تحلیل دینامیکی استوانه جدار ضخیم با طول بلند تحت بارگذاری فشار مکانیکی گذرای متحرک

کرامت ملک زاده فرد[۱] و سیدمحمد زمانی ثانی[۲]
مجتمع دانشگاهی هوافضا
دانشگاه صنعتی مالک اشتر

مهدی تاجداری[۳]
دانشکده مهندسی مکانیک
دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات اراک

(تاریخ دریافت: ۹۲/۰۸/۲۹؛ تاریخ پذیرش: ۹۲/۱۲/۰۸)

چکیده

در مقاله حاضر پاسخ دینامیکی استوانه ضخیم تحت بارگذاری فشار مکانیکی گذرای متحرک مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرد. برای این منظور ابتدا معادلات حرکت پوسته به‌کمک اصل همیلتون و تئوری مرتبه اول میرسکی- هرمان به‌دست می‌آید. اثر اینرسی دورانی و تغییر شکل‌های برش عرضی در معادله‌های حاکم بر سامانه دینامیکی درنظر گرفته شده است. معادله‌های حرکت پاره‌ای به‌دست آمده با تبدیل به معادله‌های دیفرانسیل معمولی حل گردیده است. با این روش، مسئله به‌صورت تحلیلی تحت انواع بارگذاری‌های متحرک مکانیکی فشاری قابل حل است. همچنین مسئله موردنظر توسط روش اجزاء محدود با استفاده از نرم‌افزار ABAQUS مدل‌سازی شده و نتایج حل تحلیلی صحه‌گذاری شده است. مقایسه نتایج روش تحلیلی با روش اجزاء محدود نشان می‌دهد که تئوری استفاده شده برای محاسبه پاسخ دینامیکی استوانه ضخیم موفق بوده است. همچنین نتایج قابل قبولی برای پاسخ دینامیکی پوسته استوانه‌ای جدار ضخیم با طول بلند در موقعیت‌های مختلف بارگذاری دینامیکی به‌دست آمده است.

واژه‌های کلیدی: استوانه جدار ضخیم، پاسخ دینامیکی، بارگذاری متحرک، تئوری مرتبه اولمیرسکی/ هرمان، روش اجزای محدود

Dynamic Analysis of the Long Thick Cylindrical Shell Subjected to Mechanical Transient Moving Pressure

K. MalekzadehFard and S.M. ZamaniSani
Aerospace Engineering Department
MalekAshtar University

M. Tajdari
Mechanical Engineering Department
Eslamic Azad UniversityArak

(Received: 20 November, 2013; Accepted: 27 February, 2014)

ABSTRACT

In this paper, dynamic response of the thick cylindrical shell subjected to mechanical moving pressure has been investigated. First, the equations of motion have been derived using the Hamilton’s principle and the first order Mirsky-Hermann theory.The effects of transverse shear deformation and rotatory inertia were included in the governing equations of the dynamic system. Theobtainedpartial differential equationshave been solved using the converted ordinary differential equations. With this method, the problem can be solved for various mechanical moving pressure loads.The Results of the present analytical method have been verified by comparing with finiteelementresults using ABAQUS Software. The Comparison of the results with the finite element method shows that the first order Mirsky-Hermann theory can predict the dynamic response of the thick cylindrical shell successfully. Also, acceptable results were obtained for dynamic response of long thick cylindrical shell in different dynamic loading position.

Keywords: Thick Cylindrical Shell, Dynamic Response, Finite Element Method, First Order Mirsky-Hermann Theory, Moving Load

۱- دانشیار (نویسنده پاسخگو): k.malekzadeh@gmail.com
۲- کارشناس ارشد: smzamanis@yahoo.com
۳- استاد: m.tajdari@srbiau.ac.ir

۱- مقدمه

پوسته، سازه‌ای خمشی و انحنادار است که بار عمود بر سطح خود را با ایجاد نیروهای صفحه‌ای تحمل می‌کند. بالا بودن ظرفیت تحمل بار در پوسته‌ها مطلوبیت ویژه‌ای به این سازه‌ها داده است، اما پیچیدگی تحلیل آنها نیز قابل توجه است به‌طوری که تاکنون هیچ حل دقیقی برای تحلیل این سازه‌ها تحت بارگذاری عمومی ارائه نشده و حل‌های تقریبی- تحلیلی موجود، تنها براساس فرضیاتی خاص است که تئوری پوسته‌ها را تشکیل می‌دهند. در تئوری پوسته‌ها، جابه‌جایی پوسته با یک چندجمله‌ای برحسب z تقریب زده می‌شود که z فاصله نقطه مورد نظر در مقطع پوسته تا صفحه میانی است. در پوسته‌های ضخیم، نسبت ضخامت پوسته (h) به شعاع سطح میانی (R) بیشتر از ۰/۰۵ می‌باشد [۱].

تئوری این دسته از پوسته‌ها برمبنای تئوری الاستیسیته خطی بنا شده است. به‌طورکلی به‌دلیل کوچک نبودن ضخامت نسبت به ابعاد دیگر، نمی‌توان از تئوری‌های پوسته‌های نازک استفاده نمود و باید از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی‌استفاده کرد ولی به‌دلیل پیچیدگی تحلیل، با فرضیاتی می‌توان از تئوری الاستیسیته دوبعدی یا تئوری تغییر شکل برشی برای تحلیل استوانه‌های ضخیم بهره گرفت.

میرسکی و هرمان[1] با به‌کارگیری تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، پاسخ ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای ضخیم را ارائه کردند [۲]. در این تئوری، جابه‌جایی هر نقطه از پوسته با جابه‌جایی سطح میانی توصیف نمی‌شود بلکه با مجموع جابه‌جایی سطح میانی و جابه‌جایی آن نقطه نسبت به سطح میانی بیان می‌شود. در تئوری‌های خمشی و غشایی، تأکید بر جابه‌جایی صفحه میانی بوده ولی در تئوری تغییر شکل برشی، علاوه بر جابه‌جایی صفحه میانی، شیب المان پوسته را نیز به علت ضخیم بودن جدار درنظر می‌گیرند.

زمینه‌های تحقیقاتی مرتبط با بارگذاری متحرک عبارت است از: خطوط راه آهن (نسبت به حرکت واگن)، لوله‌های توپ و تفنگ در حین شلیک گلوله، در خودروها در اثر حرکت و سازه‌های تیر به بارهای متحرک. اولین تئوری جامع برای پاسخ الاستیک لوله به بار متحرک توسط تانگ و ریسمن[2] در سال ۱۹۶۵ ارائه شد. تانگ مدلی برای پیش‌بینی رفتار پوسته جدارنازک به بارگذاری فشاری داخلی ارائه داد. وی در این مدل از تئوری پوسته جدارنازک استفاده کرده است و بارگذاری فشاری را یکنواخت و متحرک درنظر گرفت [۳].

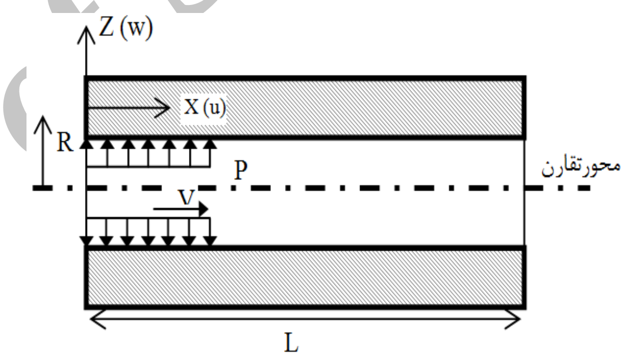
مطالعات تانگ مبنای بسیاری از مطالعاتی است که بعد از وی انجام شده است. وی با فرض طول پوسته بی‌نهایت جواب مسئله را به‌صورت حل تحلیلی به‌دست آورد. سپس ریسمن با استفاده از کار انجام شده توسط تانگ، مدلی برای توضیح پاسخ سازه‌ای پوسته‌های جدارنازک تحت پیش‌تنش ارائه داد [۴]. سیمکینز[3] پاسخ پوسته استوانه‌ای جدار ضخیم را در اثر بارگذاری متحرک ثابت در لوله‌های طویل به‌دست آورد [۵]. در سال ۱۹۹۴ موکوید[4] مدلی را براساس تئوری الاستیسیته برای پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم ارائه کرد. وی با فرض حالت متقارن محوری، پاسخ دینامیکی پوسته استوانه‌ای به بارگذاری ضربه‌ای را با استفاده از روش تفاضل محدود به‌دست آورد [۶]. بلتمن[5] پاسخ سازه یک لوله به انفجار گازهای داخلی را در سال ۲۰۰۲ بررسی کرد. وی برای اولین بار بارگذاری را به‌صورت انفجاری درنظر گرفت. در این پژوهش بر اثر انفجار مواد منفجره در یک سر لوله بار فشاری تا انتهای لوله به حرکت درمی‌آید. همچنین معادلات سازه را براساس تئوری پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک بیان کرد که این معادلات شامل اثرات برش عرضی و اینرسی دورانی علاوه بر اثرات خمش و نیرویی می‌باشد. با استفاده از ساده‌سازی‌های انجام داده دستگاه معادلات سه معادله سه مجهول را به یک معادله تبدیل و با استفاده از روش حل معادلات دیفرانسیل معمولی معادله را به‌صورت تحلیلی حل کرد [۷]. مظاهری مدل حالت گذرا با طول محدود با درنظر گرفتن اثر برش عرضی و اینرسی دورانی را در سال ۲۰۰۶ معرفی کرد [۸]. در سال ۲۰۰۶، شفرد[6] [۹] در ادامه کار مظاهری مدل‌های مختلف را با نتایج تجربی به‌دست آمده مقایسه کرد. در سال ۲۰۰۹ بخشنده [۱۰] اثر نسبت ضخامت بر پاسخ دینامیکی پوسته را ارائه و حل آن را با استفاده از روش المان محدود ارائه کرد. وی پوسته استوانه‌ای را جدار ضخیم در نظر گرفته و نتایج حاصل را با در نظر گرفتن بارگذاری متحرک به‌دست آورد. میرزایی در سال ۲۰۱۲ مجموعه‌ای از روش‌های تحلیلی را برای رفتار ارتعاشی استوانه‌های جدارنازک

1- Mirsky and Hermann
2-Tang and Reismann
3- Simkins
4- Mukoid
5- Beltman
6- Shefered

تحت فشار متحرک داخلی که به‌صورت متوالی اعمال می‌شود، ارائه نمود [۱۱]. در این مقاله، برای اولین بار به‌کمک تئوری مرتبه اول میرسکی- هرمان، تحلیل دینامیکی استوانه جدارضخیم تحت فشار داخلی متحرک انجام شده است. در این تحلیل به‌طور توأم اثرات کرنش‌ها، اینرسی و تغییر شکل‌های برشی و نرمال عرضی درنظر گرفته شده است. جهت درنظر گرفتن اثرات شعاع و ضخامت پوسته، اثرات ذوزنقه‌ای z/R در معادلات لحاظ شده است. هاشمی و همکاران [۱۲] طی پژوهشی ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای ضخیم را در مواد هوشمند بررسی نمودند.

۲- معادلات حرکت

مبدأسامانه مختصات بر لایه میانی در انتهای استوانه واقع شده است. پوسته استوانه‌ای با شعاع متوسط R، ضخامت h و طول L در شکل **۱** نشان داده شده است.



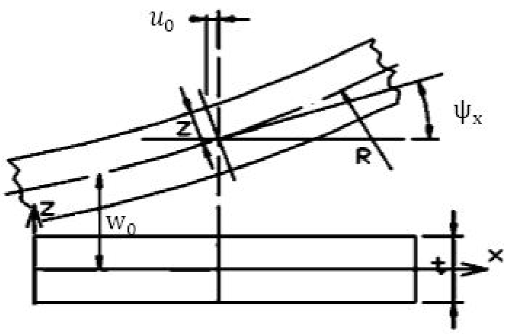
شکل (۱): هندسه پوسته (حالت متقارن محوری).

فرضیه‌های استفاده شده برای به‌دست آوردن معادلات حرکت عبارت است از: الف) هندسه و بارگذاری متقارن است، ب) پوسته ایزوتروپیک و همگن بوده و خواص مکانیکی آن ثابت است، ج) جابه‌جایی‌های پوسته کوچک بوده و تحلیل در ناحیه الاستیک انجام می‌شود، د) رابطه تنش-کرنش، تابع قانون هوک است و ه) از اثر تنش اولیه صرف‌نظر شده است.

در تئوری مرتبه اول میرسکی- هرمان، همانند تئوری مرتبه اول، دو فرض زیر معتبر است:

۱) خطوط مستقیم عمود بر صفحه میانی قبل از تغییر شکل، بعد از تغییر شکل هم مستقیم باقی می‌مانند و

۲) صفحات عمود بر سطح میانی بعد از تغییر شکل دیگر بر سطح میانی عمود باقی نمی‌مانند (شکل ۲).



شکل (۲): نمودار خیز پوسته در صفحه x-z [۲].

در این تئوری برخلاف فرضیه‌های تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی خطوط مستقیم عمود بر صفحه میانی تغییر طول می‌دهند. با فرض حالت متقارن محوری، مؤلفه‌های کرنش نرمال $\epsilon_x, \epsilon_\theta, \epsilon_z$ و کرنش برشی ϵ_{xz} (کرنش برشی $\epsilon_{\theta z}$ و $\epsilon_{x\theta}$ با فرض تقارن محوری صفر در نظر گرفته می‌شوند) وجود دارند. همچنین مؤلفه‌های جابه‌جایی در راستای x و z (به‌علت فرض تقارن محوری راستای θ درنظر گرفته شده است) به‌صورت توابعی خطی نسبت به z درنظر گرفته می‌شود. با این توضیح میدان جابه‌جایی به‌صورت زیر نوشته می‌شود [۲]:

$$\begin{aligned} u(x,z) &= u_0(x,t) + z\psi_x(x,t) \\ w(x,z) &= w_0(x,t) + z\,\psi_z(x,t), \end{aligned} \tag{۱}$$

که در آن، u جابه‌جایی در راستای x، u_0 جابه‌جایی سطح میانی پوسته، ψ_x زاویه چرخش جسم در صفحه x-z، w جابه‌جایی در راستای z، w_0 جابه‌جایی سطح میانی پوسته، ψ_z زاویه چرخش جسم در صفحه عمود بر محور استوانه و z فاصله از سطح میانی پوسته در راستای محور z می‌باشد. روابط کرنش- جابه‌جایی به‌صورت زیر است [۱۳]:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \partial_x u \\ \epsilon_\theta &= w/(R+z) \\ \epsilon_z &= \partial_z w \\ \epsilon_{xz} &= \partial_z u + \partial_x w, \end{aligned} \tag{۲}$$

در روابط فوق، ϵ کرنش بوده که با جایگذاری روابط (۱) در روابط (۲)، روابط کرنش- جابه‌جایی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \partial_x u_0 + z\,\partial_x\psi_x \\ \epsilon_\theta &= \frac{w_0+z\psi_z}{R+z} \\ \epsilon_z &= \psi_z \\ \epsilon_{xz} &= \psi_x + \partial_x w_0 + z\,\partial_x\psi_z. \end{aligned} \tag{۳}$$

روابط ساختاری (روابط تنش-کرنش) برای مواد ایزوتروپیک همگن طبق قانون هوک عبارتند از [۱۳]:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda(\epsilon_x + \epsilon_\theta + \epsilon_z) + 2\mu\epsilon_x \\ \sigma_{\theta\theta} &= \lambda(\epsilon_x + \epsilon_\theta + \epsilon_z) + 2\mu\epsilon_\theta \\ \sigma_{zz} &= \lambda(\epsilon_x + \epsilon_\theta + \epsilon_z) + 2\mu\epsilon_z \\ \sigma_{xz} &= \mu\epsilon_{xz}, \end{aligned} \qquad (۴)$$

در این روابط، σ تنش، μ مدول برشی (مدول صلبیت) و λ ثابت الاستیک لامه بوده و از روابط (۳) به‌دست می‌آیند. منتجه‌های تنش برای استوانه‌های ضخیم به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \{N_{xx}, N_{zz}\} &= \int_{-h/2}^{h/2}\{\sigma_{xx}, \sigma_{zz}\}.(1 + z/R).dz \\ N_{\theta\theta} &= \int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{\theta\theta}\, dz \\ \{M_{xx}, M_{xz}\} &= \int_{-h/2}^{h/2}\{\sigma_{xx}, \sigma_{xz}\}.(1 + z/R).z.dz \\ M_{\theta\theta} &= \int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{\theta\theta}\, z\, dz \\ Q_x &= k\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{xz}\,(1 + z/R)\,dz, \end{aligned} \qquad (۵)$$

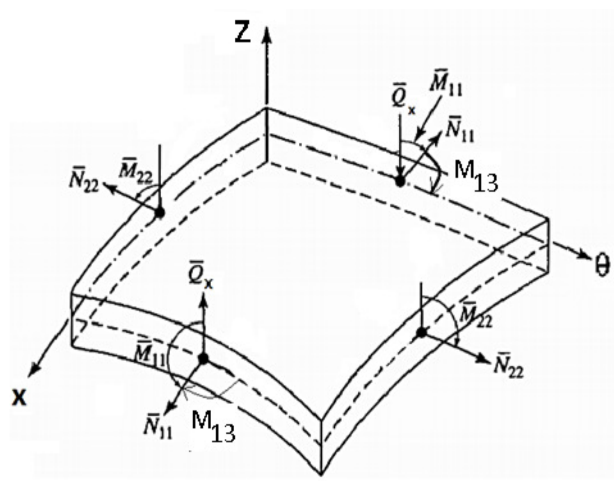
که در آن، N_{ij} نیروها، M_{ij} ممان‌ها و Q_i نیروهای برشی در واحد طول می‌باشند. حال با جایگذاری روابط تنش- جابه‌جایی در روابط (۵) منتجه‌های تنش به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} N_{xx} &= Ah(\partial_x u_0 + \omega\,\partial_x\psi_x) + \lambda h\left(\psi_z + \frac{w_0}{R}\right) \\ N_{\theta\theta} &= A(\sigma w_0 + \beta\psi_z) + \lambda h(\partial_x u_0 + \psi_z) \\ N_{zz} &= Ah\psi_z + \lambda h\left(\omega\partial_x\psi_x + \partial_x u_0 + \frac{w_0}{R}\right) \\ M_{xx} &= A\lambda\omega h\left(\partial_x u_0 + \frac{R}{h}\partial_x\psi_x\right) + 2\lambda\omega h(\psi_z) \\ M_{\theta\theta} &= A(\beta w_0 + \eta\psi_z) + \lambda\omega h(\partial_x\psi_z) \\ M_{xz} &= k\,\omega h\,\mu\left(\psi_x + {w_0}^{(1,0)} + R\,{\psi_z}^{(1,0)}\right) \\ Q_x &= k\mu h(\psi_x + \partial_x w_0 + \omega\partial_x\psi_z) \quad , \end{aligned} \qquad (۶)$$

که $A = (\lambda + 2\mu)$، $c = log\frac{2R+h}{2R-h}$، $\beta = h - R\,c$، $\eta = cR^2 -$ Rh و $\omega = h^2/12R$ می‌باشد.

در این رابطه k، ضریب تصحیح برشی با قیاس از تیر تیموشنکو در عبارت تنش برشی وارد شده و مقدار آن ۰/۸۲ می‌باشد [۱۴].

منتجه‌های تنش اعمالی بر المان پوسته در شکل **۳** نشان داده شده است.



شکل(۳): منتجه‌های تنش واردشده بر المان پوسته[۲].

برای تعیین معادلات حرکت استوانه از اصل همیلتون استفاده می‌شود. حالت کلی اصل همیلتون به‌صورت زیر است [۱۵]:

$$\int_0^T(\delta T - \delta\pi + \delta W)dt = 0, \qquad (۷)$$

در این رابطه، δT انرژی جنبشی مجازی، $\delta\pi$ انرژی کرنشی مجازی و δW کار مجازی انجام شده توسط نیروی خارجی است. انرژی کرنشی، نصف حاصل‌ضرب تنش در کرنش می‌باشد که با توجه به‌فرض تقارن محوری برای المان بی‌نهایت کوچک، می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

$$d\pi = \frac{1}{2}(\sigma_{xx}\epsilon_x + \sigma_{\theta\theta}\epsilon_\theta + \sigma_{zz}\epsilon_z + \sigma_{xz}\epsilon_{xz})dV, \qquad (۸)$$

که در آن، $r = (R + z)$ و $dV = rdzdxd\theta$ می‌باشد. انرژی جنبشی نصف حاصل‌ضرب جرم در مجذور سرعت می‌باشد که برای المان بی‌نهایت کوچک می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

$$dT = \frac{\rho}{2}(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2)dV, \qquad (۹)$$

که در آن، ρ معرف چگالی است. کار انجام شده توسط نیروی توزیع شده به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$w = \iint_{x\theta} f_z w\, r dx d\theta, \qquad (۱۰)$$

در این رابطه، f_z نیروی خارجی می‌باشد که در این مقاله نیروی خارجی، فشار داخلی استوانه است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_z = P(x, t). \qquad (۱۱)$$

با جایگذاری روابط (۳ و ۵) در روابط (۱۰- ۸) و جایگذاری روابط به‌دست آمده در رابطه (۷)، معادلات حرکت پوسته (براساس شرط تقارن محوری) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} &\lambda\partial_x\psi_z = \rho\partial_{t,t}u_0 + \rho\omega\partial_{t,t}\psi_x \\ &A\omega\partial_{x,x}u_0 + \left(A\,\omega\,R\,h^2\partial_{x,x}\psi_x\right) - k^2\mu(\psi_x + \\ &\partial_x w_0) \\ &+(2\lambda - k^2\mu)\omega\partial_x\psi_z \\ &= \rho\,\omega\left(\partial_{t,t}u_0 + R\partial_{t,t}\psi_x\right) \\ &-\frac{\lambda}{R}\partial_x u_0 + k^2\mu\left(\partial_x\psi_x + \partial_{x,x}w_0\right) \\ &-\frac{A\,c}{Rh}w_0 + k^2\mu\omega\partial_{x,x}\psi_z - \left(\frac{A\,\beta + \lambda h}{Rh}\right)\psi_z \\ &= \rho(\partial_{t,t}w_0 + \omega\partial_{t,t}\psi_z) \\ &-\lambda\partial_x u_0 - (2\lambda - k^2\mu)\omega\,\partial_x\psi_x + k^2\mu\omega\,\partial_{x,x}w_0 \\ &-\left(\frac{A\,\beta}{Rh} + \frac{\lambda}{R}\right)w_0 + k^2\mu\omega\partial_{x,x}\psi_z \\ &-A\left(1 + \frac{\eta}{Rh}\right)\psi_z = \rho\omega\partial_{t,t}w_0 + \rho\omega\partial_{t,t}\psi_z. \end{aligned} \qquad (۱۲)$$

معادلات حرکت به‌صورت ماتریسی برحسب مؤلفه‌های جابه‌جایی به‌شرح زیر بیان می‌شود:

$$L_1 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + L_2 \frac{\partial y}{\partial x} + L_3 y + L_4 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + F = 0, \qquad (۱۳)$$

که در این رابطه،$\{y\}$ بردار جابه‌جایی بوده که به‌صورت رابطه (۴) نشان داده می‌شود:

$$\{y\} = \{u_0 \quad \psi_x \quad w_0\psi_z\}^T \qquad (۱۴)$$

همچنین $\{F\}$ بردار نیرو بوده که شامل مؤلفه فشار است:

$$\{F\} = P(1-\frac{h}{2R})\{0 \quad 0 \quad 1\left(\frac{h}{2}\right)\}^T, \qquad (۱۵)$$

و ضرایب L_1، L_2، L_3 و L_4 ثابت بوده که تابعی از خواص مکانیکی و فیزیکی است و به مشخصات هندسه استوانه بستگی دارد که در پیوست آورده می‌شود.

۳- حل تحلیلی معادلات

برای حل معادلات، محاسبه نتایج و رسم نمودارها از نرم‌افزار متمتیکا[1] نسخه ۸.۰.۰ استفاده شده است که نحوه حل معادلات حرکت در این نرم‌افزار بیان می‌شود.

در مقاله حاضر، بارگذاری شعاعی خارجی وارد شده به پوسته استوانه‌ای برابر صفر، اما بارگذاری داخلی به‌صورت فشاری متحرک بوده و به‌صورت زیر است:

$$P(x,t) = \begin{cases} P_1 + (P_0 - P_1)\, e^{-(x-Vt)}, & x - vt \le 0 \\ 0 & , x - vt > 0, \end{cases} \qquad (۱۶)$$

که در این رابطه $P(x,t)$ فشار داخلی وارد شده بر استوانه است. پارامترv، سرعت بارگذاری فشاری بوده، P_0 و P_1 مقادیر ثابت هستند. توزیع فشار داخلی در این حالت نسبت به مکان و زمان به‌صورت نمایی تغییر کرده و متحرک است.

توابع میدان جابه‌جایی در پوسته استوانه‌ای طویل به‌صورت زیر تعریف می‌شوند [۲]:

$$\{y\} = \{C\}\, e^{-i\alpha(x-Vt)}, \qquad (۱۷)$$

به‌طوری که i عدد مختلط، α عدد موج و V سرعت بارگذاری متحرک می‌باشد.

برای حل معادلات، ابتدا با تغییر متغیر $\xi = x - vt$، معادلات حاکم برحسب ξ به‌دست می‌آیند. بدین ترتیب چهار معادله دیفرانسیل جزئی به چهار معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شود:

$$L_1 \frac{d^2 y}{d\xi^2} + L_2 \frac{dy}{d\xi} + L_3 y + L_4 V^2 \frac{d^2 y}{d\xi^2} + F = 0, \qquad (۱۸)$$

که در آن، u_0 وجود ندارد و فقط $du_0/d\xi$ مشاهده می‌شود. همچنین مقدار u_0 فقط در محاسبه جابه‌جایی محوری نیاز است و در سایر محاسبات (مثلا محاسبه منتجه‌ها)، معلوم بودن $du_0/d\xi$ کافی است. با توجه به معادله اول رابطه (۱۸):

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{-\lambda h(\psi_z + w/R)}{(\lambda+2\mu)h - \rho h V^2} - \left(\frac{h^2}{12R}\right)\frac{d\psi_x}{d\xi}. \qquad (۱۹)$$

با جایگذاری رابطه به‌دست آمده در معادلات (۱۸) سامانه به سه معادله سه مجهول کاهش می‌یابد:

$$L_5 \frac{d^2 y}{d\xi^2} + L_6 \frac{dy}{d\xi} + L_7 y + F = 0, \qquad (۲۰)$$

که در این رابطه، L_5، L_6، L_7 و L_8 ضرایب ثابت هستند و در پیوست آورده می‌شود. همچنین بردار جابه‌جاییy به‌صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} \psi_x \\ w_0 \\ \psi_z \end{Bmatrix} \qquad (۲۱)$$

همچنین $\{F\}$ بردار نیرو بوده که به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\{F\} = P_0\left(1 - \frac{h}{2R}\right)\{0 \quad 1 \quad -\frac{h}{2}\}^T. \qquad (۲۲)$$

با جایگزینی رابطه (۲۱ و ۱۷) در معادلات(۲۰)، حل عمومی به‌دست می‌آید:

$$(-\alpha^2 L_5 - I\alpha L_6 + L_7 - \alpha^2 L_8 V^2)\{C\}e^{-I\alpha\xi} = 0. \qquad (۲۳)$$

و$\{C\}$ به‌صورت رابطه (۲۴) زیر بازنویسی می‌شود:

$$\{C\} = \begin{Bmatrix} C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} \qquad (۲۴)$$

مقادیر ویژه از حل معادله مشخص سامانه به‌دست می‌آید. ریشه‌های این معادله فرض می‌شوند. با جایگذاری در معادلات همگن، بردارهای ویژه برای هر مقدار α محاسبه می‌گردد. بنابراین حل عمومی معادله‌ها عبارتند از:

$$\{y\}_g = \sum_{i=1}^{6} k_i \{C\}_i e^{\alpha_i \xi} \qquad (۲۵)$$

حل خصوصی معادله به توزیع بارگذاری بستگی دارد که در رابطه (۲۲) به آن اشاره شد. بنابراین، حل خصوصی را به شکل $\{y\}_p = \{K_1\}e^{\xi} + \{K_2\}$ درنظر گرفته و با قرار دادن در معادله (۲۳) بردارهای $\{K_1\}$ و $\{K_2\}$ تعیین می‌شود. حل کلی معادلات از مجموع حل عمومی و خصوصی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\{y\} = \sum_{i=1}^{6} k_i \{C\}_i e^{\alpha_i \xi} + \{y_p\}, \qquad (۲۶)$$

که ثابت‌های k_i با اعمال شرایط پیوستگی مسئله به‌دست می‌آیند. برای محاسبه k_i در رابطه (۲۶) از شش شرط پیوستگی استفاده می‌شود:

$$\begin{aligned} \psi_{x1} &= \psi_{x2}, & \partial_x \psi_{x1} &= \partial_x \psi_{x1} \\ w_1 &= w_2, & \partial_x w_1 &= \partial_x w_2 \\ \psi_{z1} &= \psi_{z2}, & \partial_x \psi_{z1} &= \partial_x \psi_{z2}. \end{aligned} \qquad (۲۷)$$

برای محاسبه u در رابطه (۲۰) از دو شرط پیوستگی استفاده می‌شود:

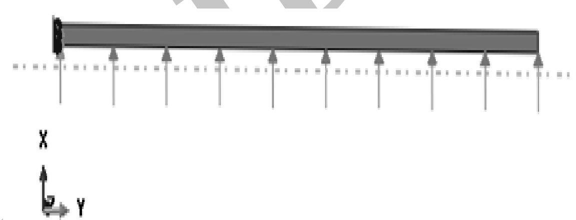
1- Wolfram Mathematica

$$u_1 = u_2, \quad \partial_x u_1 = \partial_x u_2, \qquad (۲۸)$$

که اندیس یک در رابطه بالا مربوط به مکان‌هایی است که بارگذاری برابر $P_1 + (P_0 - P_1)e^{-(x-Vt)}$ است و اندیس دو مربوط به وقتی است که بارگذاری برابر صفر می‌باشد.

۴- روش المان محدود

برای انجام روش المان محدود از نرم افزار ABAQUS نسخه ۶.۱۰ استفاده شده است. در مدل‌سازی، مقطع هندسی استوانه با فرض متقارن محوری مستطیل بوده و تحلیل مسئله دوبعدی است. مدل هندسی و شرایط مرزی مسئله در شکل **۴** نشان داده شده است.



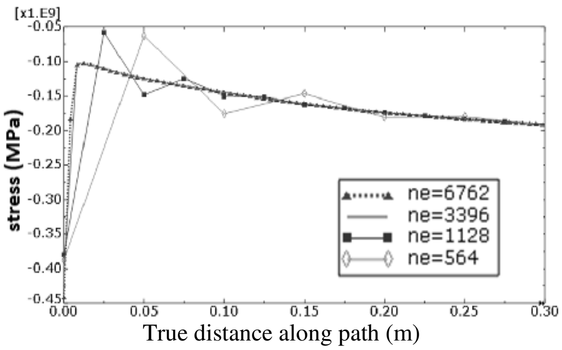
شکل (۴): مدل هندسی و شرایط مرزی مسئله.

برای تحلیل بارگذاری فشاری متحرک در پوسته استوانه از روش ضمنی استفاده شده است [۱۶]. پوسته استوانه‌ای در y=0 گیردار و در y=L آزاد است. اعمال بارگذاری فشاری توسط نوشتن سابروتین در نرم‌افزار اعمال شده است. نوع المان انتخابی با توجه به اینکه تحلیل تنش پوسته استوانه‌ای با فرض تقارن محوری مدنظر است، از المان CAX4R استفاده می‌شود. المان‌ها چهارضلعی بوده و تعداد گره در این المان چهار است. برای تعیین المان‌بندی مناسب، مسئله در حالت دینامیک با تعداد المان بسیاری بررسی شده است که چهار حالت با ذکر تعداد المان و نسبت ابعاد المان که مربع یا مستطیل است، در جدول **۱** آورده شده است.

جدول (۱): تعداد و نسبت ابعاد المان‌ها.

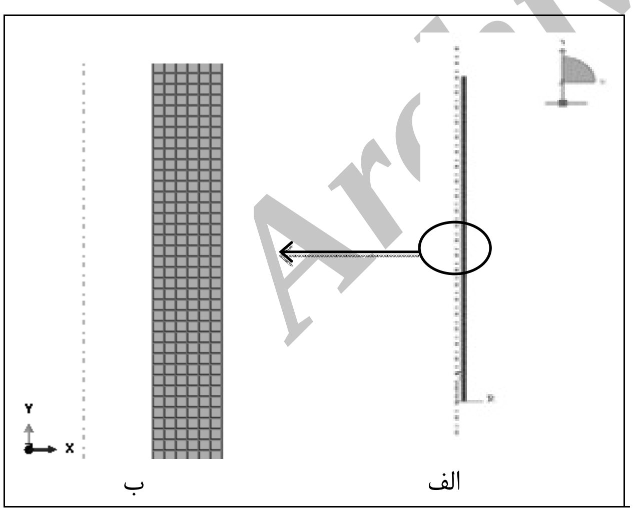
تعداد المان	۶۷۶۲	۳۳۹۶	۱۱۲۸	۵۶۴
نسبت ابعاد المان در جهت طول به شعاع	۰/۵	۱	۳	۶

در هر تحلیل دینامیکی تحت بارگذاری فشاری، تنش شعاعی نقاط واقع بر جدار داخلی تعیین شده است. مقادیر تنش برای تعداد المان ۵۶۴، ۱۱۲۸، ۳۳۹۶ و ۶۷۶۲ در شکل **۵** نشان داده شده است.



شکل (۵): تنش شعاعی نقاط واقع بر لایه میانی.

همان‌طور که در شکل **۵** نشان داده شده است، تمام حالت‌های انتخاب‌شده توافق خوبی در نواحی دور از مرز دارند ولی در نزدیکی مرز این توافق کمتر است که با کوچک‌تر کردن المان‌بندی وضعیت بهتر می‌شود. در شکل **۵** با توجه به یکسان بودن دو نمودار (ne=3396, ne=6762)، برای کاهش زمان حل از المان‌هایی با نسبت ابعاد یک و تعداد المان ۳۳۹۶ استفاده شده است. المان‌بندی پوسته در شکل **۶** نشان داده شده است، در این شکل نسبت ابعاد المان برابر بوده و این المان‌ها از نوع چهارضلعی شکل است.



شکل (۶): الف) المان‌بندی پوسته، ب) بزرگ‌نمایی قسمتی از پوسته.

۵- نتایج و بحث

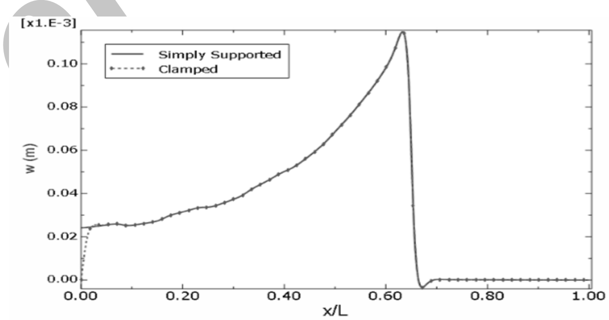
پوسته از جنس فولاد بوده که در جدول **۲** مشخصات هندسی پوسته و جنس پوسته ارائه شده است.

جدول (۲): مشخصات پوسته.

پارامتر	مقدار	واحد
طول پوسته به شعاع متوسط پوسته	۳۰	-
مدول یانگ	۲۰۹	گیگا پاسکال
ضریب پواسون	۰/۳	-
شعاع متوسط به ضخامت پوسته	۱	-
سرعت بارگذاری	۳۸۲	متر برثانیه

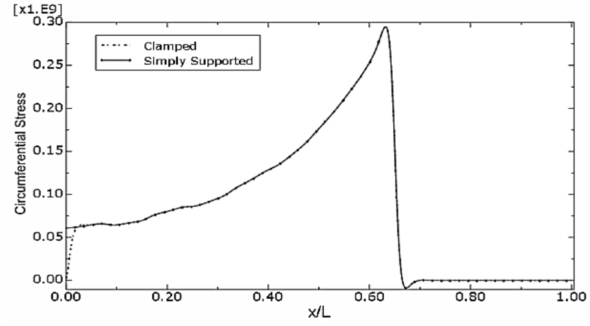
۵-۱- بررسی اثرتکیه‌گاه دراستوانه طویل

جهت بررسی اثر تکیه‌گاه بر نتایج بارگذاری متحرک دینامیکی در استوانه طویل در روش المان محدود از دو نوع شرط مرزی یک سرگیردار یک‌سرآزاد و دوسرلولا استفاده شده است. نتایج جابه‌جایی شعاعی لایه میانی در زمان هفت میلی‌ثانیه در شکل **۷** نشان داده شده است.



شکل(۷): جابه‌جایی شعاعی لایه میانی در طول پوسته در زمان هفت میلی‌ثانیه.

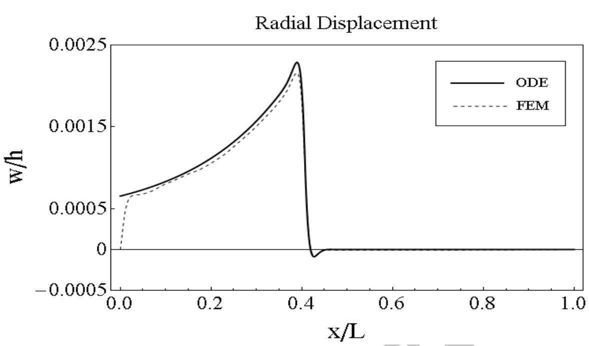
همان‌طور که در شکل **۷** نشان داده شده نتایج جابه‌جایی شعاعی لایه میانی در هر دو مسئله در نواحی دور از مرز بر روی هم منطبق است و شرط مرزی تأثیری بر نتایج در نواحی دور از مرز در استوانه‌های طویل ندارد. نتایج تنش محیطی لایه میانی در زمان هفت میلی‌ثانیه در شکل **۸** باد و نوع شرط مرزی یک سرگیردار یک‌سر آزاد و دو سرلولا نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل **۸** نشان داده شده، نتایج تنش محیطی لایه میانی در هر دو مسئله در نواحی دور از مرز بر روی هم منطبق است و شرط مرزی تأثیری بر نتایج در نواحی دور از مرز در استوانه‌های طویل ندارد. بنابراین، جهت صحه‌گذاری بر نتایج روش تحلیلی با شرط پیوستگی از روش المان محدود با شرط مرزی یک سرگیردار یک‌سرآزاد استفاده شده است.



شکل (۸): تنش محیطی لایه میانی در طول پوسته در زمان هفت میلی‌ثانیه.

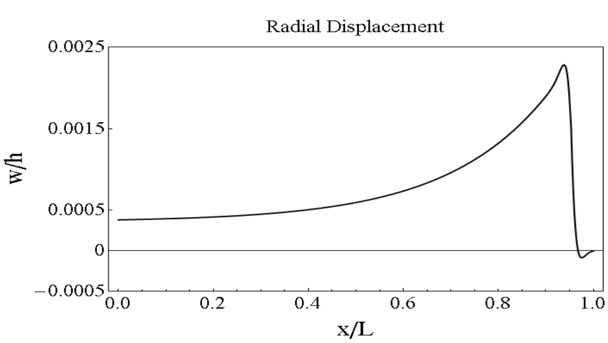
۵-۲- مقایسه نتایج مدل تحلیلی و شبیه‌سازی عددی

جابه‌جایی شعاعی لایه میانی در طول پوسته در دو روش المان محدود و تئوری مرتبه اول در زمان پنج ثانیه در شکل **۹** نشان داده شده است. اختلاف دو روش در نواحی دور از مرز حدود سه درصد است که هنگام تغییرات ناگهانی فشار این اختلاف افزایش می‌باشد.



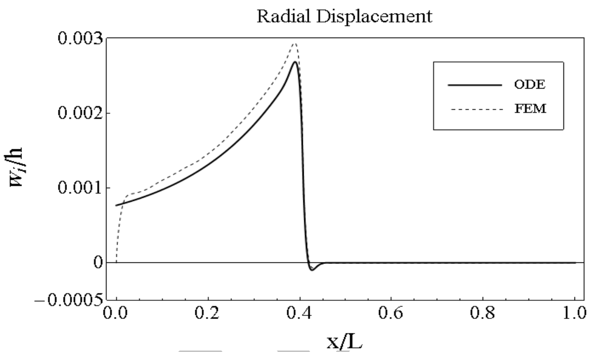
شکل (۹): جابه‌جایی شعاعی لایه میانی در طول پوسته در زمان پنج میلی‌ثانیه.

جابه‌جایی شعاعی لایه میانی در طول پوسته با تئوری مرتبه اول در زمان ده میلی‌ثانیه در شکل **۱۰** نشان داده شده است.



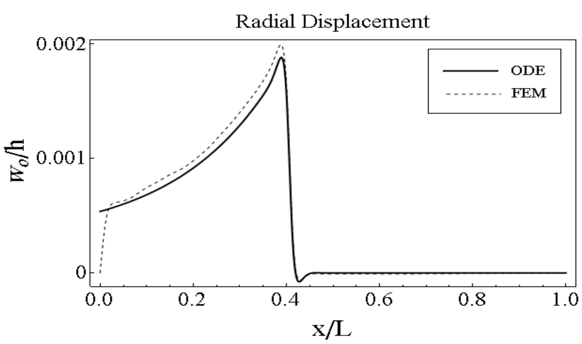
شکل (۱۰):جابه‌جایی شعاعی لایه میانی در طول پوسته در زمان ده میلی‌ثانیه.

جابه‌جایی شعاعی جدار داخلی در طول پوسته با روش المان محدود و تئوری مرتبه اول در زمان پنج میلی‌ثانیه در شکل **۱۱** نشان داده شده است.



شکل (۱۱): جابه‌جایی شعاعی جدار داخلی در طول پوسته در زمان پنج میلی‌ثانیه.

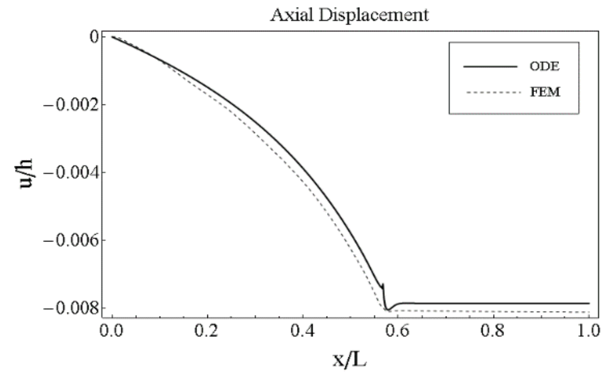
مطابق شکل **۱۱** اختلاف جابه‌جایی شعاعی در جدار داخلی در دو روش حدود ۱۱درصد است. جابه‌جایی شعاعی جدار خارجی در طول پوسته با روش المان محدود و تئوری مرتبه اول در زمان پنج میلی‌ثانیه در شکل **۱۲** نشان داده شده است.



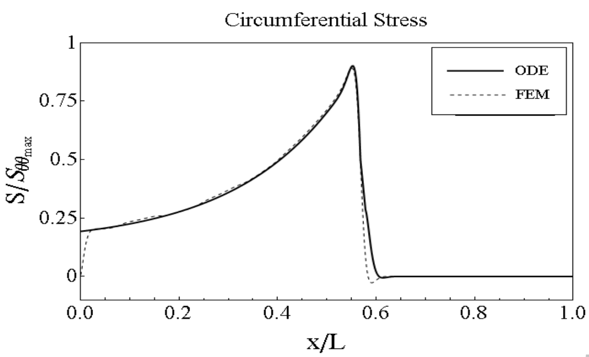
شکل (۱۲): جابه‌جایی شعاعی جدار خارجی در طول پوسته در زمان پنج میلی‌ثانیه.

مطابق شکل **۱۲** اختلاف جابه‌جایی شعاعی جدار خارجی از روش تئوری مرتبه اول و روش المان محدود در حدود ۸ درصد است.

جابه‌جایی محوری لایه میانی در طول پوسته با روش المان محدود و تئوری مرتبه اول در زمان هفت میلی‌ثانیه در شکل **۱۳** نشان داده شده است. همچنین تنش محیطی لایه میانی در طول پوسته در دو روش المان محدود و تئوری مرتبه اول و زمان هفت میلی‌ثانیه در شکل **۱۴** نشان داده شده که در حدود یک درصد اختلاف وجود دارد.

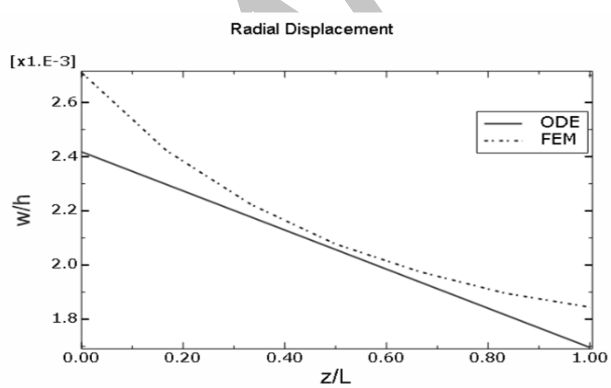


شکل (۱۳): جابه‌جایی محوری لایه میانیدر طول پوسته در زمان هفت میلی‌ثانیه.



شکل (۱۴): تنش محیطی لایه میانی در طول پوسته در زمان هفت میلی‌ثانیه.

همچنین جابه‌جایی شعاعی در ضخامت پوسته و در وسط استوانه جدار ضخیم (x=L/2) و زمان هفت میلی‌ثانیه در شکل **۱۵** برای دو روش تحلیلی و عددی نشان داده شده است.



شکل (۱۵): جابه‌جایی شعاعی در ضخامت پوسته.

با توجه به جابه‌جایی روش عددی در شکل **۱۵**، مشاهده می‌شود توزیع جابه‌جایی شعاعی در ضخامت‌های کم خطی بوده و

با افزایش ضخامت دیگر خطی نیست و یک منحنی (مثلاً درجه دوم) رفتار آن را بهتر توصیف می‌کند.

همچنین کمترین اختلاف دو روش تحلیلی وعددی در لایه میانی اتفاق می‌افتد و با افزایش فاصله از لایه میانی خطا افزایش می‌یابد. آنچه به‌عنوان مهم‌ترین دلیل اختلاف به‌نظر می‌رسد همان فرض خطی بودن میدان جابه‌جایی نسبت به ضخامت است که در صورت استفاده از تئوری مرتبه‌های بالاتر اختلاف بین نتایج روش تحلیلی و عددی کاهش پیدا می‌کند.

۶- نتیجه‌گیری

با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول میرسکی- هرمان پاسخ مدل به بارگذاری متحرک در روش دینامیکی با تقریب خوبی نسبت به‌روش اجزاء محدود برای پیش‌بینی پاسخ دینامیکی پوسته استوانه‌ای ضخیم به‌دست آمد که در جابه‌جایی شعاعی لایه میانی این اختلاف حدود سه درصد و درتنش محیطی حدود یک درصداست.جهت بررسی نتایج اثر تکیه‌گاه در استوانه طویل با بارگذاری متحرک از دو نوع شرط مرزی یک‌سرگیردار یک‌سر آزاد و دوسر لولا در روش المان محدود استفاده شد. نتایج نشان می‌دهد که در نواحی دور از مرز نتایج هر دو نوع شرط مرزی بر هم منطبق است و نوع شرط مرزی تأثیری بر نتایج در نواحی دور از مرز در استوانه‌های طویل ندارد. بررسی نتایج تئوری تغییر شکل برشی در پوسته استوانه‌ای طویل و نتایج روش المان محدود در پوسته استوانه‌ای یکسرگیردار نشان می‌دهدکه:

الف) شرط مرزی تأثیری بر نتایج در نواحی دور از مرز در استوانه‌های طویل ندارد.

ب) توصیف نتایج دینامیکی در نواحی دور از مرز مناسب است ولی در نواحی مرزی با مدل بیان شده قابل بررسی نمی‌باشد.

ج: با توجه به نتایج تئوری تغییر شکل برشی زمان بارگذاری متحرک با روش المان محدود مطابقت خوبی دارد.

د) اختلاف در جابه‌جایی شعاعی جدار داخلی و خارجی نسبت به جابه‌جایی شعاعی لایه میانی افزایش یافته است که به دلیل خطی فرض کردن میدان جابه‌جایی در جهت ضخامت است. البته قابل ذکر است پاسخ دینامیکی در مقالات دیگر برابر پاسخ لایه میانی درنظر گرفته شده یا در مورد آن بحثی صورت نگرفته است.

ه) فرض خطی بودن میدان جابه‌جایی نسبت به ضخامت در ضخامت‌های کم برای توصیف جابه‌جایی شعاعی مناسب بوده ولی با افزایش ضخامت بهتر است از یک منحنی (مثلاً درجه دوم) برای توصیف میدان جابه‌جایی استفاده کرد.

۷- مراجع

1. Ugural, A.C. “Stresses in Plates and Shells”, Mcgraw-Hill, 1981.
2. Mirsky, I. and Herrmann, G. “Axially Symmetric Motions of Thick Cylindrical Shells”, J. Appl. Mech. Vol. 25, No.1, pp. 97–102, 1958.
3. Tang, S. “Dynamic Response of a Tube under Moving Pressure”, Proc. the American Society of Civil Engineers, Eng. Mech. Division, Vol. 91, No. 5, pp. 97-122, 1965.
4. Reismann, H. “Response of a Pre-Stressed Cylindrical Shell to Moving Pressure Load”, Eighth Midwest Mech. Conf., pp. 349-363, 1965.
5. Simkins, T.E. “Amplification of Flexural Waves in Gun Tubes”, J. Sound Vib. Vol. 2, No. 172, pp. 145-154, 1994.
6. Mukoid, V.P. “Reaction of Thick-Walled Cylindrical Shell to a Suddenly Applied Internal Load”, Int. J. Applied Mechanics. Vol. 30, No. 6, pp. 441-445, 1994.
7. Beltman, W.M. and shephered, J.E. “Linear Elastic Response of Tubes to Internal Detonation Loading”, J. Sound Vib, Vol. 252, No. 4, pp. 617-655, 2002.
8. Mazaheri, K., Mirzaei, M. and Biglari, H. “Transient Dynamic Response of Tubes to Internal Detonation Loading”, J. Sound Vib. Vol. 297, No.1, pp. 106-122, 2006.
9. Shepherd, J. “Structural Response of Piping to Internal Gas Detonation”, in ASME Pressure Vessels and Piping Division Conf. 2006.
10. Bakhshandeh, K. and Saranjam, B. “Thickness Ratio Effectonthe Dynamic Response of a Long Cylinder Tube under Moving Pressure”, Mech. Eng. Vol. 7, No.1, pp. 1 – 10, 2009.
11. Mirzaei, M. “Vibrational Response of Thin Tubes to Sequential Moving Pressure”, Int. J. Mech. Sci. Vol. 59, No.1, pp. 44-54, 2012.
12. HosseiniHashemi, S., Bisadi, H., Ilkhani, M., and Fadaee, M. “Accuracy Analysis of Donnell & Sanders Theories for Free Vibration of Thick Functionally Graded Cylindrical Shell in Various Boundary Conditions” Aero. Mech. J., Vol. 9, No. 2, pp. 55-68, 2013 (In Persian).
13. Boresi, P., Kenneth, P., and Chong, J.D. “Elasticity in Engineering Mechanics”, John Wiley and Sons, 2010.
14. Herrmann, G. and andmirsky, I. “Three Dimensional and Shell Theory Analysis of Axially Symmetric Motions of Cylinders”, J. Appl. Mech.Vol. 23, No.4, pp. 563–568, 1956.
15. Reddy, J.N. “Theory and Analysis of Elastic Plates”, Taylor &Francis, 1999.
16. “Abaqus User Manual”, SIMULIA, 2010.

پیوست

ضرایب L_1،L_2، L_3 و L_4 تابعی از خواص مکانیکی و فیزیکی بوده و به مشخصات هندسه استوانه بستگی دارد.ضرایب L_1،L_2، L_3 و L_4 تابعی از خواص مکانیکی و فیزیکی بوده و به مشخصات هندسه استوانه بستگی دارد.

$$L_1 = \begin{pmatrix} A & A\omega & 0 & 0 \\ A\omega & A\omega R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^2\mu & k^2\mu\omega \\ 0 & 0 & k^2\mu\omega & k^2\mu\omega \end{pmatrix}$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dfrac{\lambda}{R} & \lambda \\ 0 & 0 & -k^2\mu & L2_{24} \\ -\dfrac{\lambda}{R} & k^2\mu & 0 & 0 \\ -\lambda & -L2_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

که در آن:

$$L2_{24} = (2\lambda - k^2\mu)\omega$$

$$L_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k^2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{Ac}{Rh} & -\dfrac{A\beta}{Rh} - \dfrac{\lambda}{R} \\ 0 & 0 & -\dfrac{A\beta}{Rh} - \dfrac{\lambda}{R} & -A\left(1 + \dfrac{\eta}{Rh}\right) \end{pmatrix}$$

$$L_4 = \begin{pmatrix} -\rho & -\rho\omega & 0 & 0 \\ -\rho\omega & -\rho\omega R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho & -\rho\omega \\ 0 & 0 & -\rho\omega & -\rho\omega R \end{pmatrix}$$

ضرایب L_5،L_6 و L_7 تابعی از خواص مکانیکی و فیزیکی بوده و به مشخصات هندسه استوانه بستگی دارد.

$$L_5 = \begin{pmatrix} A\omega R - A\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & k^2\mu & k^2\mu\omega \\ 0 & k^2\mu\omega & k^2\mu\omega R \end{pmatrix}$$

$$L_6 = \begin{pmatrix} 0 & L6_{12} & L6_{13} \\ -L6_{12} & 0 & 0 \\ -L6_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

که در آن:

$$L6_{12} = -k^2\mu - \lambda\left(\frac{\omega}{R}\right)$$

$$L6_{13} = (2\lambda - k^2\mu)\omega - \lambda\omega$$

$$L_7 = \begin{pmatrix} L7_{11} & 0 & 0 \\ 0 & L7_{22} & L7_{23} \\ 0 & L7_{23} & L7_{33} \end{pmatrix}$$

که در آن:

$$L7_{11} = -k^2\mu - \rho\omega R$$

$$L7_{22} = -\frac{Ac}{Rh} + \frac{\lambda^2}{R^2(A - \rho V^2)} - \rho V^2$$

$$L7_{23} = -\frac{A\beta}{Rh} - \frac{\lambda}{R} + \frac{\lambda^2}{R(A - \rho\, V^2)} - \rho\omega\, V^2$$

$$L7_{33} = -A\left(1 + \frac{\eta}{Rh}\right) + \frac{\lambda^2}{(A - \rho V^2)} - \rho\omega R V^2$$