یاسخ دینامیکی یوستههای مرکب انحنادار تحت ضربه عرضی

با سرعت پایین با اجرام ضربهزننده

محسن غلامی کرامت ملک زادہ فرد دانشکده مهندسی مکانیک مجتمع هوافضا دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی دانشگاہ صنعتی مالکاشتر (تاریخ دریافت:۲۷ /۹۲/۰۹؛ تاریخ پذیرش: ۹۳/۰۳/۱۴)

چکیدہ

در مقاله حاضر برای اولین بار به تحلیل دینامیکی انواع پوستههای مرکب شامل دوانجنابه، تکانجنابه، صفحه تخت و پوسته استوانهای کامل تحت ضربه با سرعت پایین توسط چند جرم ضربهزننده و براساس تئوری برشی مرتبه اول (FSDT)، برای شرایط مرزی ساده و گیردار پرداخته شده است. کرنشهای مکانیکی براساس تئوری سندرز استفاده شده است. نتایج با استفاده از دو مدل جرم و فنر بهبودیافته خطی شده جدید (شکل خطے قـانون تماس هرتز) و مدل کامل (شکل کلی غیر خطی قانون تماس هرتز) استخراج و با یکدیگر مقایسه شده است. برای صحهگذاری بیشتر، نتایج با نے مافزار المان محدود آباکوس و آخرین کارهای انجام شده مقایسه شده است. مسئله چند ضربه در یک شکل کلی فرمول بندی شده و توانایی تحلیل ضربات همزمان سرعت پایین چند جرم ضربه زننده با جرم، سرعت و شعاع متفاوت در نقاط مختلف را دارد. در این مطالعه، اثر پارامترهای هندسی و مکـانیکی یوستههای مرکب مانند نسبت طول به عرض (a/b)، نسبت طول به شعاع (L/R) و سرعت اجرام ضربهزننده برروی پاسخ ضربه از هر دو مدل بررسی و مقابسه شده است.

واژههای کلیدی: ضربه با سرعت پایین، پوستههای مرکب انخنادار، مدل جرم و فنر خطی شده جدید، قانون تماسی هرتز

Dynamic Response of the Curved Composite Shells Subjected to Low-Velocity Multi Mass Impacts K. Malekzadeh Fard

M. Gholami

Aerospace Engineering Department Mechanical Engineering Department MalekAshtar University K. N. Toosi University of Technology (Received: 18 December, 2013; Accepted: 4 June, 2014)

Abstract

In this paper, at the first time, dynamic response of double curved, single curved, flat and circular cylindrical composite shells with simply supported and clamped boundary conditions subjected to multi- mass impacts were studied based on the first-order shear deformation theory (FSDT). The mechanical strains were used according to Sander's theory. Using a new linearized two degrees of freedom spring-mass system (linear form of Hertzian contact law) and complete solution model (nonlinear form of Hertzian contact law), the results are derived and compared with together. For additional verification, the results are compaired with the Abaqus finite element software and the latest available literature. The presented formulation is general and capable to analyses the cylindrical composite shells subjected to multi-mass impacts with arbitrary different masses, initial velocities and impact locations. In this investigation, the effect of geometrical and mechanical parameters, such as length to width ratio (a/b), length to radius ratio (L/R) and velocity of the impactor masses on the impacts response from both presented models are studied and compared with together.

Keywords: Low Velocity Impact, Curved Composite Shells, New Linearized, Spring-Mass Model, Hertzian Contact Low

k.malekzadeh@gmail.com : دانشیار (نویسنده یاسخگو): - ۱

۲- کارشناس ارشد: gholami.m64@gmail.com

۱– مقدمه

امروزه سازههای مرکب به خاطر ویژگیهایی چون استحکام و سفتی مخصوص بالا و مقاومت در برابر خستگی و خوردگی، بهطور گستردهای در صنایع هوافضا، تجهیزات ورزشی، لولههای فشار و قسمتهای مختلف خودرو مورد استفاده قرار می گیرند. رفتار سازههای مرکب در برابر ضربه کمسرعت توسط محققان زیادی به صورت تجربی، عددی و تحلیلی مورد مطالعه قرار گرفته است. اما در تحقیقات بسیار کمی به بررسی ضربه کمسرعت بر روی پوسته های انحنادار پرداخته شده است. چیریستوفرو و سوانسون [۱] بهروش تحلیلی به بررسی پاسخ ضربه بر روی یک صفحه مرکب پرداختند و از رابطه خطی قانون تماس هرتز برای بهدست آوردن تاریخچه نیـروی ضـربه استفاده کردند. پیرسن و وزیری [۲] یک حل تحلیلی برای بهدست آوردن نیروی ضربه از قانون غیرخطی هرتز بر روی صفحات مرکب ارائه دادند. چیریستوفرو و یجیت [۳] مشخصات ضربه یک صفحه مرکب را با استفاده از قانون تماس خطى الاستويلاستيك بهروش تحليلي مطالعه كردنيد. چان و لام [۴] یک روش عددی با استفاده از قانون لاگرانژ و قانون تماسی هرتز برای محاسبه پاسخ دینامیکی صفحات مرکب چندلایه پیشنهاد دادند. سان و چن⁶ [۵] بهروش اجزاء محدود یاسخ ضربه بر روی صفحات مرکب با تنش های اولیه، با استفاده از قانون بهبودیافته هرتز را بهدست آوردند. گانـگ⁷ و همکـاران [۶] نیروی ضربه بین یک پوسته استوانهای مرکب و ضربهزننده را از مدل جرم و فنر دو درجه آزادی تعیین کردند. چاندراشکار و اسچرود^۲ [۷] به تحلیل غیرخطی ضربه بر روی پوستههای استوانهای چند لایه به روش اجزاء محدود پرداختند و از قانون بهبود يافته هرتز براى تعيين تاريخچه نيروى تماس بهره بردند. کریشمارثی ۸ و همکاران [۸] به مطالعه پارامتریک بر روی پاسخ ضربه و آسیب پوستههای مرکب استوانهای چندلایه بهروش اجزاء محدود پرداختند. چان هر و چنگ لیانگ (۹] پاسخ دینامیکی یوستههای چندلایه مرکب را با استفاده از نرمافزار اجزاء محدود ANSYS/LS-DAYNA در برابر ضربه مطالعه

- 1- Christoforou and Swanson
- 2- Pierson and Vaziri
- 3-Christoforou and Yigit
- 4- Chun and Lam
- 5 -Sun and Chen 6- Gong
- 7 Chandrashekara and Schroeder
- 8 -Krishnamurthy
- 9- Chuan her and Cheng Liang

کردهاند. در این مطالعه همچنین آسیب و لایه لایه شدن لایهها نیز بررسی شده است. لم^{۱۰} و همکاران [۱۰] در سال ۱۹۹۹ برای اولین بار تحلیل دو ضربه روی تیرهای مرکب را انجام دادند. آنها بـا اسـتفاده از تئـوری مرتبـه بـالای ردی (۱ میـدان جابهجایی یک تیر مرکب متقارن دوسر گیردار را نوشتند و برخورد بین اجرام ضربهزننده و تیر را با استفاده از قانون هرتز^{۱۲} بهبودیافته توصیف کردند. سپس با استفاده از رابطـه لاگرانـژ^{۱۳} معادلات حاکم بر مسئله را استخراج کردنـد. نتـایج بررسـیهـا نشان میدهد که هیچ تحقیقی در مورد سازههای مرکب انحنادار و استوانه کامل تحت چند جرم ضربهزننده انجام نشده است. در واقع مقاله حاضر اولين تحقيق در اين زمينه می باشد. در تحقیق حاضر پاسخ دینامیکی انواع پوسته های مرکب با شرط مرزی ساده و گیردار تحت اثر چند جرم ضربهزننده بررسی میشود. کرنشهای مکانیکی براساس تئوری سندرز استفاده شده است [۱۶]. تاریخچـه نیـروی تمـاس از دو مدل جرم و فنر خطی بهبودیافته جدید و مدل کامل هرتز پیش بینی و مقایسه شده است. در نهایت اثر پارامترهای هندسی و مکانیکی پوسته مانند نسبت طول به عرض، نسبت طول به شعاع و سرعت ضربهزننده برروی یاسخ ضربه از هـر دو مدل و برای هر دو نوع شرط مرزی بررسی و مقایسه شده است. تحليل در منطقه الاستيك بوده و تغيير مكان ها و چرخش ها كوچك فرض مى شوند.

۲- معادلات حرکت

در این بخش معادلات حرکت برای یک پوسته نازک دو انحنایی تحت برخورد چند جرم ضربهزننده بر اساس تئوری مرتبه برشی اول استخراج میگردد.

۲-۱- سازه دو انحنایی

شکل امشخصات هندسی یک پوسته چندلایه دو انحنایی تحت چند جرم ضربهزننده را نشان میدهد.

 $\frac{1}{2}$ و $\frac{2}{5}$ محورهای انحنادار صفحهی میانی (صفحهی مرجع) در $0 = \frac{2}{5}$ هستند. و $\frac{2}{5}$ محور عمود بر صفحهی میانی است. R_1 همچنین $\frac{1}{5}$ ، $\frac{2}{5}$ و $\frac{2}{5}$ مختصات منحنیالخط متعامد هستند. و R_2 بهترتیب شعاعهای اصلی انحناهای صفحهی میانی در جهت محور $\frac{1}{5}$ و $\frac{2}{5}$ هستند.

میدان جابهجایی براسای تئوری مرتبه برشی اول [۱۱]

- 11- Reddy
- 12- Hertz

¹⁰⁻ Lam

¹³⁻ Lagrangian Equation

بەصورت زیر تعریف میشود:

$$u_{1}(\xi_{1},\xi_{2},\xi,t) = u_{0}(\xi_{1},\xi_{2},t) + \xi\phi_{1}(\xi_{1},\xi_{2},t)$$

$$u_{2}(\xi_{1},\xi_{2},\xi,t) = v_{0}(\xi_{1},\xi_{2},t) + \xi\phi_{2}(\xi_{1},\xi_{2},t) \qquad (1)$$

$$u_{3}(\xi_{1},\xi_{2},\xi,t) = w_{0}(\xi_{1},\xi_{2},t),$$

که در آن، w_0 ، v_0 ، w_0 , جابهجایی پوسته در راستای ξ_1^2 ، ξ_2^2 و ک در صفحه میانی و $\phi_1^2 = \phi_2^2 = \phi_2^2$ چرخشهای نرمالعرضی بهترتیب حول محور $\xi_2^2 = \xi_1^2$ هستند.



روابط کرنش و جابهجایی یک پوسته دو انحنایی بهصورت زیـر است [۱۲]:

$$\mathcal{E}_{1} = \mathcal{E}_{1}^{0} + \xi k_{1}, \quad \mathcal{E}_{2} = \mathcal{E}_{2}^{0} + \xi k_{2}, \quad \gamma_{12} = \mathcal{E}_{6} = \mathcal{E}_{6}^{0} + \xi k_{6} \\
\gamma_{23} = \mathcal{E}_{4} = \mathcal{E}_{4}^{0}, \quad \gamma_{13} = \mathcal{E}_{5} = \mathcal{E}_{5}^{0},$$
(7)

که در آن، $\overset{0}{\mathcal{E}_{1}} = \overset{0}{\mathcal{E}_{2}} \frac{\overset{0}{\mathcal{E}_{2}}}{\overset{0}{\mathcal{E}_{2}}}$ مؤلفه کرنش عمودی، $\overset{0}{\mathcal{E}_{2}} = \overset{0}{\mathcal{E}_{1}}$ مؤلفه کرنش برشی عرضی صفحه میانی برشی و $\overset{0}{\mathcal{E}_{4}} = \overset{0}{\mathcal{E}_{4}} \frac{\overset{0}{\mathcal{E}_{4}}}{\overset{0}{\mathcal{E}_{4}}}$ هستند. در حالی که $\overset{1}{\mathcal{K}_{1}} = \overset{1}{\mathcal{K}_{2}} \frac{1}{\mathcal{K}_{1}}$ مربوط به تغییرات انحنا و $\overset{0}{\mathcal{K}_{4}}$ مربوط به پیچش صفحه میانی پوسته هستند.

$$k_{6} = \frac{\partial \phi_{2}}{\partial x_{1}} + \frac{\partial \phi_{1}}{\partial x_{2}} - C_{0} \left(\frac{\partial v_{0}}{\partial x_{1}} - \frac{\partial u_{0}}{\partial x_{2}} \right),$$

www.SID.ir

در رابطه بالا، *A* ضرایب لامه بوده و پارامتر *C* براساس تئوری ساندرز [۱۳] برای جلوگیری از چرخش جسم صلب درنظر گرفته شده است. در معادلات حرکت چرخش جسم صلب درنظر گرفته شده است. با یک تغییر متغیر به کمک معادله های (۳) و با فرض ثابت بودن تغییرات شعاع انحنا معادلات حرکت برای یک پوسته نازک دو انحنایی به صورت زیر نوشته می شود [۱۱]:

$$\frac{\partial N_{1}}{\partial x_{1}} + \frac{\partial N_{6}}{\partial x_{2}} + C_{0} \frac{\partial M_{6}}{\partial x_{2}} + \frac{Q_{1}}{R_{1}} = I_{0}\ddot{u_{0}} + I_{1}\ddot{\phi_{1}}$$

$$\frac{\partial N_{6}}{\partial x_{1}} + \frac{\partial N_{2}}{\partial x_{2}} - C_{0} \frac{\partial M_{6}}{\partial x_{1}} + \frac{Q_{2}}{R_{2}} = I_{0}\ddot{v_{0}} + I_{1}\ddot{\phi_{2}}$$

$$\frac{\partial Q_{1}}{\partial x_{1}} + \frac{\partial Q_{2}}{\partial x_{2}} - (\frac{N_{1}}{R_{1}} + \frac{N_{2}}{R_{2}}) + q_{1} - q_{b} = I_{0}\ddot{w_{0}}$$

$$\frac{\partial M_{1}}{\partial x_{1}} + \frac{\partial M_{6}}{\partial x_{2}} - Q_{1} = I_{1}\ddot{u_{0}} + I_{2}\ddot{\phi_{1}}$$

$$(f)$$

$$\frac{\partial M_{6}}{\partial x_{1}} + \frac{\partial M_{2}}{\partial x_{2}} - Q_{2} = I_{1}\ddot{u_{0}} + I_{2}\ddot{\phi_{2}}$$

$$\begin{split} I_{i} &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho(\xi)^{i} d\xi \\ &= \sum_{k=1}^{N} \int_{\xi_{k}}^{\xi_{k+1}} \rho^{k} (\xi)^{i} d\xi; (i = 0, 1, 2), \\ &= (j = 1, 2), \end{split}$$

که در آن، (j=t,b) بار دینامیکی عمود بر پوسته ناشی از ضربهزنندهها بوده و N_i و N_i و N_i بهترتیب برآیند تنشها و گشتاورها میباشند. Q_i برایند نیروهای برش عرضی هستند که ($A_{i6}=B_{i6}=D_{i6}=0$; i=1,2) باری یک ماده ارتوتروپیک خاص (i=1,2) بهصورت زیر تعریف میشود [\uparrow] بهصورت زیر تعریف میشود [\uparrow] (M } (M) (M)

$$\begin{cases} Q_{2} \\ Q_{1} \end{cases} = k_{s} \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_{4}^{0} \\ \varepsilon_{5}^{0} \end{cases},$$

$$\sum k_{s} = \frac{D_{13}}{2} \begin{bmatrix} B_{13} & A_{13} \\ \varepsilon_{5} \end{bmatrix},$$

$$\sum k_{s} = \frac{D_{13}}{2} \begin{bmatrix} B_{13} & A_{13} \\ \varepsilon_{5} \end{bmatrix},$$

$$\sum k_{s} = \frac{D_{13}}{2} \begin{bmatrix} B_{13} & A_{13} \\ \varepsilon_{5} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} Q_{ij}^{-(k)} & \sum_{\xi_{k}}^{\xi_{k+1}} (1, \xi, \xi^{2}) d\xi \end{aligned}$$

کـه در آن، k_s ضـریب تصحصـح برشـی اسـت کـه توسـط مینـــدلین [۱۵] برابــر $\pi/_{12}$ درنظــر گرفتــه شــده اســت. (13) برابـر $\pi/_{12}$ ، مؤلفههای سفتی تبدیل یافتـه داخـل

صفحه ای و $\overline{Q}_{ij}^{(k)}(i, j = 4, 5)$ ، مؤلف ه ه ای سفتی تبدیل یافته برشی عرضی هستند. با جایگذاری روابط (۱ و ۲) در (۵) و در نهایت با جایگذاری در روابط معادله حرکت (۴)، معادلات حرکت پوسته برحسب جاب ه جایی ه ای 0, 0, 0, 0, 0 و $_{2}\phi$ به صورت ماتریسی و به شرح زیر خلاصه می شود: $IV^{T} = F^{T}$

$$V = \{u_0, v_0, w_0, \phi_1, \phi_2\}$$
(Y)
$$F = \{I_0 \ddot{u_0}, I_0 \ddot{v_0}, I_0 \ddot{w_0} - q_t + q_b, I_2 \ddot{\phi_1}, I_2 \ddot{\phi_2}\},$$

که در آن، اپراتورهای L_{ij} اپراتورهای مشتقات می باشند که در ضمیمه الف آورده شدهاند.

۲-۲- پوسته مرکب تکانحنایه باز

بهمنظور استخراج معادلات حاکم بر سـازه مرکـب تـکانحنايـه لازم است فقط تغييرات ∞ ـ R₁ و R₂ = R در همـه معـادلات آورده شده در بخش ۲-۱ اعمال شود.

۲-۳- پوسته مرکب تخت

بهمنظور استخراج معادلات حاکم بـر سـازه مرکب تخـت لازم است که تغییرات ∞= ₁Rو ∞= 2 در همـه معـادلات آورده شده در بخش ۲- ۱ اعمال شود.

۲-۴- پوسته مرکب استوانهای کامل

بهمنظور کاهش روابط بهدست آمده برای سازه دوانحنایه بهمنظور کاهش روابط بهدست آمده برای سازه دوانحنایه (بخش۲-۱) به پوسته مرکب استوانهای کامل لازم است که $x_3 = z$ و $x_1 = x, x_2 = R\theta$, $R_2 = R$, $R_1 = \infty$ و $x_3 = z$ و اعمال گردد. در اینجا بعضی از روابط کاهش یافته ارائه می شود. در شکل ۲ یک پوسته مرکب استوانهای کامل نشان داده شده است.





جرم ضربەزنندە.

روابط کرنش – جابهجایی برای پوسته مرکب استوانهای شکل: با اعمال تغییرات ذکر شده در ابتدای این بخش و اعمال آن بر معادلات (۲ و ۳)، می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1}^{0} &= \frac{\partial u_{0}}{\partial x}, \ \varepsilon_{2}^{0} &= \frac{\partial v_{0}}{R \partial \theta} + \frac{w_{0}}{R}, \\ \varepsilon_{6}^{0} &= \frac{\partial v_{0}}{\partial x} + \frac{\partial u_{0}}{R \partial \theta} \\ \varepsilon_{5}^{0} &= \frac{\partial w_{0}}{\partial x} + \phi_{x}, \ \varepsilon_{4}^{0} \\ &= \frac{\partial w_{0}}{R \partial \theta} + \phi_{\theta} - \frac{v_{0}}{R}, \ k_{11} &= \frac{\partial \phi_{x}}{\partial x} \\ k_{22} &= \frac{\partial \phi_{\theta}}{R \partial \theta}, \\ k_{12} &= \frac{\partial \phi_{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \phi_{x}}{R \partial \theta} + \frac{1}{2R} (\frac{\partial v_{0}}{\partial x} - \frac{\partial u_{0}}{R \partial \theta}). \end{aligned}$$

معادلات حرکت پوسته مرکب استوانهای شکل: با اعمال تغییرات گفته شده در ابتدای این بخش (۴–۲) و اعمال آن بر معادلات (۴)، می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{x\theta}}{R \partial x_{\theta}} + C_{0} \frac{\partial M_{x\theta}}{R \partial x_{\theta}} &= I_{0} \ddot{u}_{0} + I_{1} \ddot{\phi}_{x} \\ \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{\partial N_{\theta\theta}}{R \partial x_{\theta}} - C_{0} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{Q_{\thetaz}}{R} &= I_{0} \ddot{v}_{0} + I_{1} \ddot{\phi}_{\theta} \\ \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{\thetaz}}{R \partial x_{\theta}} - (\frac{N_{\theta\theta}}{R}) + q_{t} &= I_{0} \ddot{w}_{0} \\ \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{x\theta}}{R \partial x_{\theta}} - Q_{xz} &= I_{1} \ddot{u}_{0} + I_{2} \ddot{\phi}_{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{\partial M_{\theta\theta}}{R \partial x_{\theta}} - Q_{\thetaz} &= I_{1} \ddot{v}_{0} + I_{2} \ddot{\phi}_{\theta} \\ C_{0} &= -\frac{1}{2R}, I_{i} &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z)^{i} dz \\ &= \sum_{k=1}^{N} \int_{z^{(k+1)}}^{z^{(k+1)}} \rho^{(k)}(z)^{i} dz, (i = 0, 1, 2). \end{aligned}$$

$$c_{i} \text{ times and } c_{i} \text{ times and } c$$

$$LV^{T} = F^{T}$$

$$V = \{u_{0}, v_{0}, w_{0}, \phi_{x}, \phi_{\theta}\}$$

$$F = \{I_{0}\ddot{u}_{0}, I_{0}\dot{v}_{0}, I_{0}\dot{w}_{0} - q_{t}, I_{2}\ddot{\phi}_{x}, I_{2}\ddot{\phi}_{\theta}\},$$

$$\text{(1.)}$$

$$F = \{I_{0}\ddot{u}_{0}, I_{0}\dot{v}_{0}, I_{0}\dot{w}_{0} - q_{t}, I_{2}\ddot{\phi}_{\theta}\},$$

$$\text{(1.)}$$

مشابه اپراتورهای معادلیه (۲) هستند، فقط بایید مشابه اپراتورهای معادلیه (۲) هستند، فقط بایید تغییرات $x_3 = z$ و $x_1 = x, x_2 = R\theta$ ، $R_2 = R$ ، $R_1 = \infty$ در آنها اعمال گردد.

۳- شرایط مرزی و روش حل مسئله

در این تحقیق، شرایط مرزی بهصورت ساده و گیردار درنظر گرفته میشود. برای شرایط مرزی ساده در لبـه هـای پوسـته

تغییر مکان عرضی و ممان خمشی حول محور موازی لبهها صفر منظور میشود. برای شرایط مرزی گیردار تغییر مکان عرضی و شیب صفر فرض میشود [۶].

بهمنظور ارضاء شرایط مرزی ساده، میدان جابهجایی تمامی سازهها بهجز پوسته استوانهای کامل بهصورت بسط سری فوریـه دوگانه همانند زیر تعریف میشود [۱۱]:

$$u_{0}(x_{1}, x_{2}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{mn}(t) \cos \alpha_{m} x_{1} \sin \beta_{n} x_{2}$$

$$v_{0}(x_{1}, x_{2}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} V_{mn}(t) \sin \alpha_{m} x_{1} \cos \beta_{n} x_{2}$$

$$w_{0}(x_{1}, x_{2}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{mn}(t) \sin \alpha_{m} x_{1} \sin \beta_{n} x_{2}$$

$$\phi_{1}(x_{1}, x_{2}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X_{mn}(t) \cos \alpha_{m} x_{1} \sin \beta_{n} x_{2}$$

$$\phi_{2}(x_{1}, x_{2}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Y_{mn}(t) \sin \alpha_{m} x_{1} \cos \beta_{n} x_{2}$$

$$\alpha_{m} = \frac{m\pi}{a}, \qquad \beta_{n} = \frac{n\pi}{b}.$$
(11)

که در آن، W_{nm} ، W_{nm} ، W_{nm} و X_{nm} ضرایب زمانی هستند که باید تعیین شوند. برای شرط مرزی گیردار کافی است که در روابط ارائه شده برای چرخشها در معادلات (۱۱) مبارات $X_m x_n$ و $\cos \beta_n x_2$ و $\sin \alpha_m x_1$ تیب به صورت $x_m x_n$ و عبارات $x_m x_m x_n$ و $\cos \beta_n x_2$ و $\cos \alpha_m x_1$ تیب به صورت $x_m x_n x_n$ و نوشته شوند. با این کار صفر شدن شیبها در لبه های پوسته محقق می شود. لازم به ذکر است که در شرایط مرزی به کار رفته مطابق معادلات (۱۱)، اجازه حرکات صفحهای وجود دارد [۱۱]. این موضوع برای هر دو شرط مرزی مفحهای وجود دارد [۱۱]. این موضوع برای هر دو شرط مرزی کش آمدگی صفحهای رخ می داد و باید از کرنشهای غیرخطی در حل مسئله استفاده می شد. بنابراین در شرط مرزی گیردار شروط صفر بودن تغییر مکان عرضی و شیب صفر برای پوسته های نازک کافی است [۶]. برای پوسته استوانه کامل، مؤلفه های میدان جابه جایی برای شرط مرزی ساده به صورت زیر نوشته می شوند [۱۹].

$$u_{0}(x,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{mn}(t) \cos \alpha_{m} x \cos n\theta$$

$$v_{0}(x,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} V_{mn}(t) \sin \alpha_{m} x \sin n\theta$$

$$w_{0}(x,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{mn}(t) \sin \alpha_{m} x \cos n\theta$$

$$\psi_{x}(x,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X_{mn}(t) \cos \alpha_{m} x \cos n\theta$$

$$\psi_{\theta}(x,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Y_{mn}(t) \sin \alpha_{m} x \sin n\theta$$

$$\alpha_{m} = \frac{m\pi}{a}, m = 1, 2, 3, ..., n = 0, 1, 2, 3, ...,$$
(17)

www.SID.ir

که در آن، U_{nm} ، V_{nm} ، W_{nm} ، W_{nm} ، U_{nm} خرایب زمانی هستند که باید تعیین شوند. در معادلات حرکت، تمامی سازههای مرکب بهغیر از پوسته استوانهای شکل با هر دو شرط مرزی ساده و گیردار، $(q_j = t, b)$ این نیروهای اجرام ضربهزننده هستند که میتوانند بهترتیب به سطح بالای سازه (در جهت (x₃) و سطح پایین سازه (در جهت x_3) وارد شوند و به صورت زیر قابل بسط می باشند:

$$q_{j}(x_{1}, x_{2}, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{N} q_{mn}^{i}(t) \right] \sin(\alpha_{m} x_{1})$$

$$\sin(\beta_{m} x_{2}), \qquad (17)$$

که درآن، i یک شمارنده بوده و معرف تعداد ضربهزننده میباشد (i=1,2,3,..,N). در اینجا برای حل مسئله از روش باقیمانده وزنی نوع حل تقریبی گالرکین استفاده میشود [۶]. با جایگذاری معادلات (۱۱ و ۱۳) در رابطه (۷) و استفاده از روش حل گالرکین، معادلات حرکت پوسته بهصورت زیر بهدست میآید:

$$\begin{bmatrix} M \end{bmatrix} \{ \dot{X}^{i} \} + \begin{bmatrix} K \end{bmatrix} \{ X \} = \{ Q \}$$

$$\{ X \} = \{ U_{mn}(t), V_{mn}(t), W_{mn}(t), X_{mn}(t), Y_{mn}(t) \}^{T}$$

$$\{ Q \} = \{ 0, 0, q_{mn}^{i}(t), 0, 0 \}^{T} ,$$

$$() ```$$

که در آن، M ماتریس جرم و K ماتریس سفتی بوده و در پیوست الف تعدادی از درآیه های آنها آورده شده است. بنابراین، برای نیروهای ضربهزننده متمرکز که به نقاط دلخواه از سطح پوسته همچون (x_{1i}, x_{2i}) مطابق شکل اوارد می شوند، ضریب زمانی $q_{mn}^{i}(t)$ به صورت زیر نوشته می شود [۱۷۹].

$$q_{mn}^{i}(t) = \frac{4F_{c}^{i}(t)}{ab}\sin(\alpha_{m}x_{1i})\sin(\beta_{n}x_{2i}), \qquad (1\Delta)$$

که در آن، (F_cⁱ(t) نیروهای ضربه بوده که بهصورت بار ضربه عرضی سطح خارجی و یا زیرین پوسته مطابق شکل ۱ وارد میشود. نیروهای ضربه در مراحل بعد توسط دو مدل کامل و جرم و فنر بهدست خواهند آمد.

برای پوسته استوانهای مرکب با هر دو شرط مرزی ساده و گیردار، q۱ نیروی ناشی از اجرام ضربهزننده بوده که فقط بر سطح بالای سازه میتوانند برخورد کنند و بهصورت سری دوگانه فوریه همانند رابطه (۱۶) قابل بسط می باشند:

 $q_{t}(x, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{N} q_{mn}^{i}(t)\right] \sin(\alpha_{m}x) \cos(n\theta)$ (۱۶) که در آن، i یک شمارنده بوده و معرف تعداد ضربهزننده میباشد (۱۲ و ۱۶) در معادلات (۱۲ و ۱۶) در رابطه (۱۰) و استفاده از روش حل گالرکین، معادلات حرکت پوسته بهصورت زیر بهدست میآید: غير خطى جفت شده به صورت زير به دست مى آيند: $[M]{\ddot{X}} + [K]{X} = \{Q\}$ $m_{p}^{i}\ddot{w}_{p}^{i} + F^{i}(t) = 0,$ $w_{j}^{i}(t = 0) = 0,$ $w_{j}^{i}(t = 0) = V_{0}^{i}$ $F_{c}^{i}(t) = K_{c}^{i}(\alpha^{i})^{n},$ $\alpha^{i} = w_{j}^{i} - w_{0}(x_{1i}, x_{2i}).$ (٢١)

-Y-F مدل جرم و فنر بهبود یافته خطی شده جدید در این تحقیق از سامانه دو درجه آزادی جرم و فنر [71] مطابق شکل T برای تعیین تاریخچهی نیروی تماسی استفاده شده است. که M_I^i جرم i امین ضربهزننده و P_{eff}^{s} M جرم مؤثر پوسته، K_e^{i} سفتی تماسی خطی اصلاح شده در i امین نقطه ضربه و K_e^{i} سفتی معادل پوسته میباشند. با استفاده از مدل خطی شدهی چوی [71] قانون خطی هرتز جایگزین قانون غیرخطی هرتز شده است. بنابراین نیروی تماسی به صورت زیر محاسبه میشود.

$$F_{c}^{i} = K_{c}^{*i} [Z_{2}^{i}(t) - Z_{1}^{i}(t)]$$

$$K_{c}^{*i} = K_{c}^{i\frac{1}{n}} F_{c\max}^{i\frac{n-1}{n}}.$$
(YY)

شکل (۳): مدل جرم و فنر دو درجه آزادی خطی بهبودیافته.

در رابطه بالا K_c^i معرف سفتی تماسی غیرخطی به ازای iامین ضربهزننده و $F_{c\,max}^i$ بیشینه نیروی تماسی پیش بینی شده به ازای iامین ضربهزننده است. با نوشتن معادلات دیفرانسیل سامانه جرم و فنر خطی، استفاده از معادلات (۲۲) و بعضی از سادهسازیها می توان نوشت:

$$F_{c}^{i}(t) = \frac{K_{c}^{i*}V^{i}}{(\phi_{2}^{i} - \phi_{1}^{i})} \left[\frac{1 - \phi_{2}^{i}}{\omega_{2}^{i}}\sin(\omega_{2}^{i}t) - \frac{1 - \phi_{1}^{i}}{\omega_{1}^{i}}\sin(\omega_{1}^{i}t)\right].$$
(77)

$$M \ \{ \vec{X} \} + [K] \{ X \} = \{ Q \}$$

$$X \} = \{ U_{mn}(t), V_{mn}(t), W_{mn}(t), X_{mn}(t), Y_{mn}(t) \}^{T}$$

$$Q \} = \{ 0, 0, q_{mn}^{i}, 0, 0 \}^{T},$$
(1Y)

که در آن، M ماتریس جرم و K ماتریس سفتی می باشند. بنابراین برای نیروهای ضربهزننده متمرکز که به نقاط دلخواه از سطح پوسته همچون (x_i, θ_i) مطابق شکل Y وارد می شوند، ضریب زمانی $q_{nm}^{i}(t)$ به صورت زیر نوشته می شود [۱۷]:

$$\begin{cases} q_{m0}^{i}(t) = \frac{F_{c}^{i}(t)}{\pi L R} \sin(\alpha_{m} x_{i}) & \text{if } n = 0\\ q_{mn}^{i}(t) = \frac{2F_{c}^{i}(t)}{\pi L R} \sin(\alpha_{m} x_{i}) \cos(n\theta_{i}) & \text{if } n > 0 \end{cases},$$
(1A)

که در آن، (F_cⁱ(t) نیروهای ضربه بوده که بـهصورت بـار ضـربه عرضی بر سطح خارجی پوسته مطـابق شـکل ۲ وارد مـیشـود. نیروهای ضربه در مراحل بعد توسط دو مدل کامل و جرم و فنر بهدست خواهند آمد.

۴- بەدست آوردن تاریخچه نیروی ضربه

در مطالعهی حاضر برای تعیین تاریخچهی نیروی تماسی از دو مدل کامل و مدل جرم و فنر بهبودیافته استفاده میشود که در ادامه این دو مدل به طور کامل توضیح داده میشود.

۴-۱- مدل کامل هر تز

در این مدل از قانون غیرخطی بهبودیافته تماس هرتز برای بهدست آوردن تاریخچه نیروی تماسی استفاده شده است. قانون تماس هرتز در اصل برای بارگذاری استاتیکی بر روی یک نیمفضای الاستیک خطی گسترش یافته است [۱۷]. اما این قانون با انجام تصحیحاتی، برای مسائل ضربه بر روی سازههای مرکب نیز به کار میرود که بهصورت زیر نوشته میشود [۱۸] مرکب نیز به کار میرود که بهصورت زیر نوشته میشود [۱۸] $F_c^i(t) = K_c^i(\alpha^i)^n = K_c^i(w_j^i - w_0(x_{1i}, x_{2i}))^{1.5}$ (۱۹) $F_c^i(t) = K_c^i(\alpha^i)^n = K_c^i(w_j^i - w_0(x_{1i}, x_{2i}))$ که در آن، ⁱ α میران فرورفتگی در آامین نقطه ضربه Y جابهجایی آامین ضربهزننده و W جابهجایی پوسته در امین نقطه برخورد و K_c^i سفتی تماسی هرتر آامین فربهزننده میباشندکه برای سازه دوانحنایی بهصورت زیر تعریف میشود (برای بقیه سازهها تغییرات گفته شده در بخش ۲ میبایست اعمال شود) [۷، ۱۹و۲].

$$k_{c}^{i} = \frac{4}{3}E^{*i}\sqrt{R^{*i}}$$

$$\frac{1}{E^{*i}} = \frac{1-V_{j}^{i}}{E_{c}^{i}} + \frac{1-V_{s}^{2}}{E_{c}^{2}}, \quad \frac{1}{R^{*}} = \frac{1}{R^{i}} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_{c}} + \frac{1}{R_{c}}\right), \quad (7)$$

که در آن، اندیس j و s بهترتیب مربوط به جسم ضربهزننده و سازه هدف است. شمارنده i شماره ضربهزنندهها میباشند. در نهایت با استفاده کردن از مدل کامل هرتز معادلات حاکم بر حرکت بهصورت یک دسته معادلات دیفرانسیلی معمولی www.SID.ir

$$\begin{split} \omega_{1}^{i} &= \frac{1}{2} \left(\frac{(N^{i} + 1)K_{c}^{i*} + K_{g}^{i}}{N^{i}M_{I}^{i}} \right) \\ &- \sqrt{\left(\left(\frac{(N^{i} + 1)K_{c}^{i*} + K_{g}^{i}}{N^{i}M_{I}^{i}} \right)^{2} - 4 \frac{K_{c}^{i*}K_{g}^{i}}{N^{i}M_{I}^{i}} \right) \right)} \\ \omega_{2}^{i} &= \frac{1}{2} \left(\frac{(N^{i} + 1)K_{c}^{i*} + K_{g}^{i}}{N^{i}M_{I}^{i}} \right)^{2} - 4 \frac{K_{c}^{i*}K_{g}^{i}}{N^{i}M_{I}^{i}} \right) \\ &+ \sqrt{\left(\left(\frac{(N^{i} + 1)K_{c}^{i*} + K_{g}^{i}}{N^{i}M_{I}^{i}} \right)^{2} - 4 \frac{K_{c}^{i*}K_{g}^{i}}{N^{i}M_{I}^{i}} \right) \right)} \\ &\frac{K_{c}^{i*}}{K_{c}^{i*} - M_{I}^{i}\omega_{I}^{i}} = \phi_{1}^{i}, \frac{K_{c}^{i*}}{K_{c}^{i*} - M_{I}^{i}\omega_{2}^{i}} = \phi_{2}^{i}, \\ &\frac{K_{c}^{i*}}{M_{I}^{i}} = \frac{1}{\delta_{1}^{i}}, \frac{\delta_{1}^{i}}{\delta_{1}^{i}} = w \left(x_{1i}, y_{1i} \text{ or } x_{i}, \theta_{i} \right), \\ &K_{g}^{i} = \frac{1}{\delta_{1}^{i}}, \delta_{1}^{i} = w \left(x_{1i}, y_{1i} \text{ or } x_{i}, \theta_{i} \right), \\ &K_{i}^{i} = \lambda_{i} \text{ or } \lambda_{i} \text{ or } \lambda_{i} + \lambda_{i} \text{ or } \lambda_{i} + \lambda_{i} \text{ or } \lambda_{i} + \lambda_{i} + \lambda_{i} \text{ or } \lambda_{i} + \lambda$$

$$\sin(\omega_{1}^{i}t) = (\omega_{1}^{i}t) - \frac{1}{6}(\omega_{1}^{i}t)^{3}$$

$$\sin(\omega_{2}^{i}t) = (\omega_{2}^{i}t) - \frac{1}{6}(\omega_{2}^{i}t)^{3}.$$
(Y9)

با جایگذاری معادلات (۲۶) در معادله (۲۳)، اعمال اولین مشتق گیری از معادله حاصل و سپس استفاده از معادلات (۲۴) و بعضی سادهسازیها، بیشینه زمان تماس و همچنین بیشینه نیروی برخورد به ازای i امین ضربهزننده به صورت کاملاً تحلیلی و به شرح زیر به دست می آید:

$$t^{i}_{\max} = \sqrt{\frac{2N^{i}M_{I}^{i}}{(N^{i}+1)K_{c}^{i^{*}}}},$$

$$F_{c\max}^{i} = \frac{2}{V} \sqrt{\frac{2N^{i}M_{I}^{i}K_{c}^{i^{*}}}{(N^{i}+1)K_{c}^{i^{*}}}},$$
(YY)

$$\begin{aligned} F_{c \max} &= \frac{1}{3} \sqrt{\frac{N^{i}}{(N^{i} + 1)}}, \\ K_{c}^{i*} &= (\frac{2\sqrt{2}}{3})^{\frac{2(n-1)}{n+1}}, \\ (\frac{N^{i}}{N^{i} + 1})^{\frac{n-1}{n+1}} (V^{i})^{\frac{2(n-1)}{n+1}} (K_{c}^{i})^{\frac{2}{n+1}} (M_{I}^{i})^{\frac{n-1}{n+1}}. \end{aligned}$$

$$(\Upsilon \lambda)$$

در نهایت مشابه روش انجام شده در بخش ۴– ۱ معادلات کلی سازههای مرکب تحت اجرام ضربهزننده بهصورت زیر قابل نوشتن است:

$$[M] \{ \dot{X} \} + [K] \{ X \} = \{ Q \}.$$
 (19)

لازم بهذکر است که در معادله (۲۹) بردار {*Q*} از مدل جـرم و www.SID.ir

فنر اصلاحشده مقاله حاضر بهدست می آید. در تحلیلهای انجام شده توسط شیواکومار و همکاران^۱ [۲۰] و گانگ^۲ [۶] جرم مؤثر سازه برابر یک چهارم جرم کل سازه درنظر گرفته شده است. سوانسون^۳ [۲۳] رابطهای تقریبی و ساده برای محاسبه جرم مؤثر سازههای مرکب در i امین نقطه ضربه بهصورت زیر ارائه داد.

$$M_{eff}^{P} \approx \frac{K_{s}}{\omega_{f}^{2}},$$

 $M_{f} \approx \omega_{f}^{2},$
 $W_{f} \approx \omega_{f}$ کوچکترین فرکانس طبیعی سازه است که از حل
ارتعاشات آزاد بهدست میآید.

۵- صحهگذاری نتایج

در این قسمت به صحه گذاری نتایج به دست آمده از دو مدل پیشنهادی برای سازه های مرکب اشاره شده با هر دو شرط مرزی ساده و گیردار پرداخته می شود. به عنوان اولین مثال، یک صفحه مرکب تحت یک جرم ضربه زننده مطابق جدول ۱ درنظر گرفته می شود. تاریخچه نیروی تماس به دست آمده از مدل کامل و مدل جرم و فنر جدید به بودیافته با نتایج تجربی دلف وز [۲۵] و مدل تحلیلی پیرسن [۲] و مدل معکوس چیریستوفورو [۲۶] در شکل ۴ مقایسه شده است.

مشاهده می شود که نتایج مطابقت خوبی دارند. مـدل کامـل بیشینه نیروی تماس را نسبت به مدل جـرم و فنـر بهبودیافتـه نزدیکتر پیش بینی میکند. مدت زمان تمـاس حاصـل از مـدل کامل و جرم و فنر نسبت به حل تحلیلی پیرسن، بهمدت زمـان تماس تجربی دلفوز نزدیکتـر اسـت. در مثـال دوم یـک جسـم کروی فولادی با پوسته مرکب دو انحنایه برخورد میکند.



¹⁻ Shivakumar

3- Swanson

²⁻ Gong



شکل (۵): مقایسه تاریخچه نیروی تماسی حاصل ازمدل کامل با حل اجزاء محدود هر و چنگ لیانگ [۹].

جدول (۳): هندسه و جنس پوسته مرکب تک انحنایه باز





شکل (۶): مقایسه تاریخچه نیروی تماسی حاصل از مدل کامل با نتایج مرجع [۲۷] برای هر دو نوع شرط مرزی.

همان طور که از شکلهای ۶ و ۷ مشاهده می شود، تطابق بسیار خوبی بین نتایج بهدست آمده از مدل کامل با نتایج مرجع [۲۷] برای هر دو شرط مرزی برقرار است.

جدول (۱): هندسه و جنس صفحه و ضربهزننده فولادی [۲].

صفحه كامپوزيتى		
$E_{11} = 129 GPa$ $E_{22} = 7.5 GPa$ $G_{12} = G_{13} = 3.5 GPa$ $G_{23} = 2.6 GPa$ $\rho = 1540 \text{ kgm}^{-3}, v_{12} = 0.33$	a = 127 mm b = 76.2 mm h = 4.65 mm $k_c = 1.21c9 Nm^{-3/2}$	
ضربهزننده		
E = 200 GPa	$d_1 = 25.4 mm$	
$\rho = 7971 kgm^{-3}$	$V_1 = 1.76 ms^{-1}$	
v = 0.3	$m_{\rm l} = 6.15 Kg$	

مشخصات پوسته و ضربهزننده در جدول ۲ آورده شده است [۹]. تاریخچه نیروی بهدست آمده از مدل کامل با تاریخچه نیروی تماس هر و چنگ لیانگ [۹] مطابق شکل ۵ مقایسه شده است و از تطابق خوبی برخوردار است. هر و چنگ در این تحقیق تاریخچه نیروی تماس را از قانون تماس هرتز با استفاده از نبرماف_زار اج_زاء مح_دود ANSYS/LS-DAYNA بهدست آوردهاند. در این مثال جسم ضربهزننده نسبت به مثال قبلی بسیار سبکتر است.

جدول (۲): هندسه و جنس پوسته کروی و ضربهزننده فولادی [۹].

مشخصات هندسی پوسته مرکب دو انحنایه

 $a = b = 25.4 \text{ mm}, h = 2.54 \text{ mm}, R_1 = R_2 = 1.27 \text{ m}$ lamination = [0/90/90/0]

خواص پوسته مرکب دو انحنایه

 $E_{11} = 144.8 \ GPa, E_{22} = 9.65 \ GPa, G_{12} = G_{13} = 7.1 \ GPa$ $G_{23} = 5.92 \ GPa, V_{12} = 0.3, \rho = 1389.2 \ kgm^{-3}$

خواص ضربهزننده

 $E = 200 \ GPa, \ v = 0.3, \ \rho = 7870 \ kgm^{-3}$ $d_1 = 12.7 \ mm, \ m_1 = 0.00844 \ kg, \ V_1 = 30 \ ms^{-1}$

در مثال سوم یک سازه تکانحنایه مرکب با شرایط مرزی ساده و گیردار تحت یک جرم ضربهزننده در وسط سازه بررسی میشود. مشخصات سازه و ضربهزننده در جدول ۳ داده شد است. تاریخچه نیرو و خیز بهدست آمده از مدل کامل برای هر دو نوع شرط مرزی ساده و گیردار برای یک پوسته مرکب تک انحنایه که با نتایج مرجع [۲۷] مقایسه شده است، بهترتیب در شکل **۶ و ۷** نشان داده شده است.



بهعنوان آخرین مثال در زمینه تکضربه، یک پوسته استوانه کامل تحت یک جرم ضربهزننده با مشخصات داده شده در جدول۴ درنظر گرفته میشود. در شکل ۸ برای سازه به حالت استوانه کامل تاریخچه نیروی ضربه بهدست آمده از مدل جرم و فنر با نتایج بهدست آمده قبلی در مراجع [۶ و ۲۸] مقایسه شده است.

مرکب و	کامل	جدول (۴): هندسه و جنس پوسته استوانهای	•
		ضربهزننده فولادی [۲۸].	

سازه مرکب استوانهای		
$E_{11} = 14.506 GPa$ $E_{22} = 5.362 GPa$ $G_{12} = G_{13} = 2.509 GPa$ $G_{23} = 2.509 GPa$ $\rho = 1526 \text{ kgm}^{-3}, v_{12} = 0.3$	L = 280 mm R = 108 mm h = 2.3 mm Lamination [90] ₈	
ضربهزننده		
$E = 200 GPa, \ \rho = 7900 kgm^{-3}, \ v = 0.3, \ d_1 = 13.2 mm$		
$V_1 = 5 ms^{-1}, \ m_1 = 0.0751 Kg$		



همان طور که مشاهده می شود، نتایج به دست آمده از تطابق بسیار خوبی برقرار است. از مثالهای بررسی شده قبلی می توان گفت که فرمول بندی ارائه شده با استفاده از هر دو مدل پیشنهادی با هر دو نوع شرط مرزی، برای سازه های مرکب با هندسه های مختلف، توانایی بسیار خوبی در پیش بینی نتایج دارند. در ادامه به منظور اطمینان از صحت فرمول بندی ارائه شده در تحلیل چند ضربه یک پوسته مرکب تخت با شرط شده در تحلیل چند ضربه یک پوسته مرکب تخت با شرط مرزی گیردار تحت بر خورد دو جرم ضربه زننده در نقاط (2/1=4/5, y_1=b/2) و (x_1=a/5, y_1=b/2) خواص مکانیکی و جنس پوسته و ضربه زننده ها مشابه جدول **۳**و خواص هندسی صفحه و اجرام ضربه زننده مطابق جدول **۵** می باشد.

جدول (۵): خواص هندسی اجرام ضربهزننده و صفحه. $a = b = 300 \, mm, \ h = 4.5 \, mm, \ Lamination [0 \ 90 \ 90 \ 0]$ $d_i = 18 \, mm, V_i = 3 \, ms^{-1}, \ m_i = 0.008 \, Kg; \ i = 1,2$ $x_1 = a/5, \ x_2 = 4a/5, \ y_1 = y_2 = b/2$

با توجه به نبود تحقیق و مقالات در زمینه تحلیل چندضربه پوستهها در مراجع، بهمنظور صحه گذاری در تحلیل دوضربه، از نرمفزار المان محدود ABAQUS استفاده می گردد. سازه مفروض تحت برخورد دو جرم ضربهزننده در این نرمافزار مدل گردیده و از المانهای هشت گرهای SC8R استفاده شده است. نتایچ حاصل با یک دیگر مقایسه شده است. در شکل ۹ و ۱۰ بهترتیب تاریخچه نیروی برخورد و خیز صفحه مرکب در هر دو نقطه برخورد، مقایسه و نشان داده شده است.



شکل (۹): مقایسه تاریخچه نیروی تماسی حاصل از دو مدل تحلیلی و المان محدود.



همچنان که این شکلها نشان میدهند، نتایج بهدست آمده برای نیرو و خیز با استفاده از فرمول بندی ارائه شده و المان محدود، توافق و تطابق بسیار خوبی با هم دارند. چون ضربهزننده ها به طور کامل مشابه هم بوده و همچنین نقاط ضربه نسبت به مرکز صفحه مرکب متقارن بوده، بنابراین بیشینه نیرو و خیز در دو نقطه بر خورد کاملاً برابر می باشند. نتایج و نمودارهای خیز و نیرو بر حسب زمان به دست آمده از مدل حضر، برای ضربهزننده اول و دوم به علت تقارن محل ضربه زننده ها و شرایط مرزی ورق کاملاً روی هم منطبق شده اند. این اتفاق برای نتایج المان محدود نیز ملاحظه می شود. بیشینه بیشتر از روش حاضر می باشند که می تواند به دلیل استفاده از بیشتر از روش حاضر می باشند که می تواند به دلیل استفاده از سماین جامد و مدل Hard Contact باشد. در شکل ۱۱ نمای سه بعدی پوسته مرکب تحت بر خورد دو جرم ضربهزننده با



از نتایج ذکر شده می توان نتیجه گرفت که فرمول بندی www.SID.ir

ارائه شده توانایی بسیار بالایی در تحلیل تک و چندضربه سازههای مرکب را دارد. در ادامه بعضی از نتایج مربوط به اثر بعضی از پارامترهای هندسی و مکانیکی ضربهزنندهها روی رفتار دینامبکی این سازهها بررسی میشوند.

۶- نتایج مربوط به مطالعه پارامتری و بحث

در این قسمت به بررسی اثر بعضی پارامترهای هندسی و مکانیکی پوستههای اشاره شده مانند، نسبت طول به عرض (a/b) سازه یا همان ضریب منظری، نسبت طول به شعاع پوسته استوانهای (L/R)، زاویه الیاف، سرعت اجرام ضربهزننده بر روی رفتار دینامیکی این سازهها پرداخته شده است و نتایج بهدست آمده در بعضی موارد از هر دو مدل کامل و جرم و فنر و برای هر دو نوع شرط مرزی ساده و گیردار و در بعضی دیگر با یکی از این مدلها با هم مقایسه و بحث شده است.

در این بخش اثر پارامتر طول به عرض پوسته مرکب دو انحنایه تحت برخورد دو جرم ضربهزننده در نقاط (x₁=a/5,y₁=b/2) و (x₂=4a/5, y₂=b/2) بررسی می شود. خواص مکانیکی پوسته و ضربهزنندهها مانند جدول ۶ می باشد.

جدول (۶): هندسه و جنس پوسته مرکب دوانحنایی				
و اجرام ضربهزننده. 📃 📃 و اجرام خربهزننده.				
پوسته مرکب دوانحنایه				
$E_{11} = 141.73 GPa$	a = 250 mm			
$E_{22} = 13.79 GPa$	b = 250 mm			
$G_{12} = G_{13} = 4.64 GPa$	h = 3.81 mm			
$G_{23} = 4.14 GPa$	Lamination $[\theta - \theta \ \theta - \theta]$			
$\rho = 1610 kgm^{-3}, v_{12} = 0.3$	$R_1 = R_2 = 0.5 m$			
اجرام ضربهزننده				
E = 200 GPa	$d_i = 9.25 mm$			
$\rho = 7971 \ kgm^{-3}$	$V_i = 5 m s^{-1}$			
<i>v</i> = 0.3	$m_i = 2.6 kg \; ; i = 1, 2$			

در شکل **۱۲** و **۱۳** بهترتیب تغییرات تاریخچه نیروی برخورد و خیز پوسته مرکب با نسبتهای مختلف a/b برای هر دو نوع شرط مرزی آورده شده است. شکل **۱۲** نشان میدهد که با افزایش نسبت طول به عرض سازه (ضریب منظری سازه) نیروی بیشینه برای شرط مرزی ساده و گیردار بهترتیب کمی افزایش مییابند. با افزایش نسبت طول به عرض از ۱ به ۴ و افزایش نسبی سفتی پوسته بیشینه نیرو برای شرط مرزی ساده و گیردار بهترتیب ۲۰/۳٪ و ۲٪ افزایش و کاهش مییابند. با

توجه به چیرهبودن اثرات شرایط مرزی و انحناهای گیردار بر اثرات افزایش نسبت طول به عرض، ملاحظه می شود که اثر این پارامتر روی پوسته با شرایط مرزی گیردار کمتر از حالت اطراف لولا می اشد.



شکل (۱۲): تغییرات تاریخچه نیروی برخورد به دست آمده از مدل کامل در نقطهی برخورد اول با نسبت طول به عرض سازه برای هر دو نوع شرایط مرزی.



شکل (۱۳): تغییرات تاریخچه خیز به دست آمده از مدل کامل در نقطهی برخورد اول با نسبت طول به عرض سازه برای هر دو نوع شرط مرزی.

از مشاهده شکل **۱۳** ملاحظه می شود که رفتار تغییرات خیز با نسبت طول به عرض برعکس نیرو می باشد، به نحوی که با افزایش نسبت طول به عرض از ۱ به ۴، بیشینه خیز سازه برای شرط مرزی ساده و گیردار به ترتیب ۸/۳٪ کاهش و ۱۳/۳۷ افزایش می یابد. این موضوع و پیچیدگی رفتاری به دلیل اثرات متقابل انحناها و شرایط مرزی به طبع افزایش و کاهش دو دهنه پوسته در جهات دو محور عمود برهم می باشد. این در حالی است که در یک ورق تخت چنین رفتارهایی ملاحظه نمی شود. همچنین این شکل ها نشان می دهند که در هر نسبت StD.ir

طول به عرض، مقدار نیرو برای شرط مرزی گیردار بیشتر از شرط مرزی ساده بوده و این رفتار به دلیل افزایش سفتی سازه می باشد. این رفتار برای خیز سازه برعکس است. تغییرات خیز بیشینه در راستای طولی سازه (y=b/2) با نسبت های مختلف a/b برای هر دو نوع شرط مرزی ساده و گیردار در شکل **۱۴** نشان داده شده است. ملاحظه می شود که با افزایش ضریب منظری پوسته (a/b) و تبدیل شدن به باریکه، اثرات شرایط مرزی به علت نزدیک شدن دو لبه مقابل کاهش یافته و حالات لولا و گیردار رفتاری مشابه از خود نشان می دهند.

۶-۲- اثر سرعت ضربهزننده

در این بخش به بررسی اثر سرعت ضربهزنندهها بر روی رفتار دینامیکی پوسته مرکب تکانحنایه تحت برخورد دو جرم ضربهزننده در نقاط (x1=a/2,y1=b/2) و (x2=4a/5, y2=b/2) با استفاده از مدل کامل پرداخته میشود. خواص مکانیکی پوسته و ضربهزننده مشابه جدول ۳ میباشد، ولی خواص هندسی پوسته در جدول ۷ داده شده است. سرعت ضربهزنندههای اول و دوم در سه حالت مورد مطالعه به بصورت (۵ و ۱۰)، (۱۰ و ۱۵) و (۱۵ و ۱۵) متر بر ثانیه میباشند. همچنین جرم هر یک از ضربهزنندهها 8.53gr و قطر هر کدام mm



جدول (۷): خواص هندسی پوسته تکانحنایی.

$a = 300 mm, b = 200 mm, h = 2.54 mm, R_1 = \infty, R_2 = 10h,$	
lamination = $[0/90/90/0]$	

در شکل **۱۵ و ۱۶** به ترتیب تاریخچه نیرو و خیز بـرای سرعتهای ضربهزننده فوق و در بعضی از نقاط برخـورد بـا استفاده از مدل کامل برای پوستهی مرکب تک انحنایـه بـا

شرط مرزی گیردار نشان داده است. به کمک روش حل حاضر، نمای سه بعدی پوسته مرکب تکانحنایه تحت دو جرم ضربه زننده در شکل **۱۷** آورده شده است. در این شکل محور عمودی خیز و واحد آن متر می باشد.



این شکلها نشان میدهند که با افزایش سرعت برخورد اجرام ضربهزننده در هر نقطه، برخورد نیرو و خیر افرایش مییابد، زیرا انرژی ضربهزننده افزایش مییابد. بدیهی است که هرچه محل برخورد به لبه تکیهگاهی پوسته نزدیکتر باشد نیروی برخورد بیشتر و خیز کمتری مشاهده میشود.

از طرفی همانطور که مشاهده می شود، زمان تماس تاریخچه نیرو با تاریخچه خیز برابر نیست و بهعبارتی هنگامی که نیرو به صفر می رسد تاریخچه خیز به صفر نمی رسد و افزایش می یابد. این پدیده فقط در جرمهای کوچک اتفاق می افتد.

F-8- اثر نسبت L/R در استوانه کامل

یکی دیگر از پارامترهای بسیار مهم در پوستههای مرکب استوانهای تحت برخورد اجرام ضربهزننده، نسبت طول به شعاع سازه (I/R) میباشد. در این بخش اثر این نسبت روی رفتار دینامیکی پوسته استوانهای تحت برخورد سه جرم ($x_2=L/2, \ \theta_2 = 0$) ($x_1=L/4, \ \theta_1 = 0$) ($x_2=L/2, \ \theta_2 = 0$) فرربهزننده در نقاط ($\theta_1 = 0, \ x_1 = L/4, \ \theta_3 = 0$) و ($\theta_3 = 0, \ x_2 = 0$) بررسی میشود. خواص هندسی و مکانیکی ضربهزننده ها و پوسته ی استوانه ای در جدول **۸** داده شده است.

استوانهای	مر کب	پوسته	جنس	و	هندسه	ل (۸):	جدو
				1			

و اجرام صربهزينده.			
پوستەمر كب استوانەاي			
$E_{11} = 138 GPa, E_{22} = 9 GPa$ $G_{12} = G_{13} = 7.1 GPa$ $G_{23} = 3.24 GPa$ $\rho = 1540 kgm^{-3}, v_{12} = 0.3$ $R = 0.1 m$ lamination[0/90/0/90] _s $L = 2R$			
اجرام ضربهزننده			
$E = 200 \ GPa$ $\rho = 7971 \ kgm^{-3}$ $\nu = 0.3$	$d_i = 25.4 mm$ $V_i = 20 ms^{-1}; i = 1, 2$		

همچنین جرم تمامی ضربهزنندهها ۲/۵ کیلوگرم میباشد. تغییرات بیشینه نیروی برخورد در هر سه نقطه برخورد برای هر دو نوع شرط مرزی ساده و گیردار با نسبت L/R (از ۱ تا ۶) بهترتیب در شکل ۱۸ و ۱۹ نشان داده شده است.

همان طور که مشاهده می شود با افزایش نسبت طول به شعاع سازه یا به عبارتی با افزایش طول پوسته استوانه ای، مقدار بیشینه نیروی برخورد در هر سه نقطه برخورد کاهش می یابد زیرا سفتی سازه کاهش پیدا می کند. همان طور که مشاهده

می شود مقدار نیروی برخورد در هر نسبت طول به شعاع و برای هر نوع شرط مرزی در نقطه برخورد دوم کمتر از نقاط دیگر میباشد، زیرا سفتی در مرکز یک سازه همواره کمتر از بقیه نقاط میباشد. بدیهی است که هرچه محل برخورد به لبه تکیهگاهی پوسته نزدیکتر باشد، نیروی برخورد بیشتر و خیز کمتری مشاهده می شود. شکل های ۱۸ و ۱۹ نشان می دهند که بارگذاری و مختصات آنها در جهت طولی استوانه نسبت به وسط استوانه متقارن است. همچنین بهدلیل کمتر بودن انعطاف پذیری سازه با شرط مرزی گیردار، مقدار نیروی برخورد برای شرط مرزی گیردار در هر نسبت طول به شعاع بیشتر از شرط مرزی ساده میباشد. تغییرات بیشینه خیز پوسته برای سه نسبت L/R=1,5,10 و برای هر دو نوع شرایط مرزی در راستای طولی سازه استوانهای ($\theta = 0$) در شکل ۲۰ نشان داده شده است.



شکل (۱۸): تغییرات بیشنه نیروی برخورد در هر سه نقطه برخورد با نسبت L/R برای استوانه با دو سرشرط مرزی ساده.







شکل ۲۰ نشان میدهد که در نسبتهای پایین طول به شعاع، سازه دستخوش خیز بسیار کمتری می شود و همچنین بهدلیل نزدیک بودن نقاط برخورد در طول های کم سازه، سازه بهصورت یکپارچه خیز برمیدارد. ولی در نسبتهای بالای طول به شعاع سازه، خیز زیر نقاط برخورد بیشینه بوده و سازه به صورت یکپارچه منظم دستخوش جابهجایی نمیشود. همچنین با افزایش نسبت L/R بهدلیل بیشتر شدن انعطاف پذیری سازه مقدار خیز افزایش یافته و این افزایش برای شرط مرزی ساده به مراتب بیشتر می باشد. نمای سه بعدی یوسته مرکب استوانهای تحت برخورد سه جرم ضربهزننده برای نسبت L/R=10 با شرط مرزی ساده در شکل ۲۱ نشان داده شدہ است



٨۶

۸- مراجع

- Christoforou, A.P. and Swanson, S.R. "Analysis of Impact Response in Composite Plate", Int. J. Solids Strut; Vol. 27, No.2, pp. 161-70, 1991.
- Pierson, M.O. and Vaziri, R. "Analytical Solution for Low-Velocity Impact Response of Composite Plates", AIAA J., Vol. 34, No. 8, pp. 1633–40, 1996.
- Christoforou, A.P. and Yigit, A.S. "Characterization of Impact in Composite Plates", Int. J. Composite Structures, Vol. 43, No.1, pp. 15-24, 1998.
- Chun, L. and Lam, K.Y. "Dynamic Response of Fully Clamped Laminated Composite Plates Subjected to Low Velocity Impact of a Mass", Int. J. Solids Struct; Vol. 35, No.11, pp. 963–79, 1998.
- Sun, C.T. and Chen, J.K. "On the Impact of Initially Stressed Composite Laminates", Int. J. Composite Materials, Vol. 19, No. 6, pp. 490–504, 1985.
- Gong, S.W., Toh, S.L. and Shim, V.P.W. "The Elastic Response of Orthotropic Laminated Cylindrical Shells to Low-Velocity Impact", Int. J. Composites Eng., Vol. 4, No. 2, pp. 241-266, 1994.
- Chandrashekara, K. and Schroeder, T. "Nonlinear Impact Analysis of Laminated Cylindrical and Doubly Curved Shells", Int. J. Compsite Materials, Vol. 29,No.16, pp. 2160-2179, 1995.
- Krishnamurthy, K.S., Mahajan, P., and Mittal, R.K.
 "A Parametric Study of the Impact Response and Damage of Laminated Cylindrical Composite Shells" Int. J. Composite Sciens, Vol. 61, No.12, pp. 1655–69, 2001.
- Shiuh-Chuan, H. and Yu-Cheng, L. "The Finite Element Analysis of Composite Laminates and Shell Structures Subjected to Low Velocity Impact", Int. J. Composite Structures, Vol. 66, No.1-4, pp. 277–285, 2004.
- Lam, K.Y. and Sathiyamoorthy, T.S. "Response of Composite Beam under Low-Velocity Impact of Multiple Masses", Int. J. Composite Structures, Vol. 44, No.2-3, pp. 205-220, 1999.
- 11. Ghajar, R., Malekzadeh, K., Gholami, M. "Analysis of impact dynamic response of doubly curved composite laminated shell uner initial stresses" Aerospace mechanics Emam Hossien Journal, accepted in 16 september Vol. 10, No.4, 2013(In Persion).
- Reddy, J.N. "Exact Solution of Moderately Thick Laminated Shells", Int. J. Engng Meek. ASCE, Vol. 118, No.5, pp. 794-889, 1984.
- 13. Sanders, J.L. "An Improved First Approximation Theory for Thin Shells", NASA THR24, 1959.
- 14. Ugural, AC. "Stresses in Plates and Shells", McGraw-Hill, 1999.
- Mindlin, R.D. "Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates", Int. J. Applied Mech., Vol. 18, No.2, pp. 31–8, 1951.
- 16. Qatu, M.S. "Vibtation of Laminated Shells and Platrs", first edition, John Whily Press, 2004.
- 17. Carvalho, A. and Soares, C.G. "Dynamic Response

۷- نتیجهگیری

در تحقیق حاضر، برای اولین بار پاسخ دینامیکی انواع پوستههای مرکب تحت ضربه چند جرم ضربهزننده براساس تئوری مرتبه برشی اول و با استفاده از روش سری فوریه مطالعه شده و معادلات حرکت بهروش نیمه تحلیلی حل شده است. بعضی از نتایج بهدست آمده در این مقاله عبارتند از:

۱ - دو مدل جرم و فنر خطی شده جدید و مدل کامل غیر خطی
 هر تز توانایی بسیار بالایی در تحلیل چند ضربه داشـته و توافـق
 خوبی با هم دارند.

۲- با افزایش نسبت طول به عرض از ۱ به ۴، بیشینه خیز سازه برای شرط مرزی ساده و گیردار به ترتیب ۸/۳٪ کاهش و ۹/۳۷٪ افزایش مییابد. این موضوع و پیچیدگی رفتاری بهدلیل اثرات متقابل انحناها و شرایط مرزی، بهطبع افزایش و کاهش دو دهنه پوسته در جهات دو محور عمود بر هم میباشد. این در حالی است که در یک ورق تخت چنین رفتاره ایی ملاحظه نمی شود.

۳- با افزایش ضریب منظری پوسته و تبدیل شدن به باریکه اثرات شرایط مرزی به علت نزدیک شدن دو لبه مقابل کاهش یافته و حالات لولا و گیردار رفتاری مشابه از خود نشان می دهند.

۴- با افزایش نسبت طول به عرض پوسته دوانحنایی (a/b)، برای شرایط مرزی ساده مقدار نیرو افزایش و برای شرط مرزی گیردار نیرو کاهش مییابد. این تغییرات برای خیز پوسته برعکس میباشد. با توجه به چیره بودن اثرات شرایط مرزی و انحناهای گیردار بر اثرات افزایش نسبت طول به عرض، ملاحظه میشود که اثر این پارامتر روی پوسته با شرایط مرزی گیردار کمتر از حالت اطراف لولا میباشد.

۵- با افزایش نسبت (L/R) بهدلیل افزایش انعطاف پذیری سازهها، مقدار نیرو کاهش و خیز بیشینه در زیر هر نقطه ضربهزننده افزایش می یابد.

۶- با تغییر سرعت اجرام ضربهزننده، بیشینه نیرو و خیز بهدلیل بیشتر شدن انرژی ضربهزنندهها، افزایش می ابند.

۲- در تمامی تحلیلهای انجام شده مقدار نیرو برای شرط مرزی گیردار بیشتر از شرط مرزی ساده بوده و این روند برای خیز برعکس میباشد. شرط مرزی گیردار باعث سفت تر بودن سازهها می گردد.

۸- در ضربهزنندههای با جرم کوچک زمان تماس برای تاریخچه نیرو و تاریخچه خیز متفاوت میباشد در حالی که در اجرام بزرگ ضربهزننده زمان تماس برای هر دوی آنها تقریبا برابر می باشد.

$$\begin{split} &L_{11} = A_{11} \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + (A_{66} + 2C_0B_{66} + C_0^2D_{66})\frac{\partial^2}{\partial X_2^2} + \\ &2C_0B_{16} \frac{\partial^2}{\partial X_1\partial X_2} - \frac{K_SA_{55}}{R_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\ &L_{12} = L_{21} = -C_0B_{16} \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + C_0B_{26} \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} + \\ &(A_{12} + A_{66} - C_0^2D_{66})\frac{\partial^2}{\partial X_1\partial X_2} \\ &L_{13} = -L_{31} = \left[\frac{(A_{11} + K_SA_{55})}{R_1} + \frac{A_{12}}{R_2}\right]\frac{\partial}{\partial X_1} + \\ &C_0\left(\frac{B_{16}}{R_1} + \frac{B_{26}}{R_2}\right)\frac{\partial}{\partial X_2} \\ &L_{14} = L_{41} = B_{11}\frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + (B_{66} + C_0D_{66})\frac{\partial^2}{\partial X_2^2} + \\ &2B_{16}\frac{\partial^2}{\partial X_1\partial X_2} + \frac{K_SA_{55}}{R_1} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\ &L_{15} = L_{51} = (B_{12} + B_{66} + C_0D_{66})\frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + \\ &B_{16}\frac{\partial^2}{\partial X_2^2} + B_{26}\frac{\partial^2}{\partial X_2^2} \\ &L_{22} = (A_{66} - 2C_0B_{66} + C_0^2D_{66})\frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + \\ &A_{22}\frac{\partial^2}{\partial X_2^2} - 2C_0B_{26}\frac{\partial^2}{\partial X_1\partial X_2} - \frac{K_SA_{44}}{R_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\ &L_{23} = -L_{32} = -C_0\left(\frac{B_{16}}{R_1} + \frac{B_{26}}{R_2}\right)\frac{\partial}{\partial X_1} + \\ &\left[\frac{A_{12}}{R_1} + \frac{1}{R_2}(A_{22} + K_SA_{44})\right]\frac{\partial}{\partial X_2} \\ &L_{24} = L_{42} = B_{16}\frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + B_{26}\frac{\partial^2}{\partial X_2^2} + \\ &B_{16}\frac{\partial^2}{\partial X_2^2} + 2B_{26}\frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + B_{26}\frac{\partial^2}{\partial X_2} \\ &L_{25} = L_{52} = (B_{66} - C_0D_{66})\frac{\partial^2}{\partial X_1\partial X_2} \\ &L_{25} = L_{52} = (B_{66} - C_0D_{66})\frac{\partial^2}{\partial X_1\partial X_2} + \frac{K_SA_{44}}{R_2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\ &L_{33} = K_SA_{55}\frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + K_SA_{44}\frac{\partial^2}{\partial X_2^2} - \frac{A_{11}}{R_1^2} \\ &-\frac{2A_{12}}{R_1R_2} - \frac{A_{22}}{R_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \end{aligned}$$

of Rectangular Plates of Composite Materials Subjected to Impact Loads", Int. J. Composite Structures, Vol. 34, pp. 55–63, 1996.

- Zheng, D. and Binienda, W.K. "Analysis of Impact Response of Composite Laminates under Prestress", 10.1061/(ASCE)0893-132121, Vol. 21, No. 24, pp. 127-135, 2008.
- Abrate, S. "Modeling of Impacts on Composite Structures", Int. J. Composite Structures, Vol. 51, No.2, pp. 129-38, 2001.
- Shivakumar, K.N., Elber, W., and Illg, W. "Prediction of Impact Force and Duration Due to Low Velocity on Circular Composite Laminates", Int. J. Mechanics, Vol. 52, No.3, pp.674-680, 1985.
- Choi, I.H. and Lim, C.H. "Low-Velocity Impact Analysis of Composite Laminates Using Linearized Contact Law", Int. J. Composite Structures, Vol. 66, No.1-4, pp. 125–32, 2004.
- Shokuhfar, A., Khalili, S.M.R., Ashenai Ghasemi, F., Malekzadeh, K., and Raissi, S. "Analysis and Optimization of Smart Hybrid Composite Plates Subjected to Low-Velocity Impact Using the Response Surface Methodology (RSM)", Thin-Walled Structures, Vol. 46, No.11, pp. 1204–12, 2008.
- 23. Swanson, S.R. "Limits of Quasi-Static Solutions in Impact of Composite Structures", Int. J. Composite Engeineering, Vol. 2, No. 4, pp. 261-267, 1992.
- 24. Abrate, S. "Impact on Composite Structures", Cambridge University Press, US, 1998.
- Delfosse, D., Vaziri, R., Pierson, M.O., and Poursartip, A. "Analysis of the Non-Penetrating Impact Behavior of CFRP Laminates", In: Proceeding of the 9th Int. Conf. on Composite Materials (Madrid, Spain), Cambridge, England, UK: Woodhead Publishing, Vol. 5, No. 9, pp. 366–73, 1993.
- Christoforou, A.P., Elsharkawy, A.A., and Guedouar, L.H. "An Inverse Solution for Low Velocity Impact in Composite Plates", Int. J. Computers and structures, Vol. 79, No. 29-30, pp. 26 07 – 2619, 2001.
- Krishnamurthy, K..S., Mahajan, P., and Mittal, R.K. "Impact Response and Damage in Laminated Composite Cylindrical Shells", Composite Structures, Vol. 59, No.1, pp. 15–36, 2003.
- Matemilola, S.A. and Stronge, W.J. "Impact Response of Composite Cylinders. Int. J. Solids and Structures", Vol. 34, No. 21, pp. 2669-2684, 1997.

پیوست الف تعدادی از اپراتورهای مشتقات L_{ij} و درآیه های ماتریسهای سفتی k_{ij} و جرمی M_{ij} پوسته مرکب دو انحنایه باز عبارتند از:

$$\begin{aligned} & k_{11} = A_{1}\alpha_{m}^{2} + \left(A_{6} + 2C_{0}B_{6} + C_{0}^{2}D_{6}\right)\beta_{\pi}^{2} + \frac{k_{1}A_{5}}{R_{1}^{2}} \\ & M_{11} = M_{22} = M_{33} = I_{0} \\ & M_{44} = M_{43} = I_{1} \\ & M_{44} = M_{43} = I_{2}, \ M_{0} = M_{0} \end{aligned}$$

$$k_{13} = k_{31} = \left[\frac{1}{R}(A_{1} + k_{2}A_{3}) + \frac{A_{3}}{R_{2}}\right]\alpha_{m} \\ & k_{13} = k_{31} = \left[\frac{1}{R}(A_{1} + k_{2}A_{3}) + \frac{A_{3}}{R_{2}}\right]\alpha_{m} \\ & k_{22} = A_{2}\beta_{\pi}^{2} + \left(A_{6} - 2C_{0}B_{6} + C_{0}^{2}D_{6}\right)\alpha_{m}\beta_{\pi} \\ & k_{22} = A_{2}\beta_{\pi}^{2} + \left(A_{6} - 2C_{0}B_{6} + C_{0}^{2}D_{6}\right)\alpha_{m}\beta_{\pi} \\ & k_{33} = k_{32} = \left[\frac{1}{R}(A_{2} + k_{2}A_{4}) + \frac{A_{3}}{R_{2}^{2}}\right]\beta_{\pi} \\ & k_{34} = k_{42} = (B_{12} + B_{6} - C_{0}D_{6})\alpha_{m}\beta_{\pi} \\ & k_{23} = k_{22} = B_{22}\beta_{\pi}^{2} + (B_{60} - C_{0}D_{6})\alpha_{m}\beta_{\pi} \\ & k_{23} = k_{22} = B_{22}\beta_{\pi}^{2} + (B_{60} - C_{0}D_{6})\alpha_{\pi}\beta_{\pi} \\ & k_{33} = k_{33} = k_{33}\alpha_{m}^{2} + k_{1}A_{3}\beta_{\pi}^{2} + \frac{A_{1}}{R_{2}^{2}} \\ & k_{33} = k_{33} = k_{33}\alpha_{m}^{2} + k_{2}A_{3}\beta_{\pi}^{2} + \frac{A_{1}}{R_{2}^{2}} \\ & k_{33} = k_{33} = A_{3}\alpha_{m}^{2} + k_{3}A_{3}\beta_{\pi}^{2} + \frac{A_{1}}{R_{2}^{2}} \\ & k_{33} = k_{33} = A_{3}\alpha_{m}^{2} + k_{3}A_{3}\beta_{\pi}^{2} + \frac{A_{1}}{R_{2}^{2}} \\ & k_{33} = k_{3}\alpha_{m}^{2} + k_{3}A_{3}\beta_{\pi}^{2} + \frac{A_{1}}{R_{2}^{2}} \\ & k_{33} = k_{3}\alpha_{m}^{2} + k_{3}A_{3}\beta_{\pi}^{2} + \frac{A_{1}}{R_{2}^{2}} \\ & k_{33} = k_{3}\alpha_{m}^{2} + k_{3}A_{3}\beta_{\pi}^{2} + \frac{A_{1}}{R_{2}^{2}} \\ & k_{33} = k_{3}\alpha_{m}^{2} + k_{3}A_{3}\beta_{\pi}^{2} + \frac{A_{1}}{R_{2}^{2}} + \frac{A_{2}}{R_{2}^{2}} \\ & k_{33} = k_{3}\alpha_{m}^{2} + k_{3}A_{3}\beta_{\pi}^{2} + \frac{A_{1}}{R_{2}^{2}} \\ & k_{33} = k_{3}\alpha_{m}^{2} + k_{3}A_{3}\beta_{\pi}^{2} + \frac{A_{1}}{R_{2}^{2}} \\ & k_{33} = k_{3}\alpha_{m}^{2} + k_{3}A_{3}\beta_{\pi}^{2} + \frac{A_{1}}{R_{2}^{2}} \\ & k_{33} = k_{3}\alpha_{m}^{2} + k_{3}A_{3}\beta_{\pi}^{2} + \frac{A_{1}}{R_{2}^{2}} \\ & k_{33} = k_{3}\alpha_{m}^{2} + k_{3}A_{3}\beta_{\pi}^{2} + \frac{A_{1}}{R_{2}^{2}} \\ & k_{33} = k_{3}\alpha_{m}^{2} + k_{3}A_{3}\beta_{\pi}^{2} + \frac{A_{1}}{R_{2}^{2}} \\ & k_{33} = k_{3}\alpha_{m}^{2} + k_{3}\alpha_{m}^{2} + \frac{A_{1}}{R_{2}^{2}} \\ & k_{33} = k_{3}\alpha_{m}^{2} + k_{3}\alpha_{m}^{2} + \frac{A_{1}}{R_{2}^{2}} + \frac{A_{1}}{R_{2}^{2}}$$