پاسخ دینامیکی پوسته‌های مرکب انحنادار تحت ضربه عرضی با سرعت پایین با اجرام ضربه‌زننده

کرامت ملک زاده فرد[۱]
مجتمع هوافضا
دانشگاه صنعتی مالک‌اشتر

محسن غلامی[۲]
دانشکده مهندسی مکانیک
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

(تاریخ دریافت: ۹۲/۰۹/ ۲۷؛ تاریخ پذیرش: ۹۳/۰۳/۱۴)

چکیده

در مقاله حاضر برای اولین بار به تحلیل دینامیکی انواع پوسته‌های مرکب شامل دوانحنایه، تک‌انحنایه، صفحه تخت و پوسته استوانه‌ای کامل تحت ضربه با سرعت پایین توسط چند جرم ضربه‌زننده و براساس تئوری برشی مرتبه اول (FSDT)، برای شرایط مرزی ساده و گیردار پرداخته شده است. کرنش‌های مکانیکی براساس تئوری سندرز استفاده شده است. نتایج با استفاده از دو مدل جرم و فنر بهبودیافته خطی شده جدید (شکل خطی قانون تماس هرتز) و مدل کامل (شکل کلی غیرخطی قانون تماس هرتز) استخراج و با یکدیگر مقایسه شده است. برای صحه‌گذاری بیشتر، نتایج با نرم‌افزار المان محدود آباکوس و آخرین کارهای انجام شده مقایسه شده است. مسئله چند ضربه در یک شکل کلی فرمول‌بندی شده و توانایی تحلیل ضربات همزمان سرعت پایین چند جرم ضربه زننده با جرم، سرعت و شعاع متفاوت در نقاط مختلف را دارد. در این مطالعه، اثر پارامترهای هندسی و مکانیکی پوسته‌های مرکب مانند نسبت طول به عرض (a/b)، نسبت طول به شعاع (L/R) و سرعت اجرام ضربه‌زننده برروی پاسخ ضربه از هر دو مدل بررسی و مقایسه شده است.

واژه‌های کلیدی: ضربه با سرعت پایین، پوسته‌های مرکب انحنادار، مدل جرم و فنر خطی‌شده جدید، قانون تماسی هرتز

Dynamic Response of the Curved Composite Shells Subjected to Low-Velocity Multi Mass Impacts

K. Malekzadeh Fard
Aerospace Engineering Department
MalekAshtar University

M. Gholami
Mechanical Engineering Department
K. N. Toosi University of Technology

(Received: 18 December, 2013; Accepted: 4 June, 2014)

ABSTRACT

In this paper, at the first time, dynamic response of double curved, single curved, flat and circular cylindrical composite shells with simply supported and clamped boundary conditions subjected to multi- mass impacts were studied based on the first-order shear deformation theory (FSDT). The mechanical strains were used according to Sander's theory. Using a new linearized two degrees of freedom spring-mass system (linear form of Hertzian contact law) and complete solution model (nonlinear form of Hertzian contact law), the results are derived and compared with together. For additional verification, the results are compaired with the Abaqus finite element software and the latest available literature. The presented formulation is general and capable to analyses the cylindrical composite shells subjected to multi-mass impacts with arbitrary different masses, initial velocities and impact locations. In this investigation, the effect of geometrical and mechanical parameters, such as length to width ratio (a/b), length to radius ratio (L/R) and velocity of the impactor masses on the impacts response from both presented models are studied and compared with together.

Keywords: Low Velocity Impact, Curved Composite Shells, New Linearized, Spring-Mass Model, Hertzian Contact Low

۱- دانشیار (نویسنده پاسخگو): k.malekzadeh@gmail.com
۲- کارشناس ارشد: gholami.m64@gmail.com

۱- مقدمه

امروزه سازه‌های مرکب به خاطر ویژگی‌هایی چون استحکام و سفتی مخصوص بالا و مقاومت در برابر خستگی و خوردگی، به‌طور گسترده‌ای در صنایع هوافضا، تجهیزات ورزشی، لوله‌های فشار و قسمت‌های مختلف خودرو مورد استفاده قرار می‌گیرند. رفتار سازه‌های مرکب در برابر ضربه کم‌سرعت توسط محققان زیادی به‌صورت تجربی، عددی و تحلیلی مورد مطالعه قرار گرفته است. اما در تحقیقات بسیار کمی به بررسی ضربه کم‌سرعت بر روی پوسته‌های انحنادار پرداخته شده است. چیریستوفرو و سوانسون[1] [۱] به‌روش تحلیلی به بررسی پاسخ ضربه بر روی یک صفحه مرکب پرداختند و از رابطه خطی قانون تماس هرتز برای به‌دست آوردن تاریخچه نیروی ضربه استفاده کردند. پیرسن و وزیری[2] [۲] یک حل تحلیلی برای به‌دست آوردن نیروی ضربه از قانون غیرخطی هرتز بر روی صفحات مرکب ارائه دادند. چیریستوفرو و یجیت[3] [۳] مشخصات ضربه یک صفحه مرکب را با استفاده از قانون تماس خطی الاستوپلاستیک به‌روش تحلیلی مطالعه کردند. چان و لام[4] [۴] یک روش عددی با استفاده از قانون لاگرانژ و قانون تماسی هرتز برای محاسبه پاسخ دینامیکی صفحات مرکب چندلایه پیشنهاد دادند. سان و چن[5] [۵] به‌روش اجزاء محدود پاسخ ضربه بر روی صفحات مرکب با تنش‌های اولیه، با استفاده از قانون بهبودیافته هرتز را به‌دست آوردند. گانگ[6] و همکاران [۶] نیروی ضربه بین یک پوسته استوانه‌ای مرکب و ضربه‌زننده را از مدل جرم و فنر دو درجه آزادی تعیین کردند. چاندراشکار و اس‌چرود[7] [۷] به تحلیل غیرخطی ضربه بر روی پوسته‌های استوانه‌ای چند لایه به روش اجزاء محدود پرداختند و از قانون بهبود یافته هرتز برای تعیین تاریخچه نیروی تماس بهره بردند. کریشمارثی[8] و همکاران [۸] به مطالعه پارامتریک بر روی پاسخ ضربه و آسیب پوسته‌های مرکب استوانه‌ای چندلایه به‌روش اجزاء محدود پرداختند. چان هر و چنگ لیانگ[9] [۹] پاسخ دینامیکی پوسته‌های چندلایه مرکب را با استفاده از نرم‌افزار اجزاء محدود ANSYS/LS-DAYNA در برابر ضربه مطالعه کرده‌اند. در این مطالعه همچنین آسیب و لایه لایه شدن لایه‌ها نیز بررسی شده است. لم[10] و همکاران [۱۰] در سال ۱۹۹۹ برای اولین بار تحلیل دو ضربه روی تیرهای مرکب را انجام دادند. آنها با استفاده از تئوری مرتبه بالای ردی[11] میدان جابه‌جایی یک تیر مرکب متقارن دوسر گیردار را نوشتند و برخورد بین اجرام ضربه‌زننده و تیر را با استفاده از قانون هرتز[12] بهبودیافته توصیف کردند. سپس با استفاده از رابطه لاگرانژ[13] معادلات حاکم بر مسئله را استخراج کردند. نتایج بررسی‌ها نشان می‌دهد که هیچ تحقیقی در مورد سازه‌های مرکب انحنادار و استوانه کامل تحت چند جرم ضربه‌زننده انجام نشده است. در واقع مقاله حاضر اولین تحقیق در این زمینه می‌باشد. در تحقیق حاضر پاسخ دینامیکی انواع پوسته‌های مرکب با شرط مرزی ساده و گیردار تحت اثر چند جرم ضربه‌زننده بررسی می‌شود. کرنش‌های مکانیکی براساس تئوری سندرز استفاده شده است [۱۶]. تاریخچه نیروی تماس از دو مدل جرم و فنر خطی بهبودیافته جدید و مدل کامل هرتز پیش‌بینی و مقایسه شده است. در نهایت اثر پارامترهای هندسی و مکانیکی پوسته مانند نسبت طول به عرض، نسبت طول به شعاع و سرعت ضربه‌زننده برروی پاسخ ضربه از هر دو مدل و برای هر دو نوع شرط مرزی بررسی و مقایسه شده است. تحلیل در منطقه الاستیک بوده و تغییر مکان‌ها و چرخش‌ها کوچک فرض می‌شوند.

۲- معادلات حرکت

در این بخش معادلات حرکت برای یک پوسته نازک دو انحنایی تحت برخورد چند جرم ضربه‌زننده بر اساس تئوری مرتبه برشی اول استخراج می‌گردد.

۲-۱- سازه دو انحنایی

شکل ۱مشخصات هندسی یک پوسته چندلایه دو انحنایی تحت چند جرم ضربه‌زننده را نشان می‌دهد.

ξ_1 و ξ_2 محورهای انحنادار صفحه‌ی میانی (صفحه‌ی مرجع) در $\xi = 0$ هستند. و ξ محور عمود بر صفحه‌ی میانی است. همچنین ξ_1، ξ_2 و ξ مختصات منحنی‌الخط متعامد هستند. R_1 و R_2 به‌ترتیب شعاع‌های اصلی انحناهای صفحه‌ی میانی در جهت محور ξ_1 و ξ_2 هستند.

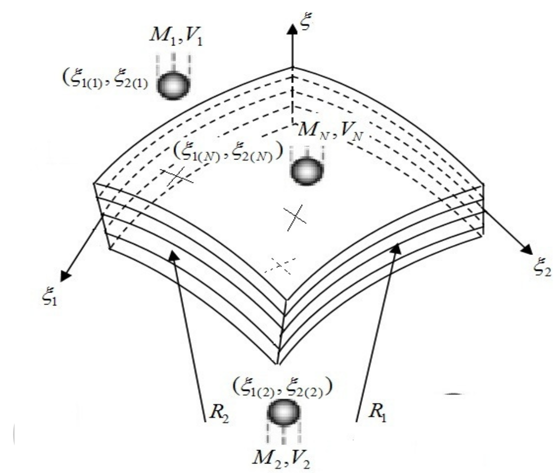
میدان جابه‌جایی براساس تئوری مرتبه برشی اول [۱۱]

1- Christoforou and Swanson
2- Pierson and Vaziri
3-Christoforou and Yigit
4- Chun and Lam
5 -Sun and Chen
6- Gong
7 - Chandrashekara and Schroeder
8 -Krishnamurthy
9- Chuan her and Cheng Liang
10- Lam
11- Reddy
12- Hertz
13- Lagrangian Equation

به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} u_1(\xi_1,\xi_2,\xi,t) &= u_0(\xi_1,\xi_2,t)+\xi\phi_1(\xi_1,\xi_2,t) \\ u_2(\xi_1,\xi_2,\xi,t) &= v_0(\xi_1,\xi_2,t)+\xi\phi_2(\xi_1,\xi_2,t) \\ u_3(\xi_1,\xi_2,\xi,t) &= w_0(\xi_1,\xi_2,t), \end{aligned} \quad (۱)$$

که در آن، u_0، v_0، w_0 جابه‌جایی پوسته در راستای ξ_1، ξ_2 و ξ در صفحه میانی و ϕ_1 و ϕ_2 چرخش‌های نرمال‌عرضی به‌ترتیب حول محور ξ_2 و ξ_1 هستند.



شکل (۱): یک پوسته چندلایه دوانحنایی تحت چند جرم ضربه‌زننده از بالا و پایین.

روابط کرنش و جابه‌جایی یک پوسته دو انحنایی به‌صورت زیر است [۱۲]:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1=\overset{0}{\varepsilon}_1+\xi k_1,\ \ \varepsilon_2=\overset{0}{\varepsilon}_2+\xi k_2,\ \ \gamma_{12}=\varepsilon_6=\overset{0}{\varepsilon}_6+\xi k_6 \\ &\gamma_{23}=\varepsilon_4=\overset{0}{\varepsilon}_4,\ \ \gamma_{13}=\varepsilon_5=\overset{0}{\varepsilon}_5, \end{aligned} \quad (۲)$$

که در آن، $\overset{0}{\varepsilon}_1$ و $\overset{0}{\varepsilon}_2$ مؤلفه‌های کرنش عمودی، $\overset{0}{\varepsilon}_6$ مؤلفه کرنش برشی و $\overset{0}{\varepsilon}_4$ و $\overset{0}{\varepsilon}_6$ مؤلفه‌های کرنش برشی عرضی صفحه میانی هستند. در حالی که k_1 و k_2 مربوط به تغییرات انحنا و k_6 مربوط به پیچش صفحه میانی پوسته هستند.

$$\begin{aligned} &\overset{0}{\varepsilon}_1=\frac{\partial u_0}{\partial x_1}+\frac{w_0}{R_1},\ \ k_1=\frac{\partial\phi_1}{\partial x_1},\ \ \overset{0}{\varepsilon}_2=\frac{\partial v_0}{\partial x_2}+\frac{w_0}{R_2} \\ &k_2=\frac{\partial\phi_2}{\partial x_2},\ \ \overset{0}{\varepsilon}_6=\frac{\partial v_0}{\partial x_1}+\frac{\partial u_0}{\partial x_2}, \\ &\overset{0}{\varepsilon}_4=\frac{\partial w_0}{\partial x_2}+\phi_2-\frac{v_0}{R_2} \\ &k_6=\frac{\partial\phi_2}{\partial x_1}+\frac{\partial\phi_1}{\partial x_2}-C_0\left(\frac{\partial v_0}{\partial x_1}-\frac{\partial u_0}{\partial x_2}\right), \\ &\overset{0}{\varepsilon}_5=\frac{\partial w_0}{\partial x_1}+\phi_1-\frac{u_0}{R_1},\ C_0=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) \\ &dx_i=A_i\,d\xi_i;\ (i=1,2), \end{aligned} \quad (۳)$$

در رابطه بالا، A_i ضرایب لامه بوده و پارامتر C_0 براساس تئوری ساندرز [۱۳] برای جلوگیری از چرخش جسم صلب درنظر گرفته شده است. در معادلات حرکت چرخش جسم صلب درنظر گرفته شده است. با یک تغییر متغیر به‌کمک معادله‌های (۳) و با فرض ثابت بودن تغییرات شعاع انحنا معادلات حرکت برای یک پوسته نازک دو انحنایی به‌صورت زیر نوشته می‌شود [۱۱]:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial N_1}{\partial x_1}+\frac{\partial N_6}{\partial x_2}+C_0\frac{\partial M_6}{\partial x_2}+\frac{Q_1}{R_1}=I_0\ddot{u}_0+I_1\ddot{\phi}_1 \\ &\frac{\partial N_6}{\partial x_1}+\frac{\partial N_2}{\partial x_2}-C_0\frac{\partial M_6}{\partial x_1}+\frac{Q_2}{R_2}=I_0\ddot{v}_0+I_1\ddot{\phi}_2 \\ &\frac{\partial Q_1}{\partial x_1}+\frac{\partial Q_2}{\partial x_2}-\left(\frac{N_1}{R_1}+\frac{N_2}{R_2}\right)+q_t-q_b=I_0\ddot{w}_0 \\ &\frac{\partial M_1}{\partial x_1}+\frac{\partial M_6}{\partial x_2}-Q_1=I_1\ddot{u}_0+I_2\ddot{\phi}_1 \\ &\frac{\partial M_6}{\partial x_1}+\frac{\partial M_2}{\partial x_2}-Q_2=I_1\ddot{u}_0+I_2\ddot{\phi}_2 \end{aligned} \quad (۴)$$

$$\begin{aligned} I_i &= \int_{-h/2}^{h/2}\rho(\xi)^i\,d\xi \\ &= \sum_{k=1}^{N}\int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}}\rho^k(\xi)^i\,d\xi;\ (i=0,1,2), \end{aligned}$$

که در آن، q_j (j=t,b) بار دینامیکی عمود بر پوسته ناشی از ضربه‌زننده‌ها بوده و N_i و M_i به‌ترتیب برآیند تنش‌ها و گشتاورها می‌باشند. Q_i برایند نیروهای برش عرضی هستند که برای یک ماده ارتوتروپیک خاص $(A_{i6}=B_{i6}=D_{i6}=0\ ;i=1,2)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۱۴].

$$\begin{aligned} &\begin{Bmatrix}\{N\}\\\{M\}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}[A] & [B]\\ [B] & [D]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{\varepsilon^0\}\\\{k\}\end{Bmatrix}, \\ &\begin{Bmatrix}Q_2\\Q_1\end{Bmatrix}=k_s\begin{bmatrix}A_{44} & A_{45}\\ A_{45} & A_{55}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_4^0\\\varepsilon_5^0\end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (۵)$$

که در آن، A_{ij}، B_{ij} و D_{ij} به‌ترتیب سفتی کششی، سفتی کوپل کششی- خمشی و سفتی خمشی چندلایه می‌باشند:

$$\begin{aligned} (A_{ij},B_{ij},D_{ij}) &= \int_{-h/2}^{h/2}\overline{Q}_{ij}(1,\xi,\xi^2)\,d\xi \\ &= \sum_{k=1}^{N}\overline{Q}_{ij}^{(k)}\int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}}(1,\xi,\xi^2)\,d\xi, \end{aligned} \quad (۶)$$

که در آن، k_s ضریب تصحصح برشی است که توسط میندلین [۱۵] برابر $\pi/12$ درنظر گرفته شده است. $\overline{Q}_{ij}^{(k)}(i,\,j=1,2,6)$، مؤلفه‌های سفتی تبدیل یافته داخل

صفحه‌ای و $(i,\, j = 4,5)$ $\overline{Q}_{ij}^{(k)}$، مؤلفه‌های سفتی تبدیل یافته برشی عرضی هستند.

با جایگذاری روابط (۱ و ۲) در (۵) و در نهایت با جایگذاری در روابط معادله حرکت (۴)، معادلات حرکت پوسته برحسب جابه‌جایی‌های u_0، v_0، w_0، ϕ_1 و ϕ_2 به صورت ماتریسی و به‌شرح زیر خلاصه می‌شود:

$$\begin{aligned} & LV^T = F^T \\ & V = \{u_0, v_0, w_0, \phi_1, \phi_2\} \\ & F = \left\{I_0\ddot{u}_0, I_0\ddot{v}_0, I_0\ddot{w}_0 - q_t + q_b, I_2\ddot{\phi}_1, I_2\ddot{\phi}_2\right\}, \end{aligned} \tag{۷}$$

که در آن، اپراتورهای L_{ij} اپراتورهای مشتقات می باشند که در ضمیمه الف آورده شده‌اند.

۲-۲- پوسته مرکب تک‌انحنایه باز

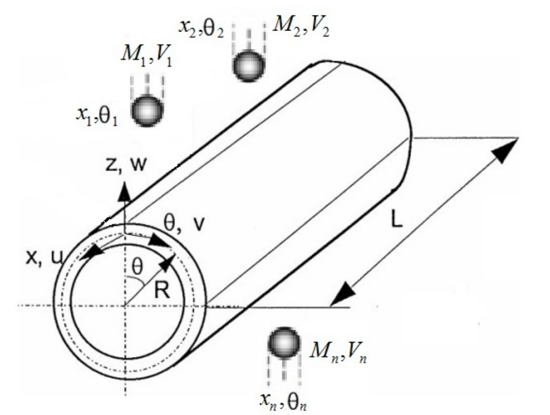
به‌منظور استخراج معادلات حاکم بر سازه مرکب تک‌انحنایه لازم است فقط تغییرات $R_1 = \infty$ و $R_2 = R$ در همه معادلات آورده شده در بخش ۲-۱ اعمال شود.

۲-۳- پوسته مرکب تخت

به‌منظور استخراج معادلات حاکم بر سازه مرکب تخت لازم است که تغییرات $R_1 = \infty$ و $R_2 = \infty$ در همه معادلات آورده شده در بخش ۲- ۱ اعمال شود.

۲-۴- پوسته مرکب استوانه‌ای کامل

به‌منظور کاهش روابط به‌دست آمده برای سازه دوانحنایه (بخش ۲- ۱) به پوسته مرکب استوانه‌ای کامل لازم است که تغییرات $R_1 = \infty$، $R_2 = R$، $x_1 = x,\ x_2 = R\theta$ و $x_3 = z$ اعمال گردد. در اینجا بعضی از روابط کاهش یافته ارائه می‌شود. در شکل **۲** یک پوسته مرکب استوانه‌ای کامل نشان داده شده است.



شکل (۲): یک پوسته چندلایه استوانه‌ای کامل تحت چند جرم ضربه‌زننده.

روابط کرنش- جابه‌جایی برای پوسته مرکب استوانه‌ای شکل: با اعمال تغییرات ذکر شده در ابتدای این بخش و اعمال آن بر معادلات (۲ و ۳)، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} & \varepsilon_1^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x},\ \varepsilon_2^0 = \frac{\partial v_0}{R\,\partial\theta} + \frac{w_0}{R}, \\ & \varepsilon_6^0 = \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{R\,\partial\theta} \\ & \varepsilon_5^0 = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x,\ \varepsilon_4^0 \\ & = \frac{\partial w_0}{R\,\partial\theta} + \phi_\theta - \frac{v_0}{R},\ k_{11} = \frac{\partial\phi_x}{\partial x} \\ & k_{22} = \frac{\partial\phi_\theta}{R\,\partial\theta}, \\ & k_{12} = \frac{\partial\phi_\theta}{\partial x} + \frac{\partial\phi_x}{R\,\partial\theta} + \frac{1}{2R}\left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{R\,\partial\theta}\right). \end{aligned} \tag{۸}$$

معادلات حرکت پوسته مرکب استوانه‌ای شکل: با اعمال تغییرات گفته شده در ابتدای این بخش (۲-۴) و اعمال آن بر معادلات (۴)، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{x\theta}}{R\,\partial x_\theta} + C_0\frac{\partial M_{x\theta}}{R\,\partial x_\theta} = I_0\ddot{u}_0 + I_1\ddot{\phi}_x \\ & \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{\partial N_{\theta\theta}}{R\,\partial x_\theta} - C_0\frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{Q_{\theta z}}{R} = I_0\ddot{v}_0 + I_1\ddot{\phi}_\theta \\ & \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{\theta z}}{R\,\partial x_\theta} - \left(\frac{N_{\theta\theta}}{R}\right) + q_t = I_0\ddot{w}_0 \\ & \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{x\theta}}{R\,\partial x_\theta} - Q_{xz} = I_1\ddot{u}_0 + I_2\ddot{\phi}_x \\ & \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{\partial M_{\theta\theta}}{R\,\partial x} - Q_{\theta z} = I_1\ddot{v}_0 + I_2\ddot{\phi}_\theta \\ & C_0 = -\frac{1}{2R},\ I_i = \int_{-h/2}^{h/2}\rho(z)^i\,dz \\ & = \sum_{k=1}^{N}\int_{z^{(k)}}^{z^{(k+1)}}\rho^{(k)}(z)^i\,dz,\ (i = 0,1,2). \end{aligned} \tag{۹}$$

در نهایت مشابه با روش استخراج معادلات حرکت پوسته مرکب دو انحنایه، معادلات حاکم بر حرکت پوسته مرکب استوانه‌ای کامل به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} & LV^T = F^T \\ & V = \{u_0, v_0, w_0, \phi_x, \phi_\theta\} \\ & F = \left\{I_0\ddot{u}_0, I_0\ddot{v}_0, I_0\ddot{w}_0 - q_t, I_2\ddot{\phi}_x, I_2\ddot{\phi}_\theta\right\}, \end{aligned} \tag{۱۰}$$

که در آن، اپراتورهای L_{ij} اپراتورهای مشتقات می باشند که مشابه اپراتورهای معادله (۷) هستند، فقط باید تغییرات $R_1 = \infty$، $R_2 = R$، $x_1 = x,\ x_2 = R\theta$ و $x_3 = z$ در آنها اعمال گردد.

۳- شرایط مرزی و روش حل مسئله

در این تحقیق، شرایط مرزی به‌صورت ساده و گیردار درنظر گرفته می‌شود. برای شرایط مرزی ساده در لبه های پوسته

تغییر مکان عرضی و ممان خمشی حول محور موازی لبه‌ها صفر منظور می‌شود. برای شرایط مرزی گیردار تغییر مکان عرضی و شیب صفر فرض می‌شود [۶].

به‌منظور ارضاء شرایط مرزی ساده، میدان جابه‌جایی تمامی سازه‌ها به‌جز پوسته استوانه‌ای کامل به‌صورت بسط سری فوریه دوگانه همانند زیر تعریف می‌شود [۱۱]:

$$
\begin{aligned}
u_0(x_1,x_2,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} U_{mn}(t)\cos\alpha_m x_1 \sin\beta_n x_2 \\
v_0(x_1,x_2,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} V_{mn}(t)\sin\alpha_m x_1 \cos\beta_n x_2 \\
w_0(x_1,x_2,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} W_{mn}(t)\sin\alpha_m x_1 \sin\beta_n x_2 \\
\phi_1(x_1,x_2,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} X_{mn}(t)\cos\alpha_m x_1 \sin\beta_n x_2 \\
\phi_2(x_1,x_2,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} Y_{mn}(t)\sin\alpha_m x_1 \cos\beta_n x_2 \\
\alpha_m = \frac{m\pi}{a}, &\quad \beta_n = \frac{n\pi}{b}.
\end{aligned}
\tag{۱۱}
$$

که در آن، U_{mn}، V_{mn}، W_{mn}، X_{mn} و Y_{mn} ضرایب زمانی هستند که باید تعیین شوند. برای شرط مرزی گیردار کافی است که در روابط ارائه شده برای چرخش‌ها در معادلات (۱۱) عبارات $\cos\alpha_m x_1$ و $\cos\beta_n x_2$ به‌ترتیب به‌صورت $\sin\alpha_m x_1$ و $\sin\beta_n x_2$ نوشته شوند. با این کار صفر شدن شیب‌ها در لبه‌های پوسته محقق می‌شود. لازم به ذکر است که در شرایط مرزی به‌کار رفته مطابق معادلات (۱۱)، اجازه حرکات صفحه‌ای وجود دارد [۱۱]. این موضوع برای هر دو شرط مرزی لولا و گیردار صادق است، در غیر این صورت پدیده اتساع یا کش‌آمدگی صفحه‌ای رخ می‌داد و باید از کرنش‌های غیرخطی در حل مسئله استفاده می‌شد. بنابراین در شرط مرزی گیردار شروط صفر بودن تغییر مکان عرضی و شیب صفر برای پوسته‌های نازک کافی است [۶]. برای پوسته استوانه کامل، مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی برای شرط مرزی ساده به‌صورت زیر نوشته می‌شوند [۱۶و۱۷]:

$$
\begin{aligned}
u_0(x,\theta,t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} U_{mn}(t)\cos\alpha_m x \cos n\theta \\
v_0(x,\theta,t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} V_{mn}(t)\sin\alpha_m x \sin n\theta \\
w_0(x,\theta,t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} W_{mn}(t)\sin\alpha_m x \cos n\theta \\
\psi_x(x,\theta,t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} X_{mn}(t)\cos\alpha_m x \cos n\theta \\
\psi_\theta(x,\theta,t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} Y_{mn}(t)\sin\alpha_m x \sin n\theta \\
\alpha_m = \frac{m\pi}{a}, &\ m=1,2,3,\ldots \quad n=0,1,2,3,\ldots,
\end{aligned}
\tag{۱۲}
$$

که در آن، U_{mn}، V_{mn}، W_{mn}، X_{mn} و Y_{mn} ضرایب زمانی هستند که باید تعیین شوند. در معادلات حرکت، تمامی سازه‌های مرکب به‌غیر از پوسته استوانه‌ای شکل با هر دو شرط مرزی ساده و گیردار، q_j (j = t, b) این نیروهای اجرام ضربه‌زننده هستند که می‌توانند به‌ترتیب به سطح بالای سازه (در جهت x_3) و سطح پایین سازه (در جهت $-x_3$) وارد شوند و به‌صورت زیر قابل بسط می‌باشند:

$$
q_j(x_1,x_2,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\sum_{i=1}^{N} q^i_{mn}(t)\Big]\sin(\alpha_m x_1)\sin(\beta_n x_2), \tag{۱۳}
$$

که درآن، i یک شمارنده بوده و معرف تعداد ضربه‌زننده می‌باشد (i=1,2,3,..,N). در اینجا برای حل مسئله از روش باقیمانده وزنی نوع حل تقریبی گالرکین استفاده می‌شود [۶]. با جایگذاری معادلات (۱۱ و ۱۳) در رابطه (۷) و استفاده از روش حل گالرکین، معادلات حرکت پوسته به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
&[M]\{\ddot{X}\} + [K]\{X\} = \{Q\} \\
&\{X\} = \{U_{mn}(t), V_{mn}(t), W_{mn}(t), X_{mn}(t), Y_{mn}(t)\}^T \\
&\{Q\} = \{0,0,q^i_{mn}(t),0,0\}^T,
\end{aligned}
\tag{۱۴}
$$

که در آن، M ماتریس جرم و K ماتریس سفتی بوده و در پیوست الف تعدادی از درآیه های آنها آورده شده است. بنابراین، برای نیروهای ضربه‌زننده متمرکز که به نقاط دلخواه از سطح پوسته همچون (x_{1i}, x_{2i}) مطابق شکل **۱** وارد می‌شوند، ضریب زمانی $q^i_{mn}(t)$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود [۱۶و۱۷].

$$
q^i_{mn}(t) = \frac{4F^i_c(t)}{ab}\sin(\alpha_m x_{1i})\sin(\beta_n x_{2i}), \tag{۱۵}
$$

که در آن، $F^i_c(t)$ نیروهای ضربه بوده که به‌صورت بار ضربه عرضی سطح خارجی و یا زیرین پوسته مطابق شکل **۱** وارد می‌شود. نیروهای ضربه در مراحل بعد توسط دو مدل کامل و جرم و فنر به‌دست خواهند آمد.

برای پوسته استوانه‌ای مرکب با هر دو شرط مرزی ساده و گیردار، q_t نیروی ناشی از اجرام ضربه‌زننده بوده که فقط بر سطح بالای سازه می‌توانند برخورد کنند و به‌صورت سری دوگانه فوریه همانند رابطه (۱۶) قابل بسط می‌باشند:

$$
q_t(x,\theta,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\sum_{i=1}^{N} q^i_{mn}(t)\Big]\sin(\alpha_m x)\cos(n\theta) \tag{۱۶}
$$

که در آن، i یک شمارنده بوده و معرف تعداد ضربه‌زننده می‌باشد (i=1,2,3,..,N). با جایگذاری معادلات (۱۲ و ۱۶) در رابطه (۱۰) و استفاده از روش حل گالرکین، معادلات حرکت پوسته به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$[M]\{\ddot{X}\}+[K]\{X\}=\{Q\}$$
$$\{X\}=\{U_{mn}(t),V_{mn}(t),W_{mn}(t),X_{mn}(t),Y_{mn}(t)\}^T \qquad (۱۷)$$
$$\{Q\}=\{0,0,q^i_{mn},0,0\}^T,$$

که در آن، M ماتریس جرم و K ماتریس سفتی می‌باشند. بنابراین برای نیروهای ضربه‌زننده متمرکز که به نقاط دلخواه از سطح پوسته همچون (x_i,θ_i) مطابق شکل **۲** وارد می‌شوند، ضریب زمانی $q^i_{mn}(t)$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود [۱۷]:

$$\begin{cases} q^i_{m0}(t)=\dfrac{F^i_c(t)}{\pi LR}\sin(\alpha_m x_i) & if \quad n=0 \\ q^i_{mn}(t)=\dfrac{2F^i_c(t)}{\pi LR}\sin(\alpha_m x_i)\cos(n\theta_i) & if \quad n>0 \end{cases}, \qquad (۱۸)$$

که در آن، $F^i_c(t)$ نیروهای ضربه بوده که به‌صورت بار ضربه عرضی بر سطح خارجی پوسته مطابق شکل **۲** وارد می‌شود. نیروهای ضربه در مراحل بعد توسط دو مدل کامل و جرم و فنر به‌دست خواهند آمد.

۴- به‌دست آوردن تاریخچه نیروی ضربه

در مطالعه‌ی حاضر برای تعیین تاریخچه‌ی نیروی تماسی از دو مدل کامل و مدل جرم و فنر بهبودیافته استفاده می‌شود که در ادامه این دو مدل به طور کامل توضیح داده می‌شود.

۴-۱- مدل کامل هرتز

در این مدل از قانون غیرخطی بهبودیافته تماس هرتز برای به‌دست آوردن تاریخچه نیروی تماسی استفاده شده است. قانون تماس هرتز در اصل برای بارگذاری استاتیکی بر روی یک نیم‌فضای الاستیک خطی گسترش یافته است [۱۷]. اما این قانون با انجام تصحیحاتی، برای مسائل ضربه بر روی سازه‌های مرکب نیز به‌کار می‌رود که به‌صورت زیر نوشته می‌شود [۱۸]:

$$F^i_c(t)=K^i_c(\alpha^i)^n=K^i_c(w^i_j-w_0(x_{1i},x_{2i}))^{1.5} \qquad (۱۹)$$

که در آن، α^i، میزان فرورفتگی در iامین نقطه ضربه و w^i_j جابه‌جایی iامین ضربه‌زننده و w_0 جابه‌جایی پوسته در iامین نقطه برخورد و K^i_c سفتی تماسی هرتز iامین ضربه‌زننده می‌باشندکه برای سازه دوانحنایی به‌صورت زیر تعریف می‌شود (برای بقیه سازه‌ها تغییرات گفته شده در بخش ۲ می‌بایست اعمال شود) [۷، ۱۹و۲۰].

$$k^i_c=\frac{4}{3}E^{*i}\sqrt{R^{*i}}$$
$$\frac{1}{E^{*i}}=\frac{1-\nu^{2i}_j}{E^i_j}+\frac{1-\nu^2_S}{E_S},\ \frac{1}{R^*}=\frac{1}{R^i_j}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right), \qquad (۲۰)$$

که در آن، اندیس j و s به‌ترتیب مربوط به جسم ضربه‌زننده و سازه هدف است. شمارنده i شماره ضربه‌زننده‌ها می‌باشند.

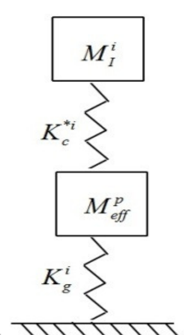
در نهایت با استفاده کردن از مدل کامل هرتز معادلات حاکم بر حرکت به‌صورت یک دسته معادلات دیفرانسیلی معمولی غیرخطی جفت‌شده به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} &[M]\{\ddot{X}\}+[K]\{X\}=\{Q\} \\ &m^i_p\ddot{w}^i_p+F^i(t)=0, \\ &w^i_j(t=0)=0, \\ &\dot{w}^i_j(t=0)=V^i_0 \\ &F^i_c(t)=K^i_c(\alpha^i)^n, \\ &\alpha^i=w^i_j-w_0(x_{1i},x_{2i}). \end{aligned} \qquad (۲۱)$$

۴-۲- مدل جرم و فنر بهبود یافته خطی شده جدید

در این تحقیق از سامانه دو درجه آزادی جرم و فنر [۲۱] مطابق شکل **۳** برای تعیین تاریخچه‌ی نیروی تماسی استفاده شده است. که M^i_I جرم i امین ضربه‌زننده و M^p_{eff} جرم مؤثر پوسته، K^{*i}_c سفتی تماسی خطی اصلاح شده در i امین نقطه ضربه و K^i_g سفتی معادل پوسته می‌باشند. با استفاده از مدل خطی شده‌ی چوی [۲۱] قانون خطی هرتز جایگزین قانون غیرخطی هرتز شده است. بنابراین نیروی تماسی به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$F^i_c=K^{*i}_c[Z^i_2(t)-Z^i_1(t)]$$
$$K^{*i}_c=K^{i\,\frac{1}{n}}_c F^{i\,\frac{n-1}{n}}_{c\max}. \qquad (۲۲)$$



شکل (۳): مدل جرم و فنر دو درجه آزادی خطی بهبودیافته.

در رابطه بالا K^i_c معرف سفتی تماسی غیرخطی به ازای iامین ضربه‌زننده و $F^i_{c\max}$ بیشینه نیروی تماسی پیش‌بینی شده به ازای iامین ضربه‌زننده است. با نوشتن معادلات دیفرانسیل سامانه جرم و فنر خطی، استفاده از معادلات (۲۲) و بعضی از ساده‌سازی‌ها می‌توان نوشت:

$$F^i_c(t)=\frac{K^{i*}_c V^i}{(\phi^i_2-\phi^i_1)}\left[\frac{1-\phi^i_2}{\omega^i_2}\sin(\omega^i_2 t)-\frac{1-\phi^i_1}{\omega^i_1}\sin(\omega^i_1 t)\right]. \qquad (۲۳)$$

$$\omega_1^i=\frac{1}{2}\Bigg(\frac{(N^i+1)K_c^{i*}+K_g^i}{N^iM_I^i}-\sqrt{\Big(\Big(\frac{(N^i+1)K_c^{i*}+K_g^i}{N^iM_I^i}\Big)^2-4\frac{K_c^{i*}K_g^i}{N^iM_I^i}\Big)}\Bigg)$$
$$\omega_2^i=\frac{1}{2}\Bigg(\frac{(N^i+1)K_c^{i*}+K_g^i}{N^iM_I^i}+\sqrt{\Big(\Big(\frac{(N^i+1)K_c^{i*}+K_g^i}{N^iM_I^i}\Big)^2-4\frac{K_c^{i*}K_g^i}{N^iM_I^i}\Big)}\Bigg) \qquad (۲۴)$$
$$\frac{K_c^{i*}}{K_c^{i*}-M_I^i\omega_1^i}=\phi_1^i,\ \frac{K_c^{i*}}{K_c^{i*}-M_I^i\omega_2^i}=\phi_2^i,$$

که در آن $N^i=\frac{M_{eff}^p}{M_I^i}$ می‌باشد و همچنین سفتی پوسته مرکب در i امین نقطه ضربه‌زننده به‌صورت زیر قابل محاسبه است [۲۴-۲۲]:

$$K_g^i=\frac{1}{\delta_1^i}\ ,\quad \delta_1^i=w\,(x_{1i},y_{1i}\ or\ x_i,\theta_i)\ , \qquad (۲۵)$$

که در آن، $\delta_1^{\,i}$ خیز استاتیکی سازه به ازای بار واحد در i امین نقطه ضربه‌زننده می‌باشد.

حال به‌منظور به‌دست آوردن سفتی تماسی خطی‌شده، برای اولین بار در این مقاله از یک روش جدید که بر پایه بسط سینوس و کسینوس می‌باشد، استفاده می‌شود:

$$\sin(\omega_1^it)=(\omega_1^it)-\frac{1}{6}(\omega_1^it)^3$$
$$\sin(\omega_2^it)=(\omega_2^it)-\frac{1}{6}(\omega_2^it)^3. \qquad (۲۶)$$

با جایگذاری معادلات (۲۶) در معادله (۲۳)، اعمال اولین مشتق‌گیری از معادله حاصل و سپس استفاده از معادلات (۲۴) و بعضی ساده‌سازی‌ها، بیشینه زمان تماس و همچنین بیشینه نیروی برخورد به ازای i امین ضربه‌زننده به‌صورت کاملاً تحلیلی و به‌شرح زیر به‌دست می‌آید:

$$t^i_{\max}=\sqrt{\frac{2N^iM_I^i}{(N^i+1)K_c^{i*}}},$$
$$F^i_{c\,\max}=\frac{2}{3}V^i\sqrt{\frac{2N^iM_I^iK_c^{i*}}{(N^i+1)}}, \qquad (۲۷)$$

$$K_c^{i*}=\Big(\frac{2\sqrt{2}}{3}\Big)^{\frac{2(n-1)}{n+1}}$$
$$\Big(\frac{N^i}{N^i+1}\Big)^{\frac{n-1}{n+1}}(V^i)^{\frac{2(n-1)}{n+1}}(K_c^i)^{\frac{2}{n+1}}(M_I^i)^{\frac{n-1}{n+1}}. \qquad (۲۸)$$

در نهایت مشابه روش انجام شده در بخش ۴- ۱ معادلات کلی سازه‌های مرکب تحت اجرام ضربه‌زننده به‌صورت زیر قابل نوشتن است:

$$[M]\{\ddot{X}\}+[K]\{X\}=\{Q\}. \qquad (۲۹)$$

لازم به‌ذکر است که در معادله (۲۹) بردار $\{Q\}$ از مدل جرم و فنر اصلاح‌شده مقاله حاضر به‌دست می‌آید. در تحلیل‌های انجام شده توسط شیواکومار و همکاران[1] [۲۰] و گانگ[2] [۶] جرم مؤثر سازه برابر یک چهارم جرم کل سازه درنظر گرفته شده است. سوانسون[3] [۲۳] رابطه‌ای تقریبی و ساده برای محاسبه جرم مؤثر سازه‌های مرکب در i امین نقطه ضربه به‌صورت زیر ارائه داد.

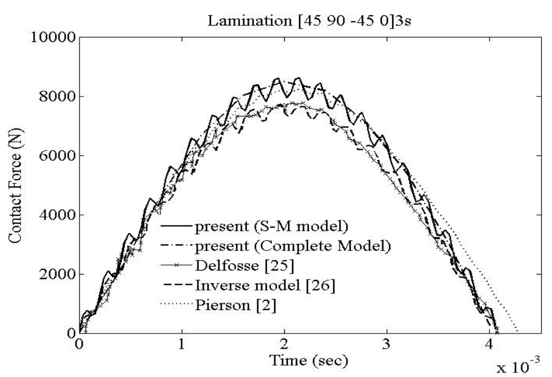
$$M_{eff}^p\approx\frac{K_g^i}{\omega_f^2},$$

ω_f کوچک‌ترین فرکانس طبیعی سازه است که از حل ارتعاشات آزاد به‌دست می‌آید.

۵- صحه‌گذاری نتایج

در این قسمت به صحه‌گذاری نتایج به‌دست آمده از دو مدل پیشنهادی برای سازه‌های مرکب اشاره شده با هر دو شرط مرزی ساده و گیردار پرداخته می‌شود. به‌عنوان اولین مثال، یک صفحه مرکب تحت یک جرم ضربه‌زننده مطابق جدول **۱** درنظر گرفته می‌شود. تاریخچه نیروی تماس به‌دست آمده از مدل کامل و مدل جرم و فنر جدید بهبودیافته با نتایج تجربی دلفوز [۲۵] و مدل تحلیلی پیرسن [۲] و مدل معکوس چیریستوفورو [۲۶] در شکل **۴** مقایسه شده است.

مشاهده می‌شود که نتایج مطابقت خوبی دارند. مدل کامل بیشینه نیروی تماس را نسبت به مدل جرم و فنر بهبودیافته نزدیک‌تر پیش‌بینی می‌کند. مدت زمان تماس حاصل از مدل کامل و جرم و فنر نسبت به حل تحلیلی پیرسن، به‌مدت زمان تماس تجربی دلفوز نزدیک‌تر است. در مثال دوم یک جسم کروی فولادی با پوسته مرکب دو انحنایه برخورد می‌کند.



شکل (۴): مقایسه تاریخچه نیروی تماسی حاصل از مدل‌های پیشنهادی با نتایج به‌دست آمده از کارهای پیشین.

1- Shivakumar
2- Gong
3- Swanson

جدول (۱): هندسه و جنس صفحه و ضربه‌زننده فولادی [۲].

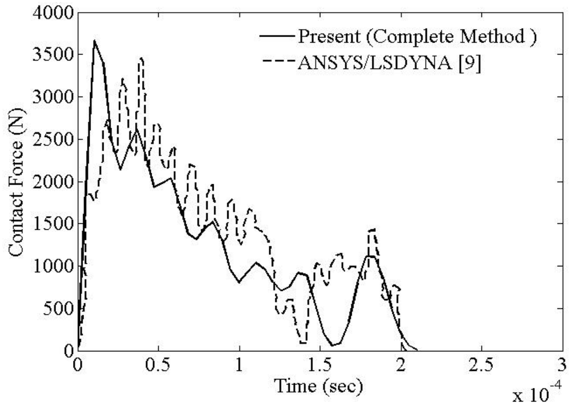
صفحه کامپوزیتی	
$E_{11}=129\,GPa$ $E_{22}=7.5\,GPa$ $G_{12}=G_{13}=3.5\,GPa$ $G_{23}=2.6\,GPa$ $\rho=1540\,kgm^{-3},\ \nu_{12}=0.33$	$a=127\,mm$ $b=76.2\,mm$ $h=4.65\,mm$ $k_c=1.21e9\ \ Nm^{-3/2}$
ضربه‌زننده	
$E=200\,GPa$ $\rho=7971\,kgm^{-3}$ $\nu=0.3$	$d_1=25.4\,mm$ $V_1=1.76\,ms^{-1}$ $m_1=6.15\,Kg$

مشخصات پوسته و ضربه‌زننده در جدول **۲** آورده شده است [۹]. تاریخچه نیروی به‌دست آمده از مدل کامل با تاریخچه نیروی تماس هر و چنگ لیانگ [۹] مطابق شکل **۵** مقایسه شده است و از تطابق خوبی برخوردار است. هر و چنگ در این تحقیق تاریخچه نیروی تماس را از قانون تماس هرتز با استفاده از نرم‌افزار اجزاء محدود ANSYS/LS-DAYNA به‌دست آورده‌اند. در این مثال جسم ضربه‌زننده نسبت به مثال قبلی بسیار سبک‌تر است.

جدول (۲): هندسه و جنس پوسته کروی و ضربه‌زننده فولادی [۹].

مشخصات هندسی پوسته مرکب دو انحنایه
$a=b=25.4\ mm,\ h=2.54\ mm,\ R_1=R_2=1.27\ m$ lamination = [0/90/90/0]
خواص پوسته مرکب دو انحنایه
$E_{11}=144.8\,GPa, E_{22}=9.65\,GPa,\ G_{12}=G_{13}=7.1\,GPa$ $G_{23}=5.92\,GPa,\ V_{12}=0.3,\ \rho=1389.2\,kgm^{-3}$
خواص ضربه‌زننده
$E=200\ GPa,\ \nu=0.3,\ \rho=7870\ kgm^{-3}$ $d_1=12.7\ mm,\ m_1=0.00844\,kg,\ \ V_1=30\ ms^{-1}$

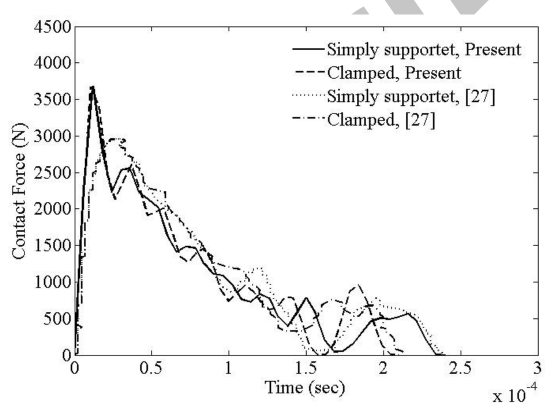
در مثال سوم یک سازه تک‌انحنایه مرکب با شرایط مرزی ساده و گیردار تحت یک جرم ضربه‌زننده در وسط سازه بررسی می‌شود. مشخصات سازه و ضربه‌زننده در جدول **۳** داده شد است. تاریخچه نیرو و خیز به‌دست آمده از مدل کامل برای هر دو نوع شرط مرزی ساده و گیردار برای یک پوسته مرکب تک انحنایه که با نتایج مرجع [۲۷] مقایسه شده است، به‌ترتیب در شکل **۶ و ۷** نشان داده شده است.



شکل (۵): مقایسه تاریخچه نیروی تماسی حاصل ازمدل کامل با حل اجزاء محدود هر و چنگ لیانگ [۹].

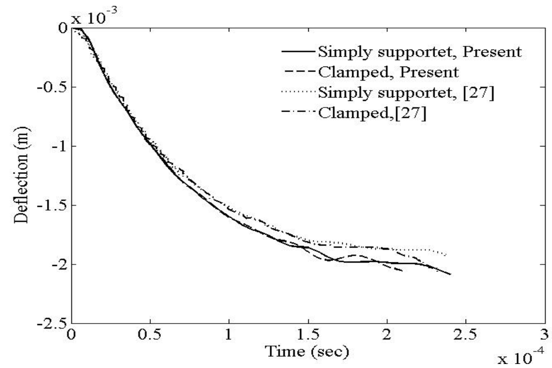
جدول (۳): هندسه و جنس پوسته مرکب تک انحنایه باز و ضربه‌زننده فولادی [۲۷].

پوسته تک انحنایه کامپوزیتی	
$E_{11}=144.8GPa$ $E_{22}=9.65GPa$ $G_{12}=G_{13}=7.1GPa$ $G_{23}=5.92GPa$ $\rho=1389.2\,kgm^{-3},\ \nu_{12}=0.3$	$a=b=254\,mm$ $h=2.54\,mm$ $R_1=\infty,\ R_2=25.4$ lamination = [0/90/90/0]
ضربه‌زننده	
$E=200\,GPa,\ \rho=7870\,kgm^{-3},\ \nu=0.3,\ d_1=12.7\,mm$ $V_1=30\,ms^{-1}$	



شکل (۶): مقایسه تاریخچه نیروی تماسی حاصل از مدل کامل با نتایج مرجع [۲۷] برای هر دو نوع شرط مرزی.

همان‌طور که از شکل‌های **۶** و **۷** مشاهده می‌شود، تطابق بسیار خوبی بین نتایج به‌دست آمده از مدل کامل با نتایج مرجع [۲۷] برای هر دو شرط مرزی برقرار است.

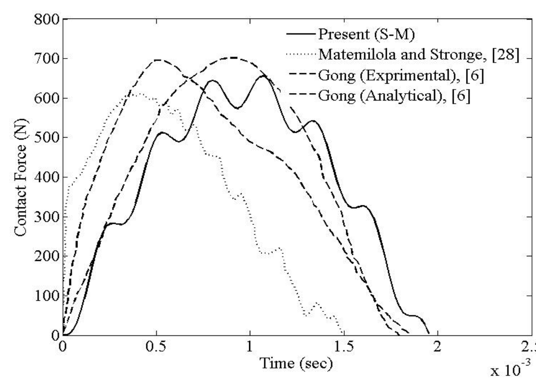


شکل (۷): مقایسه تاریخچه تغییر مکان عرضی(شعاعی) حاصل از مدل کامل با نتایج مرجع [۲۷] برای هر دو نوع شرط مرزی.

به‌عنوان آخرین مثال در زمینه تک‌ضربه، یک پوسته استوانه کامل تحت یک جرم ضربه‌زننده با مشخصات داده شده در جدول **۴** درنظر گرفته می‌شود. در شکل **۸** برای سازه به حالت استوانه کامل تاریخچه نیروی ضربه به‌دست آمده از مدل جرم و فنر با نتایج به‌دست آمده قبلی در مراجع [۶ و ۲۸] مقایسه شده است.

جدول (۴): هندسه و جنس پوسته استوانه‌ای کامل مرکب و ضربه‌زننده فولادی [۲۸].

سازه مرکب استوانه‌ای	
$E_{11}=14.506\,GPa$ $E_{22}=5.362\,GPa$ $G_{12}=G_{13}=2.509\,GPa$ $G_{23}=2.509\,GPa$ $\rho=1526\,kgm^{-3},\ \nu_{12}=0.3$	$L=280\,mm$ $R=108\,mm$ $h=2.3\,mm$ Lamination $[90]_8$
ضربه‌زننده	
$E=200\,GPa,\ \rho=7900\,kgm^{-3},\ \nu=0.3,\ d_1=13.2\,mm$ $V_1=5\,ms^{-1},\ m_1=0.0751\,Kg$	



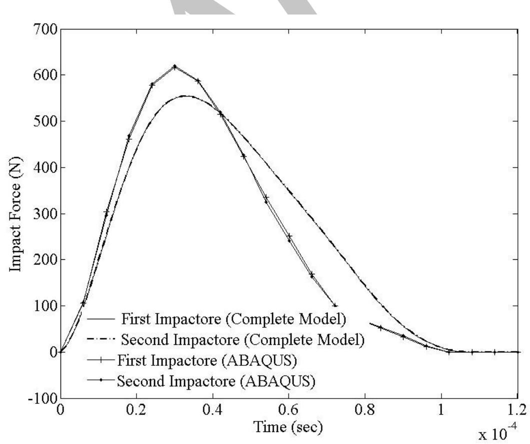
شکل (۸): مقایسه تاریخچه نیروی تماسی حاصل از مدل جرم و فنر با نتایج به‌دست آمده از کارهای پیشین.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، نتایج به‌دست آمده از تطابق بسیار خوبی برقرار است. از مثال‌های بررسی شده قبلی می‌توان گفت که فرمول‌بندی ارائه شده با استفاده از هر دو مدل پیشنهادی با هر دو نوع شرط مرزی، برای سازه‌های مرکب با هندسه‌های مختلف، توانایی بسیار خوبی در پیش‌بینی نتایج دارند. در ادامه به‌منظور اطمینان از صحت فرمول‌بندی ارائه شده در تحلیل چندضربه یک پوسته مرکب تخت با شرط مرزی گیردار تحت برخورد دو جرم ضربه‌زننده در نقاط $(x_1=a/5,\ y_1=b/2)$ و $(x_2=4a/5,\ y_2=b/2)$ درنظر گرفته می‌شود. خواص مکانیکی و جنس پوسته و ضربه‌زننده‌ها مشابه جدول **۳**و خواص هندسی صفحه و اجرام ضربه‌زننده مطابق جدول **۵** می‌باشد.

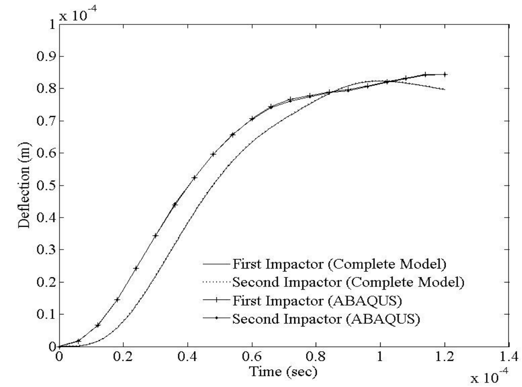
جدول (۵): خواص هندسی اجرام ضربه‌زننده و صفحه.

$a=b=300\,mm,\ h=4.5\,mm,$ Lamination [0 90 90 0]
$d_i=18\,mm, V_i=3\,ms^{-1},\ m_i=0.008\,Kg;\ i=1,2$
$x_1=a/5,\ x_2=4a/5,\ y_1=y_2=b/2$

با توجه به نبود تحقیق و مقالات در زمینه تحلیل چندضربه پوسته‌ها در مراجع، به‌منظور صحه‌گذاری در تحلیل دوضربه، از نرم‌فزار المان محدود ABAQUS استفاده می‌گردد. سازه مفروض تحت برخورد دو جرم ضربه‌زننده در این نرم‌افزار مدل گردیده و از المان‌های هشت گره‌ای SC8R استفاده شده است. نتایج حاصل با یکدیگر مقایسه شده است. در شکل **۹** و **۱۰** به‌ترتیب تاریخچه نیروی برخورد و خیز صفحه مرکب در هر دو نقطه برخورد، مقایسه و نشان داده شده است.

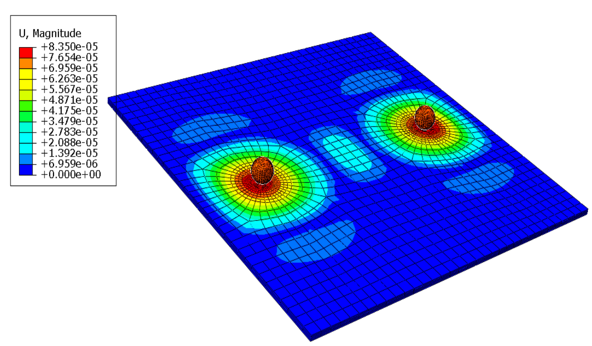


شکل (۹): مقایسه تاریخچه نیروی تماسی حاصل از دو مدل تحلیلی و المان محدود.



شکل (۱۰): مقایسه خیز عرضی حاصل از دو مدل تحلیلی و المان محدود.

همچنان که این شکل‌ها نشان می‌دهند، نتایج به‌دست آمده برای نیرو و خیز با استفاده از فرمول‌بندی ارائه‌شده و المان محدود، توافق و تطابق بسیارخوبی با هم دارند. چون ضربه‌زننده‌ها به‌طور کامل مشابه هم بوده و همچنین نقاط ضربه نسبت به مرکز صفحه مرکب متقارن بوده، بنابراین بیشینه نیرو و خیز در دو نقطه برخورد کاملاً برابر می‌باشند. نتایج و نمودارهای خیز و نیرو برحسب زمان به‌دست آمده از مدل حاضر، برای ضربه‌زننده اول و دوم به‌علت تقارن محل ضربه زننده‌ها و شرایط مرزی ورق کاملاً روی هم منطبق شده‌اند. این اتفاق برای نتایج المان محدود نیز ملاحظه می‌شود. بیشینه نیرو و خیز به‌دست آمده حاصل از روش المان محدود کمی بیشتر از روش حاضر می‌باشند که می‌تواند به‌دلیل استفاده از المان جامد و مدل Hard Contact باشد. در شکل **۱۱** نمای سه‌بعدی پوسته مرکب تحت برخورد دو جرم ضربه‌زننده با استفاده از مدل المان محدود آورده شده است.



شکل (۱۱): پوسته مرکب مسطح تحت برخورد دو جرم ضربه‌زننده در نرم‌افزار ABAQUS.

از نتایج ذکر شده می‌توان نتیجه گرفت که فرمول‌بندی ارائه شده توانایی بسیار بالایی در تحلیل تک و چندضربه سازه‌های مرکب را دارد. در ادامه بعضی از نتایج مربوط به اثر بعضی از پارامترهای هندسی و مکانیکی ضربه‌زننده‌ها روی رفتار دینامیکی این سازه‌ها بررسی می‌شوند.

۶- نتایج مربوط به مطالعه پارامتری و بحث

در این قسمت به بررسی اثر بعضی پارامترهای هندسی و مکانیکی پوسته‌های اشاره شده مانند، نسبت طول به عرض (a/b) سازه یا همان ضریب منظری، نسبت طول به شعاع پوسته استوانه‌ای (L/R)، زاویه الیاف، سرعت اجرام ضربه‌زننده بر روی رفتار دینامیکی این سازه‌ها پرداخته شده است و نتایج به‌دست آمده در بعضی موارد از هر دو مدل کامل و جرم و فنر و برای هر دو نوع شرط مرزی ساده و گیردار و در بعضی دیگر با یکی از این مدل‌ها با هم مقایسه و بحث شده است.

۶-۱- اثر نسبت a/b

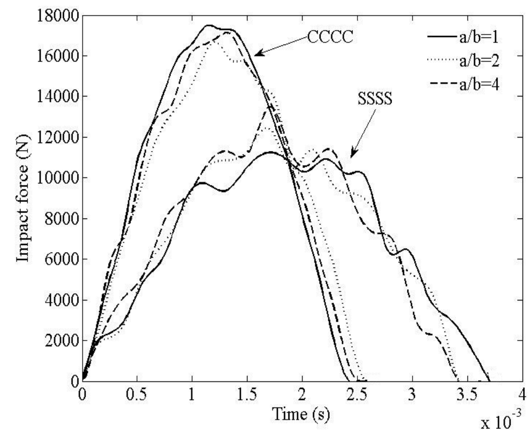
در این بخش اثر پارامتر طول به عرض پوسته مرکب دو انحنایه تحت برخورد دو جرم ضربه‌زننده در نقاط $(x_1=a/5, y_1=b/2)$ و $(x_2=4a/5,\ y_2=b/2)$ بررسی می‌شود. خواص مکانیکی پوسته و ضربه‌زننده‌ها مانند جدول **۶** می‌باشد.

جدول (۶): هندسه و جنس پوسته مرکب دوانحنایی و اجرام ضربه‌زننده.

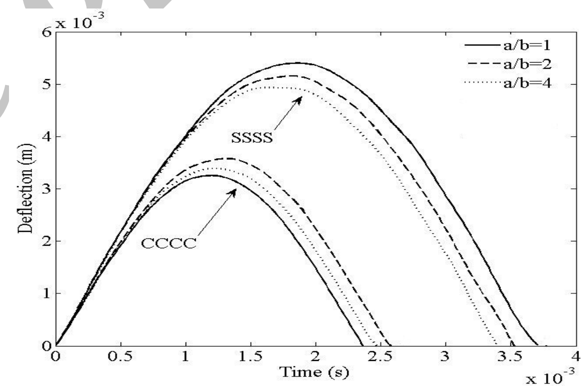
پوسته مرکب دوانحنایه	
$E_{11}=141.73\,GPa$ $E_{22}=13.79\,GPa$ $G_{12}=G_{13}=4.64\,GPa$ $G_{23}=4.14\,GPa$ $\rho=1610\,kgm^{-3},\ \nu_{12}=0.3$	$a=250\ mm$ $b=250\ mm$ $h=3.81\ mm$ Lamination $[\theta\ -\theta\ \ \theta\ -\theta]$ $R_1=R_2=0.5\ m$
اجرام ضربه‌زننده	
$E=200\ GPa$ $\rho=7971\ kgm^{-3}$ $\nu=0.3$	$d_i=9.25\ mm$ $V_i=5\ ms^{-1}$ $m_i=2.6\,kg\ ;i=1,2$

در شکل **۱۲** و **۱۳** به‌ترتیب تغییرات تاریخچه نیروی برخورد و خیز پوسته مرکب با نسبت‌های مختلف a/b برای هر دو نوع شرط مرزی آورده شده است. شکل **۱۲** نشان می‌دهد که با افزایش نسبت طول به عرض سازه (ضریب منظری سازه) نیروی بیشینه برای شرط مرزی ساده و گیردار به‌ترتیب کمی افزایش می‌یابند. با افزایش نسبت طول به عرض از ۱ به ۴ و افزایش نسبی سفتی پوسته بیشینه نیرو برای شرط مرزی ساده و گیردار به‌ترتیب ۲۰/۳٪ و ۲٪ افزایش و کاهش می‌یابند. با

توجه به چیره‌بودن اثرات شرایط مرزی و انحناهای گیردار بر اثرات افزایش نسبت طول به عرض، ملاحظه می‌شود که اثر این پارامتر روی پوسته با شرایط مرزی گیردار کمتر از حالت اطراف لولا می‌باشد.



شکل (۱۲): تغییرات تاریخچه نیروی برخورد به دست آمده از مدل کامل در نقطه‌ی برخورد اول با نسبت طول به عرض سازه برای هر دو نوع شرایط مرزی.

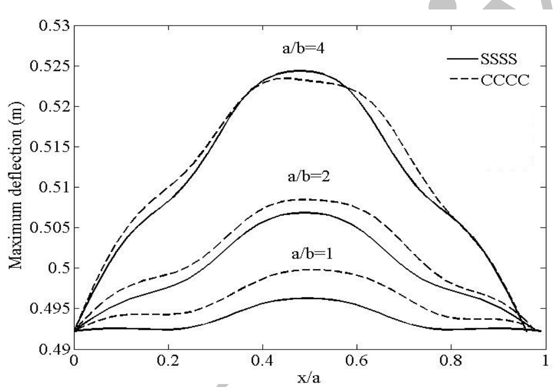


شکل (۱۳): تغییرات تاریخچه خیز به دست آمده از مدل کامل در نقطه‌ی برخورد اول با نسبت طول به عرض سازه برای هر دو نوع شرط مرزی.

از مشاهده شکل **۱۳** ملاحظه می‌شود که رفتار تغییرات خیز با نسبت طول به عرض برعکس نیرو می‌باشد، به‌نحوی که با افزایش نسبت طول به عرض از ۱ به ۴، بیشینه خیز سازه برای شرط مرزی ساده و گیردار به‌ترتیب ۸/۳٪ کاهش و ۹/۳۷٪ افزایش می‌یابد. این موضوع و پیچیدگی رفتاری به‌دلیل اثرات متقابل انحناها و شرایط مرزی به‌طبع افزایش و کاهش دو دهنه پوسته در جهات دو محور عمود برهم می‌باشد. این در حالی است که در یک ورق تحت چنین رفتارهایی ملاحظه نمی‌شود. همچنین این شکل‌ها نشان می‌دهند که در هر نسبت طول به عرض، مقدار نیرو برای شرط مرزی گیردار بیشتر از شرط مرزی ساده بوده و این رفتار به‌دلیل افزایش سفتی سازه می‌باشد. این رفتار برای خیز سازه برعکس است. تغییرات خیز بیشینه در راستای طولی سازه (y=b/2) با نسبت‌های مختلف a/b برای هر دو نوع شرط مرزی ساده و گیردار در شکل **۱۴** نشان داده شده است. ملاحظه می شود که با افزایش ضریب منظری پوسته (a/b) و تبدیل شدن به باریکه، اثرات شرایط مرزی به‌علت نزدیک شدن دو لبه مقابل کاهش یافته و حالات لولا و گیردار رفتاری مشابه از خود نشان می‌دهند.

۶-۲- اثر سرعت ضربه‌زننده

در این بخش به بررسی اثر سرعت ضربه‌زننده‌ها بر روی رفتار دینامیکی پوسته مرکب تک‌انحنایه تحت برخورد دو جرم ضربه‌زننده در نقاط $(x_1=a/2, y_1=b/2)$ و $(x_2=4a/5, y_2=b/2)$ با استفاده از مدل کامل پرداخته می‌شود. خواص مکانیکی پوسته و ضربه‌زننده مشابه جدول **۳** می‌باشد، ولی خواص هندسی پوسته در جدول **۷** داده شده است. سرعت ضربه‌زننده‌های اول و دوم در سه حالت مورد مطالعه به‌صورت (۵ و ۱۰)، (۱۰ و ۱۵) و (۱۵ و ۱۵) متر بر ثانیه می‌باشند. همچنین جرم هر یک از ضربه‌زننده‌ها 8.53gr و قطر هر کدام ۱۲/۷ mm می‌باشند.



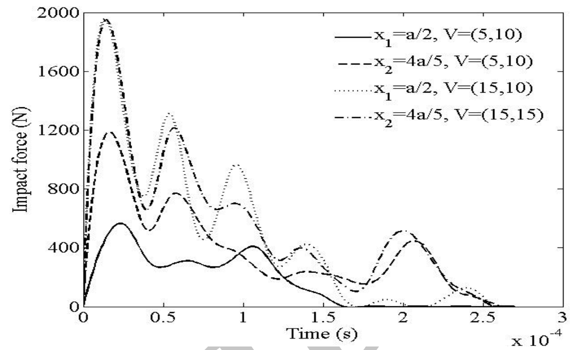
شکل (۱۴): تغییرات بیشنه خیز به‌دست آمده از مدل کامل در راستای x (y=b/2) با نسبت طول به عرض سازه برای هر دو نوع شرط مرزی.

جدول (۷): خواص هندسی پوسته تک‌انحنایی.

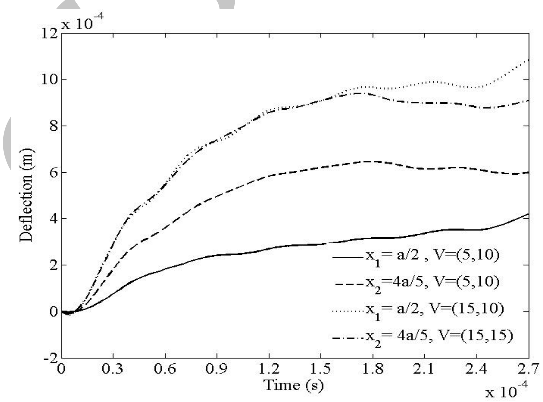
$a=300\,mm,\ b=200\,mm,\ h=2.54\,mm,\ R_1=\infty,\ R_2=10h,$ lamination $=[0/90/90/0]$

در شکل **۱۵** و **۱۶** به ترتیب تاریخچه نیرو و خیز برای سرعت‌های ضربه‌زننده فوق و در بعضی از نقاط برخورد با استفاده از مدل کامل برای پوسته‌ی مرکب تک انحنایه با

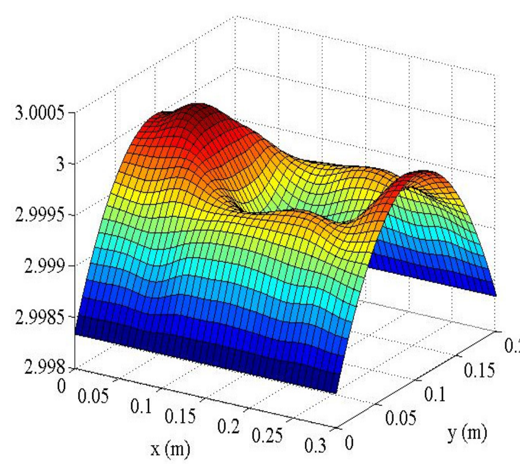
شرط مرزی گیردار نشان داده است. به‌کمک روش حل حاضر، نمای سه‌بعدی پوسته‌مرکب تک‌انحنایه تحت دو جرم ضربه‌زننده در شکل **۱۷** آورده شده است. در این شکل محور عمودی خیز و واحد آن متر می‌باشد.



شکل (۱۵): تغییرات تاریخچه نیروی برخورد در هر دو نقطه‌ی برخورد با سرعت ضربه‌زننده.



شکل (۱۶): تغییرات تاریخچه نیروی برخورد در هر دو نقطه برخورد با سرعت ضربه‌زننده.



شکل (۱۷): نمای سه‌بعدی بیشینه تغییر شکل پوسته مرکب تک‌انحنایه باز تحت برخورد دو جرم ضربه‌زننده با سرعت V=(15,10) با شرط مرزی گیردار.

این شکل‌ها نشان می‌دهند که با افزایش سرعت برخورد اجرام ضربه‌زننده در هر نقطه، برخورد نیرو و خیز افزایش می‌یابد، زیرا انرژی ضربه‌زننده افزایش می‌یابد. بدیهی است که هرچه محل برخورد به لبه تکیه‌گاهی پوسته نزدیک‌تر باشد نیروی برخورد بیشتر و خیز کمتری مشاهده می‌شود.

از طرفی همان‌طور که مشاهده می‌شود، زمان تماس تاریخچه نیرو با تاریخچه خیز برابر نیست و به‌عبارتی هنگامی که نیرو به صفر می‌رسد تاریخچه خیز به صفر نمی‌رسد و افزایش می‌یابد. این پدیده فقط در جرم‌های کوچک اتفاق می‌افتد.

۶-۳- اثر نسبت L/R در استوانه کامل

یکی دیگر از پارامترهای بسیار مهم در پوسته‌های مرکب استوانه‌ای تحت برخورد اجرام ضربه‌زننده، نسبت طول به شعاع سازه (L/R) می‌باشد. در این بخش اثر این نسبت روی رفتار دینامیکی پوسته استوانه‌ای تحت برخورد سه جرم ضربه‌زننده در نقاط (x_1=L/4, θ_1=0)، (x_2=L/2, θ_2=0) و (x_3=3L/4, θ_3=0) بررسی می‌شود. خواص هندسی و مکانیکی ضربه‌زننده‌ها و پوسته‌ی استوانه‌ای در جدول **۸** داده شده است.

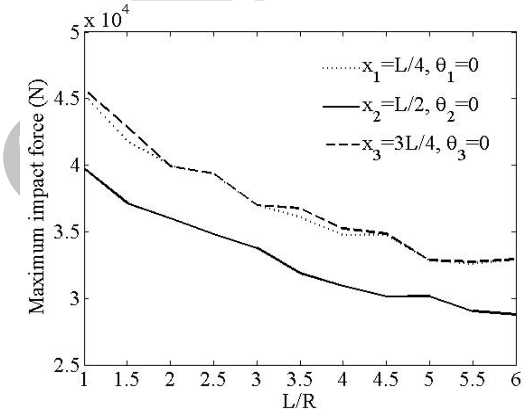
جدول (۸): هندسه و جنس پوسته مرکب استوانه‌ای و اجرام ضربه‌زننده.

پوسته‌مرکب استوانه‌ای	
$E_{11}=138GPa,\ E_{22}=9GPa$ $G_{12}=G_{13}=7.1GPa$ $G_{23}=3.24GPa$ $\rho=1540\,kgm^{-3},\ \nu_{12}=0.3$	$R=0.1\,m$ $\text{lamination}[0/90/0/90]_s$ $L=2R$
اجرام ضربه‌زننده	
$E=200\ GPa$ $\rho=7971\ kgm^{-3}$ $\nu=0.3$	$d_i=25.4\ mm$ $V_i=20\ ms^{-1};\ i=1,2$

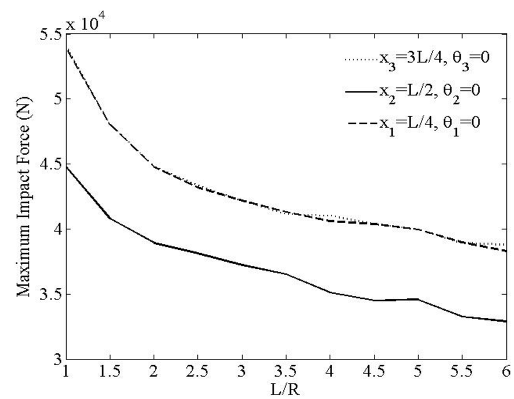
همچنین جرم تمامی ضربه‌زننده‌ها ۲/۵ کیلوگرم می‌باشد. تغییرات بیشینه نیروی برخورد در هر سه نقطه برخورد برای هر دو نوع شرط مرزی ساده و گیردار با نسبت L/R (از ۱ تا ۶) به‌ترتیب در شکل **۱۸** و **۱۹** نشان داده شده است.

همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش نسبت طول به شعاع سازه یا به‌عبارتی با افزایش طول پوسته استوانه‌ای، مقدار بیشینه نیروی برخورد در هر سه نقطه برخورد کاهش می‌یابد زیرا سفتی سازه کاهش پیدا می‌کند. همان‌طور که مشاهده

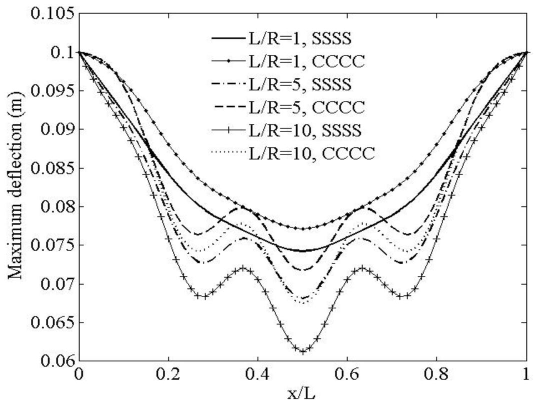
می‌شود مقدار نیروی برخورد در هر نسبت طول به شعاع و برای هر نوع شرط مرزی در نقطه برخورد دوم کمتر از نقاط دیگر می‌باشد، زیرا سفتی در مرکز یک سازه همواره کمتر از بقیه نقاط می‌باشد. بدیهی است که هرچه محل برخورد به لبه تکیه‌گاهی پوسته نزدیک‌تر باشد، نیروی برخورد بیشتر و خیز کمتری مشاهده می‌شود. شکل‌های **۱۸** و **۱۹** نشان می‌دهند که بارگذاری و مختصات آنها در جهت طولی استوانه نسبت به وسط استوانه متقارن است. همچنین به‌دلیل کمتر بودن انعطاف‌پذیری سازه با شرط مرزی گیردار، مقدار نیروی برخورد برای شرط مرزی گیردار در هر نسبت طول به شعاع بیشتر از شرط مرزی ساده می‌باشد. تغییرات بیشینه خیز پوسته برای سه نسبت L/R=1,5,10 و برای هر دو نوع شرایط مرزی در راستای طولی سازه استوانه‌ای ($\theta=0$) در شکل **۲۰** نشان داده شده است.



شکل (۱۸): تغییرات بیشنه نیروی برخورد در هر سه نقطه برخورد با نسبت L/R برای استوانه با دو سرشرط مرزی ساده.

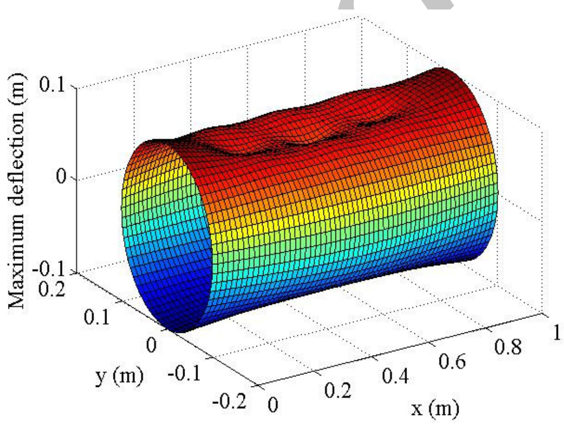


شکل (۱۹): تغییرات بیشنه نیروی برخورد در هر سه نقطه برخورد با نسبت L/R برای شرط مرزی گیردار.



شکل (۲۰): تغییرات بیشینه خیز در راستای x ($\theta=0$) با نسبت L/R برای هر دو نوع شرط مرزی .

شکل **۲۰** نشان می‌دهد که در نسبت‌های پایین طول به شعاع، سازه دست‌خوش خیز بسیار کمتری می‌شود و همچنین به‌دلیل نزدیک بودن نقاط برخورد در طول‌های کم سازه، سازه به‌صورت یکپارچه خیز برمی‌دارد. ولی در نسبت‌های بالای طول به شعاع سازه، خیز زیر نقاط برخورد بیشینه بوده و سازه به صورت یکپارچه منظم دست‌خوش جابه‌جایی نمی‌شود. همچنین با افزایش نسبت L/R به‌دلیل بیشتر شدن انعطاف‌پذیری سازه مقدار خیز افزایش یافته و این افزایش برای شرط مرزی ساده به مراتب بیشتر می‌باشد. نمای سه‌بعدی پوسته مرکب استوانه‌ای تحت برخورد سه جرم ضربه‌زننده برای نسبت L/R=10 با شرط مرزی ساده در شکل **۲۱** نشان داده شده است.



شکل (۲۱): نمای سه‌بعدی تغییر شکل بیشینه پوسته مرکب استوانه‌ای تحت برخورد سه جرم ضربه‌زننده برای نسبت L/R=10 برای شرط مرزی دوسر ساده.

۷- نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر، برای اولین بار پاسخ دینامیکی انواع پوسته‌های مرکب تحت ضربه چند جرم ضربه‌زننده براساس تئوری مرتبه برشی اول و با استفاده از روش سری فوریه مطالعه شده و معادلات حرکت به‌روش نیمه‌تحلیلی حل شده است. بعضی از نتایج به‌دست آمده در این مقاله عبارتند از:

۱- دو مدل جرم و فنر خطی‌شده جدید و مدل کامل غیرخطی هرتز توانایی بسیار بالایی در تحلیل چند ضربه داشته و توافق خوبی با هم دارند.

۲- با افزایش نسبت طول به عرض از ۱ به ۴، بیشینه خیز سازه برای شرط مرزی ساده و گیردار به ترتیب ۸/۳٪ کاهش و ۹/۳۷٪ افزایش می‌یابد. این موضوع و پیچیدگی رفتاری به‌دلیل اثرات متقابل انحناها و شرایط مرزی، به‌طبع افزایش و کاهش دو دهنه پوسته در جهات دو محور عمود بر هم می‌باشد. این در حالی است که در یک ورق تحت چنین رفتارهایی ملاحظه نمی‌شود.

۳- با افزایش ضریب منظری پوسته و تبدیل شدن به باریکه اثرات شرایط مرزی به‌علت نزدیک شدن دو لبه مقابل کاهش یافته و حالات لولا و گیردار رفتاری مشابه از خود نشان می‌دهند.

۴- با افزایش نسبت طول به عرض پوسته دوانحنایی (a/b)، برای شرایط مرزی ساده مقدار نیرو افزایش و برای شرط مرزی گیردار نیرو کاهش می‌یابد. این تغییرات برای خیز پوسته برعکس می‌باشد. با توجه به چیره بودن اثرات شرایط مرزی و انحناهای گیردار بر اثرات افزایش نسبت طول به عرض، ملاحظه می‌شود که اثر این پارامتر روی پوسته با شرایط مرزی گیردار کمتر از حالت اطراف لولا می‌باشد.

۵- با افزایش نسبت (L/R) به‌دلیل افزایش انعطاف‌پذیری سازه‌ها، مقدار نیرو کاهش و خیز بیشینه در زیر هر نقطه ضربه‌زننده افزایش می‌یابد.

۶- با تغییر سرعت اجرام ضربه‌زننده، بیشینه نیرو و خیز به‌دلیل بیشتر شدن انرژی ضربه‌زننده‌ها، افزایش می‌یابند.

۷- در تمامی تحلیل‌های انجام شده مقدار نیرو برای شرط مرزی گیردار بیشتر از شرط مرزی ساده بوده و این روند برای خیز برعکس می‌باشد. شرط مرزی گیردار باعث سفت تر بودن سازه‌ها می‌گردد.

۸- در ضربه‌زننده‌های با جرم کوچک زمان تماس برای تاریخچه نیرو و تاریخچه خیز متفاوت می‌باشد در حالی که در اجرام بزرگ ضربه‌زننده زمان تماس برای هر دوی آنها تقریبا برابر می‌باشد.

۸- مراجع

1. Christoforou, A.P. and Swanson, S.R. "Analysis of Impact Response in Composite Plate", Int. J. Solids Strut; Vol. 27, No.2, pp. 161-70, 1991.
2. Pierson, M.O. and Vaziri, R. "Analytical Solution for Low-Velocity Impact Response of Composite Plates", AIAA J., Vol. 34, No. 8, pp. 1633–40, 1996.
3. Christoforou, A.P. and Yigit, A.S. "Characterization of Impact in Composite Plates", Int. J. Composite Structures, Vol. 43, No.1, pp. 15-24, 1998.
4. Chun, L. and Lam, K.Y. " Dynamic Response of Fully Clamped Laminated Composite Plates Subjected to Low Velocity Impact of a Mass", Int. J. Solids Struct; Vol. 35, No.11, pp. 963–79, 1998.
5. Sun, C.T. and Chen, J.K. "On the Impact of Initially Stressed Composite Laminates", Int. J. Composite Materials, Vol. 19, No. 6, pp. 490–504, 1985.
6. Gong, S.W., Toh, S.L. and Shim, V.P.W. "The Elastic Response of Orthotropic Laminated Cylindrical Shells to Low-Velocity Impact", Int. J. Composites Eng., Vol. 4, No. 2, pp. 241-266, 1994.
7. Chandrashekara, K. and Schroeder, T. "Nonlinear Impact Analysis of Laminated Cylindrical and Doubly Curved Shells", Int. J. Compsite Materials, Vol. 29,No.16, pp. 2160-2179, 1995.
8. Krishnamurthy, K.S., Mahajan, P., and Mittal, R.K. "A Parametric Study of the Impact Response and Damage of Laminated Cylindrical Composite Shells" Int. J. Composite Sciens, Vol. 61, No.12, pp. 1655–69, 2001.
9. Shiuh-Chuan, H. and Yu-Cheng, L. "The Finite Element Analysis of Composite Laminates and Shell Structures Subjected to Low Velocity Impact", Int. J. Composite Structures, Vol. 66, No.1-4, pp. 277–285, 2004.
10. Lam, K.Y. and Sathiyamoorthy, T.S. "Response of Composite Beam under Low-Velocity Impact of Multiple Masses'', Int. J. Composite Structures, Vol. 44, No.2-3, pp. 205-220, 1999.
11. Ghajar, R., Malekzadeh, K., Gholami, M. "Analysis of impact dynamic response of doubly curved composite laminated shell uner initial stresses" Aerospace mechanics Emam Hossien Journal, accepted in 16 september Vol. 10, No.4, 2013(In Persion).
12. Reddy, J.N. "Exact Solution of Moderately Thick Laminated Shells", Int. J. Engng Meek. ASCE, Vol. 118, No.5, pp. 794-889, 1984.
13. Sanders, J.L. "An Improved First Approximation Theory for Thin Shells", NASA THR24, 1959.
14. Ugural, AC. "Stresses in Plates and Shells", McGraw-Hill, 1999.
15. Mindlin, R.D. "Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates", Int. J. Applied Mech., Vol. 18, No.2, pp. 31–8, 1951.
16. Qatu, M.S. "Vibtation of Laminated Shells and Platrs", first edition, John Whily Press, 2004.
17. Carvalho, A. and Soares, C.G. "Dynamic Response

of Rectangular Plates of Composite Materials Subjected to Impact Loads", Int. J. Composite Structures, Vol. 34, pp. 55–63, 1996.
18. Zheng, D. and Binienda, W.K. "Analysis of Impact Response of Composite Laminates under Prestress", 10.1061/(ASCE)0893-132121, Vol. 21, No. 24, pp. 127-135, 2008.
19. Abrate, S. "Modeling of Impacts on Composite Structures", Int. J. Composite Structures, Vol. 51, No.2, pp. 129-38, 2001.
20. Shivakumar, K.N., Elber, W., and lllg, W. "Prediction of Impact Force and Duration Due to Low Velocity on Circular Composite Laminates", Int. J. Mechanics, Vol. 52, No.3, pp.674-680, 1985.
21. Choi, I.H. and Lim, C.H. "Low-Velocity Impact Analysis of Composite Laminates Using Linearized Contact Law", Int. J. Composite Structures, Vol. 66, No.1-4, pp. 125–32, 2004.
22. Shokuhfar, A., Khalili, S.M.R., Ashenai Ghasemi, F., Malekzadeh, K., and Raissi, S. "Analysis and Optimization of Smart Hybrid Composite Plates Subjected to Low-Velocity Impact Using the Response Surface Methodology (RSM)", Thin-Walled Structures, Vol. 46, No.11, pp. 1204–12, 2008.
23. Swanson, S.R. "Limits of Quasi-Static Solutions in Impact of Composite Structures", Int. J. Composite Engeineering, Vol. 2, No. 4, pp. 261-267, 1992.
24. Abrate, S. "Impact on Composite Structures", Cambridge University Press, US, 1998.
25. Delfosse, D., Vaziri, R., Pierson, M.O., and Poursartip, A. "Analysis of the Non-Penetrating Impact Behavior of CFRP Laminates", In: Proceeding of the 9th Int. Conf. on Composite Materials (Madrid, Spain), Cambridge, England, UK: Woodhead Publishing, Vol. 5, No. 9, pp. 366–73, 1993.
26. Christoforou, A.P., Elsharkawy, A.A., and Guedouar, L.H. "An Inverse Solution for Low Velocity Impact in Composite Plates", Int. J. Computers and structures, Vol. 79, No. 29-30, pp. 26 07 – 2619, 2001.
27. Krishnamurthy, K..S., Mahajan, P., and Mittal, R.K. "Impact Response and Damage in Laminated Composite Cylindrical Shells", Composite Structures, Vol. 59, No.1, pp. 15–36, 2003.
28. Matemilola, S.A. and Stronge, W.J. "Impact Response of Composite Cylinders. Int. J. Solids and Structures", Vol. 34, No. 21, pp. 2669-2684, 1997.

پیوست الف

تعدادی از اپراتورهای مشتقات L_{ij} و درآیه های مـاتریس‌هـای سفتی k_{ij} و جرمی M_{ij} پوسته مرکب دو انحنایه باز عبارتند از:

$$L_{11}=A_{11}\frac{\partial^2}{\partial X_1^2}+(A_{66}+2C_0B_{66}+C_0^2D_{66})\frac{\partial^2}{\partial X_2^2}+$$

$$2C_0B_{16}\frac{\partial^2}{\partial X_1\partial X_2}-\frac{K_SA_{55}}{R_1^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$L_{12}=L_{21}=-C_0B_{16}\frac{\partial^2}{\partial X_1^2}+C_0B_{26}\frac{\partial^2}{\partial X_2^2}+$$

$$(A_{12}+A_{66}-C_0^2D_{66})\frac{\partial^2}{\partial X_1\partial X_2}$$

$$L_{13}=-L_{31}=\left[\frac{(A_{11}+K_SA_{55})}{R_1}+\frac{A_{12}}{R_2}\right]\frac{\partial}{\partial X_1}+$$

$$C_0\left(\frac{B_{16}}{R_1}+\frac{B_{26}}{R_2}\right)\frac{\partial}{\partial X_2}$$

$$L_{14}=L_{41}=B_{11}\frac{\partial^2}{\partial X_1^2}+(B_{66}+C_0D_{66})\frac{\partial^2}{\partial X_2^2}+$$

$$2B_{16}\frac{\partial^2}{\partial X_1\partial X_2}+\frac{K_SA_{55}}{R_1}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$L_{15}=L_{51}=(B_{12}+B_{66}+C_0D_{66})\frac{\partial^2}{\partial X_1\partial X_2}+$$

$$B_{16}\frac{\partial^2}{\partial X_1^2}+B_{26}\frac{\partial^2}{\partial X_2^2}$$

$$L_{22}=(A_{66}-2C_0B_{66}+C_0^2D_{66})\frac{\partial^2}{\partial X_1^2}+$$

$$A_{22}\frac{\partial^2}{\partial X_2^2}-2C_0B_{26}\frac{\partial^2}{\partial X_1\partial X_2}-\frac{K_SA_{44}}{R_2^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$L_{23}=-L_{32}=-C_0\left(\frac{B_{16}}{R_1}+\frac{B_{26}}{R_2}\right)\frac{\partial}{\partial X_1}+$$

$$\left[\frac{A_{12}}{R_1}+\frac{1}{R_2}(A_{22}+K_SA_{44})\right]\frac{\partial}{\partial X_2}$$

$$L_{24}=L_{42}=B_{16}\frac{\partial^2}{\partial X_1^2}+B_{26}\frac{\partial^2}{\partial X_2^2}+$$

$$(B_{12}+B_{66}-C_0D_{66})\frac{\partial^2}{\partial X_1\partial X_2}$$

$$L_{25}=L_{52}=(B_{66}-C_0D_{66})\frac{\partial^2}{\partial X_1^2}+$$

$$B_{22}\frac{\partial^2}{\partial X_2^2}+2B_{26}\frac{\partial^2}{\partial X_1\partial X_2}+\frac{K_SA_{44}}{R_2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$L_{33}=K_SA_{55}\frac{\partial^2}{\partial X_1^2}+K_SA_{44}\frac{\partial^2}{\partial X_2^2}-\frac{A_{11}}{R_1^2}$$

$$-\frac{2A_{12}}{R_1R_2}-\frac{A_{22}}{R_2^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$k_{11} = A_{11}\alpha_m^2 + \left(A_{66} + 2C_0B_{66} + C_0^2D_{66}\right)\beta_n^2 + \frac{k_sA_{55}}{R_1^2}$$

$$k_{12} = k_{21} = \left(A_{12} + A_{66} - C_0^2D_{66}\right)\alpha_m\beta_n$$

$$k_{13} = k_{31} = -\left[\frac{1}{R_1}\left(A_{11} + k_sA_{55}\right) + \frac{A_{12}}{R_2}\right]\alpha_m$$

$$k_{15} = k_{51} = \left(B_{12} + B_{66} + C_0D_{66}\right)\alpha_m\beta_n$$

$$k_{22} = A_{22}\beta_n^2 + \left(A_{66} - 2C_0B_{66} + C_0^2D_{66}\right)\alpha_m^2 - \frac{k_sA_{44}}{R_2^2}$$

$$k_{23} = k_{32} = -\left[\frac{1}{R_2}\left(A_{22} + k_sA_{44}\right) + \frac{A_{12}}{R_1}\right]\beta_n$$

$$k_{24} = k_{42} = \left(B_{12} + B_{66} - C_0D_{66}\right)\alpha_m\beta_n$$

$$k_{25} = k_{52} = B_{22}\beta_n^2 + \left(B_{66} - C_0D_{66}\right)\alpha_m^2 - \frac{k_sA_{44}}{R_2}$$

$$k_{33} = k_sA_{55}\alpha_m^2 + k_sA_{44}\beta_n^2 + \frac{A_{11}}{R_1^2} + \frac{2A_{12}}{R_1R_2} + \frac{A_{22}}{R_2^2}$$

تعدادی از درآیه های ماتریس جرم:

$$M_{11} = M_{22} = M_{33} = I_0$$

$$M_{14} = M_{25} = I_1$$

$$M_{44} = M_{45} = I_2,\ \ M_{ij} = M_{ji}$$