

# شناسایی مدهای تشدید حاصل از پراکندگی امواج فراصوتی از عیوب استوانه‌ای شکل در یک محیط جامد همسانگرد

محمد‌هادی ملاوردی<sup>۱</sup> و فرهنگ هنرور<sup>۲</sup>

دانشکده مهندسی مکانیک

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

(تاریخ دریافت: ۹۲/۰۶/۱۵؛ تاریخ پذیرش: ۹۲/۱۱/۱۶)

## چکیده

در مقاله حاضر معادلات پراکندگی امواج فراصوتی از عیوب استوانه‌ای شکل خالی و پر از سیال استخراج شده و بر اساس آن، طیف پراکندگی (تابع فرم) که رابطه فرکانس- دامنه را برای امواج پراکنده شده نشان می‌دهد، رسم می‌شود. هنگام برخورد امواج فراصوتی به یک هدف الاستیک، امواج سطحی در اطراف هدف ایجاد شده و در صورت تداخل هم‌فاز این امواج، تشدید صورت می‌گیرد. در تابع فرم مسئله مورد نظر، پدیده تشدید در فرکانس‌های مربوط به صورت افت انرژی ظاهر می‌شود. با توجه به اینکه تابع فرم شامل دو بخش زمینه و تشدید است، در این مقاله روش جدیدی برای جداسازی تشدیدها از دامنه زمینه حفره‌های استوانه‌ای ارائه خواهد شد و با انجام آزمایش‌های عملی بر روی یک استوانه آلومینیومی حاوی سوراخ سرتاسری، تشدیدها از طیف فرکانسی استوانه جدا شده و نتایج تئوری و عملی به دست آمده با یکدیگر مقایسه می‌شوند. نتایج به دست آمده حاکی از آن است که فرکانس‌های تشدید در روش تئوری و عملی با یکدیگر به خوبی انطباق دارند.

**واژه‌های کلیدی:** پراکندگی، امواج فراصوتی، عیوب استوانه‌ای، مد تشدید

## Theoretical and Experimental Identification of Resonance Modes of Cylindrical Cavities in an Isotropic Solid Medium

M.H. Mollaverdi and F. Honarvar

K.N. Toosi University of Technology

(Received: 06 September, 2013; Accepted: 05 February, 2014)

### ABSTRACT

In this paper, the equations of acoustic wave scattering from hollow or fluid-filled cylindrical cavities embedded in an isotropic elastic solid are derived and the normalized backscattered pressure spectrum (form function) is plotted. When the wave strikes the body of the cylindrical cavity, surface waves are formed on the periphery of the target. These surface waves circumnavigate the body of the cavity and at certain frequencies interfere constructively and build up to the circumferential resonance modes of the cylindrical cavity. The resonance modes appear as sudden pressure drops in the form function. We propose a new method for identification of resonance modes of the cylindrical cavity. Measurements conducted on a cylindrical cavity machined in an aluminum block indicates that the resonance modes identified in the analytical model completely agree with those observed in experimental measurements.

**Keyword:** Wave Scattering, Ultrasonic Wave, Cylindrical Cavity, Resonance Mode

۱- کارشناس ارشد

۲- استاد (نویسنده پاسخگو): honarvar@kntu.ac.ir

## ۱- مقدمه

کاربردهای فراوان مدل‌سازی ریاضی امواج فراصوتی بیانگر اهمیت قابل توجه آن می‌باشد. مهم‌ترین کاربرد مدل‌سازی امواج، کمک به آزمون‌های غیرمخرب فراصوتی است. در مواردی که نیاز به حساسیت و دقت بالا برای تعیین هندسه یا موقعیت مکانی عیوب است (سوراخ‌های بسیار ریز درون قطعات) و پروب‌های فراصوتی جوابگو نمی‌باشند (پروب‌های فرکانس بالا حساسیت خوبی دارند ولی استهلاک موج در آنها نیز زیاد است)، با استفاده از روابطی که در این مقاله مطرح خواهد شد، می‌توان فشار برگشتی امواج که توسط مدل ریاضی به دست آمده‌اند را به شکل اکوی دریافتی از دستگاه فراصوتی در آزمون غیرمخرب درآورد و به تفسیر نتایج آزمون‌های غیرمخرب فراصوتی کمک نمود.

امواج فراصوتی در اثر برخورد به مرز مشترک دو جسم علاوه بر بازتاب، شکست و تغییر حالت، ممکن است در اطراف مرز مشترک دچار پراکندگی نیز شوند. برای آشنایی بیشتر با مفهوم فیزیکی پراکندگی، به تحلیل رفتار موج در مرز مشترک (تخت یا مدور) بین دو جسم پرداخته خواهد شد. اگر مرز مشترک دو جسم تخت باشد، همواره قسمتی از امواجی که به مرز مشترک دو محیط تابیده می‌شوند، منعکس شده و قسمتی از آنها نیز به محیط دوم وارد می‌شوند. در صورت تابش مایل امواج، علاوه بر تولید امواج بازتابش، در محیط دوم امواج شکست نیز وجود خواهد داشت. اگر مرز مشترک دو جسم، مدور (نه لزوماً دایروی) باشد، هنگام تابش موج، علاوه بر امواج بازتابش و شکست، پراکندگی نیز رخ می‌دهد و امواج پیرامونی و خزشی حول مرز مشترک دو جسم تولید می‌شوند. در صورتی که جسم پراکنده کننده موج، الاستیک باشد امواج ایستا نیز در اثر تداخل امواج پیرامونی تولید خواهند شد. امواج پیرامونی که حول جسم مدور ایجاد می‌شوند دو دسته‌اند. دسته اول در اجسام صلب و الاستیک و دسته دوم فقط در اجسام الاستیک ایجاد می‌شوند. از دسته اول می‌توان به امواج فرانس<sup>۱</sup> اشاره کرد. از دسته دوم امواج، می‌توان امواج ریلی<sup>۲</sup>، شبه ریلی<sup>۳</sup>، ایوان نجوا<sup>۴</sup>، استونلی<sup>۵</sup>، شولتی- استونلی<sup>۶</sup> و هدایت‌شده محوری<sup>۷</sup> را نام برد که در تشدیدهای استوانه مؤثرند

و هر کدام در شرایط خاص ایجاد می‌شوند [۱]. بعد از برخورد موج صفحه‌ای به جسم الاستیک و ایجاد دسته دوم امواج پیرامونی، امواج در داخل و خارج جسم از دو طرف به سمت یکدیگر حرکت می‌کنند. این امواج در یک نقطه به یکدیگر خواهند رسید. اگر در این نقطه هم‌فاز باشند، تداخل سازنده ایجاد شده و در اثر این تداخل، امواج ایستا تولید می‌شوند. در این حالت انرژی سیستم بیشینه خواهد بود. ارتعاش این امواج ایستا به‌عنوان منبع ثانویه، علت افزایش و یا کاهش ناگهانی دامنه (تشدید) است.

مسئله پراکندگی موج، اولین بار برای اجسام نفوذناپذیر توسط ریلی [۲]، برای اجسام الاستیک توسط فاران<sup>۸</sup> [۳] و برای حفره‌های استوانه‌ای توسط گلزانوف<sup>۹</sup> مطرح شد [۴].

در نوشته‌های کلاسیک، پراکندگی امواج صوتی یا الکترومغناطیسی رابطه‌ای بین دامنه زمینه و تشدیدها وجود نداشت. جانسون<sup>۱۰</sup>، تروئل<sup>۱۱</sup> و کرافت<sup>۱۲</sup> [۵] مطالعاتی روی پراکندگی امواج الاستیک انجام دادند و متوجه شدند که تشدیدهای ایجاد شده در فرکانس‌های ویژه از دامنه زمینه قابل تفکیک هستند. رومان [۶] تئوری پراکندگی کوانتوم مکانیکی را مطرح و به جداسازی تشدیدها از دامنه زمینه تابع فرم پرداخت. فلکس<sup>۱۳</sup> [۶] با کمک تئوری پراکندگی کوانتوم مکانیکی، تئوری پراکندگی تشدید<sup>۱۴</sup> را به‌منظور تفکیک تشدیدها از دامنه زمینه مطرح کرد. ری و پارک<sup>۱۵</sup> [۷] نیز در سال ۲۰۰۴ اصلاحاتی در فرمولاسیون جداسازی تشدیدهای حفره‌های استوانه‌ای به‌روشن تئوری پراکندگی تشدید انجام دادند. اوبرال<sup>۱۶</sup> [۶] به بررسی پراکندگی امواج طولی درون ماتریس جامد پرداخت و به کمک مسئله پراکندگی هسته‌ای و به‌کار بردن تقریب خطی در معادله‌های مربوط، پراکندگی امواج طولی از حفره‌های استوانه‌ای درون جامد همسانگرد را تبیین و تشدیدهای حفره‌های استوانه‌ای را از توابع فرم آنها تفکیک کرد.

در مقاله حاضر، در ادامه کارهای انجام شده به رسم توابع فرم برای امواج تابشی طولی و عرضی و جداسازی تشدیدهای حفره‌های استوانه‌ای درون ماتریس جامد همسانگرد (فرمولاسیون قدیم و

8- Faran

9- Glazanov

10- Johnson

11- Truell

12- Kraft

13- Flax

14- Rst

15- Rhee &amp; Park

16- Uberall

1- Franz

2- Rayleigh

3- Pseudo-Rayleigh

4- Whispering Gallery

5- Stoneley

6- Scholte-Stoneley

7- Axially-Guided

بنابراین، توابع پتانسیل پراکنده شده در محیط جامد در حالت تابش عمودی موج طولی به صورت زیر می‌باشد [۹ و ۱۰].

$$\varphi_{sc} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \varepsilon_n(i)^n H_n(k_l r) \cos n\theta e^{i(k_z z - \omega t)}, \quad (4)$$

$$\psi_{z_w} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \varepsilon_n(i)^n H_n(k_l r) \cos n\theta e^{i(k_z z - \omega t)}, \quad (5)$$

$$k_l = ((\frac{\omega}{c_l})^2 - k_z^2)^{1/2}, \quad k_t = ((\frac{\omega}{c_t})^2 - k_z^2)^{1/2}, \quad (6)$$

که در معادلات بالا،  $H_n$  تابع هنکل<sup>۴</sup> و  $k_t$  عدد موج عرضی است. در حالت تابش عمودی، بردار موج در راستای محور استوانه مؤلفه‌ای نخواهد داشت ( $k_z = 0$ ). در حفره داخلی (هوا یا سیال) تنها موج طولی قابلیت انتشار دارد و موج متناظر با پتانسیل برداری پراکنده و منتشر نخواهد شد، بنابراین پتانسیل اسکالر داخل حفره از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\varphi_f = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \varepsilon_n(i)^n j_n(k_f r) \cos n\theta, \quad (7)$$

$$k_f = ((\frac{\omega}{c_f})^2 - k_z^2)^{1/2}. \quad (8)$$

بردار موج طولی و سرعت آن داخل حفره استوانه‌ای به ترتیب با  $k_f$  و  $c_f$  نشان داده شده‌اند. ضرایب مجهول  $A_n, B_n, C_n$  از شرایط مرزی زیر که بین حفره استوانه‌ای و جامد برقرار هستند، به دست می‌آیند [۱۱]. بدیهی است اگر موج تابش، موج طولی باشد تابع پتانسیل  $\phi$  در محیط پیرامونی (جامد الاستیک) برابر مجموع توابع پتانسیل امواج تابش و پراکنده شده در محیط پیرامونی می‌باشد.

$$\sigma_{rr_{solid}} = -\varphi, \quad u_{r_{solid}} = u_r, \quad \sigma_{r\theta_{solid}} = 0, \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}$$

$$D_{11} = x_l H_n^{(1)}(x_l)$$

$$D_{12} = n H_n^{(1)}(x_l)$$

$$D_{13} = x_f J_n'(x_f)$$

$$D_{21} = [n(n+1) - \frac{1}{2} x_l^2] H_n^{(1)}(x_l) - x_l H_{n-1}^{(1)}(x_l) \quad (10)$$

$$D_{22} = n x_l H_{n-1}^{(1)}(x_l) - n(n+1) H_n^{(1)}(x_l)$$

$$D_{23} = \frac{\rho_f}{2\rho} J_n'(x_f)$$

$$D_{31} = n(n+1) H_n^{(1)}(x_l) - n x_l H_{n-1}^{(1)}(x_l)$$

$$D_{32} = [-n(n+1) + \frac{1}{2} x_l^2] H_n^{(1)}(x_l) + x_l H_{n-1}^{(1)}(x_l)$$

$$D_{33} = 0$$

جدید تئوری پراکندگی تشدید) بدون استفاده از تقریب خطی، پرداخته می‌شود. در روش جدید ارائه شده از تقریب خطی استفاده نمی‌شود و برای نخستین بار مؤلفه‌های ماتریس پراکندگی دامنه زمینه به روشی جدید بیان می‌شوند. همچنین برای اولین بار از روش آزمایشگاهی شناسایی و تفکیک تشدیدها<sup>۱</sup> برای جداسازی تشدیدهای حفره‌های استوانه‌ای استفاده می‌شود. در این روش اکوهای دریافتی (فشار- زمان) از پروب فراصوتی با حذف تشدیدهای پروب و استفاده از تبدیل فوریه به طیف فرکانسی (فشار- فرکانس) تبدیل شده و با بی‌بعد کردن طیف فرکانسی نتایج با تشدیدهای جدا شده از تابع فرم با روش تئوری مقایسه می‌شوند.

## ۲- مدل ریاضی پراکندگی

به علت عدم انتشار موج عرضی در محیط سیال، در پراکندگی امواج از اهداف غوطه‌ور در سیال نیاز به مدلی برای تفکیک جابه‌جایی نیست، اما در محیط جامد می‌بایست جابه‌جایی موج طولی و عرضی از یکدیگر جدا شود. معمولاً برای جداسازی جابه‌جایی در مواد همسانگرد از مدل جداسازی هلمهولتز<sup>۲</sup> که جابه‌جایی را به دو میدان چرخشی (جابه‌جایی موج طولی) و غیر چرخشی (جابه‌جایی موج عرضی) تقسیم می‌کند، استفاده می‌شود [۸].

$$u = \nabla \varphi + \nabla \times \psi. \quad (1)$$

در معادله بالا،  $\phi$  پتانسیل اسکالر،  $\psi$  پتانسیل برداری، ( $\nabla$ ) اپراتور گرادین، ( $\nabla \times$ ) اپراتور کرل،  $\nabla \phi$  جابه‌جایی موج طولی و  $\nabla \times \psi$  جابه‌جایی موج برشی می‌باشند. در صورتی که موج تابش، موج طولی باشد، پتانسیل اسکالر درون ماتریس جامد از معادله زیر به دست می‌آید:

$$\varphi_i = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n(i)^n J_n(k_l r) \cos n\theta, \quad (2)$$

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 2 & n \neq 0 \end{cases}, \quad (3)$$

که در آن، زاویه موج پراکنده شده با  $\theta$  نشان داده شده است.  $J_n$  تابع بسل<sup>۳</sup>،  $\varepsilon_n$  تابع نیومن،  $\tau$  مختصات نقطه مورد نظر درون جامد و  $k_l$  بردار موج طولی است که از تقسیم فرکانس زاویه‌ای  $\omega$  به سرعت موج طولی، به دست می‌آید.

اگر موج ورودی، عمود بر محور عیب استوانه‌ای (محور  $z$ ) تابیده شود، مؤلفه‌های  $\psi_r, \psi_\theta$  پراکنده شده در محیط پیرامونی صفر خواهند بود و فقط توابع پتانسیل  $\phi, \psi_z$  پراکنده می‌شوند.

1- Miir  
2-Helmholtz  
3- Bessel Function

4- Hankel Function

پراکنده شده عرضی " به ترتیب از رابطه‌های (۲۱-۱۸) به دست می‌آید:

$$k_\eta = k_l, Q_n = A_n \rightarrow f_\infty^{ll}(k_l a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(i\pi k_l a)^2} \varepsilon_n A_n \cos n\theta \quad (18)$$

$$k_\eta = k_l, Q_n = B_n \rightarrow f_\infty^{lt}(k_l a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(i\pi k_l a)^2} \varepsilon_n B_n \quad (19)$$

$$k_\eta = k_l, Q_n = D_n \rightarrow f_\infty^{tl}(k_l a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(i\pi k_l a)^2} \varepsilon_n D_n \quad (20)$$

$$k_\eta = k_l, Q_n = G_n \rightarrow f_\infty^{tt}(k_l a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(i\pi k_l a)^2} \varepsilon_n G_n \cos n\theta \quad (21)$$

در برخی منابع، مؤلفه‌های ماتریس پراکنده‌گی به جای ضرایب مجهول در فرمولاسیون توابع فرم به کار می‌روند. در این حالت ماتریس پراکنده‌گی به صورت زیر تعریف می‌شود [۷]:

$$S_n = \begin{bmatrix} S_n^{ll} & S_n^{lt} \\ S_n^{tl} & S_n^{tt} \end{bmatrix} \quad (22)$$

ماتریس پراکنده‌گی برای حفره خالی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S_n^{(0)} = \begin{bmatrix} S_n^{(0)ll} & S_n^{(0)lt} \\ S_n^{(0)tl} & S_n^{(0)tt} \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$S_n^{ll} = 1 + 2A_n \quad S_n^{(0)ll} = 1 + 2A_n^{(0)}$$

$$S_n^{lt} = 2B_n \quad S_n^{(0)lt} = 2B_n^{(0)}$$

$$S_n^{tl} = -2D_n \quad S_n^{(0)tl} = -2D_n^{(0)}$$

$$S_n^{tt} = 1 + 2G_n \quad S_n^{(0)tt} = 1 + 2G_n^{(0)}$$

بنابراین، توابع فرم به صورت زیر نیز قابل نمایش هستند:

$$f_\infty^{ll}(k_l a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(i\pi k_l a)^2} \varepsilon_n (S_n^{ll} - 1) \cos n\theta, \quad (24)$$

$$f_\infty^{lt}(k_l a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(i\pi k_l a)^2} \varepsilon_n S_n^{lt}, \quad (25)$$

$$f_\infty^{tl}(k_l a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(i\pi k_l a)^2} \varepsilon_n S_n^{tl}, \quad (26)$$

$$f_\infty^{tt}(k_l a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(i\pi k_l a)^2} \varepsilon_n (S_n^{tt} - 1). \quad (27)$$

#### ۴- تفکیک تشدیدها از دامنه زمینه توابع فرم

یکی از روش‌های جداسازی تشدیدها از دامنه زمینه توابع فرم، روش تئوری پراکنده‌گی کوانتوم مکانیکی است. ماتریس پراکنده‌گی دامنه زمینه ( $S_n^{(0)}$ ) و ماتریس پراکنده‌گی تشدیدها ( $S_n^*$ ) برای حالات "موج تابش طولی - موج پراکنده شده طولی" و "موج

$$E_1 = -x_l J_n'(x_l)$$

$$E_2 = [-n(n+1) + \frac{1}{2}x_l^2] J_n(x_l) + x_l J_{n-1}(x_l)$$

$$E_3 = -n(n+1) J_n(x_l) + n x_l J_{n-1}(x_l).$$

در صورتی که موج تابش، موج عرضی باشد به طریق مشابه توابع پتانسیل تابش و پراکنده شده درون حفره و محیط پیرامونی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\psi_i = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (i)^n J_n(k_l r) \cos n\theta, \quad (11)$$

$$\varphi_{sc} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \varepsilon_n (i)^n H_n(k_l r) \sin n\theta, \quad (12)$$

$$\psi_{sc} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n \varepsilon_n (i)^n H_n(k_l r) \cos n\theta, \quad (13)$$

$$\varphi_f = \sum_{n=0}^{\infty} L_n \varepsilon_n (i)^n J_n(k_f r) \sin n\theta, \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_n \\ G_n \\ L_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$M_{11} = D_{11} \quad M_{12} = -D_{12} \quad M_{13} = D_{13}$$

$$M_{21} = D_{21} \quad M_{22} = -D_{22} \quad M_{23} = D_{23}$$

$$M_{31} = -D_{31} \quad M_{32} = D_{32} \quad M_{33} = D_{32}$$

$$Q_i = -\text{real}(M_{i2}).$$

#### ۳- توابع فرم

توابع فرم، فشار برگشتی امواج را برحسب فرکانس نشان می‌دهند. برای یافتن تابع فرم نیاز به استفاده از تابع هنکل می‌باشد. تابع هنکل را در فواصل دور از شعاع حفره استوانه‌ای به صورت رابطه (۱۶) نوشت:

$$H_n^1(kr).i^n = \left(\frac{2}{i\pi kr}\right)^{\frac{1}{2}} \exp(ikr) \quad (16)$$

بنابراین توابع پتانسیل پراکنده شده در فواصل دور از شعاع حفره استوانه‌ای (توابع فرم) به صورت زیر نشان داده می‌شوند:

$$f_\infty(k_\eta a) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(k_\eta a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(i\pi ka)^2} \varepsilon_n Q_n, \quad (17)$$

که در آن،  $Q_n$  ضریب مجهولی است که برابر ضریب مجهول تابع پتانسیل پراکنده شده خواهد بود.

تابع فرم حالت‌های "موج تابش طولی - موج پراکنده شده طولی"، "موج تابش طولی - موج پراکنده شده عرضی"، "موج تابش عرضی - موج پراکنده شده طولی" و "موج تابش عرضی - موج

آورده شده است:

$$(۳۸)$$

$$S_n^{*ll} - 1 = S_n^{ll} - S_n^{(0)ll} - 1 = 2A_n - S_n^{(0)ll},$$

$$(۳۹)$$

$$S_n^{*lt} = S_n^{lt} - S_n^{(0)lt} = 2B_n - S_n^{(0)lt},$$

$$(۴۰)$$

$$S_n^{*tl} = S_n^{tl} - S_n^{(0)tl} = -2D_n - S_n^{(0)tl},$$

$$(۴۱)$$

$$S_n^{*tt} - 1 = S_n^{tt} - S_n^{(0)tt} - 1 = 2G_n - S_n^{(0)tt}.$$

اصلاحاتی که ری و پارک [۷] در روش تئوری پراکندگی تشدید اعمال کردند سبب بهبود نتایج در رسم دیاگرام‌های فازی شد. فرمولاسیونی که ری و پارک ارائه دادند، مؤلفه‌های ماتریس پراکندگی تشدید به جای تفریق ماتریس پراکندگی تابع فرم و ماتریس پراکندگی دامنه زمینه از تقسیم آن‌ها مطابق زیر به دست می‌آیند:

$$S_n^{*ll} - 1 = \frac{S_n^{ll}}{S_n^{(0)ll}} - 1 = \frac{2(A_n - A_n^{(0)})}{2A_n^{(0)} + 1}, \quad (۴۲)$$

$$S_n^{*lt} = \frac{S_n^{lt}}{S_n^{(0)lt}} - 1 = \frac{2(B_n - B_n^{(0)})}{B_n^{(0)}}, \quad (۴۳)$$

$$S_n^{*tl} = \frac{S_n^{tl}}{S_n^{(0)tl}} - 1 = \frac{2(C_n - C_n^{(0)})}{C_n^{(0)}}, \quad (۴۴)$$

$$S_n^{*tt} - 1 = \frac{S_n^{tt}}{S_n^{(0)tt}} - 1 = \frac{2(D_n - D_n^{(0)})}{2D_n^{(0)} + 1}. \quad (۴۵)$$

### ۵- روش جدید در جداسازی تشدیدها

اگر ب اساس معادلات مطرح شده، دامنه زمینه حفره استوانه‌ای حاوی هر سیالی درون آلومینیوم و تابع فرم حفره استوانه‌ای خالی درون آلومینیوم رسم شوند، نتایج کاملاً یکسان خواهد بود (با حذف رزونانس‌های شکل ۲ به شکل ۱ رسیده می‌شود). بنابراین، در روش جدید می‌توان از ضرایبی که برای رسم تابع فرم حفره استوانه‌ای خالی بر اساس معادله (۲۳) استفاده شد، به جای ماتریس پراکندگی دامنه زمینه حفره پر از سیال در روش تئوری پراکندگی مکانیکی، استفاده کرد:

$$S_n^{*ll} - 1 = S_n^{ll} - S_n^{(0)ll} = 2(A_n - A_n^{(0)}), \quad (۴۶)$$

$$S_n^{*lt} = S_n^{lt} - S_n^{(0)lt} = 2(B_n - B_n^{(0)}), \quad (۴۷)$$

$$S_n^{*tl} = S_n^{tl} - S_n^{(0)tl} = -2(D_n - D_n^{(0)}), \quad (۴۸)$$

$$S_n^{*tt} - 1 = S_n^{tt} - S_n^{(0)tt} = 2(G_n - G_n^{(0)}). \quad (۴۹)$$

از این روش در فرمولاسیون جدید تئوری پراکندگی تشدید نیز می‌توان استفاده کرد و مؤلفه‌های ماتریس پراکندگی تشدید را از معادله‌های زیر به دست آورد:

تابش طولی - موج پراکنده شده عرضی "به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$S_n^{(0)ll} = (G_2 D_{32} - D_{22} G_3) / (D_{21} D_{32} - D_{22} D_{31}), \quad (۲۸)$$

$$S_n^{(0)lt} = (E_3 D_{21} - D_{31} E_2) / (D_{21} D_{32} - D_{22} D_{31}), \quad (۲۹)$$

$$G_i = D_{i1} + 2E_i, \quad (۳۰)$$

$$S_n^{*ll} - 1 = \frac{z_2 - z_1}{z_1 - F_n(x_l)}, \quad (۳۱)$$

$$S_n^{*lt} = \frac{\bar{z}_2 - F_n(x_l)}{z_1 - F_n(x_l)}, \quad (۳۲)$$

$$z_1 = -\frac{1}{2} x_l^2 (D_{32} D_{11} - D_{31} D_{12}) / (D_{21} D_{32} - D_{22} D_{31}), \quad (۳۳)$$

$$z_2 = -\frac{1}{2} x_l^2 (D_{32} G_1 - G_3 D_{12}) / (G_2 D_{32} - D_{22} G_3), \quad (۳۴)$$

$$\bar{z}_2 = -\frac{1}{2} x_l^2 (D_{11} E_3 - E_1 D_{31}) / (E_3 D_{21} - D_{31} E_2), \quad (۳۵)$$

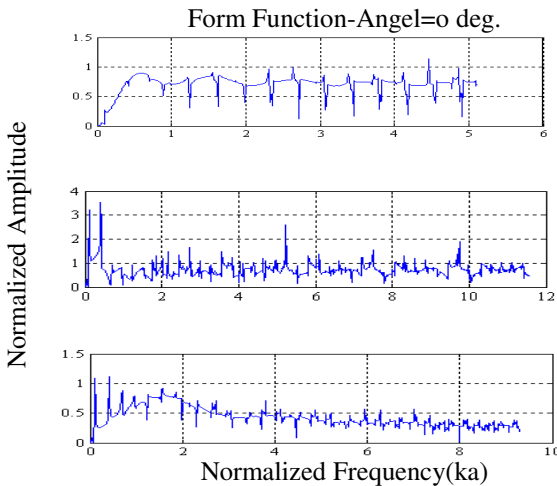
$$F_n(x_l) = \frac{\rho}{\rho_f} [x_f \frac{J_n'(x_f)}{J_n(x_f)}]. \quad (۳۶)$$

در این روش در معادلات از تقریب خطی استفاده می‌شود.  $z_1, z_2, \bar{z}_2$  امپدانس‌های اکوستوالاستیک می‌باشند که به خواص الاستیک، شرایط تابش و شرایط مرزی بستگی دارند و همواره به صورت اعداد مختلط هستند [۷].  $F_n(x_l)$ ، امپدانس مدال مکانیکی سیال داخل حفره است.

در فرکانس‌های تشدید ( $x_l = x_l^*$ )، امپدانس مدال مکانیکی با قسمت حقیقی امپدانس‌های اکوستوالاستیک ( $\Delta_n$ ) برابر خواهد بود و تقریب خطی که در این روش استفاده می‌شود به صورت زیر خواهد بود:

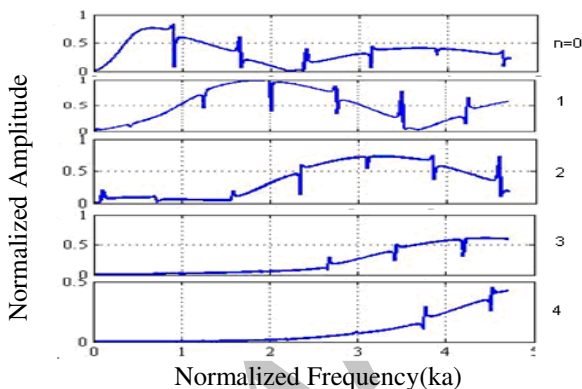
$$F_n(x_l) - \Delta_n(x_l) \cong \beta_n(x_l - x_l^*). \quad (۳۷)$$

یکی دیگر از روش‌های جداسازی تشدیدها از دامنه زمینه توابع فرم، تئوری پراکندگی تشدید است. در این روش مؤلفه‌های ماتریس پراکندگی و دامنه زمینه، همانند روش تئوری پراکندگی کوانتوم مکانیکی مطابق معادله‌های (۳۱ و ۳۲) به دست می‌آید. ولی مؤلفه‌های ماتریس پراکندگی تشدید در این روش، به طور مستقیم از کم کردن مؤلفه‌های ماتریس دامنه زمینه از مؤلفه‌های ماتریس پراکندگی تابع فرم به دست می‌آیند. مؤلفه‌های ماتریس پراکندگی تابع معادله‌های (۲۸ و ۲۹) و مؤلفه‌های ماتریس پراکندگی تابع فرم از معادله‌های (۲۲ و ۲۳) به دست می‌آیند. مؤلفه‌های ماتریس پراکندگی تشدید در حالت‌های موج تابش طولی - موج پراکنده شده طولی، موج تابش طولی - موج پراکنده شده عرضی، موج تابش عرضی - موج پراکنده شده طولی و موج تابش عرضی - موج پراکنده شده عرضی در زیر

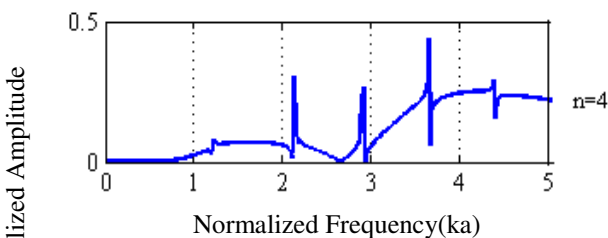


شکل (۲): تابع فرم حفره استوانه‌ای پر از آب درون آلومینیوم، (الف) موج تابش طولی، موج پراکنده شده طولی، (ب) موج تابش طولی، موج پراکنده شده عرضی و (ج) موج تابش عرضی، موج پراکنده شده عرضی.

تابع فرم حالت موج تابش طولی، موج پراکنده شده عرضی با تابع فرم حالت موج تابش عرضی، موج پراکنده شده طولی یکسان می‌باشد.



شکل (۳): تابع فرم (موج تابش طولی - موج پراکنده شده طولی) حفره استوانه‌ای پر از آب درون آلومینیوم در شماره مدها ۱، ۲، ۳ و ۴.



شکل (۴): تابع فرم (موج تابش طولی - موج پراکنده شده عرضی) حفره استوانه‌ای پر از آب درون آلومینیوم در شماره مد ۴.

$$S_n^{*ll} - 1 = \frac{S_n^{ll}}{S_n^{(0)ll}} - 1 = \frac{2(A_n - A_n^{(0)})}{2A_n^{(0)} + 1}, \quad (50)$$

$$S_n^{*lr} = \frac{S_n^{lr}}{S_n^{(0)lr}} - 1 = \frac{2(B_n - B_n^{(0)})}{B_n^{(0)}}, \quad (51)$$

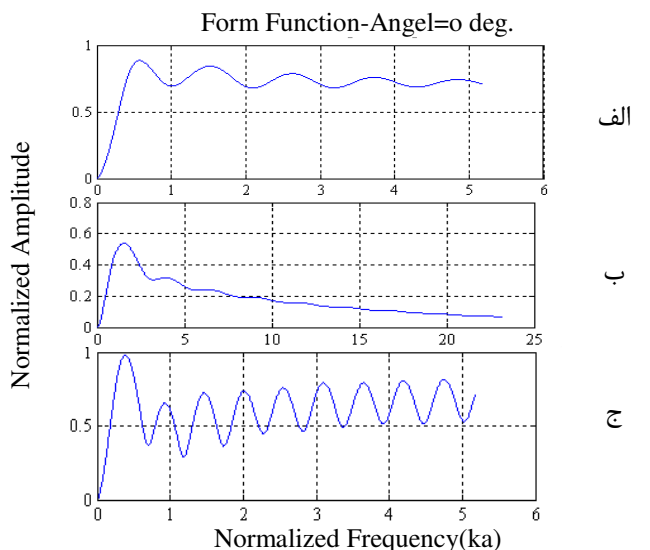
$$S_n^{*rl} = \frac{S_n^{rl}}{S_n^{(0)rl}} - 1 = \frac{2(C_n - C_n^{(0)})}{C_n^{(0)}}, \quad (52)$$

$$S_n^{*rr} - 1 = \frac{S_n^{rr}}{S_n^{(0)rr}} - 1 = \frac{2(D_n - D_n^{(0)})}{2D_n^{(0)} + 1}. \quad (53)$$

نتایج به دست آمده از روش جدید ارائه شده در این بخش کاملاً مطابق نتایج به دست آمده از روش‌های تئوری پراکندگی مکانیکی و تئوری پراکندگی تشدید (فرمولاسیون قدیم و جدید) می‌باشد.

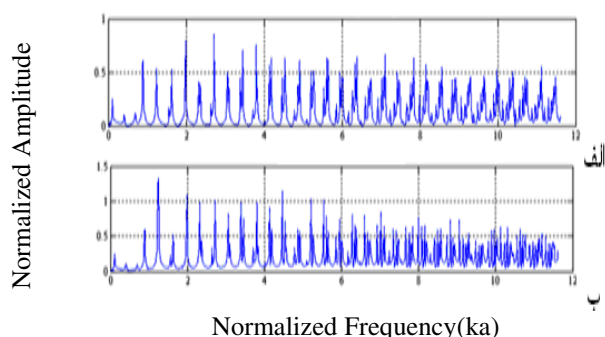
### ۶- نتایج عددی

توابع فرم حفره‌های استوانه‌ای خالی (هوا) و حاوی آب در آلومینیوم در حالت تابش عمود بر حفره استوانه‌ای براساس روابطی که به آنها اشاره شد محاسبه و در شکل‌های ۱ و ۲ رسم شده‌اند. مدهای مختلف توابع فرم در حالت‌های موج تابش طولی - موج پراکنده شده طولی، موج تابش طولی - موج پراکنده شده عرضی، موج تابش عرضی - موج پراکنده شده طولی و موج تابش عرضی - موج پراکنده شده عرضی نیز به ترتیب در شکل‌های ۳، ۴، ۵ و ۶ رسم شده‌اند. پارامترهای فیزیکی آب، هوا و آلومینیوم در جدول ۱ آورده شده است.

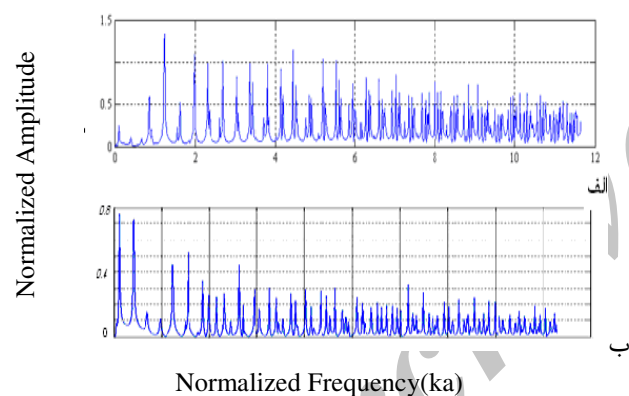


شکل (۱): تابع فرم حفره استوانه‌ای خالی (هوا) درون آلومینیوم، (الف) موج تابش طولی، موج پراکنده شده طولی، (ب) موج تابش طولی، موج پراکنده شده عرضی، (ج) موج تابش عرضی، موج پراکنده شده عرضی.

حالت‌های موج تابش طولی، موج پراکنده شده طولی و موج تابش طولی، موج پراکنده شده عرضی انجام شده است.



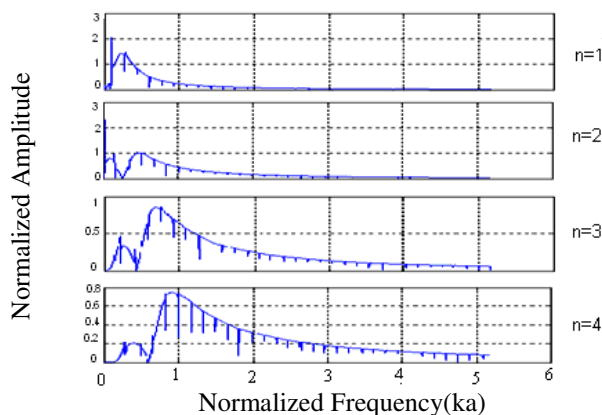
شکل (۷): تشدیدهای حفره استوانه‌ای پر از آب درون آلومینیوم در حالت موج تابش طولی - موج پراکنده شده طولی (دامنه زمينه، تابع فرم هوا در نظر گرفته شده است)، الف) فرمولاسیون قدیم RST و ب) فرمولاسیون جدید RST.



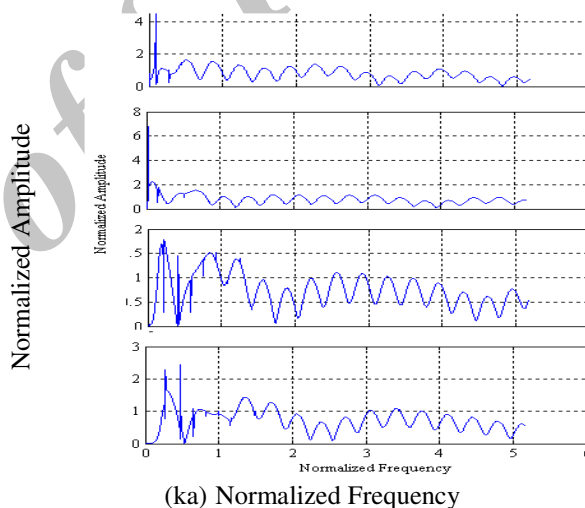
شکل (۸): تشدیدهای حفره استوانه‌ای پر از آب درون آلومینیوم با فرمولاسیون جدید RST الف) حالت موج تابش طولی - موج پراکنده شده طولی و ب) حالت موج تابش طولی - موج پراکنده شده عرضی.

تشدیدهای حفره استوانه‌ای پر از آب در مدهای مختلف برای حالت‌های "موج تابش طولی، موج پراکنده شده عرضی" و "موج تابش طولی، موج پراکنده شده عرضی" به ترتیب در شکل‌های ۹ و ۱۰ آورده شده‌اند.

شکل‌های ۱۱ و ۱۲ تشدیدهای حفره استوانه‌ای پر از آب برای حالت‌های "موج تابش عرضی، موج پراکنده شده عرضی" و "موج تابش عرضی، موج پراکنده شده عرضی" را نشان می‌دهند. در جداسازی تشدیدها از روش جدید استفاده شده است بدین معنی



شکل (۵): تابع فرم (موج تابش عرضی - موج پراکنده شده طولی) حفره استوانه‌ای پر از آب درون آلومینیوم در شماره مدهای ۱، ۲، ۳ و ۴

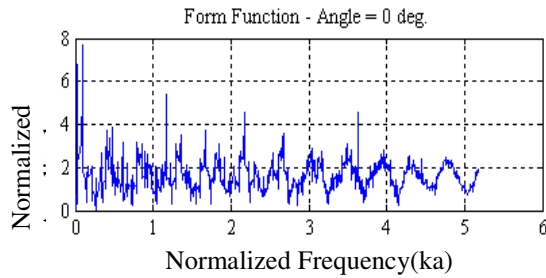


شکل (۶): تابع فرم (موج تابش عرضی - موج پراکنده شده عرضی) حفره استوانه‌ای پر از آب درون آلومینیوم در شماره مدهای ۱، ۲، ۳ و ۴

جدول (۱): پارامترهای فیزیکی آب، هوا و آلومینیوم.

$c_{air} = 330 \left(\frac{m}{s}\right)$	$\rho_{air} = 1 \left(\frac{kg}{m^3}\right)$
$c_{water} = 1480 \left(\frac{m}{s}\right)$	$\rho_{water} = 1000 \left(\frac{kg}{m^3}\right)$
$c_{t\ aluminum} = 3070 \left(\frac{m}{s}\right)$	$\rho_{aluminum} = 2800 \left(\frac{kg}{m^3}\right)$
$c_{l\ aluminum} = 6370 \left(\frac{m}{s}\right)$	

در شکل ۷ مقایسه‌ای بین روش قدیم و جدید RST و در شکل ۸ مقایسه‌ای بین تشدیدهای حفره استوانه‌ای پر از آب در

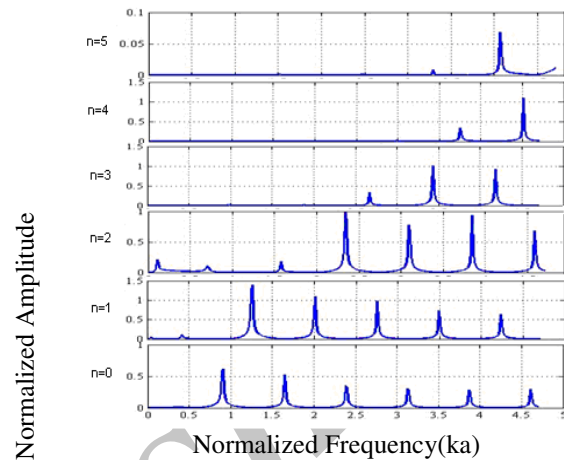


شکل (۱۲): تشدیدهای حفره استوانه‌ای پر از آب درون آلومینیوم در حالت موج تابش عرضی - موج پراکنده شده عرضی با فرمولاسیون جدید RST

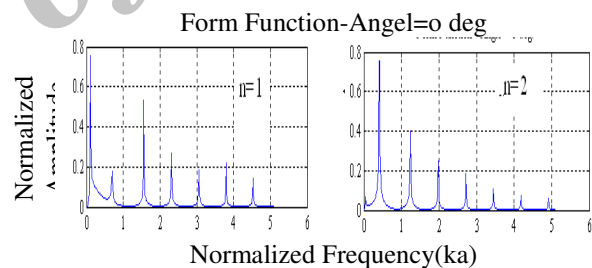
### ۷- نتایج آزمایشگاهی

در این مقاله برای به دست آوردن طیف فرکانسی حفره توخالی و حفره پر از آب، یک بلوک آلومینیومی (T6-AL 6061) به ابعاد  $100 \times 100 \times 100$  mm که در وسط آن سوراخی به قطر  $\phi = 1$  mm (عیب استوانه‌ای) ایجاد شده ساخته شده است. همچنین از یک پروب فراصوتی نرمال تماسی دارای فرکانس 10 MHz برای انجام آزمایش‌ها استفاده شده است. علت انتخاب قطر 1 mm برای سوراخ وسط بلوک، تناظر یک به یک بین محور x نمودار طیف فرکانسی (فرکانس) در روش MIIR و محور x نمودار تشدیدهای تابع فرم (عدد موج) در روش RST برای مقایسه دو روش می‌باشد. در این بخش علاوه بر تشریح چگونگی جداسازی تشدیدها به روش MIIR، نتایج حاصل از این روش را با نتایج تئوری بخش‌های قبلی مقایسه می‌شود. این روش، آزمایشگاهی می‌باشد که تشدیدهای طیف فرکانسی اجسام را بررسی می‌کند و اولین بار توسط دانشمندان فرانسوی به کار گرفته شد [۱۲]. یکی از شیوه‌های این روش، روش پالس کوتاه است که در این مقاله از آن استفاده می‌شود [۱۳]. اساس روش MIIR، بررسی و جداسازی تشدیدهای طیف فرکانسی امواج برگشتی از عیوب می‌باشد. اکوی دریافتی از قطعه (عیب) توسط دستگاه فراصوتی، یک نمودار دامنه- زمان است که با استفاده از تبدیل فوریه (FFT) در نرم‌افزار MATLAB به نمودار دامنه- فرکانس تبدیل می‌شود. طیف فرکانسی به دست آمده هم شامل تشدیدهای قطعه (عیب) و هم شامل تشدیدهای خود پروب می‌باشد. برای حذف تشدیدهای پروب از تشدیدهای قطعه مورد نظر می‌بایست طیف فرکانسی قطعه مرجع که در محدوده طیف فرکانسی پروب هیچ تشدید در آن رخ نمی‌دهد از طیف فرکانسی قطعه مورد نظر حذف شود.

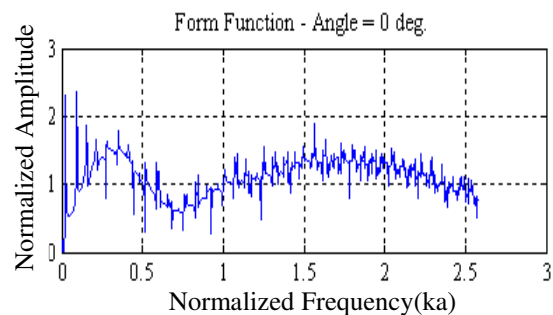
که در همه شکل‌های ترسیمی، تابع فرم حفره خالی به عنوان دامنه زمینه حفره پر از سیال در نظر گرفته شده است.



شکل (۹): تشدیدهای مدال (موج تابش طولی) - موج پراکنده شده طولی (حفره استوانه‌ای پر از آب درون آلومینیوم در شماره مدهای ۱، ۲، ۳ و ۴) با فرمولاسیون جدید RST.

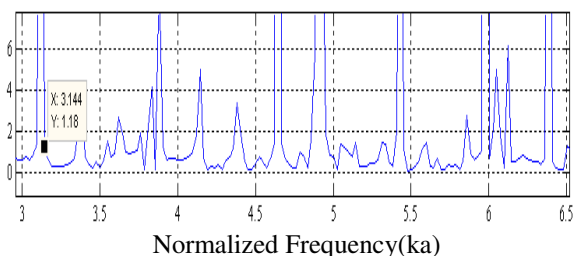


شکل (۱۰): تشدیدهای حفره استوانه‌ای پر از آب درون آلومینیوم در حالت موج تابش طولی - موج پراکنده شده عرضی با فرمولاسیون جدید RST



شکل (۱۱): تشدیدهای حفره استوانه‌ای پر از آب درون آلومینیوم در حالت موج تابش عرضی - موج پراکنده شده طولی با فرمولاسیون جدید RST.



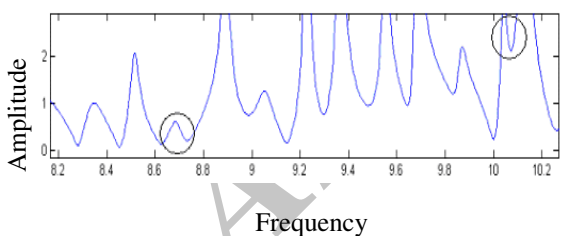


شکل (۱۴): تقسیم تابع فرم حفره خالی به تابع فرم حفره پر از آب درون آلومینیوم (روش تئوری).

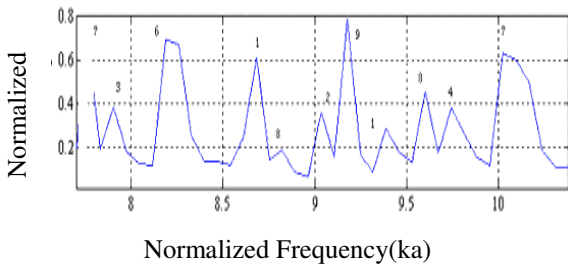
همان‌طور که ملاحظه می‌شود دقت روش تئوری در تشخیص تشدیدهای حاصل از عیوب به مراتب بیشتر از روش آزمایشگاهی است. به‌طریق دیگر با استفاده از معادله زیر نیز می‌توان تشدیدهای حفره پر از آب را به روش آزمایشگاهی به‌دست آورد و با تشدیدهای جدا شده به روش تئوری RST مربوط به حالت موج تابش طولی - موج پراکنده شده طولی، مقایسه کرد:

$$f_{\infty}^* = \frac{S_w}{S_w'} f_{\infty}' \left( \frac{a'r'}{ar'} \right)^{1/2} e^{ik(r' \cos \alpha' - r \cos \alpha)}, \quad (56)$$

که در آن،  $f_{\infty}^*$  تشدیدهای حفره پر از آب به روش آزمایشگاهی می‌باشد. در شکل‌های ۱۵ و ۱۶ تشدیدهای حفره پر از آب درون آلومینیوم به‌دست آورده شده توسط روش‌های آزمایشگاهی و تئوری آورده شده است.



شکل (۱۵): تشدیدهای حفره پر از آب درون آلومینیوم به‌دست آمده به روش آزمایشگاهی.



شکل (۱۶): تشدیدهای حفره پر از آب درون آلومینیوم به‌دست آمده به روش تئوری RST.

طیف فرکانسی قطعه مرجع نیز از تبدیل فوریه اکوی آن به‌دست می‌آید و اگر تشدید در آن وجود داشته باشد فقط ناشی از پروب می‌باشد. همان‌طور که گفته شد در تابع فرم حفره‌های استوانه‌ای توخالی هیچ‌گونه تشدید وجود ندارد بنابراین می‌توان حفره‌های خالی به‌عنوان جسم مرجع برای حفره‌های پر از سیال استفاده کرد. از آن جایی که جداسازی طیف فرکانسی حفره‌های استوانه‌ای خالی و پر از سیال با تقسیم آن‌ها انجام می‌شود و تشدیدهای توابع فرم در فرمولاسیون جدید تئوری پراکندگی تشدید نیز به‌همین طریق به‌دست می‌آیند، نتایج روش آزمایشگاهی شناسایی و تفکیک تشدیدها قابل مقایسه با نتایج جداسازی تئوری به روش تئوری پراکندگی تشدید می‌باشد. معادله زیر بیانگر این مسئله است [۱۴].

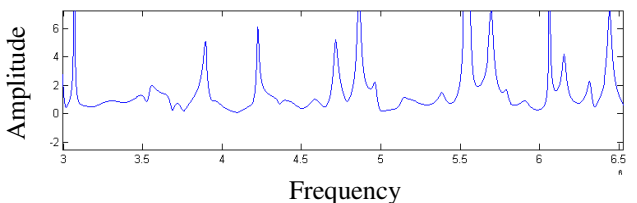
$$\left| \frac{f_{\infty}'}{f_{\infty}} \right| = \left| \frac{S_w'}{S_w} \right| \left( \frac{a'r'}{ar'} \right)^{1/2} e^{ik(r' \cos \alpha' - r \cos \alpha)}, \quad (54)$$

که در آن،  $f_{\infty}'$  و  $f_{\infty}$  توابع فرم حفره پر از آب و حفره خالی،  $S_w'$  و  $S_w$  طیف‌های فرکانسی حفره پر از آب و حفره خالی،  $a'$  و  $a$  شعاع‌های حفره پر از آب و حفره خالی،  $r'$  و  $r$  مختصات پروب نسبت به حفره پر از آب و حفره خالی و  $\alpha'$  و  $\alpha$  زوایای موج تابش نسبت به حفره پر از آب و حفره خالی می‌باشند.

به لحاظ یکسان بودن شرایط آزمایش در تابش موج به حفره خالی و حفره پر از آب (شعاع حفره، موقعیت پروب نسبت به حفره و زاویه تابش موج) معادله (۵۰) به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$\left| \frac{f_{\infty}'}{f_{\infty}} \right| = \left| \frac{S_w'}{S_w} \right|. \quad (55)$$

از تقسیم طیف فرکانسی حفره خالی و پر از آب شکل ۱۳ و از تقسیم توابع فرم حفره خالی و پر از آب در حالت موج تابش طولی - موج پراکنده شده طولی شکل ۱۴ حاصل می‌شود. توابع فرم از روش تئوری و طیف‌های فرکانسی از روش آزمایشگاهی به‌دست می‌آیند.



شکل (۱۳): تقسیم طیف فرکانسی حفره خالی به طیف فرکانسی حفره پر از آب درون آلومینیوم (روش آزمایشگاهی).

3. Faran, J. J. "Sound Scattering by Solid Cylinders and Spheres", J. Acoustic. Soc. Am, 23, 405-418, 1951.
4. Honarvar, F. Sinclair, A.N. "Acoustic Wave Scattering from Transversely Isotropic Cylinders", J. Acoust. Soc. Am., Vol. 100, pp. 57-63, 1996.
5. Veksler, N.D. "Resonance Acoustic Spectroscopy", Springer-Verlag, 1993.
6. Flax, L., Dragonette, L., and Uberall, H. "Theory of Resonance Excitation by Sound Scattering", J. Acoust. Soc. Am., Vol. 63, No. 3, pp. 723-731, 1978.
7. Rhee, H. and Park, Y. "New Analysis of Elastic Wave Resonance Scattering from a Fluid-Filled Cylindrical Cavity", J. Japan Society of Mechanical Eng., 2004.
8. Carrera, R.A. and Sesma, F.J.S. "Scattering and Diffraction of Elastic P- and S-Waves by a Spherical Obstacle: a Review of the Classic Solution", Geophysical International, Vol. 45, No.1, PP 3-21, 2006.
9. Sodagar, S., Honarvar, F., and Sinclair, A.N. "Scattering of Elastic Waves from Immersed Type I and Type II Transversely Isotropic Cylinders", Tarbiaat Modarres Iran, Iranian Society Mechanical Eng. 2004.
10. Rembert, P., Franklin, H., and Conoir, J.M. "Multichannel Resonant Scattering Theory Applied to a Fluid-Filled Cylindrical Cavity in an Elastic Medium", Wave Motion, 2004.
11. Farshidianfar, A., Hoseinzadeh, M., and Raghebi, M. "A Novel Way for Crack Detection in Rotors, Using Mode Shape Changes", Aero. Mech. J., vol. 5, No. 2, 2011 (in Persian).
12. Izbicki, J.L., Conoir, J.M., and Veksler, N.D. "New Results for Franz and Reyleigh Waves around a Cylindrical Vacuum /Solid Interface", Wave Motion, 1998.
13. Derbesse, L., Pernod, P., Latard, V., Merlen, A., Decultot, D., Touraine, N., and Maze, G. "Acoustic Scattering from Complex Elastic Shells: Visualization of S0, A0 and A Waves", Ultrasonics38, pp. 850-863, 2000.
14. Honarvar, F. and Sinclair, A.N. "Scattering of an Obliquely Incident Plane Wave from a Circular Clad Rod", J. Acoust, Soc. Am. Vol. 102, No. 41, 1997.

میانگین خطا در فرکانس‌های تشدید روش آزمایشگاهی و تئوری برابر ۱/۹ درصد و ماکزیمم خطا ۵ درصد بوده است.

#### ۸- نتیجه‌گیری

در این مقاله مدل‌سازی ریاضی امواج فراصوتی امواج پراکنده شده از یک استوانه توخالی درون یک محیط الاستیک جامد و یا استوانه حاوی سیال درون یک محیط الاستیک جامد در حالت‌های "موج تابش طولی، موج پراکنده شده طولی" - "موج تابش طولی، موج پراکنده شده عرضی" - "موج تابش عرضی، موج پراکنده شده طولی" - "موج تابش عرضی، موج پراکنده شده عرضی" انجام شد و فشار برگشتی امواج در حالت‌های بالا تحت عنوان تابع فرم ترسیم شد. روش جدیدی نیز برای به دست آوردن طیف تشدیدها مطرح و طیف تشدیدها در حالت‌های مختلف ترسیم شد. همچنین برای اولین بار طیف تشدیدهای جدا شده از طیف فرکانسی حفره‌های استوانه‌ای به روش آزمایشگاهی به دست آمد. تطبیق کامل طیف تشدیدهای جدا شده از دامنه زمینه تابع فرم با استفاده از روش جدید ارائه شده در مقاله با طیف‌های ترسیم شده توسط دیگر محققین (با استفاده از سه روش تئوری پراکندگی مکانیکی، پراکندگی تشدید قدیم و پراکندگی تشدید جدید) و همچنین مطابقت ۹۵ درصدی فرکانس‌های تشدید روش آزمایشگاهی MIIR با فرکانس‌های تشدید روش‌های تئوری (تئوری پراکندگی مکانیکی، تئوری پراکندگی تشدید و تئوری جدید) برای حفره استوانه‌ای از نتایجی است که در این پژوهش حاصل شده است.

#### ۹- مراجع

1. Honarvar, F., Enjilela, E., Sinclair, A.N., Mirnezami, S. A. "Wave Propagation in Transversely Isotropic Cylinders", J. Solids and Structures44, pp.5246-5236, 2007.
2. Lord Rayleigh, "The Theory of Sound", Dover, New York, Vol. 2, 1954.