

تعیین ضریب شدت تنش مود اول شیارهای نوک تیز V شکل در نمونه‌های پلیمری با استفاده از روش موری سایه‌ای با جابه‌جایی فاز

علی امینی^۱ و ناصر سلطانی^۲

دانشکده مهندسی مکانیک

دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت: ۹۲/۸/۲۰؛ تاریخ پذیرش: ۹۳/۱/۱۷)

چکیده

در تحقیق حاضر، فنی کاربردی و مناسب جهت به دست آوردن ضریب شدت تنش مود بازشوندگی در نمونه‌های کششی دارای شیار V شکل پلیمری، به کمک روش موری سایه‌ای با جابه‌جایی فاز فیزیکی ارائه شده است. در این مطالعه، ابتدا معادلات حاکم بر روش موری سایه‌ای و مکانیک شکست خطی استخراج و به هم ارتباط داده شده است. سپس با استفاده از چیدمان موری سایه‌ای با جابه‌جایی فاز فیزیکی، چهار تصویر هاله‌ای از نمونه تحت بار ثبت شده است. با استفاده از فنون پردازش تصویر الگوی فازی، هاله‌های به دست آمده استخراج شده و با تحلیل میدان فازی، اطلاعات مورد نیاز برای محاسبه ضریب شدت تنش مود بازشوندگی شیار حاصل شده است. در نهایت، با مقایسه ضرایب شدت تنش به دست آمده از روش موری سایه‌ای و روش عددی المان محدود، مطابقت خوبی مشاهده شده است.

واژه‌های کلیدی: موری سایه‌ای، جابه‌جایی فاز، شیار V شکل، ضریب شدت تنش

Determination of Mode I Stress Intensity Factor of V-Notched Polymeric Specimens via Using Phase Shifting Shadow Moiré

A. Amini and N. Soltani

Mechanical Engineering Department

University of Tehran

(Received: 11 November, 2013; Accepted: 6 April, 2014)

ABSTRACT

A convenient, experimental technique for evaluation of V-notch mode I stress intensity factor using the method of phase shifting shadow moiré is described and demonstrated. In this study, the governing equations that relate the elastic solution and phase shifting shadow moiré for mode I V-notch tip are derived in terms of material constants and the stress intensity factors. Then, a set of phase shifting shadow moiré experiments were conducted on a polymeric tensile specimen and fringe patterns were captured. Through utilization of image processing techniques, phase map of fringe patterns was extracted and by analyzing the phase map, required data for determination of stress intensity factors were obtained. The obtained stress intensity factors by using phase shifting shadow moiré method, demonstrates a good agreement with the FEM analysis of specimen.

Keywords: Shadow Moiré, Phase Shifting, V- Notch, Stress Intensity Factor

۱- کارشناس ارشد: a.amini@ut.ac.ir

۲- استاد (نویسنده پاسخگو): nsoltani@ut.ac.ir

۱- مقدمه

شیارها^۱ کاربردهای فراوانی در اجزاء و ماشین آلات مکانیکی دارند و به‌طور گسترده در سازه‌های گوناگون مورد استفاده قرار می‌گیرند. بر خلاف ترک‌ها که عناصر نامطلوب در یک سازه محسوب می‌شوند و معمولاً به‌طور ناخواسته ایجاد می‌شوند، شیارهای U و V شکل برای مقاصد گوناگون به‌وفور در سازه‌های مکانیکی به‌کار می‌روند. نکته مهمی که در هنگام طراحی شیارها باید در نظر گرفت، تمرکز تنش شدیدی است که در محل نوک شیارها به‌ویژه شیارهای نوک‌تیز ایجاد و در نتیجه باعث تضعیف سازه می‌شود. با توجه به اهمیت شیارهای نوک‌تیز و بحث شکست ترد در آنها، تا به امروز مطالعات فراوانی در این زمینه انجام شده است. در سال ۱۹۵۲، ویلیامز^۲ میدان تنش در اطراف شیار V شکل را به‌صورت یک سری توانی به دست آورد [۱]. از آن پس تلاش‌های بسیاری برای محاسبه ضرایب معادله ویلیامز از طریق روش‌های عددی و تجربی انجام شده است. در سال ۱۹۷۲ گروس و مندلسون^۳ ضرایب شدت تنش را برای شیارهای نوک تیز V شکل بر روی نمونه‌های کششی، خمشی و پیچشی با استفاده از روش عددی ترتیب مرزی^۴ محاسبه کردند [۲]. نیو^۵ و همکاران روش المان مرزی جدیدی را برای محاسبه ضرایب شدت تنش در نمونه‌های V شکل ارائه دادند [۳]. تیان‌تانگ یو^۶ با استفاده از روش المان محدود گسترش یافته^۷ ترم‌های معادله ویلیامز را با دقت خوبی محاسبه کرد [۴]. لازارین^۸ و همکاران نیز در مطالعات متعددی به بررسی میدان تنش در اطراف شیارهای نوک تیز و گرد پرداخته‌اند [۵ و ۶]. با اینکه روش‌های عددی می‌توانند نتایج دقیقی را ارائه دهند، اما معمولاً استفاده از این روش‌ها با مشکلات خاص خود همراه است و جزء در موارد خاص امکان پذیر نمی‌باشد. از این‌رو در بسیاری از موارد برای به‌دست آوردن نتایج قابل اعتماد باید از روش‌های تجربی استفاده کرد. تاکنون مطالعات زیادی بر روی کاربرد روش‌های گوناگون تجربی، به‌ویژه روش‌های غیرتماسی و غیرمخرب نوری مانند سایه‌نگاری^۹، کشسان نگاری^{۱۰}،

برش‌نگاری^{۱۱}، برهم‌نگاری دیجیتالی تصاویر^{۱۲} و موری^{۱۳} انجام گرفته است. قضاوی زاده و همکاران با استفاده از روش برش‌نگاری دیجیتالی ضرایب شدت تنش مود بازشوندگی ترک‌های لبه‌ای با دقت خوبی نسبت به نتایج حاصل از تحلیل عددی، به‌دست آوردند [۷]. آیت‌اللهی و نجاتی با استفاده از روش کشسان‌نگاری ضرایب شدت تنش را برای شیارهای V شکل در نمونه‌های دیسک برزیلی محاسبه کردند [۸]. جو^{۱۴} در سال ۲۰۱۱ کاربرد روش برهم‌نگاری تصاویر دیجیتالی را در به دست آوردن میدان تنش شیارهای نوک تیز بررسی کرد [۹].

روش موری از جمله روش‌های متداول نوری است که در آن، روی هم قرار گرفتن دو شبکه از خطوط مشابه و تداخل این خطوط باعث به‌وجود آمدن الگوهای هاله‌ای می‌شود. اولین استفاده از روش موری، برای عیب‌یابی توری‌های پراش بود که در سال ۱۸۷۴ و توسط ریلی^{۱۵} انجام گرفت. از آن پس جنبه‌های مختلف این پدیده و کاربردهای آن گسترش یافت و فن‌های مختلفی با استفاده از آن به وجود آمد. فنون موری از جمله روش‌های آسان می‌باشند که به‌وسیله آنها می‌توان به‌صورت غیرمخرب و غیرتماسی تغییر شکل‌های داخل صفحه و خارج صفحه، کانورتوپوگرافی، شیب و انحنای سطح را با دقت خوبی به‌دست آورد [۱۰].

شبکه‌های استفاده شده در ایجاد نقش‌های موری ممکن است به‌صورت مجموعه‌ای از خطوط راست، خطوط شعاعی، دایره‌های هم‌مرکز و یا نقاط باشد. اما هنگامی که از تکنیک‌های موری برای به دست آوردن میدان جابه‌جایی و یا توپوگرافی سطح استفاده می‌شود، معمولاً از خطوط راست موازی با پهنای یکسان استفاده می‌شود. روش موری هندسی اولین شکل روش موری برای اندازه‌گیری جابه‌جایی‌های داخل صفحه بود که از تداخل دو شبکه از خطوط موازی هم، یکی بر روی نمونه و دیگری جلوی نمونه استفاده می‌کرد. از بین تکنیک‌های مختلف موری، روش موری سایه‌ای از جمله روش‌های مفیدی است که معمولاً از آن برای مقاصد سطح‌نگاری استفاده می‌شود. در روش موری سایه‌ای، الگوهای موری از تداخل شبکه اصلی^{۱۶} با سایه خودش بر روی جسم، تشکیل می‌شود. تئوری سطح‌نگاری موری سایه‌ای

- 1- Notches
- 2- Williams
- 3- Gross and Mendelson
- 4- Boundary Collocation
- 5- Niu
- 6- Tiantang Yu
- 7- Extended Finite Element (Xfem)
- 8- Lazzarin
- 9- Caustics
- 10- Photoelasticity

- 11- Shearography
- 12- Digital Image Correlation (Dic)
- 13- Moiré
- 14- Ju
- 15- Reylieh
- 16- Master Grating

در این روش نیز از یک شبکه اصلی از خطوط موازی هم و با گام ρ استفاده می‌شود. در روش موری سایه‌ای به جای استفاده از شبکه بر روی نمونه، از سایه شبکه اصلی بر روی نمونه استفاده می‌شود. در این روش، به شبکه و نمونه به وسیله دسته‌ای از پرتوهای موازی نور لیزر که با خط عمود به شبکه زاویه α می‌سازند نور تابانده می‌شود و در نتیجه سایه شبکه بر روی نمونه تشکیل می‌شود. با نگاه کردن به شبکه از یک زاویه متفاوت، هاله‌های موری سایه‌ای که حاصل تداخل شبکه اصلی و سایه‌ای آن است مشاهده می‌شوند. هاله‌های به وجود آمده نشان دهنده سیستمی از کانتورهایی است که بیانگر فاصله بین نمونه و شبکه اصلی است. اگر به شبکه به صورت عمودی نگاه شود و یا به عبارت دیگر، دوربین ثبت کننده تصاویر عمود بر شبکه و نمونه قرار گیرد، فاصله بین هر نقطه نمونه و شبکه مرجع را می‌توان از رابطه (۱) به دست آورد:

$$w = \frac{N \cdot \rho}{\operatorname{tg}(\alpha)} \quad (1)$$

که در رابطه بالا، ρ گام شبکه مرجع، α زاویه تابش نور با خط عمود بر شبکه و N تعداد هاله‌ها بین دو نقطه مورد نظر است. با توجه به دشواری‌های یافتن خط مرکز هر هاله و همچنین مشکلات خاص شمارش هاله‌ها، روش جابه‌جایی فاز به عنوان یک روش سریع، مطمئن و آسان معرفی شده است. به طور کلی، الگوی هاله به دست آمده را می‌توان به صورت رابطه (۲) مدل کرد:

$$I(x, y) = A(x, y) + B(x, y) \cdot \cos[\Delta\phi(x, y)] \quad (2)$$

که در رابطه بالا، $\Delta\phi(x, y)$ فاز الگوی هاله است که اطلاعات مورد نیاز جابه‌جایی خارج از صفحه در آن نهفته است. همان‌گونه که از رابطه (۲) مشاهده می‌شود، A و B و $\Delta\phi$ مجهولات معادله می‌باشند و این در حالی است که تنها یک معادله (الگوی هاله ثبت شده) برای به دست آوردن این سه مجهول وجود دارد. از این رو، جمله جابه‌جایی فاز به معادله بالا اضافه می‌شود و رابطه (۳) حاصل می‌شود:

$$I_n(x, y) = A(x, y) + B(x, y) \cdot \cos[\Delta\phi(x, y) + \phi_n] \quad (3)$$

$$n = 1, 2, \dots, k$$

در رابطه (۳)، ϕ_n جابه‌جایی فاز n ام است که از رابطه (۴) به دست می‌آید:

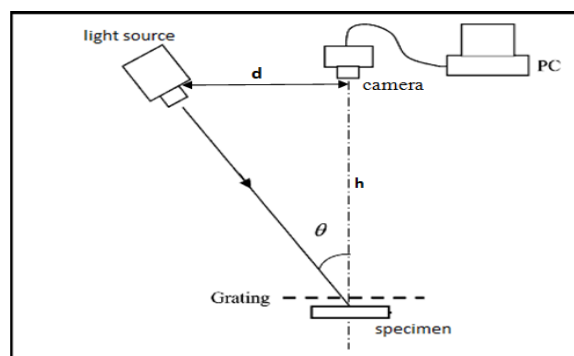
$$\phi_n = \frac{2\pi d}{ph} \delta_n = \frac{n-1}{k} 2\pi \quad (4)$$

استاندارد برای اولین بار توسط میدوس^۱ [۱۱] ارائه شد و سپس توسط تاکاساکی^۲ [۱۲] و [۱۳] مورد بررسی قرار گرفت. دگریک^۳ و همکاران در سال ۲۰۰۱ قابلیت‌های این روش را در زمینه اندازه‌گیری جابه‌جایی‌های در ابعاد میکرو سطوح منحنی دار اندازه‌گیری کردند [۱۴]. در سال ۲۰۰۵ مینویداس^۴ [۱۵] از روش موری سایه‌ای در تحلیلی ارتعاشات خمشی صفحات استفاده کردند. سیف و خشابا^۵ نیز در سال ۲۰۰۷ با استفاده از همین روش ورقه‌شدگی ناشی از سوراخ‌کاری در مواد کامپوزیتی را اندازه‌گیری کردند [۱۶]. لیم^۶ و همکاران در سال ۲۰۰۹ با استفاده از موری سایه‌ای با جابه‌جایی فاز، خیز و مدول الاستیسیته تیرهای در ابعاد میکرو را با دقت خوبی محاسبه کردند [۱۷].

با توجه به قابلیت‌های روش موری سایه‌ای به عنوان روشی ساده و در عین حال دقیق، تاکنون در حوزه‌های مختلف علم مکانیک از آن استفاده شده است. اما تا به امروز مطالعه‌های درباره کاربرد و محدوده کاربرد روش موری سایه‌ای در زمینه مکانیک شکست صورت نگرفته است و از این رو، بررسی مسائل مکانیک شکست به وسیله این روش امری کاملاً منطقی به نظر می‌رسد. در نتیجه، در این تحقیق قابلیت روش موری سایه‌ای با جابه‌جایی فاز فیزیکی در به دست آوردن ضریب شدت تنش مود بازشوندگی شیار V شکل در یک نمونه پلیمری نرم بررسی می‌شود.

۲- تئوری موری سایه‌ای با جابه‌جایی فاز فیزیکی

شماتیکی از چیدمان روش موری سایه‌ای با جابه‌جایی فاز فیزیکی در شکل ۱ نشان داده شده است.

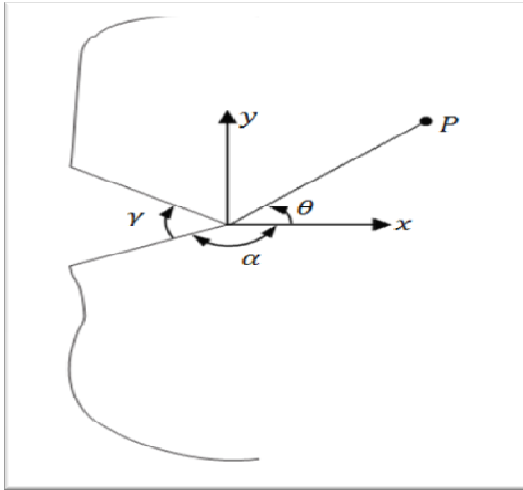


شکل (۱): شماتیکی از چیدمان روش موری سایه‌ای.

- 1- Meadows
- 2- Takasaki
- 3- Degriek
- 4- Minvydas
- 5- Seif and Khashaba
- 6- Lim

۳- روابط تحلیلی

مطابق رابطه ویلیامز برای یک شیار V شکل تحت بارگذاری کلی، رابطه حاکم بر میدان تنش را می‌توان به صورت معادله (۸) بیان کرد. در این معادله r و θ بیانگر مؤلفه‌های مختصات قطبی و Re و Im به ترتیب بیانگر قسمت حقیقی و موهومی معادله بالا است. همچنین زاویه α را می‌توان به راحتی و مطابق شکل ۲ به زاویه شیار ربط داد.



شکل (۲): هندسه شیار V شکل.

۴- روش آزمایش

از یک ورق پلیمری از جنس پلی اورتان^۲ سه نمونه با ابعاد هندسی یکسان و زاویه‌های شیار متفاوت (۳۰، ۴۵ و ۹۰ درجه) تهیه شده که شکل شماتیک، ابعاد هندسی و خواص مکانیکی نمونه‌ها به ترتیب در شکل ۳ و جداول ۱ و ۲ نمایش داده شده است.

که در آن، d فاصله بین منبع نور و دوربین، h فاصله بین دوربین تا نمونه و δ_n جابه‌جایی شبکه مرجع در جهت عمود بر شبکه متناظر با جابه‌جایی فاز مورد نیاز است. اگرچه با توجه به نکات ذکر شده درباره تعداد مجهولات معادله سه مرحله جابه‌جایی فاز کافی است، اما معمولاً از جابه‌جایی فاز چهار مرحله‌ای استفاده می‌شود. در نتیجه با توجه به معادلات (۳ و ۴) معادلات جابه‌جایی فاز چهار مرحله‌ای به صورت رابطه (۵) است:

$$\begin{aligned} I_1(x, y) &= A(x, y) + B(x, y) \cdot \cos[\Delta\phi(x, y)] \\ I_2(x, y) &= A(x, y) + B(x, y) \cdot \cos\left[\Delta\phi(x, y) + \frac{\pi}{2}\right] \\ I_3(x, y) &= A(x, y) + B(x, y) \cdot \cos[\Delta\phi(x, y) + \pi] \\ I_4(x, y) &= A(x, y) + B(x, y) \cdot \cos\left[\Delta\phi(x, y) + \frac{3\pi}{4}\right] \end{aligned} \quad (5)$$

و در نهایت با استفاده از روش فرامعین حداقل مربعات، فاز الگوی هاله‌ای به صورت رابطه (۶) استخراج می‌شود:

$$\Delta\phi(x, y) = \tan^{-1} \frac{I_4 - I_2}{I_1 - I_3} \quad (6)$$

از آنجا که مقادیر فاز از یک رابطه مثلثاتی تانژانت معکوس استخراج شده است و با توجه به ماهیت تابع تانژانت معکوس، این مقادیر در اصطلاح در بازه $(-\pi, \pi)$ دچار پیچیدگی^۱ می‌شوند. در نتیجه لازم است که با استفاده از یک الگوریتم مناسب، ناپیوستگی نقاطی که دچار پیچیدگی شده‌اند رفع شود و یک الگوی فازی پیوسته حاصل شود. پس از به‌دست آوردن الگوی فاز پیوسته نهایی، فاصله بین نقاط نمونه و شبکه را می‌توان از رابطه (۷) به‌دست آورد:

$$z = \frac{ph}{d} \cdot \frac{\Delta\phi(x, y)}{2\pi} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\lambda_n^I \cdot A_n}{r^{1-\lambda_n^I}} \left\{ \begin{array}{l} (2 + \lambda_n^I \cos \cos 2\alpha + \cos \cos 2\alpha \cdot \lambda_n^I) \cos \cos(\lambda_n^I - 1)\theta - (\lambda_n^I - 1) \cos \cos(\lambda_n^I - 3)\theta \\ (2 - \lambda_n^I \cos \cos 2\alpha - \cos \cos 2\alpha \cdot \lambda_n^I) \cos \cos(\lambda_n^I - 1)\theta + (\lambda_n^I - 1) \cos \cos(\lambda_n^I - 3)\theta \\ -(\lambda_n^I \cos \cos 2\alpha + \cos \cos 2\alpha \cdot \lambda_n^I) \sin \sin(\lambda_n^I - 1)\theta + (\lambda_n^I - 1) \sin \sin(\lambda_n^I - 3)\theta \end{array} \right\} \right\} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\lambda_n^{II} \cdot B_n}{r^{1-\lambda_n^{II}}} \left\{ \begin{array}{l} -(2 + \lambda_n^{II} \cos \cos 2\alpha - \cos \cos 2\alpha \cdot \lambda_n^{II}) \sin \sin(\lambda_n^{II} - 1)\theta + (\lambda_n^{II} - 1) \sin \sin(\lambda_n^{II} - 3)\theta \\ (-2 + \lambda_n^{II} \cos \cos 2\alpha - \cos \cos 2\alpha \cdot \lambda_n^{II}) \sin \sin(\lambda_n^{II} - 1)\theta - (\lambda_n^{II} - 1) \sin \sin(\lambda_n^{II} - 3)\theta \\ -(\lambda_n^{II} \cos \cos 2\alpha - \cos \cos 2\alpha \cdot \lambda_n^{II}) \cos \cos(\lambda_n^{II} - 1)\theta + (\lambda_n^{II} - 1) \cos \cos(\lambda_n^{II} - 3)\theta \end{array} \right\} \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

در تحقیق حاضر و با توجه به شرایط هندسی نمونه و شرایط بارگذاری، تنها مود اول بارگذاری در نظر گرفته می شود. با در نظر گرفتن اولین جمله از معادله ویلیامز در جهت بارگذاری، ضریب شدت تنش مود اول از رابطه زیر به دست می آید:

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} (r^{1-\lambda_1^I} \sigma_y (at\theta = 0)) \quad (10)$$

$$= \sqrt{2\pi\lambda_1^I} (1 + \lambda_1^I - \lambda_1^I \cos 2\alpha - \cos 2\alpha \lambda_1^I) A_1$$

از سوی دیگر، مطابق رابطه هوک کرنش در بعد خارج از صفحه مطابق رابطه زیر به مؤلفه های تنش ربط داده می شود:

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu(\sigma_x + \sigma_y)}{E} \quad (11)$$

که با جایگزینی مقادیر σ_x و σ_y از معادله ویلیامز، این رابطه به صورت زیر درمی آید:

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E} \sum_{n=1}^{\infty} \text{Re} \left(\frac{\lambda_n^I \cdot A_n}{r^{1-\lambda_n^I}} (4 \cos(\lambda_n^I - 1)\theta) \right) \quad (12)$$

از طرفی دیگر، با توجه به اینکه داده های تجربی از روی سطح نمونه استخراج می شود و بر روی سطح مؤلفه خارج از صفحه تنش صفر است، بنابراین:

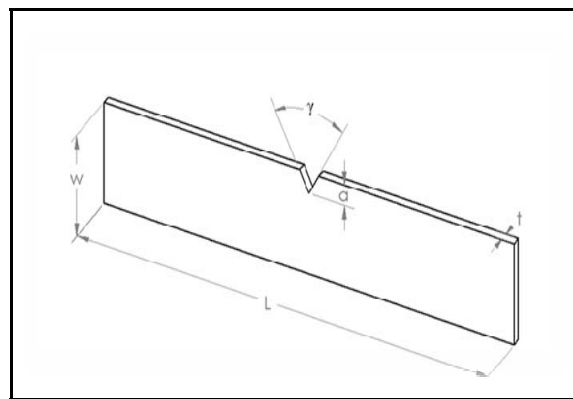
$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} \sum_{n=1}^{\infty} \text{Re} \left(\frac{\lambda_n^I \cdot A_n}{r^{1-\lambda_n^I}} (4 \cos(\lambda_n^I - 1)\theta) \right) \quad (13)$$

در نهایت با ترکیب روابط (۷ و ۱۳)، رابطه (۱۴) حاصل می شود:

$$\Delta \phi(x, y) = -\frac{\pi \nu t d}{E p h} \sum_{n=1}^{\infty} \text{Re} \left(\frac{\lambda_n^I \cdot A_n}{r^{1-\lambda_n^I}} (4 \cos(\lambda_n^I - 1)\theta) \right) \quad (14)$$

که در آن، t ضخامت نمونه است.

شکل ۴ تصویری از چیدمان روش موری سایه ای با جابه جایی فاز فیزیکی.



شکل (۳): شماتیکی از نمونه های استفاده شده در تحقیق.

جدول (۱): ابعاد نمونه ها.

عمق شیار (a) (mm)	ضخامت (t) (mm)	عرض (w) (mm)	طول (L) (mm)
۱۰	۵	۵۰	۲۵۰

جدول (۲): خواص مکانیک نمونه از جنس پلی اورتان.

مشخصات مکانیکی ورق پلی اورتان استفاده شده		
تنش تسلیم (Mpa)	ضریب پواسون	مدول الاستیسیته (Mpa)
۴۰	۰/۳۳	۵۲

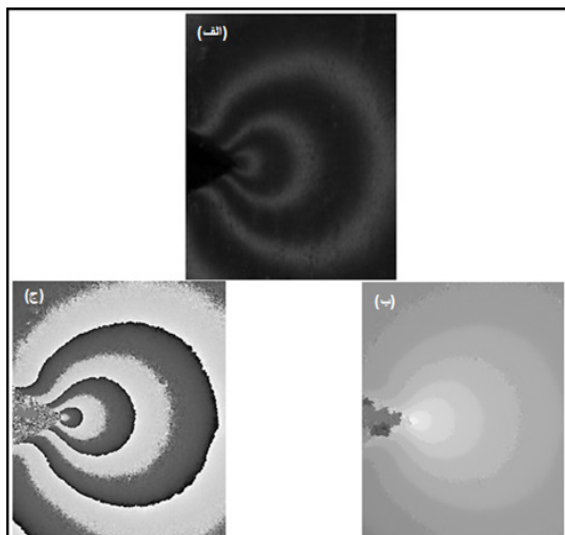
معادلات (۹) از اعمال شرایط مرزی لبه های شیار بر روی معادله حاکم حاصل می شود:

$$\lambda_n^I \sin \sin 2\alpha + \sin \sin 2\lambda_n^I \alpha = 0$$

$$\lambda_n^{II} \sin \sin 2\alpha - \sin \sin 2\lambda_n^{II} \alpha = 0 \quad (9)$$



شکل (۴): چیدمان روش موری سایه ای با جابه جایی فاز فیزیکی.



شکل (۵): الف) هاله به دست آمده در بار 40 kgf ، ب) میدان فازی ناپیوسته و ج) میدان فازی پیوسته.

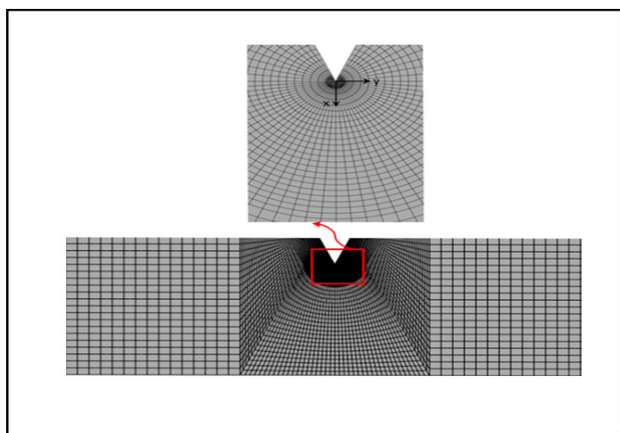
در مرحله بعد و با توجه به معلوم بودن میدان فازی پیوسته، نوبت به استفاده از رابطه (۱۴) و محاسبه ضریب شدت تنش می‌رسد. با توجه به اینکه جابه‌جایی خارج از صفحه مربوط به تعداد زیادی از نقاط از روش تجربی به دست می‌آید، با استفاده از روش حداقل مربعات، می‌توان با دقت خوبی ضریب شدت تنش را محاسبه کرد. به دلیل معتبر بودن رابطه ویلیامز در ناحیه الاستیک خطی، بهتر است انتخاب داده‌های تجربی در خارج از ناحیه پلاستیک انجام گیرد. به همین دلیل داده‌های تجربی از نواحی مربوط به نوک شیار انتخاب نمی‌شود و شعاع حداقل برای برداشت داده‌ها نیز به وسیله نرم‌افزار المان محدود ABAQUS تخمین زده می‌شود.

مسئله مهم هنگام استفاده از روش حداقل مربعات برای استخراج ضرایب شدت تنش از رابطه ویلیامز، مشخص نمودن تعداد ترم‌های رابطه برای دریافت نتیجه بهتر است. مطابق مرجع [۸]، در روش حداقل مربعات، استفاده از تنها یک یا دو ترم نتایج قابل اعتمادی را نتیجه نمی‌دهد. اما با استفاده از سه ترم و بیشتر، ضریب شدت تنش با دقت خوبی حاصل می‌شود. همچنین مطابق مرجع [۹]، با استفاده از سه ترم و بیشتر در رابطه ویلیامز، حساسیت نتیجه به دست آمده به شعاع ناحیه انتخاب شده برای استخراج داده‌های روش حداقل مربعات به میزان چشمگیری کاهش می‌یابد. از این رو هم در تحلیل عددی و هم در تحلیل تجربی، از سه ترم برای به دست آوردن ضرایب شدت تنش استفاده شده است.

در این پژوهش از یک شبکه مرجع با چگالی ۲۵ خط بر میلی‌متر استفاده شده است. یک لیزر هلیوم-نئون با طول موج 632.8 nm به عنوان منبع نور مورد استفاده قرار گرفته است. سپس نور لیزر با استفاده از دو عدسی که بر سر راه پرتو لیزر قرار داده شد گسترده و موازی شد. برای ثبت تصاویر الگوهای هاله‌ای، یک دوربین CCD ساخت شرکت ArtRay با رزولوشن $3/2$ مگاپیکسلی به کار گرفته شده است. فواصل h و d به طور مساوی و به اندازه ۲۵ سانتی‌متر تنظیم شده و به منظور انجام بارگذاری نیز از یک دستگاه آزمون کشش یونیورسال استفاده شده است.

از آنجا که در روش موری سایه‌ای، فاصله بین شبکه مرجع و سطح نمونه اندازه‌گیری می‌شود، لازم است که فاصله اولیه شبکه از نمونه معلوم باشد. بنابراین، در ابتدای آزمایش سطح شبکه مرجع که بر روی یک میکرومتر سوار است به آرامی به سطح نمونه مماس شده و سپس با استفاده از میکرومتر به اندازه 0.1 میلی‌متر از سطح نمونه دور شده است.

هر یک از نمونه‌ها در سه مرحله و تحت بارهای کششی 30 kgf ، 40 و 50 قرار داده شده و نرخ بارگذاری برای تمامی مراحل یکسان و برابر 1 mm/min تنظیم شده است. در هر مرحله و در مرتبه مورد نظر، چهار مرحله جابه‌جایی فاز انجام شده است. طی این عملیات، شبکه مرجع در هر بار جابه‌جایی به اندازه 0.1 mm (با توجه به گام 0.2 میلی‌متری شبکه) و در کل به اندازه 0.4 میلی‌متر از سطح نمونه دور شده است. الگوی هاله‌ای به وجود آمده پس از هر بار انجام جابه‌جایی فاز به وسیله دوربین CCD ثبت گردید. با استفاده از عملیات پردازش تصویر در نرم‌افزار Matlab و با توجه به رابطه (۶)، میدان فازی برای هر مرحله از بارگذاری استخراج شده است. همان‌گونه که پیش از این نیز اشاره شد، فاز به دست آمده یک میدان پیوسته می‌باشد و نیاز است که با انجام عملیات واپیچیدن^۱ یک نقشه فازی پیوسته به دست آورد. برای این منظور، از نرم‌افزار Idea استفاده شده و با استفاده از یک الگوریتم مناسب مستقل از مسیر، نقشه فازی پیوسته برای هر یک از حالات بارگذاری حاصل شده است. شکل ۵-الف الگوی هاله‌ای به دست آمده برای نمونه با زاویه شیار 60 درجه، تحت بار 40 kgf را نشان می‌دهد. شکل‌های ۵-ب و ۵-ج به ترتیب نقشه فازی ناپیوسته و پیوسته را نشان می‌دهد.



شکل (۶): مدل شبکه بندی شده در نرم افزار ABAQUS.

۶- بحث و ارزیابی نتایج

جدول های ۴-۶ ضرایب شدت تنش را برای هر دو روش تجربی و عددی نمایش می دهد. جدول ۴ ضرایب شدت تنش تجربی و عددی را برای نمونه با شیپار ۴۵ درجه نشان می دهد. مطابق این جدول، بیشترین میزان اختلاف مربوط به پایین ترین حد بارگذاری است و میزان اختلاف بین داده های تجربی و عددی با افزایش یافتن میزان بار کاهش می یابد. در این حالت بیشترین میزان اختلاف ۹/۱ و کمترین میزان اختلاف ۱/۷ درصد است.

جدول ۵ مقادیر شدت تنش را برای شیپار ۶۰ درجه نمایش می دهد. در این حالت و با افزایش زاویه شیپار مقادیر ضرایب شدت تنش نسبت به شیپار ۴۵ درجه افزایش می یابد. همچنین با وجود تکرار الگوی جدول ۴ در کم شدن میزان اختلاف با افزایش بار، میزان کلی اختلاف ها نسبت به حالت قبل کاهش می یابد.

جدول (۴): ضرایب شدت تنش برای شیپار ۴۵ درجه.

زاویه شیپار درجه ۴۵	$K_I (Mpa.m^{(1-\lambda'_I)})$	درصد اختلاف
P=۳۰ Kgf		
Shadow moiré	۷/۹۳	۹/۱
FEM	۸/۷۲	
P=۴۰ Kgf		
Shadow moiré	۱۰/۸۱	۷/۹
FEM	۱۱/۷۴	
P=۵۰ Kgf		
Shadow moiré	۱۳/۷۷	۷/۱
FEM	۱۴/۸۳	

از آنجا که مقادیر ویژه مربوط به شیپار V شکل وابسته به اندازه زاویه شیپار است، سه ترم اول این مقادیر برای سه زاویه مورد مطالعه با استفاده از حل عددی معادله (۹) با فن عددی نیوتن-رافسون^۱ محاسبه گردید که در جدول ۳ مشاهده می شود. برای به دست آوردن نتایج دقیق تر و مطابق آنچه در مرجع [۹] آورده شده است، در هر مرحله از بارگذاری اطلاعات از سه شعاع ۱، ۲ و ۳ میلی متر استخراج شده و در پایان میانگین ضریب شدت تنش این سه حالت محاسبه شده است.

جدول (۳): مقادیر ویژه به دست آمده از روش نیوتن-رافسون.

زاویه شیپار	مقادیر ویژه مود اول		
۴۵	۰/۵۰۵	۱/۴۰۵+۰/۰۱۱i	۲/۵۵۲+۰/۲۱۸i
۶۰	۰/۵۱۲	۱/۴۷۱+۰/۱۴۱i	۲/۶۷۶+۰/۲۸۴i
۹۰	۰/۵۴۴	۱/۶۲۹+۰/۲۳۱i	۱/۹۷۱+۰/۳۷۳i

۵- تحلیل المان محدود

به منظور بررسی نتایج به دست آمده از روش تجربی، نمونه و شرایط بارگذاری حاکم بر آن در محیط نرم افزار ABAQUS ۱۰ شبیه سازی شده است. مطابق مرجع [۱۸]، استفاده از المان های چهارضلعی مرتبه ۲ به جای استفاده از المان های مرتبه اول برای استفاده در عملیات حداقل مربعات، میزان دقت را به طور چشمگیری افزایش می دهد. اما اگر از المان های مرتبه دوم استفاده شود، ریزکردن المان ها اثر چندانی در افزایش دقت ندارد. از این رو در مدل المان محدود، برای ناحیه کوچک اطراف شیپار از المان های مثلثی ۶ نقطه ای مرتبه دوم و برای بقیه نواحی اطراف شیپار از المان های هشت وجهی مرتبه دوم استفاده شده است. مدل شبکه بندی شده در شکل ۶ نشان داده شده است. پس از استخراج نتایج شبیه سازی عددی، اطلاعات مربوط به میدان تنش و مختصات تعداد کافی از نقاط روی سطح نمونه استخراج شده است. سپس با استفاده از روش فرامعین حداقل مربعات، اطلاعات این نقاط در رابطه ویلیامز جایگزین شده و ضریب شدت تنش محاسبه شده است.

استفاده شده که از نظر تئوری، دقت روش موری سایه‌ای معادل $0/003$ میلی‌متر محاسبه می‌شود. اما همان‌گونه که اشاره شد، به دلیل مشکلات و منابع خطایی که در روش‌های تجربی وجود دارد، رسیدن به این دقت امکان پذیر نیست. از این رو در جداول ۵-۳ مشاهده می‌شود که با افزایش میزان بار، اختلاف بین روش‌های تجربی و عددی کاهش می‌یابد که به دلیل افزایش جابه‌جایی خارج از صفحه، در اثر افزایش بار است. همچنین به دلیل افزایش میدان تنش در اطراف شیار در اثر افزایش زاویه شیار، جابه‌جایی خارج از صفحه افزایش یافته و به دنبال آن میزان اختلاف نیز کاهش می‌یابد.

یکی از منابع خطایی که باعث می‌شود نتایج از دقت تئوری دور شود، عملیات جابه‌جایی فاز فیزیکی است. در این تحقیق از یک میکرومتر با دقت $0/005$ میلی‌متر برای انجام عملیات جابه‌جایی فاز استفاده شده است. با توجه به خطای اپراتور در اعمال جابه‌جایی فاز دستی، به وجود آمدن خطا، امری اجتناب‌ناپذیر است. عامل مهم دیگر نیز منبع نور است. برای رسیدن به دقت مورد نظر باید از نور موازی استفاده کرد. اما رسیدن به پرتوهای نور کاملاً موازی، امری دشوار است که خود می‌تواند باعث ایجاد خطا در نتایج شود.

۷- نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر، کاربرد روش موری سایه‌ای با جابه‌جایی فاز فیزیکی در به دست آوردن ضریب شدت تنش مود بازشوندگی شیار V شکل در نمونه‌های کششی از جنس پلی‌اورتان بررسی شده است. با مقایسه نتایج به دست آمده از روش تجربی با نتایج حاصل از حل المان محدود مطابقت خوبی مشاهده شد. مطابق نتایج به دست آمده با افزایش میزان بار وارد شده و یا با افزایش زاویه شیار که با افزایش میزان جابه‌جایی خارج از صفحه همراه است، میزان اختلاف بین روش‌های تجربی و عددی کاهش می‌یابد. با توجه به ماهیت روش موری و نتایج به دست آمده، می‌توان انتظار داشت که با افزایش چگالی شبکه مرجع و استفاده از ابزار دقیقی مانند میکرومترهای پیروزو برای جابه‌جایی فاز نتایج بسیار دقیق‌تری حاصل می‌شود.

۸- مراجع

- Williams, M.L. "On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack", J. Applied Mech., Trans. ASME, Vol.24, No.1, pp.109-114, 1957.

جدول (۵): ضرایب شدت تنش برای شیار 60° درجه.

زاویه شیار درجه	$K_I (Mpa.m^{(1-\lambda'_I)})$	درصد اختلاف
$P=30 \text{ Kgf}$		
Shadow moiré	۸/۰۶	۸/۵
FEM	۸/۸۱	
$P=40 \text{ Kgf}$		
Shadow moiré	۱۱/۰۲	۷/۲
FEM	۱۱/۸۷	
$P=50 \text{ Kgf}$		
Shadow moiré	۱۳/۹۷	۷
FEM	۱۵/۰۳	

در جدول ۶ که مربوط به مقادیر شدت تنش برای شیار 90° درجه است، کمترین میزان اختلاف‌ها مشاهده می‌شود. در این حالت کمترین میزان اختلاف بین همه حالت‌ها که مربوط به بار 50 kgf است به میزان $6/9$ درصد گزارش شده است.

جدول (۶): ضرایب شدت تنش برای شیار 90° درجه.

زاویه شیار درجه	$K_I (Mpa.m^{(1-\lambda'_I)})$	درصد اختلاف
$P=30 \text{ Kgf}$		
Shadow moiré	۸/۲۸	۸/۴
FEM	۹/۰۵	
$P=40 \text{ Kgf}$		
Shadow moiré	۱۱/۳۴	۷
FEM	۱۲/۲۰	
$P=50 \text{ Kgf}$		
Shadow moiré	۱۴/۳۶	۶/۹
FEM	۱۵/۴۳	

با توجه به این نکته که دقت روش موری سایه‌ای به شدت به چگالی خطوط شبکه مرجع وابستگی دارد، نتایج به دست آمده کاملاً قابل توجیه است. مطابق مرجع [۱۹]، دقت تئوری روش موری سایه‌ای با جابه‌جایی فاز فیزیکی برابر $1/60$ گام شبکه مرجع است. اما با توجه به اینکه در عمل رسیدن به این دقت غیر ممکن است، معمولاً دقت کمتری برای این روش در نظر گرفته می‌شود. در این تحقیق از شبکه مرجع با گام $0/02$ میلی‌متر

11. Meadows, D.M., Johnson W.O., and Allen, J.B. "Generation of Surface Contours by Moiré Patterns", *J. Applied Optics*, Vol. 9, No. 4, pp. 942-947, 1970.
12. Takasaki, H. "Moiré Topography", *J. Applied Optics*, Vol. 9, No. 6, pp. 467-1472, 1970.
13. Takasaki, H. "Moiré Topography", *J. Applied Optics*, Vol. 12, No. 4, pp. 845- 850, 1973.
14. Degrieck, J. "Application of Digital Phase-Shift Shadow Moiré to Micro Deformation Measurements of Curved", *J. Optics and Lasers in Eng.*, Vol. 36, No. 1, pp. 29-40, 2001.
15. Minvydas, R. "Procedure For the Construction of Digital Shadow Moire Images for the Analysis of Bending Vibrations of a Plate, Vol. 34, No. 1, pp. 25-28, 2005.
16. Seif, M.A. and Khashaba, U.A. "Measuring Delamination in Carbon/Epoxy Composites Using a Shadow Moire Laser Based Imaging Technique", *J. Composite Structures*, Vol. 79, No. 1, pp. 113-118, 2007.
17. Lim, J.H. and Rantam, M.M. "Deflection Measurement and Determination of Young's Modulus of Micro-Cantilever Using Phase-Shift Shadow Moiré Method", *J. Experimental Mech.*, Vol. 50, No. 7, pp. 1051-1060, 2010.
18. Ju, S.H. "Accuracy and Limit of a Least-Squares Method to Calculate 3D Notch SIFs", *Int. J. Fracture*, Vol. 148, No. 2, pp. 169-183, 2007.
19. Han, C. "Error Analysis of the Phase-Shifting Technique When Applied To Shadow Moiré ", *J. Applied Optics*, Vol. 45, No. 6, pp. 1124-1133, 2006.
2. Gross, B. and Mendelson, A. "Plane Elastostatic Analysis of V-Notched Plates", *Int. J. Fracture Mech.*, Vol. 8, No. 3, pp. 267-276, 1972.
3. Niu, Z. "A New Boundary Element Approach of Modeling Singular Stress Fields of Plane V-Notch Problems", *Int. J. Solids and Structures*, Vol.46, No. 16, pp. 2999-3008, 2009.
4. Yu, T. "Determination of Sharp V-Notch Stress Intensity Factors Using the Extended Finite Element Method", *J. Strain Analysis*, Vol. 47, No. 2, pp. 95-103, 2012.
5. Lazzarin, P. and Filippi, S. "A Generalised Stress Intensity Factor to be Applied to Rounded Shaped Notches", *Int. J. Solid and Structure*, Vol. 43, No. 9, pp. 2461-78, 2006.
6. Zappalorto, M., Lazzarin, P., and Berto, F. "Elastic Notch Stress Intensity Factors for Sharply V-Notched Rounded Bars under Torsion", *Eng. Fracture Mech.*, Vol. 76, No. 3, pp. 439-453, 2009.
7. Ghazavizadeh, A., Soltani, N., Hakimelahi, B. and Ghasemieh, M. "Determination of Opening Mode Stress Intensity Factor for Edge Cracks by Means of Digital Shearography Including Analytical and Numerical Simulations", *Mech. & Aero. Eng.*, Vol. 1, No. 3, pp. 97-106, 2006 (In Persian).
8. Ayatollahi, M.R. and Nejati, M. "Experimental Evaluation of Stress Field around the Sharp Notches Using Photoelasticity", *J. Materials and Design*, Vol.32, No.2, pp.561-569, 2011.
9. Ju, S.H. "Determining 2D Notch Sifs by the Image-Correlation Method", *J. Chinese Institute of Tech.*, Vol.34, No.4, 503-514, 2011.
10. Dally, J.W and Riley, W.F. "Experimental Stress Analysis", Mcgraw-Hill, Third Edition, 1991.