمی‌باشد. محاسبه لاپلاس معکوس به‌صورت تحلیلی و مستقیم با استفاده از قضیه برومویچ نیز به‌علت پیچیدگی انتگرال‌های حاصل شده، امکان‌پذیر نمی‌باشد. بدین‌علت از روش‌های تحلیلی- عددی برای تعیین لاپلاس معکوس استفاده می‌شود. محاسبه لاپلاس معکوس به شیوه عددی، یک مسئله به‌طور ذاتاً بدرفتار[۱] است. علت این موضوع، ضرب تابع نمایی زمان در تابعی که لاپلاس معکوس آن محاسبه می‌گردد، می‌باشد. با این وجود، شیوه‌های عددی مختلفی برای این منظور وجود دارد که هر کدام از آنها مزیت‌ها و محدودیت‌های خاص خود را دارند و برای محاسبه لاپلاس معکوس توابع خاصی مناسب هستند و اگر روش عددی با توجه به نوع تابع به‌درستی انتخاب نگردد، امکان واگرایی جواب وجود دارد. از جمله این روش‌ها می‌توان به روش گیور[۲] [۲۶]، روش تالبوت[۳] [۲۷]، روش لاپلاس معکوس سریع[۴] [۱۴]، روش ویکس[۵] [۲۸] و روش تقریب مجموع ریمان [۲۹] اشاره کرد.

در این مقاله از روش آخر برای محاسبه لاپلاس معکوس استفاده شده است. در این روش انتگرال حاصل از قضیه برومویچ به‌صورت عددی و با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}\theta_N(\eta,\tau)&=\frac{e^{\gamma\tau}}{\tau}[\frac{1}{2}\tilde{\theta}(\eta,\gamma)+\\ &\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{N}\tilde{\theta}(\eta,\gamma+\frac{in\pi}{\tau})(-1)^n],\end{aligned} \quad (۳۵)$$

که در این رابطه، $\tilde{\theta}$ لاپلاس دمای بی‌بعد بوده که از حل معادله (۳۱) به‌همراه شرایط مرزی آن حاصل شده است. عبارت Re به‌معنای قسمت حقیقی عبارت و مقدار بیشینه N برابر

1- Inherently Ill-Posed
2- Gaver
3- Talbot
4- Fast Laplace Inversion Technique (Flit)
5 - Weeks

۴×۱۰^۶ است. متغییر γ نیز با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

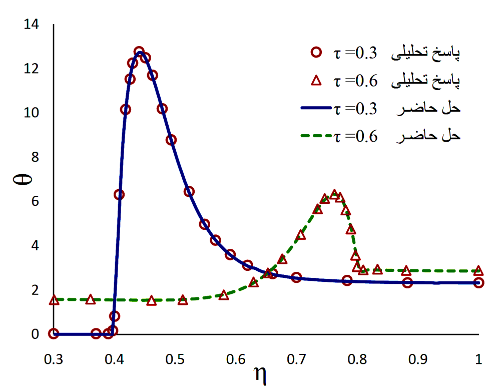
$$\gamma = \frac{4.7}{\tau}, \qquad (۳۶)$$

معیار همگرایی و نیز دقت سری پاسخ معادله، توسط رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\left|\frac{\theta_N - \theta_{N-1}}{\theta_{N-1}}\right| \le 10^{-6}. \qquad (۳۷)$$

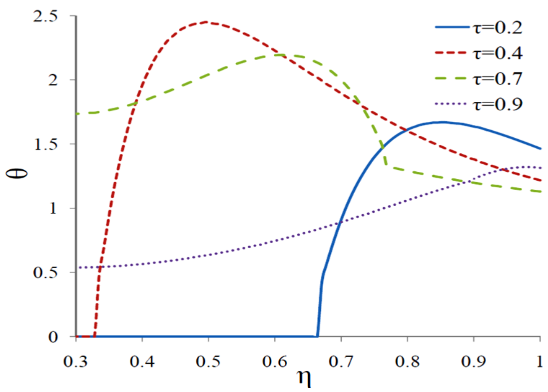
۵- تحلیل و بررسی نتایج

برای بررسی و اطمینان از صحت پاسخ‌های به‌دست آمده توسط این روش، نتایج حاصل با پاسخ تحلیلی موجود در حالات ساده‌تر مقایسه شده است. در مرجع [۱۲] معادله هدایت غیرفوریه‌ای در یک کره توخالی تحت تابش لیزر Q-S و بدون درنظر گرفتن انتقال حرارت از کره به‌محیط اطراف توسط سازوکارهای جابه‌جایی و تشعشع و با کمک روش جداسازی متغیرها و قضیه انتگرال دوهامل حل شده است. در شکل **۴** توزیع شعاعی دما با فرض N_r=N_c=۰ برای Ve=۰/۵، τ_p= ۰/۰۲ و τ =۰/۳ و τ =۰/۶ ارائه شده و با نتایج موجود در مرجع مذکور مقایسه شده است. همان‌طور که در شکل مشهود است، تطابق خوبی بین نتایج روش تحلیلی و روش حاضر وجود دارد. کلیه نمودارهای توزیع دما در کره توخالی برای شعاع داخلی η_i =۰/۳ ارائه شده است.

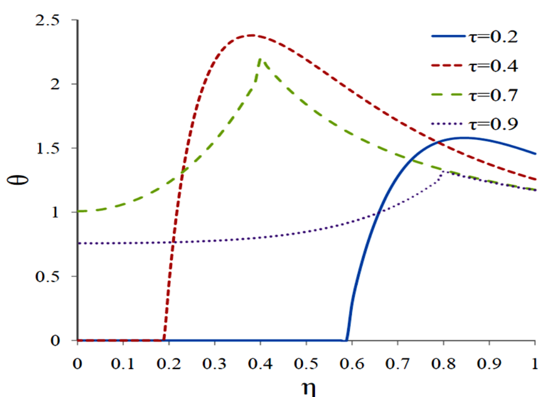


شکل (۴): توزیع دما در کره توخالی با شعاع داخلی ۰/۳ و مقایسه پاسخ تحلیلی و حل حاضر.

شکل‌های **۵** و **۶** توزیع دمای بدون بعد را در زمان‌های مختلف به‌عنوان تابعی از موقعیت شعاعی در کره توخالی و توپر نشان می‌دهد. در شکل **۵** توزیع دمای بدون بعد در کره توخالی برای N_r=۰/۱، N_c=۰/۱، Ve=۰/۶ و τ_p=۰/۱ و در شکل **۶** توزیع دمای بدون بعد در کره توپر برای N_r=۰/۱ ، N_c=۰/۱، Ve=۰/۵ و τ_p=۰/۱ ارائه شده است.



شکل (۵): توزیع دما درکره توخالی در زمان‌های مختلف.

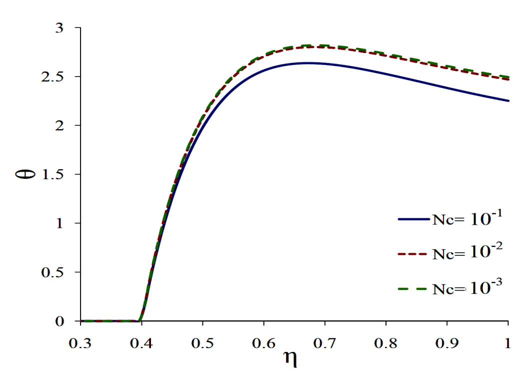


شکل (۶): توزیع دما در کره توپر در زمان‌های مختلف.

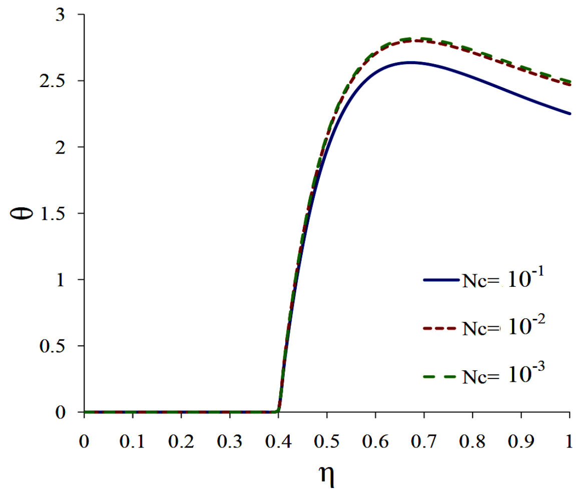
در شکل **۵** با مقایسه نمودارهای مختلف، حرکت موج حرارتی ناشی از اعمال لیزر بر روی سطح جسم در کره توخالی به‌خوبی مشخص می‌شود. با گذشت زمان، این موج به سمت سطح داخلی کره حرکت می‌کند و حرارت درون کره منتشر می‌شود (نمودارهای τ = ۰/۲ و τ =۰/۴) و پس از آن به‌علت عایق بودن سطح داخلی کره این موج پس از رسیدن به این سطح، بازگشت پیدا می کند. با حرکت موج درون کره و انتشار گرما، این انتظار وجود دارد که دامنه موج کاهش یابد، اما به‌علت محدب بودن سطح عمود بر جبهه موج، میزان ظرفیت حرارتی حجمی کاهش یافته و با وجود پخش گرما در جسم، دامنه موج افزایش می‌یابد. در موج برگشتی این پدیده به‌صورت معکوس رخ می‌دهد و به‌علت مقعر بودن سطح، کاهش دامنه موج به‌علت پخش حرارت در درون جسم، تشدید می‌شود (نمودارهای τ =۰/۷ و τ =۰/۹).

در شکل **۶** نیز اصول حرکت موج حرارتی مشابه حالت فوق است و در موج رفت (نمودارهای نمودارهای τ = ۰/۲ و τ =۰/۴) افزایش دامنه موج حرارتی و در موج برگشتی از مرکز کره (نمودارهای τ =۰/۷ و τ =۰/۹) کاهش دامنه موج حرارتی مشاهده می‌گردد. نکته قابل توجه در مقایسه بین شکل‌های **۵** و **۶** تغییر در شکل موج برگشتی از مرکز کره می‌باشد که از حالت منحنی خارج شده و به‌صورت نوک تیز درآمده است. علت این تغییر شکل برخورد منحنی با مرکز کره می‌باشد که ظرفیت حرارتی حجمی بسیار پایینی دارد. با رسیدن موج حرارتی به مرکز، تمامی انرژی موجود در این نقطه ذخیره شده و در نتیجه دما در آن بسیار بالا می‌رود. تمامی این انرژی نیز به‌علت پایین بودن ظرفیت حرارتی حجمی به‌صورت ناگهانی آزاد شده و در نهایت شکل موج برگشتی تغییر می‌کند.

اثر میزان انتقال حرارت جابه‌جایی بر روی دمای بی‌بعد در شکل‌های **۷** و **۸** نشان داده شده است که در آن، توزیع دما در کره توپر و توخالی برای مقادیر مختلف نسبت جابه‌جایی به هدایت، به‌ازای مقادیر $N_r=۱۰^{-۵}$، $Ve=۰/۵$، τ =۰/۳ و $\tau_p=۰/۱$ رسم شده است. در مقایسه نمودارهای توزیع دما مشاهده می‌شود با بالا رفتن نسبت جابه‌جایی به هدایت که به معنای افزایش اثر جابه‌جایی است، جسم سریع‌تر خنک شده و دما در ناحیه پس از جبهه موج کاهش می‌یابد. همچنین با توجه به اختلاف اندک نمودارهای توزیع دما برای $N_c=۱۰^{-۲}$ و $N_c=۱۰^{-۳}$، در صورتی که نسبت جابه‌جایی به هدایت کوچک‌تر از $۱۰^{-۳}$ باشد، می‌توان از اثر جابه‌جایی بر روی توزیع دما صرف نظر کرد.

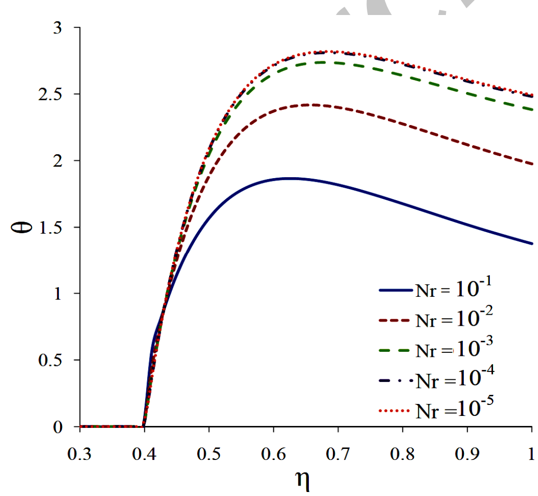


شکل (۷): توزیع دما درکره توخالی برای مقادیر مختلف نسبت جابه‌جایی به هدایت.

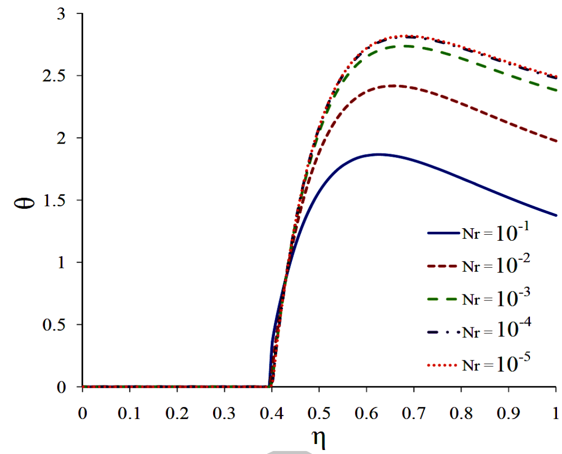


شکل (۸): توزیع دما درکره توپر برای مقادیر مختلف نسبت جابه‌جایی به هدایت.

شکل‌های **۹** و **۱۰** توزیع دما را با فرض متغیر بودن نسبت تشعشع به هدایت و ثابت بودن کمیت‌های دیگر در کره توپر و توخالی نشان می‌دهد. نمودارهای توزیع دما برای $N_c=۱۰^{-۳}$، $Ve=۰/۵$، τ =۰/۳ و $\tau_p=۰/۱$ رسم شده است. زمانی که قدرت انتقال حرارت تشعشعی بالاتر می‌رود، مانند حالت قبل دما در ناحیه پس از جبهه موج کاهش می‌یابد. در این شکل‌ها نمودار توزیع دما برای $N_r=۱۰^{-۴}$ و $N_r=۱۰^{-۵}$ اختلاف اندکی دارند و درصورتی که نسبت تشعشع به هدایت کوچک‌تر از $۱۰^{-۵}$ باشد، می‌توان از اثر تشعشع بر روی توزیع دما چشم‌پوشی کرد.



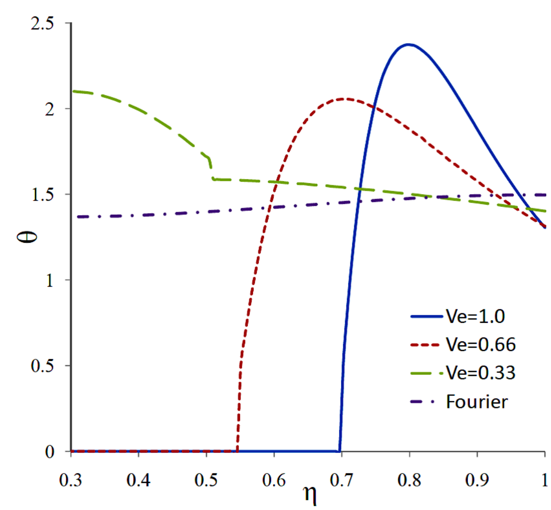
شکل (۹): توزیع دما در کره توخالی برای مقادیر مختلف نسبت تشعشع به هدایت.



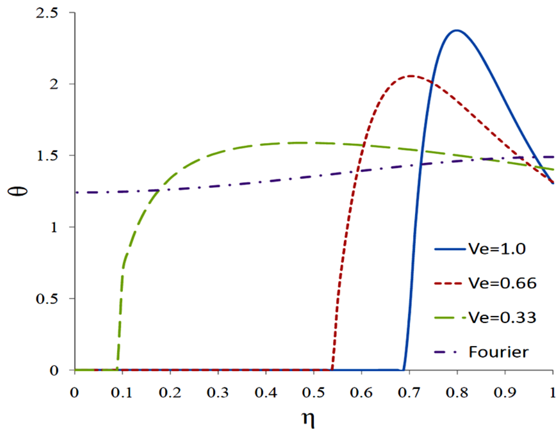
شکل (۱۰): توزیع دما در کره توپر برای مقادیر مختلف نسبت تشعشع به هدایت.

با مقایسه شکل‌های **۱۰-۷** دریافته می‌شود که در شرایط یکسان، نسبت تشعشع به هدایت بر روی توزیع دما، تأثیر بیشتری از نسبت جابه‌جایی به هدایت دارد. همچنین مقدار حدی نسبت تشعشع به هدایت برابر یکصدم مقدار حدی نسبت جابه‌جایی به هدایت است و برابر با 10^{-5} می‌باشد که دلیل هر دو موضوع، وجود توان چهارم دما در عبارت مربوط به تشعشع است.

در شکل‌های **۱۱** و **۱۲** توزیع دما در کره توپر و توخالی برای مقادیر مختلف عدد ورنوت برای مقادیر ثابت N_c=۰/۱، N_r=۰/۱، τ =۰/۳ و τ_p=۰/۱ نشان داده شده است.



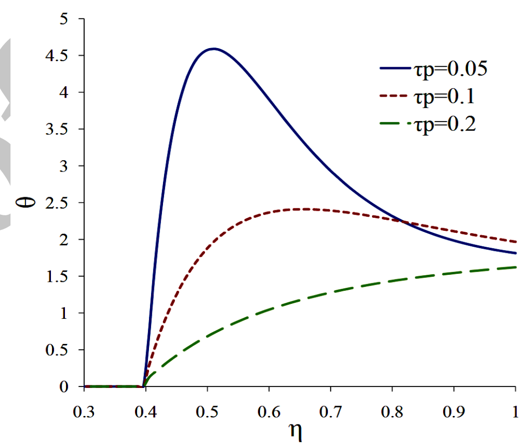
شکل (۱۱): توزیع دما در کره توخالی برای مقادیر مختلف عدد ورنوت.



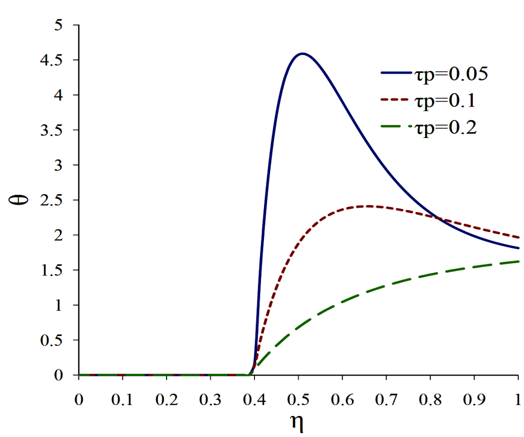
شکل (۱۲): توزیع دما در کره توپر برای مقادیر مختلف عدد ورنوت.

عدد ورنوت با زمان آسایش رابطه مستقیم دارد. هر اندازه این عدد و در نتیجه زمان آسایش بالاتر باشد، اثرات غیرفوریه‌ای در توزیع حرارت و دامنه موج حرارتی بیشتر است. این موضوع درشکل‌های مذکور به‌خوبی مشاهده می‌شود. در این شکل‌ها توزیع دما در حالت فوریه‌ای و هذلولوی نیز با یکدیگر مقایسه شده است. در حالت فوریه‌ای موج حرارتی درون جسم وجود ندارد و توزیع دما در کره تقریباً به‌صورت خطی می‌باشد. برای به‌دست آوردن دما در حالت فوریه‌ای، عدد ورنوت در معادلات (۳۱ و ۳۲) برابر با صفر قرار داده می‌شود و در نتیجه معادله انتقال گرمای هذلولوی به معادله انتقال گرمای فوریه‌ای تبدیل می‌شود. نکته قابل توجه دیگر در این نمودارها تأثیر عدد ورنوت بر سرعت انتشار موج حرارتی درون جسم است. بر طبق معادله (۷)، سرعت انتشار موج حرارتی با زمان آسایش نسبت معکوس دارد و بنابراین با کاهش عدد ورنوت و در نتیجه کاهش زمان آسایش، سرعت انتشار موج حرارتی درون جسم بالا می‌رود. این موضوع در مقایسه نمودارهای توزیع دما برای مقادیر مختلف عدد ورنوت به‌وضوح دیده می‌شود که در زمان یکسان با کاهش عدد ورنوت، فاصله جبهه موج از سطح خارجی کره بیشتر شده که نشان دهنده افزایش سرعت موج حرارتی است. نمودار توزیع دما برای Ve=0.33 در شکل‌های **۱۱** و **۱۲** تفاوت قابل توجهی با یکدیگر دارند. علت این تفاوت کوتاه‌تر بودن مسیر حرکت موج حرارتی در کره توخالی است که در نتیجه، این موج زودتر به سطح داخلی کره توخالی رسیده و منعکس می‌شود، در حالی که در همان زمان موج حرارتی هنوز به مرکز کره توپر نرسیده است. بنابراین،

نمودار توزیع دما در کره توپر و توخالی اختلاف قابل توجهی با یکدیگر پیدا می‌کنند. تأثیر مدت زمان تابش لیزر بر روی توزیع دما در شکل‌های **۱۳** و **۱۴** مورد بررسی قرار گرفته است. مدت زمان تابش لیزر با متغیر τp بیان می‌شود. با کوتاه‌تر شدن این مدت، میزان انرژی وارده در لحظات اولیه بالاتر رفته و در نتیجه دامنه موج حرارتی افزایش پیدا می‌کند. از سوی دیگر با توجه به معادله (۲۲)، شار حرارتی با کاهش τp، سریع‌تر به مقدار صفر می‌رسد. بنابراین، با کاهش مدت زمان تابش لیزر، شار حرارتی دربازه زمانی کوتاه‌تری بر سطح خارجی اعمال شده و در نتیجه تغییرات دما در هر دو قسمت قبل و بعد از قله موج بیشتر می‌شود. شکل‌های **۱۳** و **۱۴** برای مقادیر ثابت $Nc=۰/۰۱$، $N_r=۰/۰۱$، $\tau=۰/۳$ و $Ve=۰/۵$ ترسیم شده‌اند.



شکل (۱۳): توزیع دما در کره توخالی برای مقادیر مختلف مدت زمان تابش لیزر.



شکل (۱۴): توزیع دما در کره توپر برای مقادیر مختلف مدت زمان تابش لیزر.

۶- نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر، معادله انتقال گرمای غیرفوریه‌ای در یک کره با شرایط مرزی غیرخطی حل گردید و توزیع دمای بی‌بعد در حالات مختلف به‌دست آمد. در توزیع دما، حرکت موج گرمایی با سرعت محدود مشاهده شد. تأثیر متغیرهای مختلف مانند زمان آسایش، مدت زمان تابش لیزر، نسبت جابه‌جایی به هدایت و نسبت تشعشع به هدایت بر روی توزیع دما مورد بررسی قرار گرفت. با افزایش زمان آسایش که به معنای افزایش اثرات غیرفوریه‌ای است، دامنه موج و سرعت انتشار موج حرارتی درون جسم افزایش یافت. همچنین توزیع دما در حالت فوریه‌ای و هذلولوی نیز با یکدیگر مقایسه شد. در حالت فوریه‌ای موج حرارتی درون کره مشاهده نشد. با افزایش نسبت جابه‌جایی به هدایت و نیز نسبت تشعشع به هدایت، انتقال گرما از سطح کره بیشتر شد و دما درون کره سریع‌تر کاهش یافت.

۷- مراجع

1. Cattaneo, C. “Sulla Conduzione De Calore”, Atti Seminar. Mat. Fis. Univ. Modena, Vol. 3, pp. 83-101, 1949.
2. Vernotte, P. “Les Paradoxes de la Theorie Continue de L’equation de la Chaleur”, Compute Rendus, Vol. 246, pp. 3145–3155, 1958.
3. Wang, L., Zhou, X., and Wei, X. “Heat Conduction: Mathematical Models and Analytical Solutions”, Springer, Berlin, 2008.
4. Chua, C.K., Leong, K.F., and Lim, C.S. “Rapid Prototyping: Principles and Applications, 2nd Edition”, World Sci., Singapore, 2003.
5. Liou, F.W. “Rapid Prototyping and Engineering Applications: A Toolbox for Prototype Development”, CRC Press, New York, 2008.
6. Zamani, J. and Partovipour, H. “Rapid Prototyping Technology in Mechanical Engineering”, K.N. Toosi Univ. Press, Tehran, 2009 (In Persian).
7. Mirahmadi, A., Saedodin, S., and Shanjani, Y. “Temperature Distribution in Binding Process of Plasma Aided Rapid Prototyping Using Integral Transform”, J. Aerospace Mechanics, Vol. 2, No. 1, pp. 45-54, 2006. (In Persian).
8. Ghoreishi, M., and Naderifard, A. “Thermal and Mechanical Modeling of Electro Discharge Machining Process Using Finite Element Method (FEM)”, J. Aerospace Mechanics, Vol. 8, No. 4, pp. 1-11, 2012. (In Persian).
9. Jiang, F. “Solution and Analysis of Hyperbolic Heat Propagation in Hollow Spherical Objects”, J. Heat Mass Transfer, Vol. 42, No. 12, pp. 1083-1091, 2006.

10. Lewandowska, M. "Hyperbolic Heat Conduction in the Semi-Infinite Body with Time Dependent Laser Heat Source", J. Heat and Mass Transfer, Vol. 37, No. 4-5, pp. 333-342, 2001.
11. Dai, W., Shen, L., Nassar, R. and Zhu, T. "A Stable and Convergent Three-Level Finite Difference Scheme for Solving a Dual-Phase-Lagging Heat Transport Equation in Spherical Coordinates", Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 47, No. 8-9, pp. 1817-1825, 2004
12. Shirmohammadi, R. "Temperature Ttransients in Spherical Medium Irradiated by Laser Pulse", Int. Communications in Heat and Mass Transfer, Vol. 35, No. 8, pp. 1017-1023, 2008
13. Shirmohammadi, R. and Moosaie, A. "Non-Fourier Heat Conduction in a Hollow Sphere with Periodic Surface Heat Flux", Int. Communications in Heat and Mass Transfer, Vol. 36, No. 8, pp. 827-833, 2009.
14. Babaei, M.H. and Chen, Z.T. "Hyperbolic Heat Conduction in a Functionally Graded Hollow Sphere", Int. J. Thermophys, Vol. 29, No. 4, pp. 1457-1469, 2008.
15. Chen, T.M. and Chen, C.C. "Numerical Solution for the Hyperbolic Heat Conduction Problems in the Radial-Spherical Coordinate System Using a Hybrid Green's Function Method", Int. J. Thermal Sci., Vol. 49, No. 7, pp. 1193-1196, 2010.
16. Hoffmann, K.A. and Chiang S.T. "Computational Fluid Dynamics", Fourth Ed., Eng. Edu. System, Wichita, 2000.
17. Tannehill, J.C., Anderson, D.A., and Pletcher, R.H. "Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer", Second Ed., Taylor & Francis, Washington, 1997.
18. Liu, K.Ch., Lin, Ch.N., and Wang, J.Sh. "Numerical Solutions for the Hyperbolic Heat Conduction Problems in a Layered Solid Cylinder with Radiation Surface", App. Mathematics and Computation, Vol. 164, No. 3, pp.805-820, 2005.
19. Jiji, L.M. "Heat Conduction", Third Ed., Springer, Berlin, 2009.
20. Mirahmadi, A., Saedodin, S., and Shanjani, Y. "Numerical Heat Transfer Modeling in Coated Powder as Raw Material of Powder-Based Rapid Prototyping Subjected to Plasma Arc", Numerical Heat Transfer, Part A, Vol. 51, No. 6, pp. 593-613, 2007.
21. Mirahmadi, A., Saedodin, S., and Shanjani, Y. "Feasibility Study of High Frequency Plasma Aided Rapid Prototyping", Int. J. Machine Tools & Manufacture, Vol. 47, No. 5, pp. 722-728, 2007.
22. Arpaci, V.S. "Conduction Heat Transfer", Addison-Wesley, Massachusetts, 1966.
23. Carslaw, H.S. and Jaeger, J.C. "Conduction of Heat in Solids", Second Ed., Oxford Univ. Press, London, 1959.
24. Kakac, K. and Yener, Y. "Heat Conduction", 3rd Ed., Taylor & Francis, Washington, 1993.
25. Ozisik, M.N. "Heat Conduction", Second Ed., John Wiley & Sons, New York, 1993.
26. Valko, P.P. and Abate, J. "Comparison of Sequence Accelerators for the Gaver Method of Numerical Laplace Transform Inversion", Int. J. Computers and Mathematics with Applications, Vol. 48, No. 3-4, pp. 629-636, 2004.
27. Abate, J. and Valko, P.P. "Multi-Precision Laplace Transform Inversion", Int. J. for Numerical Methods in Eng., Vol. 60, No. 5, pp. 979-993, 2004.
28. Cohen, A.M. "Numerical Methods for Laplace Transform Inversion", Springer, New York, 2007.
29. Tsai, C.S., Lin, Y.C., and Hung, C.I, "A Study on the Non-Fourier Effects in Spherical Media Due to Sudden Temperature Changes on the Surfaces", Heat Mass Transfer, Vol. 41, No. 8, pp.709-716, 2005.