دانشکدہ مہندسی مکانیک

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

## تحليل ياسخ ديناميكي يوستههاي كامپوزيتي دوانحنايي تحت ضربه

سرعت پایین با استفاده از مدلهای کامل و جرم و فنر بهبودیافته

رحمت ا.... قاجار کرامت ملکزاده فرد محسن غلامی دانشکدہ مہندسی مکانیک دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

مجتمع هوافضائى دانشگاه مالک اشتر

(تاریخ دریافت: ۹۲/۰۳/۰۸؛ تاریخ پذیرش: ۹۲/۰۶/۲۰)

#### حكىدە

در این مقاله به تحلیل دینامیکی پوستههای کامپوزیتی دوانحنایی تحت ضربه سرعت پایین بهروش تحلیلی پرداخته میشود. معادلات حرکت براساس تئوری برشی مرتبه اول (FSDT) برای شرایط مرزی ساده استخراج می *گ*ردد. تاریخچه نیروی تماسی از دو مدل جرم و فنر بهبودیافته و مدل کامل با استفاده از قانون غیرخطی تماس هرتز پیشبینی و با هم مقایسه میشوند. با درنظر گرفتن مؤلفههای جابهجایی بهصورت سری فوریه دوگانه، معادلات حرکت پوسته و ضربهزننده بهصورت کوپل با کدنویسی در نرمافزار Matlab با استفاده از روش گالرکین حل و پاسخ دینامیکی محاسبه میشود. در این مطالعه، اثر پارامترهای هندسی پوسته مانند تغییرات انحنا، نسبت طول انحناها، زاویه الیاف، تغییر جرم و سرعت ضربهزننده در یک سطح ثابت از انرژی ضربه زننده روی پاسخ ضربه از هر دو مدل تعیین و مقایسه میشوند.

**واژههای کلیدی:** ضربه کم سرعت، پوسته کامپوزیتی دوانحنایی، مدل جرم و فنر، مدل کامل، قانون تماسی هرتز

#### Dynamic Response Analysis of Doubly Curved Composite Shells Subjected to Low Velocity Impact Using two Models of Complete and Improved Spring-Mass **R.** Ghajar K. Malekzadeh M. Gholami

Mechanical Engineering Department K. N. Tossi University of Technology

Aerospace Engineering Department Malek Ashtar university (Received: 29 May, 2013; Accepted: 11 September, 2013)

Mechanical Engineering Department K. N. Tossi University of Technology

ABSTRACT

In this paper, dynamic analysis of doubly curved composite shells under low velocity impact is studied analytically. The governing equations based on the first-order deformation theory (FSDT) are derived for simply supported boundary conditions. The contact force history is predicted using two models of complete and improved spring-mass. Considering the displacement components as the doubly Fourier series, equations of motion shell and impactor are solved analytically. By writing code in Matlab softwar, using Galerkin method, the dynamic response of shell is obtained. In this investigation,

the effect of geometrical parameters, such as curvature changes, aspect ratio (curvature length ratio), fiber orientation, mass and velocity of impactor, with constant impact energy, on the impact response of shell is determined by two models.

Keywords: Low Velocity Impact, Double Curved Composite Shell, Spring-Mass Model, Complete Model, Hertz Contact Law

۳- کارشناس ارشد: gholami.m64@gmail.com

ghajar@kntu.ac.ir (نویسنده یاسخگو): ۱

۲- دانشیار: kmalekzadeh@mut.ac.ir

#### ۱– مقدمه

امروزه سازههای کامپوزیتی به خاطر ویژگیهایی چون استحکام، سفتی مخصوص بالا و مقاومت در برابر خستگی و خوردگی، به طور گستردهای در صنایع هوا و فضا، تجهیزات ورزشی، لولههای فشار و قسمتهای مختلف خودرو مورد استفاده قرار می گیرند. تحلیل پوستههای کامپوزیتی چندلایه تحت بار ضربه در سالهای اخیر بهدلیل حساسیت مواد کامپوزیتی در برابر ضربه مورد توجه قرار گرفته است.

رفتار سازههای کامپوزیتی در برابر ضربه کم سرعت توسط محققان زیادی به صورت تجربی، عددی و تحلیلی مورد مطالعه قرار گرفته است ولی تحقیقات کمی به بررسی ضربه کم سرعت بر روی یوستههای دوانجنایی پرداخته شده است. کریستوفرو و سوانسون [۱] بهروش تحلیلی به بررسی پاسخ ضربه روی یک صفحه كاميوزيتي يرداختند و از رابطه خطى قانون تماس هرتز برای بهدست آوردن تاریخچه نیروی ضربه استفاده کردند. پیرسن و وزیری<sup>۲</sup> [۲] یک حل تحلیلی برای بهدست آوردن نیروی ضربه از قانون غیرخطی هرتز روی صفحات کامیوزیتی ارائه دادند. کریستوفرو و یجیت<sup>7</sup> [۳] مشخصات ضربه یک صفحه کامیوزیتی را با استفاده از قانون تماس خطى الاستويلاستيك بهروش تحليلي مطالعه کردند. چان و لام <sup>†</sup> [۴] یک روش عـددی بـا اسـتفاده از قانون لاگرانژ و قانون تماسی هرتز برای محاسبه یاسخ دینامیکی صفحات کامپوزیتی چندلایه پیشنهاد دادند. سان و چن ([۵] بهروش اجزاء محدود ياسخ ضربه روى صفحات كاميوزيتي با تنشهای اولیه را، با استفاده از قانون بهبود یافته هرتز بهدست آوردند. گانگ و همکاران [۶] نیروی ضربه یک ضربهزننده روی پوسته استوانهای کامپوزیتی را از مدل جرم و فنر دو درجه آزادی تعیین کردند. چاندراشکار و شرودر ۲ [۲] به تحلیل غیرخطی ضربه روی پوستههای دوانحنایی و استوانهای چندلایه بهروش اجزاء محدود پرداختند و از قانون بهبود یافته هرتـز بـرای تعیـین تاریخچه نیروی تماس بهره بردند. کریشنامارتی و همکاران^ [۸] و همچنین گانایاسی و رائو <sup>۹</sup> [۹] پاسخ ضربه و آسیب پوستههای کامیوزیتی

استوانهای و کروی چندلایه بهروش اجزاء محدود با استفاده از قانون تماس هرتز را بررسی نمودند. چان و چنگ<sup>۱</sup> [۱۰] پاسخ دینامیکی پوستههای چندلایه کامپوزیتی را با استفاده از نرمافزار اجزاء محدود ANSYS/LS-DAYNA در برابر ضربه مطالعه کردند. در این مطالعه آسیب و لایهلایه شدن لایهها را درنظر گرفته و بررسی میشوند. یمینگ و همکاران<sup>۱۱</sup> [۱۱] به بررسی آسیب و پاسخ دینامیکی یک پوسته کروی کامپوزیتی پرداخته و از قانون تماس الاستوپلاستیک بهبود یافته برای تعیین تاریخچه نیرو استفاده کردهاند. خلیلی و همکاران [۱۲] به تحلیل ضربه کم سرعت پوسته استوانهای و صفحه کامپوزیتی بهوسیله نرمافزار المان محدود ABAQUS پرداختهاند.

بررسیهای انجام شده نشان میدهند که تا به حال پاسخ دینامیکی پوستههای دوانحنایی در برابر ضربه به روش تحلیلی با استفاده از مدل کامل بررسی نشده است.

در اکثر کارهای قبلی جرم ضربهزننده کوچک میباشد بنابراین، در تحقیق حاضر به بررسی پاسخ دینامیکی پوستههای کامپوزیتی دو انحنایی در برابر ضربه کم سرعت و جرم بزرگ بهروش تحلیلی پرداخته میشود. تاریخچه نیروی تماس از دو مدل جرم و فنر بهبودیافته و مدل کامل با استفاده از قانون غیرخطی هرتز پیشبینی و مقایسه می گردند.

در مدل کامل معادلات حرکت پوسته و ضربه زننده بهصورت کوپل و همزمان با نوشتن کد در نرمافزار Matlab حل و در نهایت نتایج بهدست آمده با نتایج موجود در مقالات مقایسه می گردند. همچنین اثر پارامترهای هندسی پوسته مانند تغییرات انحنا، نسبت طول انحناها، زاویه الیاف، سرعت و جرم ضربهزننده در یک سطح ثابت از انرژی روی پاسخ ضربه از هر دو مدل بررسی و مقایسه می گردند.

#### ۲- معادلات حرکت

شکل  $\mathbf{1}$  مشخصات هندسی یک پوسته چندلایه دو انحنادار را نشان میدهد.  $x_1$  و  $x_2$  و  $x_3$  محورهای مختصات منحنی الخط

- 2 Pierson and Vaziri
- 3 Yigit
- 4 Chun and Lam
- 5 Sun and Chen
- 6 Gong
- 7 Chandrashekara and Schroeder
- 8 Krishnamurthy
- 9 Ganapathy and Rao

<sup>10 -</sup> Shiuh and Cheng

<sup>11 -</sup> Yiming

<sup>1 -</sup> Christoforou and Swanson

$$\begin{split} & \stackrel{0}{\varepsilon_{1}} = \frac{\partial u_{0}}{\partial x_{1}} + \frac{w_{0}}{R_{1}} \quad , \quad k_{1} = \frac{\partial \phi_{1}}{\partial x_{1}} \\ & \stackrel{0}{\varepsilon_{2}} = \frac{\partial v_{0}}{\partial x_{2}} + \frac{w_{0}}{R_{2}} \quad , \quad k_{2} = \frac{\partial \phi_{2}}{\partial x_{2}} \\ & \stackrel{0}{\varepsilon_{6}} = \frac{\partial v_{0}}{\partial x_{1}} + \frac{\partial u_{0}}{\partial x_{2}} \quad , \quad k_{6} = \frac{\partial \phi_{2}}{\partial x_{1}} + \frac{\partial \phi_{1}}{\partial x_{2}} - C_{0} (\frac{\partial v_{0}}{\partial x_{1}} - \frac{\partial u_{0}}{\partial x_{2}}) \quad (\Upsilon) \\ & \stackrel{0}{\varepsilon_{4}} = \frac{\partial w_{0}}{\partial x_{2}} + \phi_{2} - \frac{v_{0}}{R_{2}} \quad , \quad \stackrel{0}{\varepsilon_{5}} = \frac{\partial w_{0}}{\partial x_{1}} + \phi_{1} - \frac{u_{0}}{R_{1}} \\ & C_{0} = \frac{1}{2} (\frac{1}{R_{1}} - \frac{1}{R_{2}}), \\ & \downarrow \\$$

$$\begin{split} &\frac{\partial x_1}{\partial x_1} - \frac{\partial x_2}{\partial x_2} - C_0 \frac{\partial M_6}{\partial x_1} + \frac{Q_2}{R_2} = I_0 \ddot{v}_0 + I_1 \ddot{\phi}_2 \\ &\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} - (\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2}) + q = I_0 \ddot{v}_0 \\ &\frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial M_6}{\partial x_2} - Q_1 = I_1 \ddot{u}_0 + I_2 \ddot{\phi}_1 \\ &\frac{\partial M_6}{\partial x_1} + \frac{\partial M_2}{\partial x_2} - Q_2 = I_1 \ddot{u}_0 + I_2 \ddot{\phi}_2 \\ &I_i = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(x_3)^i dx_3 \\ &= \sum_{k=1}^N \int_{x_3^{(k+1)}}^{x_3^{(k+1)}} \rho^{(k)}(x_3)^i dx_3 \quad (i = 0, 1, 2), \end{split}$$

ر الم به ترتیب برآیند تنشها و گشتاورها، و  $Q_i$  بر ای  $N_i$ نیروهای برشی عرضی میباشند که برای یک ماده ارتوتروپیک خاص ( $A_{i6} = B_{i6} = D_{i6} = 0, i = 1, 2$ ) به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{cases} \left\{ N \\ \left\{ M \right\} \right\} = \begin{bmatrix} \left[ A \\ B \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} \end{bmatrix} \left\{ \left\{ \varepsilon^{0} \\ \left\{ k \right\} \right\} \\ \left\{ Q \right\} \\ Q \\ 1 \end{bmatrix} = k_{s} \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \left\{ \varepsilon^{0}_{4} \\ \varepsilon^{0}_{5} \end{bmatrix},$$
 ( $\Delta$ )

که در آن،  $A_{ij}_{ij}$  و  $B_{ij}_{ij}$  بهترتیب سفتی کششی، سفتی کوپل کششی خمشی و سفتی چندلایه است.  $k_s$  ضریب تصحیح برشی است که توسط میندلین  $\left( \frac{10}{12} \right)$  معمولا برابر  $\frac{\pi^2}{12}$  درنظر گرفته می شود.

متعامد میباشند، بهطوری که محورهای منحنی,  $x_1$  و  $x_2$  روی صفحه میانی  $0 = x_3$  قرار دارند و  $x_3$  محور عمود بر صفحه میانی است.  $R_1$  و  $x_3$  بهترتیب شعاعهای اصلی انحناهای صفحه میانی در جهت محورهای  $x_1$  و  $x_2$ ، پارامترهای a و d طول کمانهای صفحه میانی میباشند.



شکل (۱): یک پوسته چندلایه دوانحنایی.

میدان جابه جایی بر اساس تئوری مرتبه برشی اول به صورت زیر میباشد: u(x, x, x, t) = u(x, x, t) + t(t, x, x)

$$\begin{split} & u_1(x_1, x_2, x_3, t) = u_0(x_1, x_2, t) + x_3 \phi_1(x_1, x_2, t) \\ & u_2(x_1, x_2, x_3, t) = v_0(x_1, x_2, t) + x_3 \phi_2(x_1, x_2, t) \\ & u_3(x_1, x_2, x_3, t) = w_0(x_1, x_2, t), \end{split}$$

میانی و  $v_0 , w_0 = x_3$  جابهجایی پوسته در راستای  $x_1 , x_2 , x_2 \in x_3$  در صفحه میانی و  $v_0 , w_0 = x_3$  چرخش عمودهای عرضی بهترتیب حول محور  $v_0 = x_2$  و  $\phi_1 = x_2$  میانی و  $x_1 = x_2$  هستند. روابط کرنش و جابهجایی یک پوسته دوانحنایی بهصورت زیر است [۱۳]:

$$\varepsilon_{1} = \varepsilon_{1}^{0} + x_{3}k_{1} , \qquad \varepsilon_{2} = \varepsilon_{2}^{0} + x_{3}k_{2}$$

$$\gamma_{23} = \varepsilon_{4} = \varepsilon_{4}^{0} , \qquad \gamma_{13} = \varepsilon_{5} = \varepsilon_{5}^{0}$$

$$\gamma_{12} = \varepsilon_{6} = \varepsilon_{6}^{0} + x_{3}k_{6} , \qquad (\Upsilon)$$

 $\overset{o}{arepsilon_4} = \overset{o}{arepsilon_2} \circ \overset{o}{arepsilon_2} \circ \overset{o}{arepsilon_6} \circ \overset{o}{$ 

<sup>1-</sup> Mindlin

به صورت زیر نوشته می شود [۱۸]: 
$$F(t) = k_c \alpha^{1.5} = k_c (W_i(t) - W_S(x_{1c}, x_{2c}, t))^{1.5},$$
 (۱۰)

$$\begin{split} W_{S}(x_{1c}, x_{2c}, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}^{0}(t) \sin \frac{m\pi}{a} x_{1c} \sin \frac{n\pi}{b} x_{2c} \\ x_{1c} &= \frac{a}{2} \quad , \quad x_{2c} = \frac{b}{2}, \end{split}$$
(11)

که در آن،  $\alpha$ ، میزان فرورفتگی،  $W_i$  جابه جایی ضربهزننده،  $W_s$  جابه جایی ضربه زنده، جابه جایی پوسته و  $k_c$  سفتی تماسی هرتز که برای تماس بین ضربه زننده کروی صلب و پوسته ی دوانحنایی به صورت زیر ارائه شده است [۷]:

$$k_{c} = \frac{4}{3}E^{*}\sqrt{R^{*}}$$

$$\frac{1}{E^{*}} = \frac{1-\nu_{i}^{2}}{E_{i}} + \frac{1-\nu_{s}^{2}}{E_{s}}, \quad \frac{1}{R^{*}} = \frac{1}{R_{i}} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_{1}} + \frac{1}{R_{2}}\right), \quad (17)$$

اندیس i و s بهترتیب مربوط به ضربهزننده و سازه هدف است. با جایگذاری رابطههای (۸، ۳ و ۵) در رابطـه (۴)، معـادلات حرکـت پوسته به صورت رابطه (۱۳) درمیآیـد. در مـدل کامـل معـادلات حرکت پوسته (۱۳) و ضربهزننده (۱۴) بهصورت کوپل بـا نوشـتن کد در نرمافزار Matlab حل و با تعیین $W_s$  و  $W_i$ ، تاریخچه نیروی تماس از رابطه (۱۰) و پاسخ دینـامیکی (خیـز پوسـته) از رابطـه (۱۱) به صورت زیر بهدست میآیند:

$$\begin{split} &[M]\{\ddot{X}\} + [K]\{X\} = \{Q\}, \quad X(t=0) = [0], \\ &m_i \ddot{W}_i + F(t) = 0, \quad W_i(t=0) = 0, \quad \dot{W}_i(t=0) = V_0 \end{split}$$

$$\{X\} = \{U_{mn}^{0}, V_{mn}^{0}, W_{mn}^{0}, X_{mn}^{0}, Y_{mn}^{0}\}^{T}$$

$$\{Q\} = \{0, 0, Q_{mn}, 0, 0\},$$

$$(1f)$$

که در آن، M و K بهترتیب ماتریس مربعی جرمی و سفتی پوسته به ابعاد  $(5mn) \times (5mn)$  و Q بردار نیروی ضربه به ابعاد  $(5mn) \times (5mn) \times (5mn) \times 1$ 

برای یک بار متمرکز که به وسط پوسته در نقطهای به مختصات  $(x_{1c}, x_{2c})$  مطابق شکل ۱ وارد می شود، ضریب زمانی  $Q_{mn}(t)$ 

$$Q_{mn}(t) = \frac{4F(t)}{ab} \sin \alpha_m x_{1c} \sin \beta_n x_{2c}$$
  

$$x_{1c} = \frac{a}{2} \quad , \quad x_{2c} = \frac{b}{2}.$$
(1a)

**۴-۲- مدل جرم و فنر بهبودیافته** شیواکومار<sup>۱</sup> و همکاران [۱۹] در سال ۱۹۸۵ از مدل جرم و فنر دو

$$\begin{split} & (A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} \overline{Q}_{ij} (1, x_3, x_3^2) dx_3 \\ & = \sum_{k=1}^{N} \overline{Q}_{ij}^{(k)} \int_{x_3^{(k+1)}}^{x_3^{(k+1)}} (1, x_3, x_3^2) dx_3. \end{split}$$

**۳- شرایط مرزی** در این تحقیق، شرایط مرزی ساده برای یک پوسـته دو انحنـادار بهصورت رابطه (۷) میباشد:

$$\begin{aligned} at & x_1 = 0, a \\ v_0 &= w_0 = \phi_1 = \frac{\partial w_0}{\partial x_2} = 0, & N_{11} = M_{11} = 0 \\ at & x_2 = 0, b \end{aligned}$$
 (Y)

$$u_0 = w_0 = \phi_2 = \frac{\partial w_0}{\partial x_1} = 0, \qquad N_{22} = M_{22} = 0$$

$$\begin{split} u_{0}(x_{1},x_{2},t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{mn}(t) \cos \alpha_{m} x_{1} \sin \beta_{n} x_{2} \\ v_{0}(x_{1},x_{2},t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} V_{mn}(t) \sin \alpha_{m} x_{1} \cos \beta_{n} x_{2} \\ w_{0}(x_{1},x_{2},t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{mn}(t) \sin \alpha_{m} x_{1} \sin \beta_{n} x_{2} \\ \phi_{1}(x_{1},x_{2},t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X_{mn}(t) \cos \alpha_{m} x_{1} \sin \beta_{n} x_{2} \\ \phi_{2}(x_{1},x_{2},t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Y_{mn}(t) \sin \alpha_{m} x_{1} \cos \beta_{n} x_{2} \\ \phi_{m} &= \frac{m\pi}{a}, \qquad \beta_{n} = \frac{n\pi}{b}, \\ \lambda &= c_{1}(x_{1},x_{2},t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Q_{mn}(t) \sin \alpha_{m} x_{1} \sin \beta_{n} x_{2} \\ q(x_{1},x_{2},t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Q_{mn}(t) \sin \alpha_{m} x_{1} \sin \beta_{n} x_{2}. \end{split}$$

# $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{mn}(0) \sin c c_m c_1 \sin \beta_n c_2. \tag{1}$

#### ۴– تعیین تاریخچهی نیروی ضربه

در مطالعه حاضر برای تعیین تاریخچه نیروی تماسی از دو مدل کامل و مدل جرم و فنر بهبودیافته استفاده میشود.

#### ۴–۱– مدل کامل

در این مدل از قانون غیرخطی بهبودیافته تماس هرتز برای بهدست آوردن تاریخچه نیروی تماسی استفاده میشود. قانون تماس هرتز برای بارگذاری استاتیکی روی یک نیمفضای الاستیک خطی ارائه شده است [۱۷]. این قانون با انجام تصحیحاتی، برای مسائل ضربه روی سازههای کامپوزیتی نیز به کار میرود که www.SID.ir

<sup>1-</sup> Shivakumar

$$\omega_{1,2}^{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{k_{cl}}{m_{i}} + \frac{k_{cl} + k_{bs}}{m_{s}^{*}} \right)$$

$$\mp \sqrt{\left[ \frac{1}{4} \left( \frac{k_{cl}}{m_{i}} + \frac{k_{cl} + k_{bs}}{m_{s}^{*}} \right)^{2} - \frac{k_{cl}k_{bs}}{m_{i}m_{s}^{*}} \right]}.$$

$$(1\lambda)$$

$$g x_{s}(0) = x_{i}(0) = \dot{x}_{s}(0) = 0 \quad \text{(1}\lambda)$$

$$g x_{s}(0) = x_{i}(0) = \dot{x}_{s}(0) = 0 \quad \text{(1}\lambda)$$

میباشد [۶]:

$$\begin{split} F(t) &= k_{d} [C_{1}(A_{1}-1)\sin\omega_{1}t + C_{2}(A_{2}-1)\sin\omega_{2}t] \\ A_{1} &= \frac{k_{cl}}{1-m_{i}\omega_{1}^{2}} , \quad A_{2} = \frac{k_{cl}}{1-m_{i}\omega_{2}^{2}} \end{split} \tag{19} \\ C_{1} &= \frac{V_{0}}{\omega_{1}(A_{1}-A_{2})} , \quad C_{2} = \frac{V_{0}}{\omega_{2}(A_{2}-A_{1})}. \end{split}$$

$$k_{bS} = \frac{1}{W_{S}(x_{1c}, x_{2c})}, \qquad (\Upsilon \cdot)$$

که در آن،  $W_s$  خیز بهدست آمده از تحلیل استاتیکی در نقط ه محل اعمال بار است. در تحلیلهای انجام شده توسط شیواکومار و همکاران [۱۹] و گانگ [۶]، جرم مؤثر سازه، یک چهارم جرم کل سازه درنظر گرفته می شود. سوانسون<sup>۱</sup> [۲۲] نشان داد که نسبت جرم مؤثر سازه به کل آن به هندسه سازه، ضخامت جداره سازه، محل اعمال بار، شرایط مرزی و ناهمسانگردی خواص ماده بستگی دارد. سوانسون همچنین رابطهای تقریبی و ساده برای محاسبه جرم مؤثر سازههای کامیوزیتی به صورت زیر ارائه داد:

$$m_s^* \approx \frac{k_{bs}}{\omega_f^2}, \tag{T1}$$

که در آن، *س*ر کوچکترین فرکانس طبیعی سازه است که از حل ارتعاشات آزاد بهدست میآید.

در روش خطیسازی گانگ [۶]، با برابر قرار دادن ایمپالس (سطح زیر نمودار نیروی تماس-زمان) حاصل از قانون تماس خطی با ایمپالس حاصل از قانون تماس غیرخطی، سفتی خطی شده  $k_{cl}$  با استفاده از تابع گاما با شرط  $m_i > 10m_s$  بهدست آمده است. در این مقاله با حدس اولیه  $F_m$  و بهکارگیری الگوریتم تکرار، سفتی اصلاح شده  $k_{cl}$  بدون هیچ شرطی برای نسبت جرم ضربهزننده به سازه بهروش تحلیلی تعیین و سپس تاریخچه نیروی تماسی از رابطه (۱۹) محاسبه میشود. حداکثر نیروی تماس برای حدس اولیه از مدل جرم و فنر یک درجه آزادی درجه آزادی غیرخطی مطابق شکل ۲- الف استفاده کردند.



**شکل (۲):** الف) مدل جرم و فنر دو درجه آزادی غیرخطی شیواکومار، ب) مدل جرم و فنر دو درجه آزادی خطی بهبود یافته.

در تحقیق حاضر از سامانه دو درجه آزادی جرم و فنر مطابق شکل  $\mathbf{T} - \mathbf{v}$ ، برای تعیین تاریخچه نیروی تماسی استفاده می شود. شکل  $\mathbf{T} - \mathbf{v}$ ، برای تعیین تاریخچه نیروی تماسی استفاده می شود.  $k_a$  جرم مؤثر پوسته،  $k_a$  سفتی تماسی خطی اصلاح شده،  $k_b$  مفتی معادل پوسته (سفتی خمشی و برشی که همان سفتی استاتیکی است) و  $k_a$  سفتی غشایی می باشند. در این تحقیق از فنر غیرخطی ناشی از اثرات غشائی  $k_m$  به دلیل اینکه مقدار آن در سرعتهای کم و تغییر شکل های کوچک در مواد کامپوزیتی ناچیز است صرفنظر می شود [۲۰]. با استفاده از مدل خطی چوی، قانون خطی هرتز جایگزین قانون غیر خطی هرتز می گردد و در نتیجه نیروی تماسی به صورت زیر به دست می آید [۲۱]:

$$F(t) = k_{cl}(x_i - x_s) k_{cl} = F_m^{\frac{1}{3}} k_c^{\frac{2}{3}},$$
(19)

که در آن،  $k_{cl}$  معرف سفتی تماسی خطیشده در قانون خطی چوی و  $F_m$  بیشینه نیروی تماسی پیش بینی می باشند. معادلات دیفرانسیل سامانه جرم و فنر خطی چوی به صورت رابطه (۱۷) بهدست می آید:

$$\begin{split} m_i \ddot{x}_i + k_{cl} (x_i - x_s) &= 0 \\ m_s^* \ddot{x}_s + k_{bs} x_s - k_{cl} (x_i - x_s) &= 0 \\ \mu_i &= 0 \end{split}$$
(17)

تعیین می شود [۲۳]:  $F_{_{m}}^{\,(1)} \,=\, V_{_{0}} \sqrt{k_{_{bS}} m_{_{i}}} \,. \tag{(Y7)}$ 

در مدل جرم و فنر، خیز پوسـته را مـیتـوان بـا توجـه بـه رابطـه (۲۳) بهدست آورد:

 $x_s = C_1 \sin \omega_1 t + C_2 \sin \omega_2 t \tag{(17)}$ 

تاریخچه نیروی تماس به شکل سینوسی وقتی اتفاق میافتـد کـه جرم ضربهزننده نسبتاً سنگین تر از جـرم چندلایـه (سـازه هـدف) باشد [۲۱]. سوانسون نشان داد پاسخ شبهاستاتیکی زمـانی اتفـاق میافتد که جرم ضـربهزننـده از ۸ برابـر جـرم مـؤثر سـازه هـدف میافتد که جرم فـربهزننـده از ۲۲]. در نتیجه مدل جرم و فنر بـرای جرمهای سنگین تر از سازه هدف، دقت بسیار خوبی دارد.

#### ۵- صحه گذاری نتایج و بحث

در تحقیق حاضر ابتدا به صحه گذاری نتایج بهدست آمده از مدل حاضر با کارهای پیشین پرداخته و در ادامه تأثیر پارامترهای مختلف هندسی، زاویه الیاف، سرعت و جرم ضربهزننده بر تاریخچه نیرو و خیز از هر دو مدل بحث و بررسی می شوند.

۵–۱– صحه گذاری

برای صحه گذاری مدلهای پیشنهادی دو مثال ارائه می گردد. در مثـال اول مشخصـات صـفحه کـامپوزیتی و ضـربهزننـده مطـابق جدول ۱ میباشد [۲].

جدول (۱): هندسه و جنس صفحه و ضربهزننده فولادی. starting relation (1): هندسی صفحه کامپوزیتی:  $a = 127 \ mm, b = 76.2 \ mm, R_1 = R_2 = \infty$   $h = 4.65 \ mm$   $lay - up = [45, 90, -45, 0]_{3s}$   $tag - up = [45, 0]_{3s}$ tag

تاریخچه نیروی تماس بهدست آمده از مدل کامل و جرم و فنر پیشنهادی (S-M) با نتایج تجربی دلفوز [۲۴]، مدل تحلیلی پیرسن [۲] و در شکل ۳ مقایسه شدهاند. مشاهده می شود نتایج تطابق بسیار خوبی دارند. مدل کامل بیشینه نیروی تماس را نسبت به مدل جرم و فنر بهبودیافته به بیشینه نیروی تماس تجربی دلفوز نزدیکتر پیش بینی میکند. مدت زمان تماس پیش بینی شده توسط مدل کامل، جرم و فنر، نسبت به حل تحلیلی پیرسن، به مدت زمان تماس تجربی دلفوز نزدیکتر می اشد.



دلفوز، مدل معکوس کیریستوفرو، مدل تحلیلی پیرسن، مدل کامل و مدل جرم و فنر بهبودیافته حاضر.

در مثال دوم یک جسم کروی فولادی با پوسته کامپوزیتی کروی برخورد میکند. مشخصات پوسته و ضربهزننده مطابق مرجع [۱۰] است. تاریخچه نیروی بهدست آمده از مدل کامل با تاریخچه نیروی تماس هر و چنگ لیانگ [۱۰] در شکل ۴ ارائه شده و نشان میدهد که نتایج از تطابق خوبی برخوردار است.



حل اجزاء محدود هر و چنگ لیانگ.



مقدار اختلاف بیشینه نیرو و بیشینه خیز بهدست آمده از مدل جرم و فنر نسبت به مدل کامل بهترتیب، ۱/۹۸٪ و ۵/۷۲٪ میباشد. مشاهده میشود نتایج بهدست آمده از مدل جرم و فنر به نتایج مدل کامل بسیار نزدیک است.

اثر نسبت شعاع دو انحنا ( $R_{_2} / R_{_1}$ ): اثر نسبت  $R_{_2} / R_{_1}$ بر  $R_{_2} / R_{_1}$ ): اثر نسبت  $R_{_2} / R_{_1}$  تاریخچه نیرو و خیر حاصل از مدل کامل و جرم و فنر در شکلهای ۱۰– ۷ و اثر نسبت  $R_{_2} / R_{_1}$  بر خیز پوسته در راستای شکلهای ۱۰– ۷ و اثر نسبت  $R_{_2} / R_{_1}$  حاصل از مدل کامل در شکل ۱۱ آورده شده است.



هر و چنگ لیانگ در این تحقیق تاریخچه نیروی تماس را از قانون تماس بهبودیافته هرتز با استفاده از نرمافزار ANSYS/LS-DAYNA بهدست آوردهاند و اثرات آسیب و لایه لایه شدن لایهها را درنظر گرفتهاند. در این مثال جسم ضربهزننده ۸/۴۴ گرم است که نسبت به مثال قبلی بسیار سبکتر میباشد.

### ۵-۲- نتایج و بررسی پارامترها

در این قسمت اثر بعضی پارامترهای هندسی پوسته مانند، نسبت شعاع انحناها، نسبت طول کمانها، زاویه الیاف، سرعت و جرم ضربهزننده بر پارامترهای ضربه بررسی و نتایج بهدست آمده از دو مدل کامل و جرم و فنر با هم مقایسه میشوند. چون مدل جرم و فنر برای جرمضربهزننده بهنسبت سنگینتر از جرم سازه هدف، دقت خوبی دارد [۲۱] بنابراین برای مقایسه با مدل کامل، جرم ضربهزننده بسیار سنگینتر از جرم پوسته درنظر گرفته میشود. مشخصات جنس و هندسه پوسته کامپوزیتی و جرم ضربهزننده فولادی در جدول ۲ درج شده است. پوسته کامپوزیتی از ۲۰ لایه تشکیل شده و لایهها از بالا به پایین شماره گذاری شدهاند. تاریخچه نیرو و خیز بهدست آمده از مدل کامل و جرم و فنر به تریب در شکلهای **۵** و ۶ نشان داده شده است.

**جدول (۲):** هندسه و جنس صفحه و ضربهزننده فولادی.

مشخصات هندسی صفحه کامپوزیتی: $a=200\,\,mm, b=200\,\,mm, R_1=R_2=200\,\,mm$  $h=4.65\,\,mm$  $lay-up=[0,90,0,90,0]_{2s}$ 

خواص ماده کامپوزیتی:

$$\begin{split} E_{11} &= 129 ~GPa, E_{22} = 7.5 ~GPa \\ G_{12} &= G_{13} = 3.5 ~GPa, G_{23} = 2.6 ~GPa \\ \nu_{12} &= 0.33, \rho = 1540 ~kgm^{-3} \end{split}$$

خواص ضربهزننده:

$$\begin{split} E &= 200 ~GPa, \nu = 0.3, \rho = 7971 ~kgm^{-3} \\ diameter &= 25.4 ~mm \\ m_i &= 3 ~kg, V_i = 3 ~ms^{-1} \end{split}$$

در این بررسی مقدار  $R_1$  ثابت درنظر گرفته شده است. مشاهده میشود با افزایش نسبت  $R_1$  بهعلت کاهش سفتی پوسته، میشود با افزایش نسبت  $2 - R_1$  به میشینه خیز و مدت زمان بیشینه نیروی تماسی کاهش ولی بیشینه خیز و مدت زمان تماس افزایش مییابد. همچنین با افزایش نسبت  $R_1 / R_1$  از مقدار ۵ به بعد تغییرات تاریخچه نیرو، خیز، بیشینه نیرو بیشینه خیز کمتر میشود.

تغییرات بیشینه نیرو، بیشینه خیـز و مـدت زمـان تمـاس در حالت  $R_2 / R_1 = 1 = 1$  به ترتیب در حالت  $R_2 / R_1 = 6$  به ترتیب در محل حالت  $R_2 / R_1 = 6$  به ترتیب در محد کامش، ۲۹ درصـد و ۲۲/۰۸ درصـد کامش، ۳۲/۶۸ درصـد و ۲۹/۵۳ درصـد کامش، ۳۹/۵۳ و ۲۹/۵۳ درصـد کامش، ۳۹/۵۳ و ۲۹/۵۳ درمـد کامش، ۳۹/۵۳ درمـد در نتیجـه بیشـترین تغییرات مربوط به بیشینه خیز حاصل از مـدل کامل میاشد. بیشترین اختلاف بیشینه نیرو بین دو مدل کامل و جرم و فنـر در بیشترین اختلاف بیشینه نیرو بین دو مدل کامل و جرم و فنـر در بیشترین اختلاف بیشینه نیرو بین دو مدل کامل و جرم و فنـر در بیشترین اختلاف بیشینه نیرو بین دو مدل کامل و جرم و فنـر در بیشترین اختلاف بیشینه نیرو بین دو مدل کامل و جرم و فنـر در بیشترین اختلاف بیشینه نیرو بین دو مدل کامل و جرم و فنـر در بیشترین اختلاف بیشینه نیرو بین دو مدل کامل و جرم و فـر در پیشترین اختلاف بیشینه نیرو بین دو مدل کامل و جرم و فـر در بیشترین اختلاف بیشینه نیرو بین دو مدل کامل و جرم و فـر در بیجـه بیشترین اختلاف بیشینه نیرو بین دو مدل کامل و جرم و فـر در بیجـه بیشترین اختلاف بیشینه نیرو بین دو مدل کامل و جرم و فـر در پیجـه بیشترین اختلاف بیشینه نیرو بین دو مدل کامل و جرم و فـر در پیجـه بیشترین اختلاف بیشینه نیرو بین دو مدل کامل و جرم و بین دو مدر و بیشـر در پیجـه پیشترین اختلاف بیشینه نیرو بین دو مدل کامل و جرم و فـر در پیجـه نیسـر 5 مال از ایش نسـبت  $R_1 / R_2$  به مقـدار  $R_1 / R_2$  به میاشد. از شـکل ا

اثر زاویه الیاف: در این قسمت ( b = 0.1m) و دیگر مشخصات پوسته و ضربه زننده مطابق جدول ۲ در نظر گرفته و آرایش الیاف کامپوزیت به صورت  $_{2s}[\theta - / \theta / \theta - \theta]$  میباشد. در این مثال تأثیر زاویه الیاف روی پارامترهای ضربه مانند نیرو، خیز ، بیشینه نیرو و خیز محل ضربه در شکلهای ۱۴–۱۲ نشان داده شدهاند.

در شکلهای **۵۱** و **۶۱** با افزایش زاویه الیاف از صفر تا ۳۰ درجه، بیشینه تماس افزایش و بیشینه خیز کاهش می یابد. از زاویه ۳۰ تا ۹۰ درجه، بیشینه نیرو کاهش ولی خیز و مدت زمان تماس افزایش می یابد. در این مسئله، در زاویه الیاف ۳۰ درجه نیروی تماس بیشترین و خیز کمترین مقدار را دارد. بیشترین اختلاف بیشینه نیرو و بیشینه خیز بین مدل کامل و جرم و فنر در زاویه ۶۰ درجه به ترتیب ۴/۱۴ درصد و ۶۵/۶ درصد می باشد. به علت اینکه طول کمانها با هم برابر نیستند  $(d \neq a)$  مقدار بیشینه نیرو و خیز در زاویه صفر با ۹۰ درجه متفاوت است. همچنین خیز پوسته در راستای محور  $x_1$  حاصل از مدل کامل در شکل **۱۲** ارائه شده است.





اثر سرعت و جرم ضربهزننده در یک سطح انرژی: در این قسمت اثر سرعت و جرم ضربهزننده بر تاریخچه نیرو و خیز محل ضربه از هر دو مدل در شکلهای ۲۱- ۱۸ ارائه شده است. جنس و مشخصات هندسی پوسته و ضربهزننده مانند جدول ۲ درنظر گرفته و انرژی ضربهزننده برابر ۲۵ ژول میباشد.





همان طور که مشاهده می شود با افزایش جرم و کاهش سرعت در یک سطح ثابتی از انرژی جنبشی ضربهزننده، بیشینه نیرو و خیز تقریباً ثابت می ماند. پس می توان نتیجه گرفت که در یک سطح انرژی ثابت می ماند. پس می توان نتیجه گرفت که در یک سطح تغییرات بیشینه خیز و نیرو بسیار کم است. بیشترین تغییر بیشینه نیم نیرو در حالت  $(m_i = 2 kg, V = 5 m / s)$  نسبت به حالت نیرو در حالت  $(m_i = 1.02 kg, V = 7 m / s)$  مدل کامل ۵٪ و بیشترین تغییرات خیز در مدل جرم و فنر ۲/۸۱٪ و در مدل کامل ۵٪ و بیشترین تغییرات خیز در مدل کامل ۵٪ و بیشترین تغییرات خیز در مدل جرم و فنر ۲/۸۱٪ و در مدل کامل ۵٪ و بیشترین تغییرات خیز در مدل جرم و فنر ۲/۸۱٪

اثر نسبت (a / b): مشخصات پوسته به صورت رابطه (a / b): مشخصات پوسته به صورت رابطه (a / b): مشخصات ضربهزننده مطابق (a / b) جدول T درنظر گرفته می شود و مقدار طول کمان b در جهت محور  $x_{1}$  ثابت درنظر گرفته شده و مقدار طول کمان a در جهت (a / b) محور  $(x_{1})$  ثابت درنظر گرفته مده و مقدار طول کمان b در جهت (a / b) محور  $(x_{1})$  ثابت درنظر گرفته شده و مقدار طول کمان b در جهت (a / b) محور  $(x_{1})$  ثابت درنظر گرفته می شود و مقدار طول کمان b در جهت (a / b) محور  $(x_{1})$  ثابت درنظر گرفته می شود و مقدار طول کمان c در جهت (a / b) محور  $(x_{1})$  ثابت در خرار گرفته می شود و مقدار طول کمان c در جهت (a / b) مراب (a / b) مراب (a / b) در جهت (a / b) مراب (a / b) ((a / b) ((a / b)) مراب (a / b) ((a / b)) مراب (a / b) ((a / b)) ((a / b)



مشاهده می شود با افزایش مقدار a (طول کمان) تـا ۱/۵ برابـر b بیشینه نیروی تماس کاهش و بیشینه خیز و مدت زمان تماس



تاریخچه خیز حاصل از مدل کامل در مطالعه محققان پیشین با افزایش جرم، بیشینه نیرو، خیز و مدت زمان تماس افزایش مییابند. افزایش سرعت باعث افزایش

شکل (۲۱): اثر سرعت و جرم ضرب زننده در یک سطح انرژی بر

0.5

0.5

1

بیشینه نیرو و خیز می شود ولی مدت زمان تماس تقریباً ثابت می ماند [۱]

2.5

#### ۷- مراجع

- Christoforou, A.P. and Swanson, S.R. "Analysis of Impact Response in Composite Plate", Int. J. Solids Strut, Vol. 27, pp. 161-70, 1991.
- Pierson, M.O. and Vaziri, R. "Analytical Solution for Low-Velocity Impact Response of Composite Plates", AIAA J., Vol. 34, No. 8, pp. 1633–1640, 1996.
- Christoforou, A.P. and Yigit, A.S. "Characterization of Impact in Composite Plates", Composite Structures, Vol. 43, pp. 15-24, 1998.
- Chun, L. and Lam, K.Y. "Dynamic Response of Fully Clamped Laminated Composite Plates Subjected to Low Velocity Impact of a Mass", Int. J. Solids Struct, Vol. 35, pp. 963–79, 1998.
- Sun, C.T., Chen, J.K. "On the Impact of Initially Stressed Composite Laminates", J. Compos. Mater, Vol. 19, No. 6, pp. 490–504, 1985.
- Gong, S.W., Toh, S.L. and Shim, V.P.W. "The Elastic Response of Orthotropic Laminated Cylindrical Shells to Low-Velocity Impact", Composites Eng., Vol. 4, No. 2, pp. 241-266, 1994.
- Chandrashekara, K. and Schroeder, T. "Nonlinear Impact Analysis of Laminated Cylindrical and Doubly Curved shells", J. Comp Mater, Vol, 29, pp. 2160–79, 1995.
- Krishnamurthy, K.S., Mahajan, P., and Mittal, R.K. "A Parametric study of the Impact Response and Damage of Laminated Cylindrical Composite Shells", Compos Sci, Vol. 61, pp. 1655–69, 2001.
- Ganapathy, S. and Rao, K.P. "Failure Analysis of Laminated Composite Cylindrical/Spherical Shell Panels Subjected to Low-Velocity Impact", Computers & Structures, Vol. 68, pp. 627–641, 1998.
- Shiuh-Chuan, H. and Yu-Cheng, L. "The Finite Element Analysis of Composite Laminates and Shell Structures Subjected to Low Velocity Impact", Composite Structures, Vol. 66, pp. 277–285, 2004.
- Yiming, F., Yiqi, M., and Yanping, T. "Damage Analysis and Dynamic Response of Elasto-Plastic Laminated Composite Shallow Spherical Shell under Low Velocity Impact", Solids and Structures, Vol. 47, pp. 126–137, 2010.
- Khalili, S.M.R., Soroush, M., Davar, A., and Rahmani, O. "Finite Element Modeling of Low-Velocity Impact on Laminated Composite Plates and Cylindrical shells", Composite Structures, Vol. 93, pp. 1363–1375, 2011.
- 13. Reddy, J.N. "Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells", 2nd ed, United States of America, CRC Press, 2004.
- Sanders, J.r.J.L. "An Improved First Approximation Theory For Thin Shells", NASA THR24, To impact loads, Compos Struct, Vol. 34, pp.55–63, 1959.

افزایش مییابند که عامل آن کاهش سفتی پوسته میباشد. ولی با افزایش بیشتر مقدار a از این عدد بیشینه نیرو افزایش و بیشینه خیز و مدت زمان تماس کاهش مییابد. علت این پدیده این است که نسبت d/b یک مقدار بحرانی دارد که تا این مقدار حالت ضربه کلی<sup>۱</sup> است ولی با افزایش این نسبت از این مقدار بحرانی به بعد، حالت ضربه از کلی به محلی(local) تغییر پیدا میکند. لازم بهذکر است که گانگ به نتیجه مشابهی در مورد پوسته استوانهای رسیده است [۶]. بیشترین اختلاف بیشینه نیرو بین دو مدل کامل و جرم و فنر در نسبت 10=d/a به مقدار ۱۳ درصد و بیشینه خیز در نسبت 3=d/a، ۱/۷۷ درصد میباشد.

#### ۶- نتیجهگیری

در تحقیق حاضر، معادلات حرکت پوسته کامپوزیتی دوانحنایی تحت ضربه کم سرعت بر اساس تئوری مرتبه برشی اول استخراج شد. در مدل کامل، معادلات حرکت پوسته و ضربهزننده بهصورت کوپل با نوشتن کد در نرمافزار Matlab بهروش تحلیلی حل و پاسخ دینامیکی بهدست آمد. تاریخچه نیروی تماس از دو مدل کامل و جرم و فنر محاسبه و مقایسه گردید. بعضی از نتایج بهدست آمده در این مقاله عبارتند از:

با افزایش نسبت شعاع انحنا  $R_1 / R_2$ ، سفتی پوسته کاهش در نتیجه مقدار بیشینه نیرو کاهش، ولی بیشینه خیز و مدت زمان تماس افزایش مییابند. با افـزایش بیشـتر ایـن نسـبت، تغییـرات تاریخچه نیرو و خیز کمتر میشود.

با افزایش زاویه الیاف تا مقدار ۳۰ درجه برای مشخصات پوسته ذکر شده، بیشینه نیرو افزایش و برای مقادیر بیشتر از ۳۰ درجه، بیشینه نیرو کاهش ولی بیشینه خیز و مدت زمان تماس افزایش مییابند.

با افزایش نسبت a/b تا مقدار بحرانی (a/b=1.5)، سفتی پوسته کاهش و در نتیجه بیشینه نیرو کاهش و خیز افزایش می ایند ولی با افزایش بیشتر از این مقدار بحرانی، به علت تغییر حالت ضربه از حالت کلی به محلی، سفتی محل ضربه بیشتر می شود، در نتیجه بیشینه نیرو افزایش و خیز و مدت زمان تماس کاهش می ایند.

با تغییر جرم و سرعت ضربهزننده در یک سطح ثابت انـرژی جنبشی ضربهزننده، بیشینه نیرو و خیز تقریباً ثابت میماند ولی با افزایش جرم، مدت زمان تماس افزایش مییابد.

1- Global

پيوست

$$\begin{split} \xi_{11} &= A_{11}\alpha_m^2 + (A_{66} + 2C_0B_{66} + C_0^2D_{66})\beta_n^2 + \frac{k_sA_{55}}{R_1^2} \\ k_{12} &= k_{21} = (A_{12} + A_{66} - C_0^2D_{66})\alpha_m\beta_n \\ k_{14} &= k_{41} = B_{11}\alpha_m^2 + (B_{66} + C_0D_{66})\beta_n^2 - \frac{k_sA_{55}}{R_1} \\ k_{15} &= k_{51} = (B_{12} + B_{66} + C_0D_{66})\alpha_m\beta_n \\ k_{22} &= A_{22}\beta_n^2 + (A_{66} - 2C_0B_{66} + C_0^2D_{66})\alpha_m^2 - \frac{k_sA_{44}}{R_2^2} \\ k_{23} &= k_{32} = -\left[\frac{1}{R_2}(A_{22} + k_sA_{44}) + \frac{A_{12}}{R_1}\right]\beta_n \\ k_{24} &= k_{42} = (B_{12} + B_{66} - C_0D_{66})\alpha_m\beta_n \\ k_{25} &= k_{52} = B_{22}\beta_n^2 + (B_{66} - C_0D_{66})\alpha_m\beta_n \\ k_{33} &= k_sA_{55}\alpha_m^2 + k_sA_{44}\beta_n^2 + \frac{A_{11}}{R_1^2} + \frac{2A_{12}}{R_1R_2} + \frac{A_{22}}{R_2^2} \\ k_{34} &= k_{43} = \left[k_sA_{55} - (\frac{B_{11}}{R_1} + \frac{B_{12}}{R_2})\right]\alpha_m \\ k_{44} &= D_{11}\alpha_m^2 + D_{66}\beta_n^2 + k_sA_{44} \\ k_{55} &= D_{66}\alpha_m^2 + D_{11}\beta_n^2 + k_sA_{44} \end{split}$$

$$\begin{split} M_{11} &= M_{22} = M_{33} = I_0 \\ M_{14} &= M_{25} = I_1 \\ M_{44} &= M_{45} = I_2 \quad , \quad M_{ij} = M_{ji} \end{split}$$

- Mindlin, R.D. "Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates", J. Applied Mechanics, Vol. 18, pp. 31–38, 1951.
- 16. Qatu, M.S. "Vibitation of Laminated Shells and Platrs", first edition, Elsevier, 2004.
- Zheng, D. and Binienda, W.K. "Analysis of Impact Response of Composite Laminates under Prestress", 10.1061/(ASCE)0893-1321, Vol. 4, No. 197, 2008.
- Khorshidi, K. "Analytical Nonlinear Elasto-Plastic Impact Response of a Moderately Thick Rectangular Plate", Aero. Mech. J., Vol. 6, No. 4, pp. 25–42, 2010 (In Persian).
- Shivakumar, K.N., Elber, W., and Illg, W. "Prediction of Impact Force and Duration Due to Low Velocity on Circular Composite Laminates", J. Mechanics, Vol. 52, , pp. 674-680, 1985.
- Shokuhfar, A., Khalili, S.M.R., Ashenai Ghasemi, F., Malekzadeh, K., and Raissi, S. "Analysis and Optimization of Smart Hybrid Composite Plates Subjected to Low-Velocity Impact Using the Response Surface Methodology (RSM)", Thin-Walled Structures, Vol. 46, pp. 1204–12, 2008.
- Choi, I.H. and Lim, C.H. "Low-Velocity Impact Analysis of Composite Laminates Using Linearized Contact Law", Compos Struct, Vol. 66, pp. 125–32, 2004.
- Swanson, S.R. "Limits of Quasi-Static Solutions in Impact of Composite Structures", Comp Engng, Vol. 2, pp. 261-7, 1992.
- 23. Davar, A. "Analysis of Fiber-Metal Laminate (FML) and FGM Circular Cylindrical Shells Subjected to Lateral Loads", PhD Thesis of K. N. Tossi University of Technology, 2010.
- 24. Delfosse, D., Vaziri, R., Pierson, M.O., and Poursartip, A. "Analysis of the Non-Penetrating Impact Behavior of CFRP Laminates", In: Proceeding of the 9th International Conference on Composite Materials (Madrid, Spain), Cambridge, England, UK: Woodhead Publishing, Vol. 5, pp. 366–73, 1993.