

تحلیل پاسخ دینامیکی پوسته‌های کامپوزیتی دوانحنایی تحت ضربه سرعت پایین با استفاده از مدل‌های کامل و فنر بهبودیافته

محسن غلامی^۲

دانشکده مهندسی مکانیک

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

کرامت ملک‌زاده فرد^۲

مجتمع هوافضایی

دانشگاه مالک اشتر

رحمتا... قاجار^۱

دانشکده مهندسی مکانیک

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

(تاریخ دریافت: ۹۲/۰۲/۰۸؛ تاریخ پذیرش: ۹۲/۰۶/۲۰)

چکیده

در این مقاله به تحلیل دینامیکی پوسته‌های کامپوزیتی دوانحنایی تحت ضربه سرعت پایین به روش تحلیلی پرداخته می‌شود. معادلات حرکت براساس تئوری برشی مرتبه اول (FSDT) برای شرایط مرزی ساده استخراج می‌گردد. تاریخچه نیروی تماسی از دو مدل جرم و فنر بهبودیافته و مدل کامل با استفاده از قانون غیرخطی تماس هرتز پیش‌بینی و با هم مقایسه می‌شوند. با در نظر گرفتن مؤلفه‌های جابه‌جایی به صورت سری فوریه دوگانه، معادلات حرکت پوسته و ضربه‌زننده به صورت کوپل با کدنویسی در نرم‌افزار Matlab با استفاده از روش گالریین حل و پاسخ دینامیکی محاسبه می‌شود. در این مطالعه، اثر پارامترهای هندسی پوسته مانند تغییرات انحنا، نسبت طول انحناها، زاویه الیاف، تغییر جرم و سرعت ضربه‌زننده در یک سطح ثابت از انرژی ضربه زننده روی پاسخ ضربه از هر دو مدل تعیین و مقایسه می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: ضربه کم سرعت، پوسته کامپوزیتی دوانحنایی، مدل جرم و فنر، مدل کامل، قانون تماسی هرتز

Dynamic Response Analysis of Doubly Curved Composite Shells Subjected to Low Velocity Impact Using two Models of Complete and Improved Spring-Mass

R. Ghajar

Mechanical Engineering Department

K. N. Tossi University of Technology

K. Malekzadeh

Aerospace Engineering Department

Malek Ashtar university

M. Gholami

Mechanical Engineering Department

K. N. Tossi University of Technology

(Received: 29 May, 2013; Accepted: 11 September, 2013)

ABSTRACT

In this paper, dynamic analysis of doubly curved composite shells under low velocity impact is studied analytically. The governing equations based on the first-order deformation theory (FSDT) are derived for simply supported boundary conditions. The contact force history is predicted using two models of complete and improved spring-mass. Considering the displacement components as the doubly Fourier series, equations of motion shell and impactor are solved analytically. By writing code in Matlab software, using Galerkin method, the dynamic response of shell is obtained. In this investigation, the effect of geometrical parameters, such as curvature changes, aspect ratio (curvature length ratio), fiber orientation, mass and velocity of impactor, with constant impact energy, on the impact response of shell is determined by two models.

Keywords: Low Velocity Impact, Double Curved Composite Shell, Spring-Mass Model, Complete Model, Hertz Contact Law

۱- استاد (نویسنده پاسخگو): ghajar@kntu.ac.ir

۲- دانشیار: kmalekzadeh@mut.ac.ir

۳- کارشناس ارشد: gholami.m64@gmail.com

۱- مقدمه

امروزه سازه‌های کامپوزیتی به‌خاطر ویژگی‌هایی چون استحکام، سفتی مخصوص بالا و مقاومت در برابر خستگی و خوردگی، به‌طور گسترده‌ای در صنایع هوا و فضا، تجهیزات ورزشی، لوله‌های فشار و قسمت‌های مختلف خودرو مورد استفاده قرار می‌گیرند. تحلیل پوسته‌های کامپوزیتی چندلایه تحت بار ضربه در سال‌های اخیر به‌دلیل حساسیت مواد کامپوزیتی در برابر ضربه مورد توجه قرار گرفته است.

رفتار سازه‌های کامپوزیتی در برابر ضربه کم سرعت توسط محققان زیادی به‌صورت تجربی، عددی و تحلیلی مورد مطالعه قرار گرفته است ولی تحقیقات کمی به بررسی ضربه کم سرعت بر روی پوسته‌های دوانحنایی پرداخته شده است. کریستوفرو و سوانسون^۱ [۱] به‌روش تحلیلی به بررسی پاسخ ضربه روی یک صفحه کامپوزیتی پرداختند و از رابطه خطی قانون تماس هرتز برای به‌دست آوردن تاریخچه نیروی ضربه استفاده کردند. پیرسن و وزیری^۲ [۲] یک حل تحلیلی برای به‌دست آوردن نیروی ضربه از قانون غیرخطی هرتز روی صفحات کامپوزیتی ارائه دادند. کریستوفرو و یجیت^۳ [۳] مشخصات ضربه یک صفحه کامپوزیتی را با استفاده از قانون تماس خطی الاستوپلاستیک به‌روش تحلیلی مطالعه کردند. چان و لام^۴ [۴] یک روش عددی با استفاده از قانون لاگرانژ و قانون تماسی هرتز برای محاسبه پاسخ دینامیکی صفحات کامپوزیتی چندلایه پیشنهاد دادند. سان و چن^۵ [۵] به‌روش اجزاء محدود پاسخ ضربه روی صفحات کامپوزیتی با تنش‌های اولیه را، با استفاده از قانون بهبود یافته هرتز به‌دست آوردند. گانگ و همکاران^۶ [۶] نیروی ضربه یک ضربه‌زننده روی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی را از مدل جرم و فنر دو درجه آزادی تعیین کردند. چاندراشکار و شرودر^۷ [۷] به تحلیل غیرخطی ضربه روی پوسته‌های دوانحنایی و استوانه‌ای چندلایه به‌روش اجزاء محدود پرداختند و از قانون بهبود یافته هرتز برای تعیین تاریخچه نیروی تماس بهره بردند. کریشنامارثی و همکاران^۸ [۸] و همچنین گاناپاسی و راثو^۹ [۹] پاسخ ضربه و آسیب پوسته‌های کامپوزیتی

استوانه‌ای و کروی چندلایه به‌روش اجزاء محدود با استفاده از قانون تماس هرتز را بررسی نمودند. چان و چنگ^{۱۰} [۱۰] پاسخ دینامیکی پوسته‌های چندلایه کامپوزیتی را با استفاده از نرم‌افزار اجزاء محدود ANSYS/LS-DAYNA در برابر ضربه مطالعه کردند. در این مطالعه آسیب و لایه‌لایه شدن لایه‌ها را در نظر گرفته و بررسی می‌شوند. یمینگ و همکاران^{۱۱} [۱۱] به بررسی آسیب و پاسخ دینامیکی یک پوسته کروی کامپوزیتی پرداخته و از قانون تماس الاستوپلاستیک بهبود یافته برای تعیین تاریخچه نیرو استفاده کرده‌اند. خلیلی و همکاران [۱۲] به تحلیل ضربه کم سرعت پوسته استوانه‌ای و صفحه کامپوزیتی به‌وسیله نرم‌افزار المان محدود ABAQUS پرداخته‌اند.

بررسی‌های انجام شده نشان می‌دهند که تا به‌حال پاسخ دینامیکی پوسته‌های دوانحنایی در برابر ضربه به روش تحلیلی با استفاده از مدل کامل بررسی نشده است.

در اکثر کارهای قبلی جرم ضربه‌زننده کوچک می‌باشد بنابراین، در تحقیق حاضر به بررسی پاسخ دینامیکی پوسته‌های کامپوزیتی دوانحنایی در برابر ضربه کم سرعت و جرم بزرگ به‌روش تحلیلی پرداخته می‌شود. تاریخچه نیروی تماس از دو مدل جرم و فنر بهبود یافته و مدل کامل با استفاده از قانون غیرخطی هرتز پیش‌بینی و مقایسه می‌گردند.

در مدل کامل معادلات حرکت پوسته و ضربه‌زننده به‌صورت کوپل و همزمان با نوشتن کد در نرم‌افزار Matlab حل و در نهایت نتایج به‌دست آمده با نتایج موجود در مقالات مقایسه می‌گردند. همچنین اثر پارامترهای هندسی پوسته مانند تغییرات انحنا، نسبت طول انحناها، زاویه الیاف، سرعت و جرم ضربه‌زننده در یک سطح ثابت از انرژی روی پاسخ ضربه از هر دو مدل بررسی و مقایسه می‌گردند.

۲- معادلات حرکت

شکل ۱ مشخصات هندسی یک پوسته چندلایه دوانحنادار را نشان می‌دهد. x_1 ، x_2 و x_3 ، محورهای مختصات منحنی‌الخط

10 - Shiu and Cheng

11 - Yiming

1 - Christoforou and Swanson

2 - Pierson and Vaziri

3 - Yigit

4 - Chun and Lam

5 - Sun and Chen

6 - Gong

7 - Chandrashekara and Schroeder

8 - Krishnamurthy

9 - Ganapathy and Rao

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x_1} + \frac{w_0}{R_1}, & k_1 &= \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} \\ \varepsilon_2^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial x_2} + \frac{w_0}{R_2}, & k_2 &= \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} \\ \varepsilon_6^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial x_1} + \frac{\partial u_0}{\partial x_2}, & k_6 &= \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} - C_0 \left(\frac{\partial v_0}{\partial x_1} - \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \right) \\ \varepsilon_4^0 &= \frac{\partial w_0}{\partial x_2} + \phi_2 - \frac{v_0}{R_2}, & \varepsilon_5^0 &= \frac{\partial w_0}{\partial x_1} + \phi_1 - \frac{u_0}{R_1} \end{aligned} \quad (3)$$

$$C_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right),$$

پارامتر C_0 بر اساس تئوری ساندرز [۱۴] برای جلوگیری از چرخش جسم صلب در نظر گرفته شده است. معادلات حرکت برای یک پوسته نازک دوانحنایی و با فرض ثابت بودن شعاع انحنا از اصل هامیلتون به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{\partial N_6}{\partial x_2} + C_0 \frac{\partial M_6}{\partial x_2} + \frac{Q_1}{R_1} &= I_0 \ddot{u}_0 + I_1 \ddot{\phi}_1 \\ \frac{\partial N_6}{\partial x_1} + \frac{\partial N_2}{\partial x_2} - C_0 \frac{\partial M_6}{\partial x_1} + \frac{Q_2}{R_2} &= I_0 \ddot{v}_0 + I_1 \ddot{\phi}_2 \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} - \left(\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} \right) + q &= I_0 \ddot{w}_0 \\ \frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial M_6}{\partial x_2} - Q_1 &= I_1 \ddot{u}_0 + I_2 \ddot{\phi}_1 \\ \frac{\partial M_6}{\partial x_1} + \frac{\partial M_2}{\partial x_2} - Q_2 &= I_1 \ddot{v}_0 + I_2 \ddot{\phi}_2 \end{aligned} \quad (4)$$

$$I_i = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(x_3)^i dx_3$$

$$= \sum_{k=1}^N \int_{x_3^{(k)}}^{x_3^{(k+1)}} \rho^{(k)}(x_3)^i dx_3 \quad (i = 0, 1, 2),$$

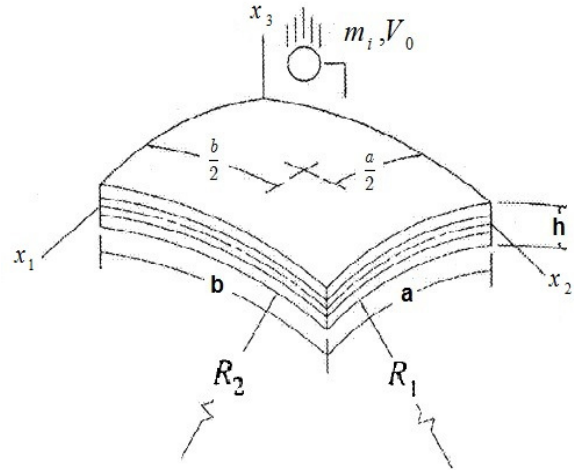
که در آن Q_i بار دینامیکی عمود بر پوسته، I_i ممان اینرسی، N_i و M_i به ترتیب برآیند تنش‌ها و گشتاورها، و Q_i برآیند نیروهای برشی عرضی می‌باشند که برای یک ماده ارتوئروپیک خاص ($A_{i6} = B_{i6} = D_{i6} = 0, i = 1, 2$) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^0\} \\ \{k\} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_2 \\ Q_1 \end{Bmatrix} = k_s \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_4^0 \\ \varepsilon_5^0 \end{Bmatrix}, \quad (5)$$

که در آن، A_{ij} و B_{ij} و D_{ij} به ترتیب سفتی کششی، سفتی کوپل کششی خمشی و سفتی چندلایه است. k_s ضریب تصحیح برشی است که توسط میندیلین^۱ [۱۵] معمولاً برابر $\pi^2/12$ در نظر گرفته می‌شود.

متعامد می‌باشند، به طوری که محورهای منحنی x_1 و x_2 روی صفحه میانی $x_3 = 0$ قرار دارند و محور عمود بر صفحه میانی است. R_1 و R_2 به ترتیب شعاع‌های اصلی انحناهای صفحه میانی در جهت محورهای x_1 و x_2 ، پارامترهای a و b طول کمان‌های صفحه میانی می‌باشند.



شکل (۱): یک پوسته چندلایه دوانحنایی.

میدان جابه‌جایی بر اساس تئوری مرتبه برشی اول به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3, t) &= u_0(x_1, x_2, t) + x_3 \phi_1(x_1, x_2, t) \\ u_2(x_1, x_2, x_3, t) &= v_0(x_1, x_2, t) + x_3 \phi_2(x_1, x_2, t) \\ u_3(x_1, x_2, x_3, t) &= w_0(x_1, x_2, t), \end{aligned} \quad (1)$$

u_0, v_0, w_0 ، جابه‌جایی پوسته در راستای x_1, x_2 و x_3 در صفحه میانی و ϕ_1 و ϕ_2 چرخش عمودهای عرضی به ترتیب حول محور x_1 و x_2 هستند. روابط کرنش و جابه‌جایی یک پوسته دوانحنایی به صورت زیر است [۱۳]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^0 &= \varepsilon_1 + x_3 k_1, & \varepsilon_2^0 &= \varepsilon_2 + x_3 k_2 \\ \gamma_{23} &= \varepsilon_4 = \varepsilon_4^0, & \gamma_{13} &= \varepsilon_5 = \varepsilon_5^0 \\ \gamma_{12} &= \varepsilon_6 = \varepsilon_6^0 + x_3 k_6, \end{aligned} \quad (2)$$

ε_1^0 و ε_2^0 مؤلفه‌های کرنش عمودی، ε_6^0 مؤلفه کرنش برشی و ε_4^0 و ε_5^0 مؤلفه‌های کرنش برشی عرضی صفحه میانی، k_1, k_2 و k_6 ، انحناهای صفحه میانی پوسته می‌باشند.

1- Mindlin

به صورت زیر نوشته می‌شود [۱۸]:

$$F(t) = k_c \alpha^{1.5} = k_c (W_i(t) - W_S(x_{1c}, x_{2c}, t))^{1.5}, \quad (10)$$

$$W_S(x_{1c}, x_{2c}, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}^0(t) \sin \frac{m\pi}{a} x_{1c} \sin \frac{n\pi}{b} x_{2c} \quad (11)$$

$$x_{1c} = \frac{a}{2}, \quad x_{2c} = \frac{b}{2},$$

که در آن، α ، میزان فرورفتگی، W_i جابه‌جایی ضربه‌زننده، جابه‌جایی پوسته و k_c سفتی تماسی هرتز که برای تماس بین ضربه زننده کروی صلب و پوسته‌ی دوانحنایی به صورت زیر ارائه شده است [۱۷]:

$$k_c = \frac{4}{3} E^* \sqrt{R^*} \quad (12)$$

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_i^2}{E_i} + \frac{1 - \nu_s^2}{E_s}, \quad \frac{1}{R^*} = \frac{1}{R_i} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

اندیس i و s به ترتیب مربوط به ضربه‌زننده و سازه هدف است. با جایگذاری رابطه‌های (۸، ۳ و ۵) در رابطه (۴)، معادلات حرکت پوسته به صورت رابطه (۱۳) درمی‌آید. در مدل کامل معادلات حرکت پوسته (۱۳) و ضربه‌زننده (۱۴) به صورت کوپل با نوشتن کد در نرم‌افزار Matlab حل و با تعیین W_i و W_S ، تاریخچه نیروی تماس از رابطه (۱۰) و پاسخ دینامیکی (خیز پوسته) از رابطه (۱۱) به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$[M]\{\ddot{X}\} + [K]\{X\} = \{Q\}, \quad X(t=0) = [0], \quad (13)$$

$$m_i \ddot{W}_i + F(t) = 0, \quad W_i(t=0) = 0, \quad \dot{W}_i(t=0) = V_0$$

$$\{X\} = \{U_{mn}^0, V_{mn}^0, W_{mn}^0, X_{mn}^0, Y_{mn}^0\}^T \quad (14)$$

$$\{Q\} = \{0, 0, Q_{mn}, 0, 0\},$$

که در آن، M و K به ترتیب ماتریس مربعی جرمی و سفتی پوسته به ابعاد $(5mn) \times (5mn)$ و بردار نیروی ضربه به ابعاد $(5mn) \times 1$ و W_i جابه‌جایی و جرم ضربه‌زننده می‌باشند.

برای یک بار متمرکز که به وسط پوسته در نقطه‌ای به مختصات (x_{1c}, x_{2c}) مطابق شکل ۱ وارد می‌شود، ضریب زمانی $Q_{mn}(t)$ به صورت زیر خواهد بود [۳]:

$$Q_{mn}(t) = \frac{4F(t)}{ab} \sin \alpha_m x_{1c} \sin \beta_n x_{2c} \quad (15)$$

$$x_{1c} = \frac{a}{2}, \quad x_{2c} = \frac{b}{2}.$$

۴-۲- مدل جرم و فنر بهبودیافته

شیواکومار^۱ و همکاران [۱۹] در سال ۱۹۸۵ از مدل جرم و فنر دو

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij}(1, x_3, x_3^2) dx_3 \quad (6)$$

$$= \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} \int_{x_3^{(k)}}^{x_3^{(k+1)}} (1, x_3, x_3^2) dx_3.$$

۳- شرایط مرزی

در این تحقیق، شرایط مرزی ساده برای یک پوسته دو انحنادار به صورت رابطه (۷) می‌باشد:

$$at \quad x_1 = 0, a$$

$$v_0 = w_0 = \phi_1 = \frac{\partial w_0}{\partial x_2} = 0, \quad N_{11} = M_{11} = 0 \quad (7)$$

$$at \quad x_2 = 0, b$$

$$u_0 = w_0 = \phi_2 = \frac{\partial w_0}{\partial x_1} = 0, \quad N_{22} = M_{22} = 0$$

به منظور ارضاء شرایط مرزی، میدان جابه‌جایی به صورت بسط سری فوریه دوگانه زیر در نظر گرفته می‌شود [۱۶]:

$$u_0(x_1, x_2, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{mn}(t) \cos \alpha_m x_1 \sin \beta_n x_2$$

$$v_0(x_1, x_2, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} V_{mn}(t) \sin \alpha_m x_1 \cos \beta_n x_2$$

$$w_0(x_1, x_2, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{mn}(t) \sin \alpha_m x_1 \sin \beta_n x_2 \quad (8)$$

$$\phi_1(x_1, x_2, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X_{mn}(t) \cos \alpha_m x_1 \sin \beta_n x_2$$

$$\phi_2(x_1, x_2, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Y_{mn}(t) \sin \alpha_m x_1 \cos \beta_n x_2$$

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \beta_n = \frac{n\pi}{b},$$

که در آن، $U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}, Y_{mn}$ ضرایب زمانی هستند که باید تعیین شوند. همچنین تابع نیروی $q(x_1, x_2, t)$ به صورت بسط سری فوریه دوگانه زیر تعریف می‌شود [۳]:

$$q(x_1, x_2, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Q_{mn}(t) \sin \alpha_m x_1 \sin \beta_n x_2. \quad (9)$$

۴- تعیین تاریخچه نیروی ضربه

در مطالعه حاضر برای تعیین تاریخچه نیروی تماسی از دو مدل کامل و مدل جرم و فنر بهبودیافته استفاده می‌شود.

۴-۱- مدل کامل

در این مدل از قانون غیرخطی بهبودیافته تماس هرتز برای به دست آوردن تاریخچه نیروی تماسی استفاده می‌شود. قانون تماس هرتز برای بارگذاری استاتیکی روی یک نیم‌فضای الاستیک خطی ارائه شده است [۱۷]. این قانون با انجام تصحیحاتی، برای مسائل ضربه روی سازه‌های کامپوزیتی نیز به کار می‌رود که

درجه آزادی غیرخطی مطابق شکل ۲-الف استفاده کردند.

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{k_{cl}}{m_i} + \frac{k_{cl} + k_{bs}}{m_s^*} \right) \mp \sqrt{\left[\frac{1}{4} \left(\frac{k_{cl}}{m_i} + \frac{k_{cl} + k_{bs}}{m_s^*} \right)^2 - \frac{k_{cl} k_{bs}}{m_i m_s^*} \right]} \quad (18)$$

با توجه به شرایط اولیه $x_s(0) = x_i(0) = \dot{x}_s(0) = 0$ و $\dot{x}_i(t) = V_0$ نیروی تماسی هرتز از رابطه (۱۶) به صورت زیر می باشد [۶]:

$$F(t) = k_{cl} [C_1(A_1 - 1) \sin \omega_1 t + C_2(A_2 - 1) \sin \omega_2 t] \quad (19)$$

$$A_1 = \frac{k_{cl}}{1 - m_i \omega_1^2}, \quad A_2 = \frac{k_{cl}}{1 - m_i \omega_2^2}$$

$$C_1 = \frac{V_0}{\omega_1(A_1 - A_2)}, \quad C_2 = \frac{V_0}{\omega_2(A_2 - A_1)}$$

با اعمال نیروی استاتیکی واحد به صورت فشاری در محل ضربه در رابطه (۱۵) معادل پوسته k_{bs} به دست می آید [۲۲]:

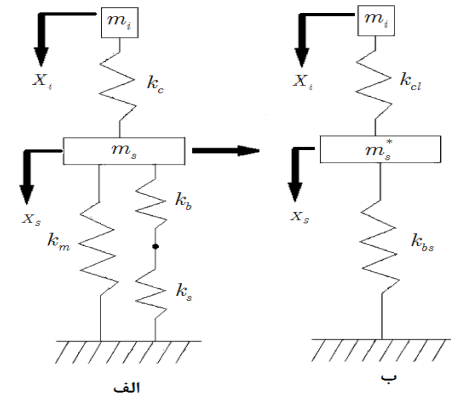
$$k_{bs} = \frac{1}{W_s(x_{1c}, x_{2c})} \quad (20)$$

که در آن W_s خیز به دست آمده از تحلیل استاتیکی در نقطه محل اعمال بار است. در تحلیل‌های انجام شده توسط شیواکومار و همکاران [۱۹] و گانگ [۶]، جرم مؤثر سازه، یک چهارم جرم کل سازه در نظر گرفته می شود. سوانسون^۱ [۲۲] نشان داد که نسبت جرم مؤثر سازه به کل آن به هندسه سازه، ضخامت جداره سازه، محل اعمال بار، شرایط مرزی و ناهمسانگردی خواص ماده بستگی دارد. سوانسون همچنین رابطه‌ای تقریبی و ساده برای محاسبه جرم مؤثر سازه‌های کامپوزیتی به صورت زیر ارائه داد:

$$m_s^* \approx \frac{k_{bs}}{\omega_f^2} \quad (21)$$

که در آن، ω_f کوچک‌ترین فرکانس طبیعی سازه است که از حل ارتعاشات آزاد به دست می آید.

در روش خطی سازی گانگ [۶]، با برابر قرار دادن ایمپالس (سطح زیر نمودار نیروی تماس-زمان) حاصل از قانون تماس خطی با ایمپالس حاصل از قانون تماس غیرخطی، سفتی خطی شده k_{cl} با استفاده از تابع گاما با شرط $m_i > 10m_s$ به دست آمده است. در این مقاله با حدس اولیه F_m و به کارگیری الگوریتم تکرار، سفتی اصلاح شده k_{cl} بدون هیچ شرطی برای نسبت جرم ضربه‌زننده به سازه به روش تحلیلی تعیین و سپس تاریخچه نیروی تماسی از رابطه (۱۹) محاسبه می شود. حداکثر نیروی تماس برای حدس اولیه از مدل جرم و فنر یک درجه آزادی



شکل (۲): الف) مدل جرم و فنر دو درجه آزادی غیرخطی شیواکومار، ب) مدل جرم و فنر دو درجه آزادی خطی بهبود یافته.

در تحقیق حاضر از سامانه دو درجه آزادی جرم و فنر مطابق شکل ۲-ب، برای تعیین تاریخچه نیروی تماسی استفاده می شود. جرم مؤثر پوسته، k_{cl} سفتی تماسی خطی اصلاح شده، k_{bs} سفتی معادل پوسته (سفتی خمشی و برشی که همان سفتی استاتیکی است) و k_m سفتی غشایی می باشند. در این تحقیق از فنر غیرخطی ناشی از اثرات غشائی k_m به دلیل اینکه مقدار آن در سرعت‌های کم و تغییرشکل‌های کوچک در مواد کامپوزیتی ناچیز است صرف نظر می شود [۲۰]. با استفاده از مدل خطی چوی، قانون خطی هرتز جایگزین قانون غیرخطی هرتز می گردد و در نتیجه نیروی تماسی به صورت زیر به دست می آید [۲۱]:

$$F(t) = k_{cl}(x_i - x_s) \quad (16)$$

$$k_{cl} = F_m^{1/3} k_c^{2/3}$$

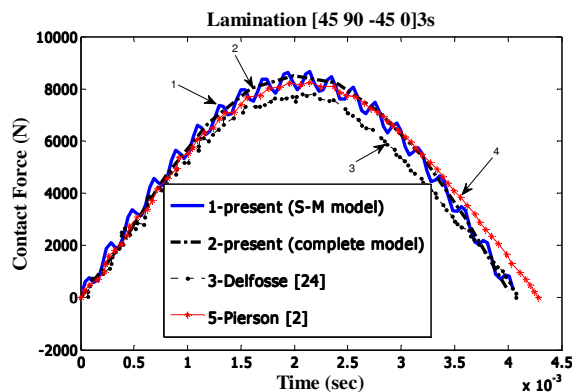
که در آن، k_{cl} معرف سفتی تماسی خطی شده در قانون خطی چوی و F_m بیشینه نیروی تماسی پیش‌بینی می باشند. معادلات دیفرانسیل سامانه جرم و فنر خطی چوی به صورت رابطه (۱۷) به دست می آید:

$$m_i \ddot{x}_i + k_{cl}(x_i - x_s) = 0 \quad (17)$$

$$m_s^* \ddot{x}_s + k_{bs} x_s - k_{cl}(x_i - x_s) = 0$$

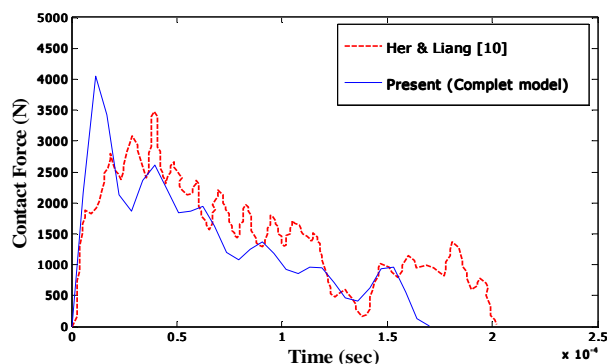
با فرض پاسخ هارمونیک برای این سامانه دو درجه آزادی، فرکانس‌های طبیعی سامانه به صورت زیر به دست می آیند:

تاریخچه نیروی تماس به دست آمده از مدل کامل و جرم و فنر پیشنهادی (S-M) با نتایج تجربی دلفوز [۲۴]، مدل تحلیلی پیرسن [۲] و در شکل ۳ مقایسه شده‌اند. مشاهده می‌شود نتایج تطابق بسیار خوبی دارند. مدل کامل بیشینه نیروی تماس نسبت به مدل جرم و فنر بهبود یافته به بیشینه نیروی تماس تجربی دلفوز نزدیک‌تر پیش‌بینی می‌کند. مدت زمان تماس پیش‌بینی شده توسط مدل کامل، جرم و فنر، نسبت به حل تحلیلی پیرسن، به مدت زمان تماس تجربی دلفوز نزدیک‌تر می‌باشد.



شکل (۳): مقایسه تاریخچه نیروی تماسی حاصل از نتایج تجربی دلفوز، مدل معکوس کیریستوفرو، مدل تحلیلی پیرسن، مدل کامل و مدل جرم و فنر بهبود یافته حاضر.

در مثال دوم یک جسم کرومی فولادی با پوسته کامپوزیتی کرومی برخورد می‌کند. مشخصات پوسته و ضربه‌زننده مطابق مرجع [۱۰] است. تاریخچه نیروی به دست آمده از مدل کامل با تاریخچه نیروی تماس هر و چنگ لیانگ [۱۰] در شکل ۴ ارائه شده و نشان می‌دهد که نتایج از تطابق خوبی برخوردار است.



شکل (۴): مقایسه تاریخچه نیروی تماسی حاصل از مدل کامل با حل اجزاء محدود هر و چنگ لیانگ.

تعیین می‌شود [۲۳]:

$$F_m^{(1)} = V_0 \sqrt{k_{bs} m_i} \quad (22)$$

در مدل جرم و فنر، خیز پوسته را می‌توان با توجه به رابطه (۲۳) به دست آورد:

$$x_s = C_1 \sin \omega_1 t + C_2 \sin \omega_2 t \quad (23)$$

تاریخچه نیروی تماس به شکل سینوسی وقتی اتفاق می‌افتد که جرم ضربه‌زننده نسبتاً سنگین‌تر از جرم چندلایه (سازه هدف) باشد [۲۱]. سوانسون نشان داد پاسخ شبه‌استاتیکی زمانی اتفاق می‌افتد که جرم ضربه‌زننده از ۸ برابر جرم مؤثر سازه هدف ($m_i \geq 8m_s^*$) بیشتر باشد [۲۲]. در نتیجه مدل جرم و فنر برای جرم‌های سنگین‌تر از سازه هدف، دقت بسیار خوبی دارد.

۵- صحنه‌گذاری نتایج و بحث

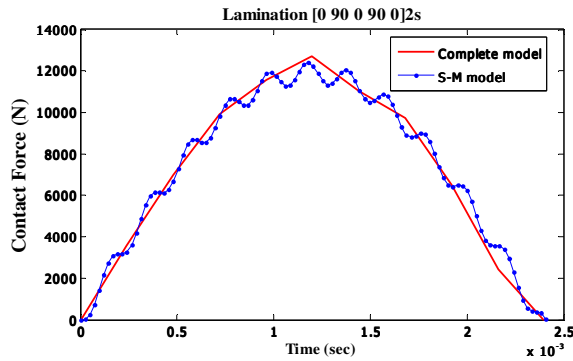
در تحقیق حاضر ابتدا به صحنه‌گذاری نتایج به دست آمده از مدل حاضر با کارهای پیشین پرداخته و در ادامه تأثیر پارامترهای مختلف هندسی، زاویه الیاف، سرعت و جرم ضربه‌زننده بر تاریخچه نیرو و خیز از هر دو مدل بحث و بررسی می‌شوند.

۵-۱- صحنه‌گذاری

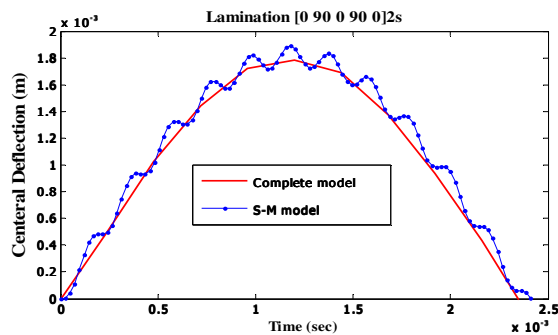
برای صحنه‌گذاری مدل‌های پیشنهادی دو مثال ارائه می‌گردد. در مثال اول مشخصات صفحه کامپوزیتی و ضربه‌زننده مطابق جدول ۱ می‌باشد [۲].

جدول (۱): هندسه و جنس صفحه و ضربه‌زننده فولادی.

<p>مشخصات هندسی صفحه کامپوزیتی:</p> <p>$a = 127 \text{ mm}, b = 76.2 \text{ mm}, R_1 = R_2 = \infty$</p> <p>$h = 4.65 \text{ mm}$</p> <p>$lay - up = [45, 90, -45, 0]_{3s}$</p>
<p>خواص ماده کامپوزیتی:</p> <p>$E_{11} = 129 \text{ GPa}, E_{22} = 7.5 \text{ GPa}$</p> <p>$G_{12} = G_{13} = 3.5 \text{ GPa}, G_{23} = 2.6 \text{ GPa}$</p> <p>$\nu_{12} = 0.33, \rho = 1540 \text{ kgm}^{-3}$</p>
<p>خواص ضربه‌زننده:</p> <p>$E = 200 \text{ GPa}, \nu = 0.3, \rho = 7971 \text{ kgm}^{-3}$</p> <p>$diameter = 25.4 \text{ mm}$</p> <p>$m_i = 6.15 \text{ kg}, V_i = 1.76 \text{ ms}^{-1}$</p>



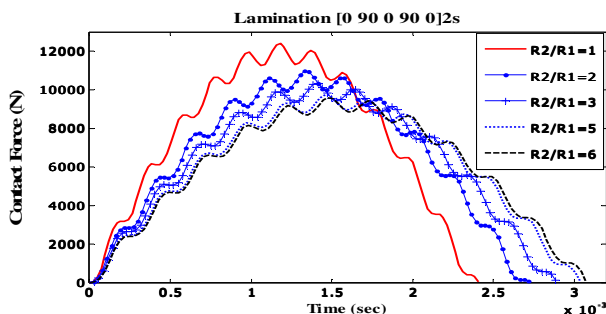
شکل (۵): مقایسه تاریخچه نیروی تماسی حاصل از مدل کامل و مدل جرم و فنر بهبودیافته.



شکل (۶): مقایسه تاریخچه خیز محل ضربه حاصل از مدل کامل و مدل جرم و فنر بهبودیافته.

مقدار اختلاف بیشینه نیرو و بیشینه خیز به دست آمده از مدل جرم و فنر نسبت به مدل کامل به ترتیب، $1/98\%$ و $5/72\%$ می‌باشد. مشاهده می‌شود نتایج به دست آمده از مدل جرم و فنر به نتایج مدل کامل بسیار نزدیک است.

اثر نسبت شعاع دو انحنا (R_2 / R_1): اثر نسبت R_2 / R_1 بر تاریخچه نیرو و خیز حاصل از مدل کامل و جرم و فنر در شکل‌های ۷-۱۰ و اثر نسبت R_2 / R_1 بر خیز پوسته در راستای x_1 حاصل از مدل کامل در شکل ۱۱ آورده شده است.



شکل (۷): اثر نسبت R_2 / R_1 بر تاریخچه نیروی تماسی حاصل از مدل جرم و فنر بهبودیافته.

هر و چنگ لیانگ در این تحقیق تاریخچه نیروی تماس را از قانون تماس بهبودیافته هرتز با استفاده از نرم‌افزار ANSYS/LS-DAYNA به دست آورده‌اند و اثرات آسیب و لایه‌لایه شدن لایه‌ها را در نظر گرفته‌اند. در این مثال جسم ضربه‌زننده $8/44$ گرم است که نسبت به مثال قبلی بسیار سبک‌تر می‌باشد.

۵-۲- نتایج و بررسی پارامترها

در این قسمت اثر بعضی پارامترهای هندسی پوسته مانند، نسبت شعاع انحناها، نسبت طول کمان‌ها، زاویه الیاف، سرعت و جرم ضربه‌زننده بر پارامترهای ضربه بررسی و نتایج به دست آمده از دو مدل کامل و جرم و فنر با هم مقایسه می‌شوند. چون مدل جرم و فنر برای جرم ضربه‌زننده به نسبت سنگین‌تر از جرم سازه هدف، دقت خوبی دارد [۲۱] بنابراین برای مقایسه با مدل کامل، جرم ضربه‌زننده بسیار سنگین‌تر از جرم پوسته در نظر گرفته می‌شود. مشخصات جنس و هندسه پوسته کامپوزیتی و جرم ضربه‌زننده فولادی در جدول ۲ درج شده است. پوسته کامپوزیتی از ۲۰ لایه تشکیل شده و لایه‌ها از بالا به پایین شماره‌گذاری شده‌اند. تاریخچه نیرو و خیز به دست آمده از مدل کامل و جرم و فنر به ترتیب در شکل‌های ۵ و ۶ نشان داده شده است.

جدول (۲): هندسه و جنس صفحه و ضربه‌زننده فولادی.

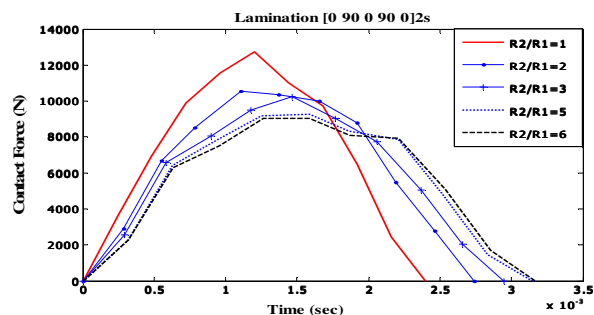
<p>مشخصات هندسی صفحه کامپوزیتی:</p> <p>$a = 200 \text{ mm}, b = 200 \text{ mm}, R_1 = R_2 = 200 \text{ mm}$</p> <p>$h = 4.65 \text{ mm}$</p> <p>$lay - up = [0, 90, 0, 90, 0]_{2s}$</p>
<p>خواص ماده کامپوزیتی:</p> <p>$E_{11} = 129 \text{ GPa}, E_{22} = 7.5 \text{ GPa}$</p> <p>$G_{12} = G_{13} = 3.5 \text{ GPa}, G_{23} = 2.6 \text{ GPa}$</p> <p>$\nu_{12} = 0.33, \rho = 1540 \text{ kgm}^{-3}$</p>
<p>خواص ضربه‌زننده:</p> <p>$E = 200 \text{ GPa}, \nu = 0.3, \rho = 7971 \text{ kgm}^{-3}$</p> <p>$diameter = 25.4 \text{ mm}$</p> <p>$m_i = 3 \text{ kg}, V_i = 3 \text{ ms}^{-1}$</p>

در این بررسی مقدار R_1 ثابت در نظر گرفته شده است. مشاهده می‌شود با افزایش نسبت R_2 / R_1 به علت کاهش سفتی پوسته، بیشینه نیروی تماسی کاهش ولی بیشینه خیز و مدت زمان تماس افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش نسبت R_1 / R_2 از مقدار ۵ به بعد تغییرات تاریخچه نیرو، خیز، بیشینه نیرو و بیشینه خیز کمتر می‌شود.

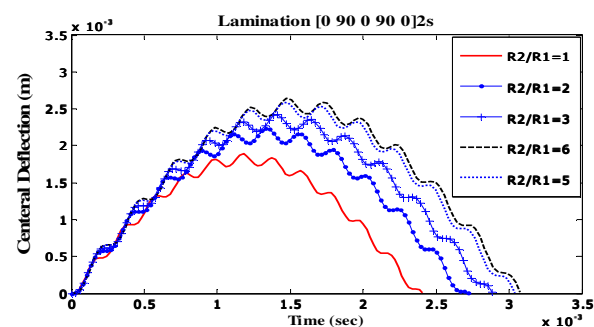
تغییرات بیشینه نیرو، بیشینه خیز و مدت زمان تماس در حالت $R_2 / R_1 = 6$ نسبت به حالت $R_2 / R_1 = 1$ به ترتیب در مدل کامل ۲۹ درصد کاهش، ۴۳/۶۸ درصد و ۳۲/۰۸ درصد افزایش و در مدل جرم و فنر به ترتیب، ۲۲/۷ درصد کاهش، ۳۹/۵۳ و ۲۷/۶۷ درصد افزایش یافته‌اند. در نتیجه بیشترین تغییرات مربوط به بیشینه خیز حاصل از مدل کامل می‌باشد. بیشترین اختلاف بیشینه نیرو بین دو مدل کامل و فنر در نسبت $R_2 / R_1 = 6$ به مقدار ۶/۳ درصد و بیشینه خیز در نسبت $R_2 / R_1 = 5$ ، ۱۰/۶۹ درصد می‌باشد. از شکل ۱۱ نتیجه می‌شود که با افزایش نسبت R_1 / R_2 به علت کاهش سفتی پوسته، تغییر شکل نقاط اطراف محل ضربه بیشتر می‌شود.

اثر زاویه الیاف: در این قسمت ($b = 0.1m$) و دیگر مشخصات پوسته و ضربه زننده مطابق جدول ۲ در نظر گرفته و آرایش الیاف کامپوزیت به صورت $[\theta / -\theta / \theta / -\theta]_{2s}$ می‌باشد. در این مثال تأثیر زاویه الیاف روی پارامترهای ضربه مانند نیرو، خیز، بیشینه نیرو و خیز محل ضربه در شکل‌های ۱۴-۱۲ نشان داده شده‌اند.

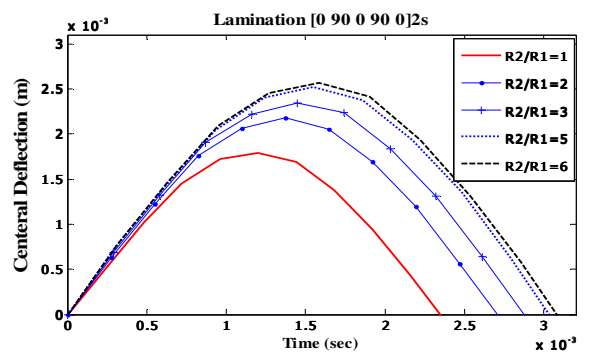
در شکل‌های ۱۵ و ۱۶ با افزایش زاویه الیاف از صفر تا ۳۰ درجه، بیشینه تماس افزایش و بیشینه خیز کاهش می‌یابد. از زاویه ۳۰ تا ۹۰ درجه، بیشینه نیرو کاهش ولی خیز و مدت زمان تماس افزایش می‌یابد. در این مسئله، در زاویه الیاف ۳۰ درجه نیروی تماس بیشترین و خیز کمترین مقدار را دارد. بیشترین اختلاف بیشینه نیرو و بیشینه خیز بین مدل کامل و فنر در زاویه ۶۰ درجه به ترتیب ۴/۱۴ درصد و ۶/۵۶ درصد می‌باشد. به علت اینکه طول کمان‌ها با هم برابر نیستند ($a \neq b$) مقدار بیشینه نیرو و خیز در زاویه صفر با ۹۰ درجه متفاوت است. همچنین خیز پوسته در راستای محور x_1 حاصل از مدل کامل در شکل ۱۷ ارائه شده است.



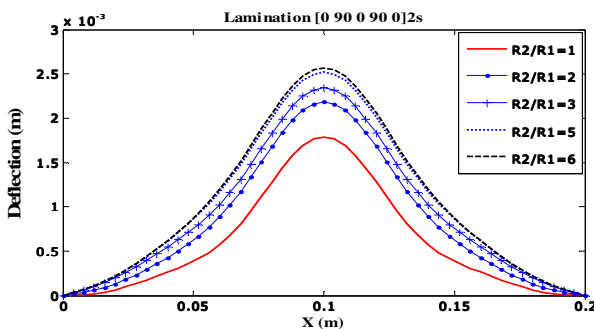
شکل (۸): اثر نسبت R_2 / R_1 بر تاریخچه نیروی تماسی حاصل از مدل کامل.



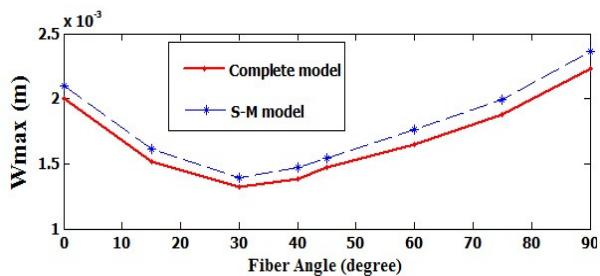
شکل (۹): اثر نسبت R_2 / R_1 بر تاریخچه خیز حاصل از مدل جرم و فنر بهبود یافته.



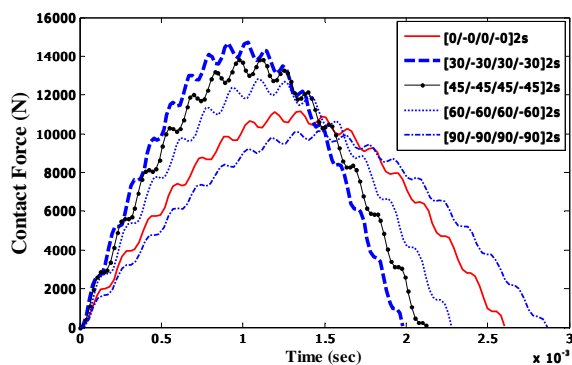
شکل (۱۰): اثر نسبت R_2 / R_1 بر تاریخچه خیز حاصل از مدل کامل.



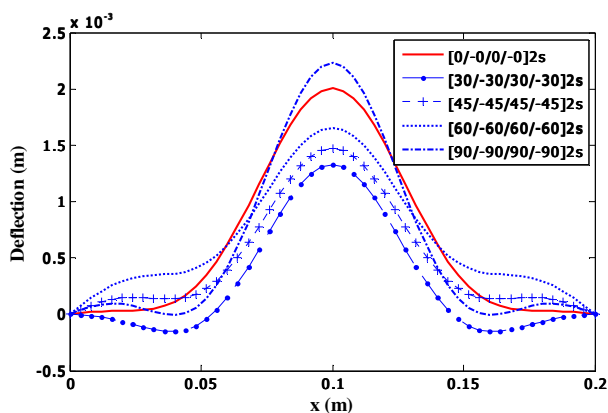
شکل (۱۱): اثر نسبت R_2 / R_1 بر خیز در راستای x_1 حاصل از مدل کامل.



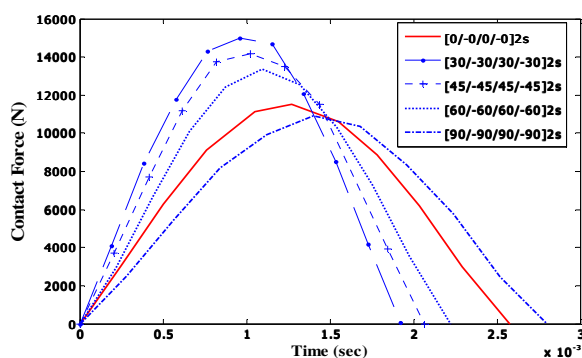
شکل (۱۶): مقایسه بیشینه خیز حاصل از مدل کامل و مدل جرم و فنر بهبودیافته برای زوایای مختلف الیاف.



شکل (۱۲): اثر زاویه الیاف بر تاریخچه نیرو حاصل از مدل جرم و فنر.

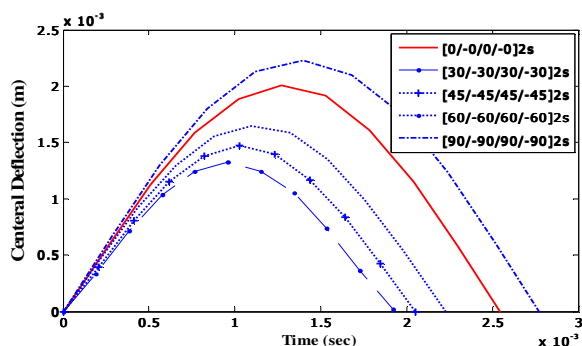


شکل (۱۷): اثر زاویه الیاف بر خیز در راستای x_1 .

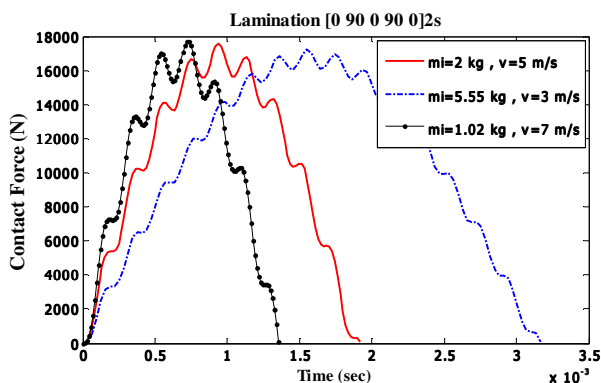


شکل (۱۳): اثر زاویه الیاف بر تاریخچه نیرو حاصل از مدل کامل.

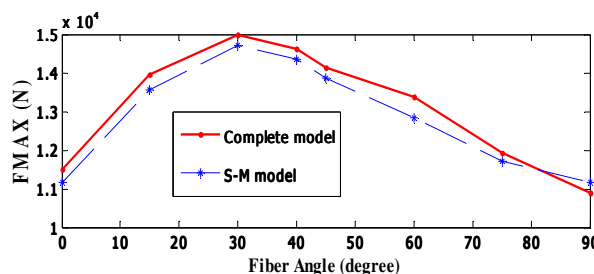
اثر سرعت و جرم ضربه‌زننده در یک سطح انرژی: در این قسمت اثر سرعت و جرم ضربه‌زننده بر تاریخچه نیرو و خیز محل ضربه از هر دو مدل در شکل‌های ۲۱-۱۸ ارائه شده است. جنس و مشخصات هندسی پوسته و ضربه‌زننده مانند جدول ۲ در نظر گرفته و انرژی ضربه‌زننده برابر ۲۵ ژول می‌باشد.



شکل (۱۴): اثر زاویه الیاف بر تاریخچه خیز حاصل از مدل کامل.



شکل (۱۸): اثر سرعت و جرم ضربه‌زننده در یک سطح انرژی بر تاریخچه نیرو تماسی حاصل از مدل جرم و فنر.

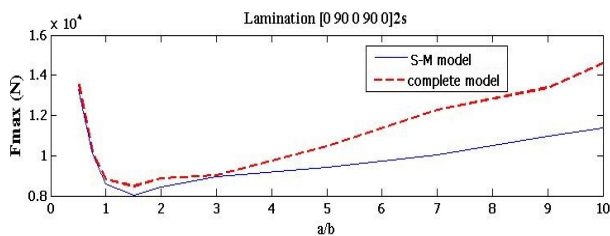


شکل (۱۵): مقایسه بیشینه نیروی تماسی حاصل از مدل کامل و مدل جرم و فنر بهبودیافته برای زوایای مختلف الیاف.

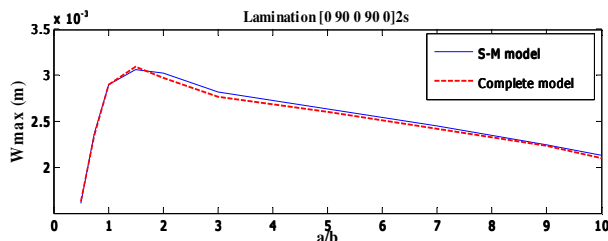
همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش جرم و کاهش سرعت در یک سطح ثابتی از انرژی جنبشی ضربه‌زننده، بیشینه نیرو و خیز تقریباً ثابت می‌ماند. پس می‌توان نتیجه گرفت که در یک سطح انرژی ثابت با تغییر سرعت و جرم ضربه‌زننده با هم، تغییرات بیشینه خیز و نیرو بسیار کم است. بیشترین تغییر بیشینه نیرو در حالت $(m_i = 2 \text{ kg}, V = 5 \text{ m/s})$ نسبت به حالت $(m_i = 1.02 \text{ kg}, V = 7 \text{ m/s})$ در مدل جرم و فنر ۲/۸۱٪ و در مدل کامل ۵٪ و بیشترین تغییرات خیز در مدل جرم و فنر ۲/۸۱٪ و ۴/۱۱٪ در مدل کامل می‌باشد.

اثر نسبت (a/b) : مشخصات پوسته به صورت رابطه

$(b = 0.1 \text{ m}, R_1 = R_2 = 0.6 \text{ m})$ و مشخصات ضربه‌زننده مطابق جدول ۲ در نظر گرفته می‌شود و مقدار طول کمان b در جهت محور x_2 ، ثابت در نظر گرفته شده و مقدار طول کمان a در جهت محور x_1 با توجه به مقدار b تغییر می‌کند. اثر نسبت a/b بر بیشینه نیرو و بیشینه خیز محل ضربه حاصل از هر دو مدل به ترتیب در شکل‌های ۲۲ و ۲۳ ارائه و مقایسه می‌شوند.

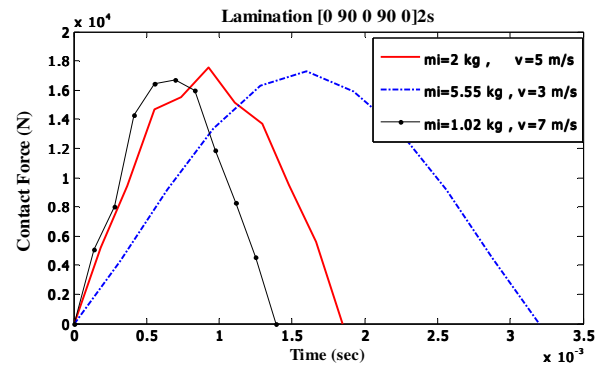


شکل (۲۲): مقایسه بیشینه نیروی تماس بین مدل کامل و جرم و فنر بهبود یافته.

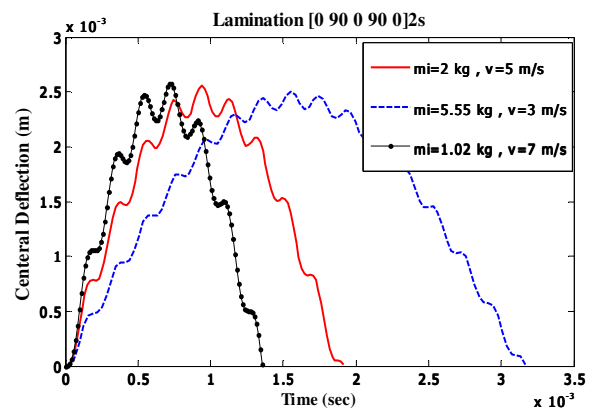


شکل (۲۳): مقایسه بیشینه خیز محل ضربه بین مدل کامل و جرم و فنر بهبود یافته.

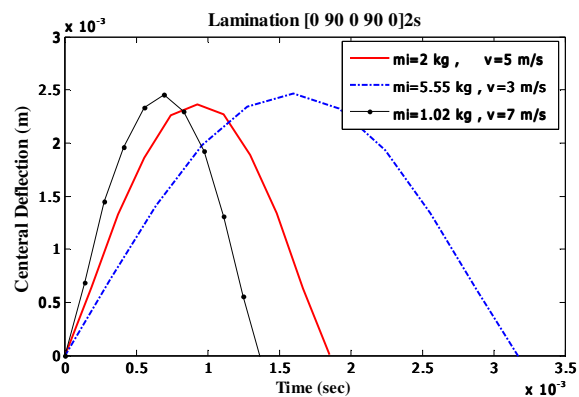
مشاهده می‌شود با افزایش مقدار a (طول کمان) تا ۱/۵ برابر بیشینه نیروی تماس کاهش و بیشینه خیز و مدت زمان تماس



شکل (۱۹): اثر سرعت و جرم ضربه‌زننده در یک سطح انرژی بر تاریخچه نیروی تماسی حاصل از مدل کامل.



شکل (۲۰): اثر سرعت و جرم ضربه‌زننده در یک سطح انرژی بر تاریخچه خیز حاصل از مدل جرم و فنر.



شکل (۲۱): اثر سرعت و جرم ضربه‌زننده در یک سطح انرژی بر تاریخچه خیز حاصل از مدل کامل.

در مطالعه محققان پیشین با افزایش جرم، بیشینه نیرو، خیز و مدت زمان تماس افزایش می‌یابند. افزایش سرعت باعث افزایش بیشینه نیرو و خیز می‌شود ولی مدت زمان تماس تقریباً ثابت می‌ماند [۱].

۷- مراجع

1. Christoforou, A.P. and Swanson, S.R. "Analysis of Impact Response in Composite Plate", Int. J. Solids Strut, Vol. 27, pp. 161-70, 1991.
2. Pierson, M.O. and Vaziri, R. "Analytical Solution for Low-Velocity Impact Response of Composite Plates", AIAA J., Vol. 34, No. 8, pp. 1633-1640, 1996.
3. Christoforou, A.P. and Yigit, A.S. "Characterization of Impact in Composite Plates", Composite Structures, Vol. 43, pp. 15-24, 1998.
4. Chun, L. and Lam, K.Y. "Dynamic Response of Fully Clamped Laminated Composite Plates Subjected to Low Velocity Impact of a Mass", Int. J. Solids Struct, Vol. 35, pp. 963-79, 1998.
5. Sun, C.T., Chen, J.K. "On the Impact of Initially Stressed Composite Laminates", J. Compos. Mater, Vol. 19, No. 6, pp. 490-504, 1985.
6. Gong, S.W., Toh, S.L. and Shim, V.P.W. "The Elastic Response of Orthotropic Laminated Cylindrical Shells to Low-Velocity Impact", Composites Eng., Vol. 4, No. 2, pp. 241-266, 1994.
7. Chandrashekar, K. and Schroeder, T. "Nonlinear Impact Analysis of Laminated Cylindrical and Doubly Curved shells", J. Comp Mater, Vol. 29, pp. 2160-79, 1995.
8. Krishnamurthy, K.S., Mahajan, P., and Mittal, R.K. "A Parametric study of the Impact Response and Damage of Laminated Cylindrical Composite Shells", Compos Sci, Vol. 61, pp. 1655-69, 2001.
9. Ganapathy, S. and Rao, K.P. "Failure Analysis of Laminated Composite Cylindrical/Spherical Shell Panels Subjected to Low-Velocity Impact", Computers & Structures, Vol. 68, pp. 627-641, 1998.
10. Shih-Chuan, H. and Yu-Cheng, L. "The Finite Element Analysis of Composite Laminates and Shell Structures Subjected to Low Velocity Impact", Composite Structures, Vol. 66, pp. 277-285, 2004.
11. Yiming, F., Yiqi, M., and Yanping, T. "Damage Analysis and Dynamic Response of Elasto-Plastic Laminated Composite Shallow Spherical Shell under Low Velocity Impact", Solids and Structures, Vol. 47, pp. 126-137, 2010.
12. Khalili, S.M.R., Soroush, M., Davar, A., and Rahmani, O. "Finite Element Modeling of Low-Velocity Impact on Laminated Composite Plates and Cylindrical shells", Composite Structures, Vol. 93, pp. 1363-1375, 2011.
13. Reddy, J.N. "Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells", 2nd ed, United States of America, CRC Press, 2004.
14. Sanders, Jr.J.L. "An Improved First Approximation Theory For Thin Shells", NASA THR24, To impact loads, Compos Struct, Vol. 34, pp.55-63, 1959.

افزایش می‌یابند که عامل آن کاهش سفتی پوسته می‌باشد. ولی با افزایش بیشتر مقدار a از این عدد بیشینه نیرو افزایش و بیشینه خیز و مدت زمان تماس کاهش می‌یابد. علت این پدیده این است که نسبت a/b یک مقدار بحرانی دارد که تا این مقدار حالت ضربه کلی^۱ است ولی با افزایش این نسبت از این مقدار بحرانی به بعد، حالت ضربه از کلی به محلی (local) تغییر پیدا می‌کند. لازم به ذکر است که گانگ به نتیجه مشابهی در مورد پوسته استوانه‌ای رسیده است [۶]. بیشترین اختلاف بیشینه نیرو بین دو مدل کامل و جرم و فنر در نسبت $a/b=10$ به مقدار ۱۳ درصد و بیشینه خیز در نسبت $a/b=3$ ، ۱/۷۷ درصد می‌باشد.

۶- نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر، معادلات حرکت پوسته کامپوزیتی دوانحنایی تحت ضربه کم سرعت بر اساس تئوری مرتبه برشی اول استخراج شد. در مدل کامل، معادلات حرکت پوسته و ضربه‌زننده به صورت کوپل با نوشتن کد در نرم‌افزار Matlab به روش تحلیلی حل و پاسخ دینامیکی به دست آمد. تاریخچه نیروی تماس از دو مدل کامل و جرم و فنر محاسبه و مقایسه گردید. بعضی از نتایج به دست آمده در این مقاله عبارتند از:

با افزایش نسبت شعاع انحنا R_1 / R_2 ، سفتی پوسته کاهش در نتیجه مقدار بیشینه نیرو کاهش، ولی بیشینه خیز و مدت زمان تماس افزایش می‌یابند. با افزایش بیشتر این نسبت، تغییرات تاریخچه نیرو و خیز کمتر می‌شود.

با افزایش زاویه الیاف تا مقدار ۳۰ درجه برای مشخصات پوسته ذکر شده، بیشینه نیرو افزایش و برای مقادیر بیشتر از ۳۰ درجه، بیشینه نیرو کاهش ولی بیشینه خیز و مدت زمان تماس افزایش می‌یابند.

با افزایش نسبت a/b تا مقدار بحرانی ($a/b=1.5$)، سفتی پوسته کاهش و در نتیجه بیشینه نیرو کاهش و خیز افزایش می‌یابند ولی با افزایش بیشتر از این مقدار بحرانی، به علت تغییر حالت ضربه از حالت کلی به محلی، سفتی محل ضربه بیشتر می‌شود، در نتیجه بیشینه نیرو افزایش و خیز و مدت زمان تماس کاهش می‌یابند.

با تغییر جرم و سرعت ضربه‌زننده در یک سطح ثابت انرژی جنبشی ضربه‌زننده، بیشینه نیرو و خیز تقریباً ثابت می‌ماند ولی با افزایش جرم، مدت زمان تماس افزایش می‌یابد.

پیوست

مؤلفه‌های ماتریس جرمی پوسته:

$$k_{11} = A_{11}\alpha_m^2 + (A_{66} + 2C_0B_{66} + C_0^2D_{66})\beta_n^2 + \frac{k_s A_{55}}{R_1^2}$$

$$k_{12} = k_{21} = (A_{12} + A_{66} - C_0^2D_{66})\alpha_m\beta_n$$

$$k_{14} = k_{41} = B_{11}\alpha_m^2 + (B_{66} + C_0D_{66})\beta_n^2 - \frac{k_s A_{55}}{R_1}$$

$$k_{15} = k_{51} = (B_{12} + B_{66} + C_0D_{66})\alpha_m\beta_n$$

$$k_{22} = A_{22}\beta_n^2 + (A_{66} - 2C_0B_{66} + C_0^2D_{66})\alpha_m^2 - \frac{k_s A_{44}}{R_2^2}$$

$$k_{23} = k_{32} = -\left[\frac{1}{R_2}(A_{22} + k_s A_{44}) + \frac{A_{12}}{R_1}\right]\beta_n$$

$$k_{24} = k_{42} = (B_{12} + B_{66} - C_0D_{66})\alpha_m\beta_n$$

$$k_{25} = k_{52} = B_{22}\beta_n^2 + (B_{66} - C_0D_{66})\alpha_m^2 - \frac{k_s A_{44}}{R_2}$$

$$k_{33} = k_s A_{55}\alpha_m^2 + k_s A_{44}\beta_n^2 + \frac{A_{11}}{R_1^2} + \frac{2A_{12}}{R_1R_2} + \frac{A_{22}}{R_2^2}$$

$$k_{34} = k_{43} = \left[k_s A_{55} - \left(\frac{B_{11}}{R_1} + \frac{B_{12}}{R_2}\right)\right]\alpha_m$$

$$k_{44} = D_{11}\alpha_m^2 + D_{66}\beta_n^2 + k_s A_{55}$$

$$k_{45} = k_{54} = (D_{12} + D_{66})\alpha_m\beta_n$$

$$k_{55} = D_{66}\alpha_m^2 + D_{11}\beta_n^2 + k_s A_{44}$$

مؤلفه‌های ماتریس جرمی:

$$M_{11} = M_{22} = M_{33} = I_0$$

$$M_{14} = M_{25} = I_1$$

$$M_{44} = M_{45} = I_2 \quad , \quad M_{ij} = M_{ji}$$

15. Mindlin, R.D. "Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates", J. Applied Mechanics, Vol. 18, pp. 31-38, 1951.
16. Qatu, M.S. "Vibration of Laminated Shells and Plates", first edition, Elsevier, 2004.
17. Zheng, D. and Binienda, W.K. "Analysis of Impact Response of Composite Laminates under Prestress", 10.1061/(ASCE)0893-1321, Vol. 4, No. 197, 2008.
18. Khorshidi, K. "Analytical Nonlinear Elasto-Plastic Impact Response of a Moderately Thick Rectangular Plate", Aero. Mech. J., Vol. 6, No. 4, pp. 25-42, 2010 (In Persian).
19. Shivakumar, K.N., Elber, W., and Illg, W. "Prediction of Impact Force and Duration Due to Low Velocity on Circular Composite Laminates", J. Mechanics, Vol. 52, , pp. 674-680, 1985.
20. Shokuhfar, A., Khalili, S.M.R., Ashenai Ghasemi, F., Malekzadeh, K., and Raissi, S. "Analysis and Optimization of Smart Hybrid Composite Plates Subjected to Low-Velocity Impact Using the Response Surface Methodology (RSM)", Thin-Walled Structures, Vol. 46, pp. 1204-12, 2008.
21. Choi, I.H. and Lim, C.H. "Low-Velocity Impact Analysis of Composite Laminates Using Linearized Contact Law", Compos Struct, Vol. 66, pp. 125-32, 2004.
22. Swanson, S.R. "Limits of Quasi-Static Solutions in Impact of Composite Structures", Comp Engng, Vol. 2, pp. 261-7, 1992.
23. Davar, A. "Analysis of Fiber-Metal Laminate (FML) and FGM Circular Cylindrical Shells Subjected to Lateral Loads", PhD Thesis of K. N. Tossi University of Technology, 2010.
24. Delfosse, D., Vaziri, R., Pierson, M.O., and Poursartip, A. "Analysis of the Non-Penetrating Impact Behavior of CFRP Laminates", In: Proceeding of the 9th International Conference on Composite Materials (Madrid, Spain), Cambridge, England, UK: Woodhead Publishing, Vol. 5, pp. 366-73, 1993.