تحلیل ارتعاشات آزاد ورق تابعی مدرج تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی تک جداره با استفاده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی

سعید جعفری مهرآبادی[۱] و شاپور ابراهیمی[۲]

دانشکده فنی مهندسی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد اراک

(تاریخ دریافت:۱۳۹۱/۱/۱۹؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۲/۳/۱۴)

چکیده

در این مقاله، ارتعاشات آزاد یک ورق مستطیلی از جنس مواد تابعی مدرج که توسط نانولوله‌های کربنی تقویت‌شده، مورد بررسی قرار گرفته است. در محاسبه خواص ورق مرکب مذکور از مدل موری-تاناکا استفاده شده و معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله با استفاده از تئوری الاستیسیته سه بعدی به‌دست آمده‌اند. برای حل معادلات به‌دست‌آمده از روش چند جمله‌ای‌های دیفرانسیلی(GDQ) استفاده شده است. در ادامه در قالب یک مثال عددی فرکانس‌های ارتعاشات آزاد ورق در شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده با تغییر در پارامترهای مختلف مسئله (توزیع چینش نانولوله‌ها- خواص ماده تابعی مدرج- مشخصات هندسی ورق) محاسبه شده‌اند. باتوجه به مقایسه نتایج به‌دست‌آمده با نتایج مندرج در مراجع دیگر از نحوه حل مسئله اطمینان کافی حاصل شده است.

واژه‌های کلیدی:ارتعاشات آزاد، ورق تابعی مدرج تقویت شده، نانولوله‌های کربنی تک جداره، تئوری الاستیسیته سه‌بعدی، روش چندجمله‌ای‌های دیفرانسیلی(GDQ)

Free Vibration Analysis of FGM Plate Reinforced with Single Wall Carbon Nanotubes Using 3-D Elasticity Theory

S. Jafari Mehrabadi and Sh. Ebrahimi

Faculty Engineering Technology

Arak Branch, Islamic Azad University

(Received: 7/April/2012; Accepted: 4/June/2013)

ABSTRACT

In this paper, free vibration of a functionally graded rectangular plate reinforced by carbon nanotubes have been investigated. The material properties of the composite plate have been calculated by the Mori-Tanaka model and the governing differential equations of problem have been derived using 3-D elasticity. For solving the differential equations of motion we used the generalized differential quadrature (GDQ) technique by regarding the appropriate grid points. Finally, by solving the numerical example for a simply supported plate, the frequency vibration of plate by assuming the variation of problem parameters (distribution of carbon nanotubes-properties of plate-geometrical features of problem) has been calculated. Also, the convergence of the method is demonstrated and to validate the results, comparisons are made with the available references.

Keyword: Free Vibration, Functionally Graded Material, Carbon Nanotubes, 3-D Elasticity Theory, Differential Quadrature Method

۱-استادیار (نویسنده پاسخگو): s-jafari@iau-arak.ac.ir

۲-کارشناسی ارشد:shapour.ebrahimi@tvu.ac.ir

۱- مقدمه

گسترش روزافزون علوم و فنون در صنایع پیشرفته امروزی (هوافضا، نظامی، هسته‌ای و...) شناخت و به کارگیری مواد جدیدتر روزبه‌روز از اهمیت بیشتری برخوردار می‌شود. در این راستا تحقیقات صنعتی و دانشگاهی توجه خاصی به شناخت، تولید و گسترش مواد جدید دارند. دسته خاصی از این مواد تحت عنوان مواد تابعی مدرج (FGM)[1] شناخته شده‌اند که امروزه توجه چشمگیری را به عنوان مواد سازه‌ای پیشرفته به خود معطوف داشته است. مواد تابعی مدرج یا FGM ها مواد کامپوزیتی با ریزساختار ناهمگنی می‌باشند که خواص مکانیکی آنها به‌طور ملایم و پیوسته از یک سطح به سطح دیگر تغییر می‌کند. این خاصیت ویژه به‌وسیله تغییر یکنواخت در نسبت حجمی مواد تشکیل‌دهنده آنها به‌دست می‌آید. نوع رایج این مواد ترکیب پیوسته‌ای از فلزات و سرامیک‌ها می‌باشد که از مخلوط نمودن پودر آنها به‌دست می‌آید به طوری که تغییر فلز و سرامیک از یک سطح به سطح دیگر کاملاً پیوسته صورت می‌گیرد. به‌گونه‌ای که مثلاً یک سطح از جنس سرامیک خالص و سطح دیگر از جنس فلز خالص و بین دو سطح ترکیب پیوسته‌ای از هر دو ماده می‌باشد. از این رو خواص مکانیکی نیز با توجه به نوع ترکیب، تغییرات پیوسته‌ای در جهت ضخامت دارد. این مواد با توجه به پیوستگی ترکیب اجزای تشکیل دهنده‌اش دارای خواص مکانیکی مؤثرتری نسبت به مواد کامپوزیت لایه‌ای می‌باشند. نسبت این ترکیب در راستای ضخامت جسم متغیر بوده و چگالی ذرات فلز معلق در بستر سرامیک از سطح فلزی تا سطح سرامیکی توسط یک تابع معین که می‌تواند خطی، غیر خطی یا نمایی باشد، کاهش یا افزایش می‌یابد.

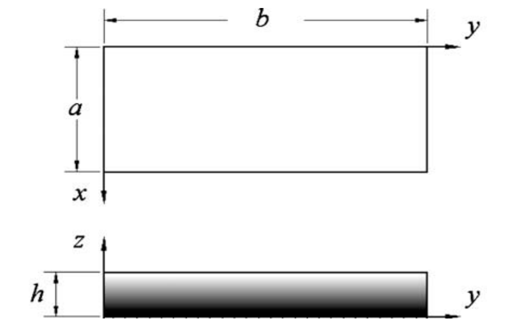
خصوصیات ارتعاشی صفحات ضخیم که از مواد مدرج تابعی ساخته شده‌اند، منافع زیادی برای طراحی مهندسی و تولید دارد. بسیاری از مطالعات قبلی در مورد ارتعاش آزاد صفحات FG بر پایه تئوری‌های ساده تر و یا دو بعدی مانند تئوری کلاسیک صفحات (CLPT)[2] انجام شده است. در این نظریه‌ها تغییرشکل‌های واقعی صفحات نادیده گرفته شده و فرض می‌شود که در تغییر شکل صفحه، حالت تنش صفحه‌ای حاکم باشد. این فرضیه‌ها ممکن است برای سطوح باریک (نازک) مناسب باشند اما نتایج خوبی برای صفحات نسبتاً ضخیم ویا ضخیم به همراه نخواهند داشت. یانگ و شن [۱] از نظریه کلاسیک صفحات برای مطالعه ارتعاشات آزاد و اجباری صفحات نازک مستطیلی FGM در حالت تنش صفحه‌ای با تکیه‌گاه الاستیک، استفاده کردند. قوگال و شیمپی [۲]، با مطالعه تئوری‌های اصلاح شده ورق‌ها و بررسی نتایج آنها با تئوری الاستیسیته سه‌بعدی، مزایا و معایب هر یک را بررسی کردند. باترا و جین [۳]، با استفاده از روش المان محدود ارتعاشات ورق‌های مستطیلی ساخته شده از مواد تابعی مدرج ناهمسانگرد را بر پایه تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی مطالعه کردند. چنگ و باترا [۴]، حالت پایدار ارتعاش و کمانش صفحه چند ضلعی ایزوترپیک FGM بر روی تکیه‌گاه الاستیک راتحت بار هیدروستاتیکی یکنواخت را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم ردی مطالعه کردند. یانگ وشن [۵]، ارتعاش آزاد و اجباری ورق FGM تحت تنش اولیه در محیط حرارتی با توزیع یکنواخت حرارت را بر اساس تئوری برشی مرتبه بالا بررسی کردند. کیان و همکاران [۶]، ارتعاشات آزاد و اجباری ورق‌های ضخیم FGM را بر پایه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالاو روش پتروف- گالرکین تحلیل کردند. خدیر و ردی [۷]، ارتعاشات گذرای ورق‌های ضخیم چند لایه نامتقارن با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده تحت بارگذاری دلخواه را مطالعه کردند. روکو و همکارانش [۸]، تحلیل ارتعاش آزاد را برای ورق FGM با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا را انجام دادند. ملک‌زاده [۹]، در تحقیقی، ارتعاش آزاد سه‌بعدی ورق FGM بر روی تکیه‌گاه الاستیک را ارائه نمود و از روش نیمه تحلیلی متشکل از روش DQM و روش سری‌ها برای حل معادلات حرکت استفاده کرد. متسوناگا [۱۰]، فرکانس‌های طبیعی و کمانش صفحات FGM را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا تحلیل کرده است. وو [۱۱]، یک روش تحلیلی را برای بررسی رفتار ارتعاش آزاد غیر خطی صفحات FGM ارائه داده است. حسینی هاشمی و ارسنجانی [۱۲]، برای ارتعاشات آزاد ورق‌های مستطیلی ضخیم، پاسخ تحلیلی دقیق ارائه کردند که به ورق‌های همسانگرد محدود می‌شد. از سوی دیگر، کارهای تحقیقاتی بر روی تحلیل ارتعاش آزاد و سه بعدی صفحات FGM با تکیه‌گاه ساده و تکیه‌گاه الاستیک بوده‌اند. در این کارها موضوع تقویت صفحات FGM با نانولوله‌های کربنی بررسی و تحلیل نشده است. بررسی این خلأ آشکار در تحقیقات انجام شده، انگیزه اصلی انجام این پژوهش شده است. در این مقاله، ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی از جنس مواد تابعی مدرج FGM که با نانولوله‌های کربنی تک جداره (SWCNTS) تقویت شده مورد بررسی قرار گرفته است. تغییرات تدریجی خواص ماده مدرج تابعی به صورت تغییر در

1- Functionally Graded Materials
2- Classical Plate Theory

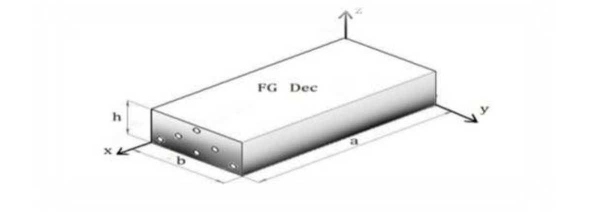
کسر حجمی آن و درجهت ضخامت بر طبق قانون توزیع توانی[۱] در نظر گرفته شده و جهت قرارگیری نانولوله‌ها در امتداد محور x فرض شده است. معادلات حاکم بر مسئله بر حسب تنش‌ها بر اساس تئوری الاستیسیته سه‌بعدی با استفاده از روابط تنش- کرنش و کرنش- تغییر مکان تبدیل به معادلات دیفرانسیل جزئی برحسب تغییر مکان‌ها شده و با استفاده از بسط سری مثلثاتی آنها، دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به‌دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی با ضرایب متغیر تبدیل شده است. جواب‌های فرض شده برای مؤلفه‌های جابه‌جایی به‌صورت سری‌های مثلثاتی به‌گونه‌ای انتخاب شده‌اند که شرایط مرزی تکیه‌گاه‌های ورق برآورده گردد. معادلات و شرایط مرزی حاکم با استفاده از روش دیفرانسیل کوادریچر تعمیم یافته (GDQ)[۲] گسسته‌سازی شده و درنهایت با حل مسئله مقدار ویژه فرکانس‌های سیستم به‌دست آمده‌اند. با مقایسه جواب‌های به دست آمده با مراجع دیگر از صحت جواب‌های به‌دست آمده اطمینان کافی حاصل شده است.

۲-معادلات حاکم

مطابق شکل **۱** ورق مستطیلی از جنس ماده مدرج تابعی (متشکل از فلز و سرامیک) به ابعاد a، b و ضخامت h، که توسط نانولوله‌های کربنی چیده شده در جهت x تقویت شده در نظر گرفته شده است. مطابق آنچه ملاحظه می‌شود محورهای مختصات x-y-z به‌گونه‌ای برای حل مسئله انتخاب شده که مبدأ آن درگوشه پایین ورق در نظر گرفته شده است. در شکل ۲ ورق مذکور بهمراه تقویت کننده های آن ملاحظه می شود.



شکل(۱): ورق مستطیلی از جنس ماده مدرج تابعی و مشخصات هندسی آن.



شکل(۲):ورق مستطیلی از جنس ماده مدرج تابعی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی و سیستم مختصات درنظر گرفته‌شده برای آن.

در این مطالعه از قانون توانی در راستای ضخامت و روش موری-تاناکا برای محاسبه خواص ورق مذکور استفاده می‌شود. با این حال این فرمولاسیون آنقدر کلی است که به راحتی می توان از طریق آن دیگر قوانین تغییرات در راستای ضخامت را به آسانی عملی کرد علاوه بر این فرض شده است که نسبت پواسون ثابت و تغییرات ضرایب سختی یا انعطاف‌پذیری مواد C_{ij} و چگالی ρ بر حسب قانون توزیع توانی باشد:

$$C_{ij}\left(z\right)=C_{ij}^{M}+\left(C_{ij}^{C}-C_{ij}^{M}\right)\left(z/h\right)^{p}, \qquad (۱)$$

$$\rho\left(z\right)=\rho^{M}+\left(\rho^{C}-\rho^{M}\right)\left(z/h\right)^{p}, \qquad (۲)$$

که، بالانویس M و C نشان‌دهنده مؤلفه‌های فلزی و سرامیک هستند که به‌ترتیب خواص مواد پائین و بالای صفحه را نشان داده و p ضریب اندیس توان می‌باشد. همان‌گونه که می‌دانیم معادلات حرکت سه‌بعدی حاکم بر مسأله با توجه به تئوری الاستیسیته سه‌بعدی در مختصات دکارتی به‌صورت زیر نوشته می‌شوند[۱۳]:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},
\end{aligned} \qquad (۳)$$

که u،v و w مؤلفه‌های جابه‌جایی درراستای محورهای x،y و z و σ_{ij} مؤلفه‌های تانسور تنش می‌باشند. این مؤلفه‌ها برحسب مؤلفه‌های جابه‌جایی برای ورق ایزوتروپیک عرضی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی به‌صورت زیر نوشته می‌شوند[۹]:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{12}\\ C_{12} & C_{22} & C_{23}\\ C_{12} & C_{23} & C_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\partial u/\partial x\\ \partial v/\partial y\\ \partial w/\partial z\end{Bmatrix}, \qquad (۴)$$

1-Power Low Index
2-Generalized Differential Quadrature

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{44}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \\ C_{66}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) \\ C_{66}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \end{Bmatrix}, \qquad (۵)$$

در روابط فوق C_{ij} ضرایب ماتریس سختی بوده که با توجه به خواص ورق ماتریس و نانولوله‌های کربنی و همچنین با توجه به مقادیر مدول الاستیسیته هیل[1] محاسبه می‌شوند. اکنون با جایگذاری روابط (۴) و (۵) در روابط (۳) معادلات حرکت بر حسب مؤلفه‌های جابه‌جایی برای ورق FGM تقویت شده می‌تواند به‌صورت زیر نوشته شود[۱۳]

$$\begin{aligned} &C_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+C_{66}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial C_{66}}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}+ \\ &C_{66}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\left(C_{12}+C_{66}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+ \\ &\frac{\partial C_{66}}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}+\left(C_{12}+C_{66}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \end{aligned} \qquad (۶)$$

$$\begin{aligned} &\left(C_{12}+C_{66}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C_{66}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+ \\ &C_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial C_{44}}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}+C_{44}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+ \\ &\frac{\partial C_{44}}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y}+\left(C_{23}+C_{66}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \end{aligned} \qquad (۷)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial C_{12}}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}+\left(C_{12}+C_{66}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+\frac{\partial C_{23}}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y}+ \\ &\left(C_{23}+C_{44}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial z}+C_{66}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+C_{44}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+ \\ &\frac{\partial C_{22}}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z}+C_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \end{aligned} \qquad (۸)$$

۳- مدل کردن نانولوله‌ها به‌صورت توزیع مدرج تابعی (FG)[2] و یکنواخت (UD)[3]

در حالت کلی رابطه زیر بین کسر حجمی نانولوله و کسر حجمی ماتریس برقرار است:

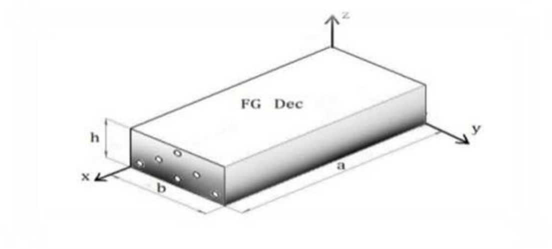
$$V_{CN}+V_m=1, \qquad (۹)$$

1-Hill
2- Functionally Graded Distribution
3- Uniform Distribution

در رابطه (۹)، V_{CN}وV_m به‌ترتیب کسر حجمی نانولوله‌ها وکسر حجمی ماتریس می‌باشند.

۳-۱-توزیع نانولوله‌ها به‌صورت مدرج تابعی از نوع کاهشی[۴](FG-Dec)

در مدل کاهشیFG، رابطه کسر حجمی نانولوله‌ها، V_{CN}، به‌صورت زیر نوشته می‌شود:



شکل(۳): توزیع نانولوله‌ها به‌صورت (FG-Dec) در جهت محور x.

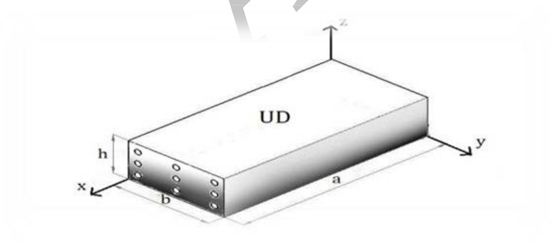
$$V_{CN}=\left(\frac{2h-2z}{h}\right)V_{CN}^*, \qquad (۱۰)$$

$$V_{CN}^*=\frac{w_{CN}}{w_{CN}+\left(\rho_{CN}/\rho_m\right)-\left(\rho_{CN}/\rho_m\right)w_{CN}}, \qquad (۱۱)$$

که در رابطه (۱۱)، $\rho_m, \rho_{CN}, w_{CN}$ که به‌ترتیب کسر جرمی نانولوله، دانسیته نانولوله و دانسیته ماتریس می‌باشند.

۳-۲- توزیع نانولوله‌ها به‌صورت کاملاً یکنواخت(UD)

در مدل توزیع یکنواختUD،رابطه کسر حجمی نانولوله‌ها، V_{CN}، به‌صورت زیر نوشته می‌شود:



شکل(۴): توزیع نانولوله‌ها به‌صورت (UD) در جهت محور xها.

$$V_{CN}=V_{CN}^*, \qquad (۱۲)$$

4- Decreasing Functionally Graded

۴-دستورالعمل حل معادلات حرکت با توجه به شرایط مرزی

برای حل معادلات حرکت، شرایط مرزی ورق از نوع تکیه‌گاه ساده در لبه‌های $x=0,\ a$ و $y=0,\ b$ درنظر گرفته می‌شوند[۱۰]:

$$u_{,x}=v=w=0 \qquad x=0\,\&\,a, \tag{۱۳}$$

$$u=v_{,y}=w=0 \qquad y=0\,\&\,b, \tag{۱۴}$$

روابط کلی برای مؤلفه‌های جابه‌جایی در تحلیل ارتعاشات آزاد ورق به‌طوری که شرایط مرزی (۱۳) و (۱۴) را ارضا کنند، عبارتند از[۱۰]:

$$u(x,y,z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}U(z)\cos(\alpha_m x)\sin(\beta_n y)e^{i\omega t},$$

(۱۵)

$$v(x,y,z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}V(z)\sin(\alpha_m x)\cos(\beta_n y)e^{i\omega t},$$

$$w(x,y,z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}V(z)\sin(\alpha_m x)\sin(\beta_n y)e^{i\omega t},$$

$$\alpha_m=\frac{m\pi}{a}(m=1,2,\ldots)\,and\,\beta_n=\frac{n\pi}{b}(n=1,2,\ldots),$$

که، m عددموج[۱] درراستای محور x، n عدد موج[۲] در راستای محور y، ω فرکانس طبیعی و $i=\sqrt{-1}$ می‌باشند.

با جایگذاری مؤلفه‌های جابه‌جایی از معادله (۱۵) در معادلات (۶)-(۸) و ساده‌سازی آنها معادلات ذیل به‌دست می‌آید:

(۱۶)

$$C_{11}\alpha_m^2U+C_{12}\alpha_m\beta_nV-C_{12}\alpha_m\frac{\partial W}{\partial z}+\beta_n^2C_{66}U+C_{66}\alpha_m\beta_nV-\frac{\partial C_{66}}{\partial z}\alpha_mW-C_{66}\alpha_m\frac{\partial W}{\partial z}-\frac{\partial C_{66}}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial z}-C_{66}\frac{\partial^2U}{\partial z^2}=\rho\omega^2U,$$

1- Wave Number Along x Direction

2- Wave Number Along y Direction

(۱۷)

$$C_{66}\alpha_m\beta_nU+C_{66}\alpha_m^2V+C_{12}\alpha_m\beta_nU+C_{22}\beta_n^2V-C_{23}\beta_n\frac{\partial W}{\partial z}-\frac{\partial C_{44}}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}-C_{44}\frac{\partial^2V}{\partial z^2}-\frac{\partial C_{44}}{\partial z}\beta_nW-C_{44}\beta_n\frac{\partial W}{\partial z}=\rho\omega^2V,$$

$$V_{CN}=V_{CN}^*,$$

$$C_{66}\alpha_m^2W+C_{66}\alpha_m\frac{\partial U}{\partial z}+C_{44}\beta_n^2W+\frac{\partial C_{12}}{\partial z}\alpha_mU+C_{12}\alpha_m\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial C_{23}}{\partial z}\beta_nV+C_{23}\beta_n\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{\partial C_{22}}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial z}+C_{44}\beta_n\frac{\partial V}{\partial z}-C_{22}\frac{\partial^2W}{\partial z^2}=\rho\omega^2W, \tag{۱۸}$$

۵- شرایط مرزی مسأله

شرایط مرزی بر روی سطوح بالا و پایین ورق به‌صورت عاری از تنش در نظر گرفته می‌شود:

$$\sigma_z=\tau_{zx}=\tau_{zy}=0, at\ z=0,h, \tag{۱۹}$$

با جایگذاری روابط (۴و۵) و روابط (۱۸-۱۵) در شرایط مرزی (۱۹)، روابط زیر برای سطح z=0 به‌دست خواهند آمد:

$$\begin{aligned}&C_{12}\alpha_mU+C_{23}\beta_nV-C_{22}\frac{\partial W}{\partial z}=0,\\&C_{44}\beta_nW+C_{44}\frac{\partial V}{\partial z}=0,\\&C_{66}\alpha_mW+C_{66}\frac{\partial U}{\partial z}=0,\end{aligned} \tag{۲۰}$$

به همین ترتیب شرایط مرزی برای z=h به فرم زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}&C_{12}\alpha_mU+C_{23}\beta_nV-C_{22}\frac{\partial W}{\partial z}=0,\\&C_{44}\beta_nW+C_{44}\frac{\partial V}{\partial z}=0,\\&C_{66}\alpha_mW+C_{66}\frac{\partial U}{\partial z}=0,\end{aligned} \tag{۲۱}$$

در این مرحله با اعمال روش دیفرانسیل کوادریچر تعمیم یافته، معادلات حرکت (۱۶)- (۱۸) گسسته‌سازی می‌شوند. این کار در هر نقطه ازشبکه‌ای با i=2,…,N-1 نقطه انجام می‌شود:

$$\begin{aligned}
&(C_{11}\alpha_m^2 + C_{66}\beta_n^2)U_i + (C_{12}+C_{66})\alpha_m\beta_n V_i - \\
&\frac{\partial C_{66}}{\partial z}\alpha_m W_i - \sum_{k=1}^{N}\frac{\partial C_{66}}{\partial z}A_{ik}^z U_k - \\
&C_{66}\sum_{k=1}^{N}B_{ik}^z U_k - C_{12}\alpha_m\sum_{k=1}^{N}A_{ik}^z W_k - \\
&C_{66}\alpha_m\sum_{k=1}^{N}A_{ik}^z W_k = \rho_i\omega^2 U_i,
\end{aligned} \qquad (۲۲)$$

$$\begin{aligned}
&\left(C_{66}+C_{12}\right)\alpha_m\beta_n U_i + \\
&\left(C_{66}\alpha_m^2 + C_{22}\beta_n^2\right)V_i - \frac{\partial C_{44}}{\partial z}\beta_n W_i - \\
&\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial C_{44}}{\partial z}A_{ik}^z + C_{44}B_{ik}^z\right)V_k - \\
&\left(C_{23}+C_{44}\right)\sum_{k=1}^{N}\beta_n A_{ik}^z W_k = \rho_i\omega^2 V_i,
\end{aligned} \qquad (۲۳)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial C_{12}}{\partial z}\alpha_m U_i + \frac{\partial C_{23}}{\partial z}\beta_n V_i + \\
&\left(C_{66}\alpha_m^2 + C_{44}\beta_n^2\right)W_i + \\
&\left(C_{12}+C_{66}\right)\alpha_m\sum_{k=1}^{N}A_{ik}^z U_k + \\
&\left(C_{23}+C_{44}\right)\beta_n\sum_{k=1}^{N}A_{ik}^z V_k - \\
&\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial C_{22}}{\partial z}A_{ik}^z + C_{22}B_{ik}^z\right)W_k = \rho_i\omega^2 W_i,
\end{aligned} \qquad (۲۴)$$

که، A_{ik}^z و B_{ik}^z به ترتیب ضرایب وزنی مشتق مرتبه اول و دوم می‌باشند.با اعمال روش دیفرانسیل کوادیچر تعمیم یافته در روابط (۲۱) و (۲۲)، شرایط مرزی در i=1 , z=0 و z=h, i=N به شکل زیر گسسته سازی می‌شوند.

شرایط مرزی در z=0, i=1 به شکل زیر گسسته‌سازی می‌شوند:

$$\begin{aligned}
&C_{12}\alpha_m U_1 + C_{23}\beta_n V_1 - C_{22}\sum_{k=1}^{N}A_{1k}^z W_k = 0, \\
&C_{44}\beta_n W_1 + C_{44}\sum_{k=1}^{N}A_{1k}^z V_k = 0, \\
&C_{66}\alpha_m W_1 + C_{66}\sum_{k=1}^{N}A_{1k}^z U_k = 0,
\end{aligned} \qquad (۲۵)$$

شرایط مرزی در z=h, i=N به شکل زیر گسسته‌سازی می‌شوند:

$$\begin{aligned}
&C_{12}\alpha_m U_N + C_{23}\beta_n V_N - C_{22}\sum_{k=1}^{N}A_{Nk}^z W_k = 0, \\
&C_{44}\beta_n W_N + C_{44}\sum_{k=1}^{N}A_{Nk}^z V_k = 0, \\
&C_{66}\alpha_m W_N + C_{66}\sum_{k=1}^{N}A_{Nk}^z U_k = 0,
\end{aligned} \qquad (۲۶)$$

که، A_{ij}^z ضریب وزنی مشتق مرتبه اول می‌باشد.

به منظور استخراج سیستم معادلات مقدار ویژه[1]، متغیرها در تمام دامنه محاسباتی به دو بخش تقسیم می‌شوند.

متغیرهای بخش اول شامل نقاط داخلی[2] می‌باشند که با زیر نویس d مشخص می‌شوند:

$$\{d\} = \left\{\{U_d\},\{V_d\},\{W_d\}\right\}^T, \qquad (۲۷)$$

متغیرهای با قیمانده که شامل متغیرها در مرزها[3] می‌باشند با زیرنویس b اندیس‌گذاری می‌شوند:

$$\{b\} = \left\{\{U_b\},\{V_b\},\{W_b\}\right\}^T, \qquad (۲۸)$$

با تعاریف بالا معادلات حـرکت (۲۲)– (۲۴) را می‌توانبه فرم زیر باز نویسی نمود :

$$\begin{aligned}
&\left[K_{db}\right]\{b\} + \left[K_{dd}\right]\{d\} = \omega^2\left[M\right]\{d\}, \\
&\left[\left[K_{db}\right]\left[K_{dd}\right]\right]\begin{Bmatrix}\{b\}\\ \{d\}\end{Bmatrix} - \omega^2\left[M\right]\{d\} = \{0\},
\end{aligned} \qquad (۲۹)$$

به‌طور مشابه شرایط مرزی (۲۵) و (۲۶) را نیز می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$\left[K_{bd}\right]\{d\} + \left[K_{bb}\right]\{b\} = \{0\}, \qquad (۳۰)$$

1- Eigenvalue Equation System
2- Domain
3- Boundary

که:

$$\{b\}=-[K_{bb}]^{-1}[K_{bd}]\{d\}, \qquad (۳۱)$$

با جایگذاری رابطه (۳۱) در (۲۹) مسئله مقدار ویژه به فرم کلی زیر نتیجه می‌شود[۹]:

$$\left([K]-\omega^2[M]\right)\{d\}=\{0\}, \qquad (۳۲)$$

که در آن:

$$[K]=[K_{dd}]-[K_{db}][K_{bb}]^{-1}[K_{bd}], \qquad (۳۳)$$

ابعاد ماتریس‌های $[K_{dd}]$،$[K_{db}]$ ، $[K_{bb}]$ و $[K_{bd}]$ به ترتیب 3(N-2)×3(N-2)، 3(N-2)×6، 6× 6 و 6×3(N-2) که N تعداد نقاط شبکه می‌باشد. به این ترتیب سیستم معادلات مقدار ویژه به‌دست می‌آید. با استفاده از نرم‌افزار MATLAB، معادله (۳۲) حل شده و برنامه مناسب جهت به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی ورق تابعی مدرج تقویت شده با نانولوله‌های کربنی، توسعه داده شده است.

۶-نتایج عددی

برای حل مثال عددی خواص مکانیکی ورق تابعی مدرج (FGM) به‌صورت زیر در نظر گرفته شده است[۹]:

Metal(Aluminum,AL):

$$E^M=70\times10^9\left(N/m^2\right),$$

$$\rho^M=2702\left(Kg/m^3\right), \nu=0.3,$$

Ceramic(Almina ,Al_2O_3):

$$E^C=380\times10^9\left(N/m^2\right),$$

$$\rho^C=3800\left(Kg/m^3\right), \nu=0.3,$$

پارامتر فرکانسی بی بعد ، Ω_i، با روابط (۳۴) و (۳۵)تعریف می‌شود[۱۰]:

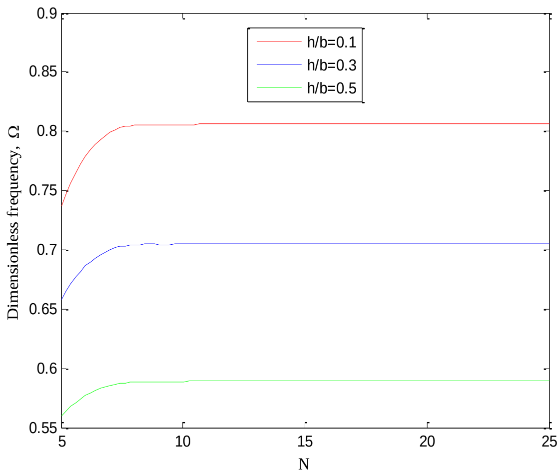
$$\Omega_i=\frac{\omega_i b^2}{\pi^2}\sqrt{\rho^C h/D^C}, \qquad (۳۴)$$

که در آن:

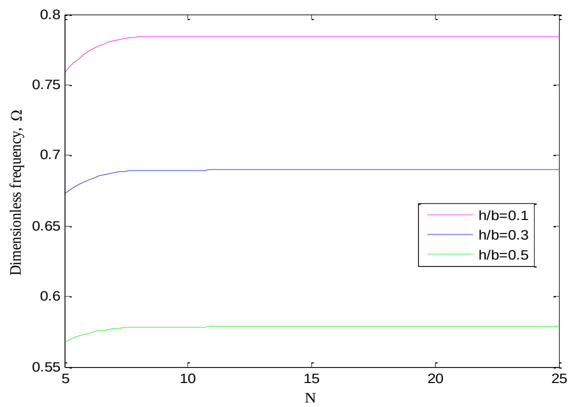
$$D^C=E^C h^3/12\left(1-\upsilon^2\right), \qquad (۳۵)$$

که، b عرض ورق، h ضخامت ورق و ω فرکانس طبیعی ورق می‌باشد.

برای اعتبار بخشیدن به تحقیق انجام شده، پارامتر فرکانس ورق تابعی مدرج (FGM) به‌دست‌آمده از روش حاضر، با نتایج مقالات مرجع در جدول ۱ و ۲ ارائه و مقایسه شده اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود نتایج به‌دست‌آمده از دقت بسیار بالایی در مقایسه با نتایج مقالات مرجع برخوردار می‌باشد.



شکل(۵): همگرایی و پایداری پارامتر فرکانس اساسی ورق بر حسب h/b به ازای توزیع نقاط مختلف برای حالت FG .V^*_{CN}=0.12, P=1, a/b=1 , (m,n)= (1,0)



شکل (۶): همگرایی و پایداری پارامتر فرکانس اساسی ورق بر حسب h/b به ازای توزیع نقاط مختلف برای حالتUD .V^*_{CN}=0.12, P=1, a/b=1, (m,n)= (1,0)

جدول (۱):مقایسه پارامتر فرکانسی برای ورقFGMبا تکیه‌گاه SSSSبه‌ازای مقادیر مختلفa/h در عدد موج (۱,۰) =m,nو a/b=1 .

Method	a/h	Mode(m,n)	Powerlow index (p)			
			P=۰	P=۰/۵	P=۱	P=۴
present	۲	(۰ و ۱)	۰/۵۵۷۲۴۳۱۶۳	۰/۴۸۲۹۳۵۰۹۹	۰/۴۳۷۳۹۴۹۲۴	۰/۳۵۷۷۵۴۱۹۰
Ref.[۹]			۰/۵۵۷۲	۰/۴۸۲۹	۴۳۷۰/۰	۰/۳۵۷۷
Ref.[۱۰]			۰/۵۵۷۲	۰/۴۸۳۵	۰/۴۳۷۵	۰/۳۵۷۹
present	۵	(۰ و ۱)	۰/۱۱۲۰۴۷۷۸۴	۰/۰۹۵۴۸۱۹۴۰	۰/۰۸۶۱۲۱۰۴۵	۰/۰۷۳۵۴۲۲۵۷
Ref.[۱۰]			۰/۱۱۲۰	۰/۰۹۵۶۳	۰/۰۸۶۱۴	۰/۰۷۳۵۶
present	۱۰	(۰ و ۱)	۰/۰۲۹۳۶۰۴۰۶	۰/۰۲۴۹۱۱۹۷۲	۰/۰۲۲۴۵۳۳۳۰	۰/۰۱۹۴۱۷۸۳۶
Ref.[۱۰]			۰/۰۲۹۳۶	۰/۰۲۴۹۵	۰/۰۲۲۴۶	۰/۰۱۹۴۲

جدول (۲):مقایسه پارامتر فرکانسی برای ورق FGMبا تکیه‌گاه SSSSبه ازای مقادیر مختلف a/hدر عدد موج (۱,۱) =m,nو

.a/b=1

Method	a/h	Mode(m,n)	Powerlow index (p)			
			P=۰	P=۰/۵	P=۱	P=۴
present	۲	(۱ و ۱)	۰/۹۴۰۰۴۰۵۷۸	۰/۸۲۲۵۲۶۶۲۶	۰/۷۴۷۵۱۳۷۸۸	۰/۵۹۹۴۸۷۱۷۵
Ref.[۱۰]			۰/۹۴۰۰	۰/۸۲۳۳	۰/۷۴۷۷	۰/۵۹۹۷
Present	۵	(۱ و ۱)	۰/۲۱۲۱۴۴۵۸۱	۰/۱۸۱۶۱۲۶۲۶	۰/۱۶۳۹۵۶۵۴۰	۰/۱۳۸۲۳۳۳۰۰
Ref.[۱۰]			۰/۲۱۲۱	۰/۱۸۱۹	۰/۱۶۴۰	۰/۱۳۸۳
Ref.[۱۴]			۰/۲۱۱۲	۰/۱۸۰۶	۰/۱۶۵۰	۰/۱۳۷۱
Ref.[۱۸]			۰/۲۱۱۳	۰/۱۸۰۷	۰/۱۶۳۱	۰/۱۳۷۸
present	۱۰	(۱ و ۱)	۰/۰۵۷۷۶۹۱۲۸۲	۰/۰۴۹۰۹۲۰۱۰۵	۰/۰۴۴۲۵۷۸۷۱۱	۰/۰۳۸۰۹۹۱۳۲۳
Ref.[۱۰]			۰/۰۵۷۷۷	۰/۰۴۹۱۷	۰/۰۴۴۲۷	۰/۰۳۸۱۱
Ref.[۱۴]			۰/۰۵۷۷	۰/۰۴۹۲	۰/۰۴۴۵	۰/۰۳۸۳
Ref.[۱۸]			۰/۰۵۷۷	۰/۰۴۹۰	۰/۰۴۴۲	۰/۰۳۸۱

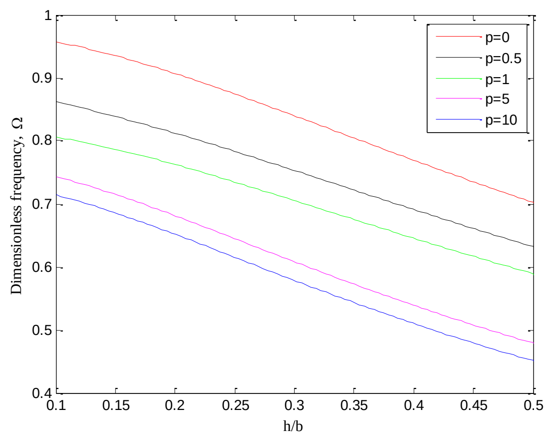
در این قسمت به بررسی همگرایی و پایداری پارامتر فرکانسی براساس توزیع نقاط نمونه Chebyshev-Gauss-Lobatto برای توزیع نانولوله‌ها در دو حالت توزیع تابعی مدرج (FG) و حالت توزیع یکنواخت (UD) پرداخته شده است. در شکل **۵** و **۶** همگرایی و دقت فرکانس طبیعی بی‌بعد برحسب مقادیر مختلف h/b، به ازای تعداد نقاط مشخص در راستای ضخامت ورق نشان داده شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود با افزایش تعداد نقاط منحنی همگرا شده و تغییر تعداد نقاط تأثیری در دقت جواب‌ها نخواهد داشت.

۷-بررسی پارامتر فرکانسی برای عدد موج (۱،۰)=m,n با تغییر در پارامترهای مختلف مسئله

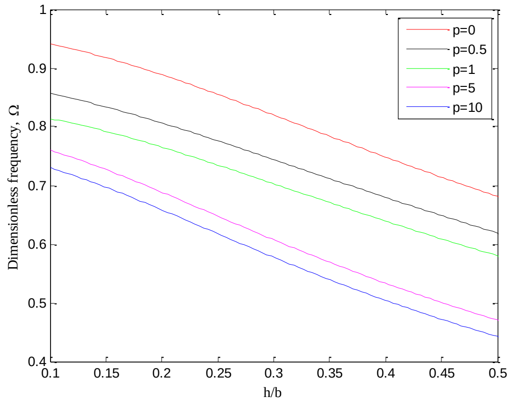
در این قسمت به بررسی تأثیر ضریب اندیس توانی در ورق های مربعی و مستطیلی با ضخامت های مختلف بر پارامتر فرکانس برای عدد موج (m,n)= (1,0) می پردازیم.

۷-۱- بررسی اثرضریب اندیس توزیع توانی برپارامتر فرکانسی برای ورق مربعی a/b= 1

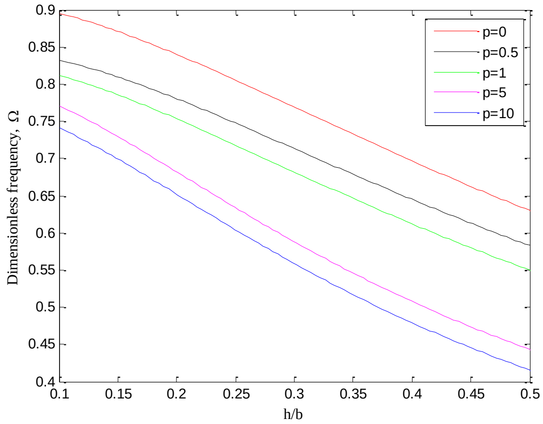
در شکل‌های **۷**، **۸** و **۹** پارامترهای فرکانسی براساس تغییر ضریب اندیس توزیع توانی و تغییرات کسر حجمی برای ورق مربعی مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش اندیس توزیع توانی، p، پارامتر فرکانس کاهش یافته و با افزایش نسبت h/bدر حالت $p>1$ بیشتر از حالت $p<1$ شده است که این موضوع به علت تأثیر خواص ورق ماتریس یا زمینه می‌باشد. همچنین مشاهده می‌شود که با افزایش کسر حجمی ورق ماتریس مقدار پارامتر فرکانسی کاهش یافته است.



شکل(۷): تغییرات پارامتر فرکانسی برحسب h/b برای ورق مربعی $FG, V^*_{CN}=0.12$, a/b=1, (m,n)= (1,0).



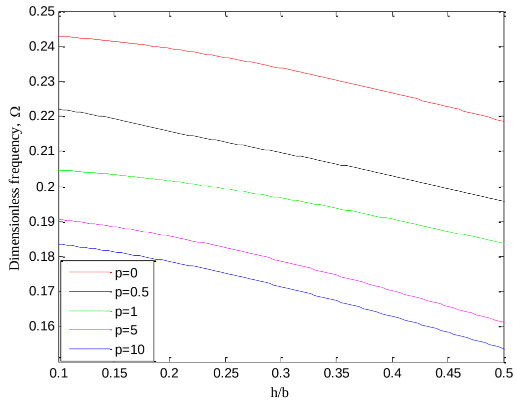
شکل (۸): تغییرات پارامتر فرکانسی بر حسب h/b برای ورق مربعی $FG, V^*_{CN}=0.17$, a/b=1, (m,n)= (1,0).



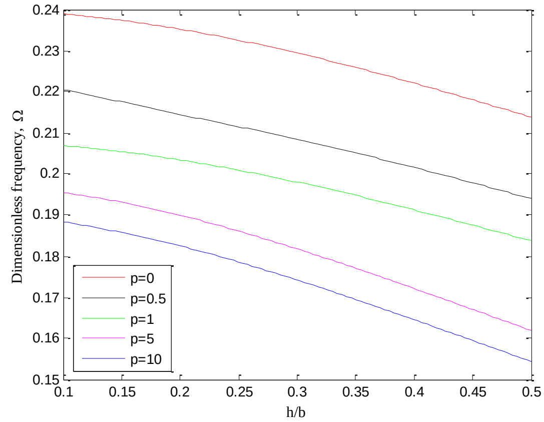
شکل (۹): تغییرات پارامتر فرکانسی برحسب h/b برای ورق مربعی $FG, V^*_{CN}=0.28$, a/b=1, (m,n)= (1,0).

۷-۲- بررسی اثر ضریب اندیس توزیع توانی برپارامتر فرکانسی برای ورق مستطیلی a/b=2

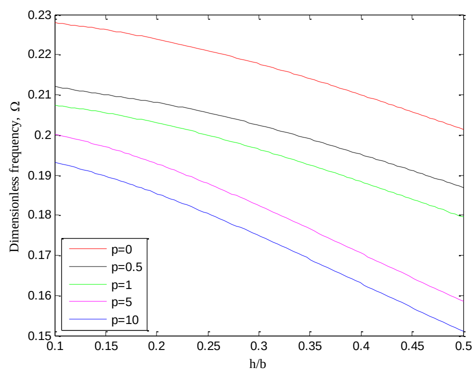
در شکل‌های **۱۲-۱۰** پارامترهای فرکانسی براساس تغییر اندیس توزیع توانی و تغییرات کسر حجمی برای ورق مستطیلی a/b=2 مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش اندیس توزیع توانی، p، پارامتر فرکانس کاهش یافته و با افزایش نسبت h/b برای $p>1$ بیشتر ازحالت $p<1$ شده است. همچنین مانند ورق مربعی با افزایش کسر حجمی مقدار پارامتر فرکانسی کاهش داشته و مقایسه نتایج این حالت با حالت قبلی این است که پارامتر فرکانسی ورق مستطیلی کمتر از ورق مربعی می‌باشد.



شکل (۱۰):تغییرات پارامتر فرکانسی بر حسب h/b برای ورق مستطیلی $FG, V^{*}_{CN}=0.12, a/b=2, (m,n)=(1,0)$.



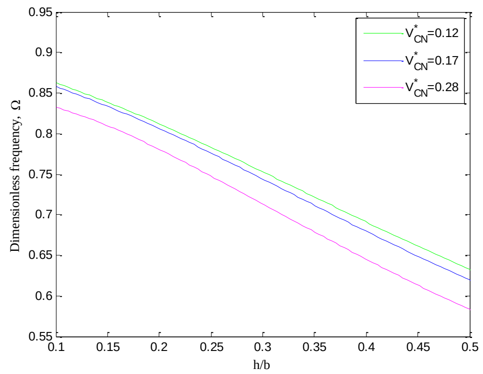
شکل (۱۱): تغییرات پارامتر فرکانسی بر حسب h/b برای ورق مستطیلی $FG, V^{*}_{CN}=0.17, a/b=2, (m,n)= (1,0)$.



شکل (۱۲): تغییرات پارامتر فرکانسی بر حسب h/b برای ورق مستطیلی $V^{*}_{CN}=0.28, a/b=2, (m,n)= (1,0), FG$.

۸- بررسی اثرکسر حجمی نانولوله‌ها برپارامتر فرکانسی

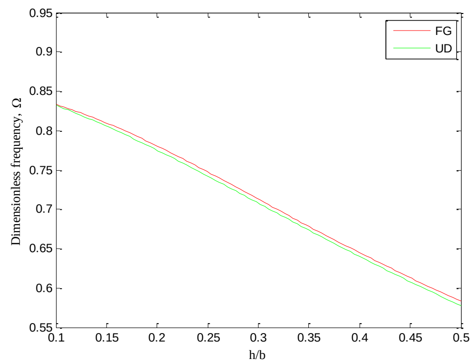
همان‌گونه که در شکل **۱۳** ملاحظه می‌شود با افزایش کسر حجمی نانولوله‌ها مقدار فرکانس بی بعد ورق کاهش می‌یابد. همچنین با افزایش نسبت کسر h/b نیز کاهش قابل ملاحظه‌ای را در فرکانس بی بعد ورق می‌توان ملاحظه کرد. افزایش کسر حجمی مقدار فرکانس کاهش می‌یابد. با بررسی دقیقتر نمودارهای ترسیم شده می‌توان گفت که کاهش فرکانس بی‌بعد ورق در تغییرات کسر حجمی از ۰/۱۷ تا ۰/۲۸ محسوستر از محدوده تغییرات آن از ۰/۱۲ تا ۰/۱۷ می‌باشد.



شکل (۱۳): تغییرات پارامترفرکانسی برحسبh/b برای ورق مربعی درمقادیر مختلف کسرحجمی , FG, P=0.5, a/b=1 .(m,n)= (1,0)

۹-مقایسه تأثیر توزیع نانولوله‌ها به‌صورت FG و UD بر پارامتر فرکانسی

اثر توزیع نانولوله‌های تک‌جداره (SWCNTS) به‌صورت تابعی مدرج (FG) و یکنواخت (UD) بر روی پارامتر فرکانسی به ازای عدد موج (۰ و ۱) در شکل **۱۴** ارائه گردیده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود مقدار پارامتر فرکانسی در توزیع نانولوله‌ها به فرم FG بیشتر از حالت UD شده است.

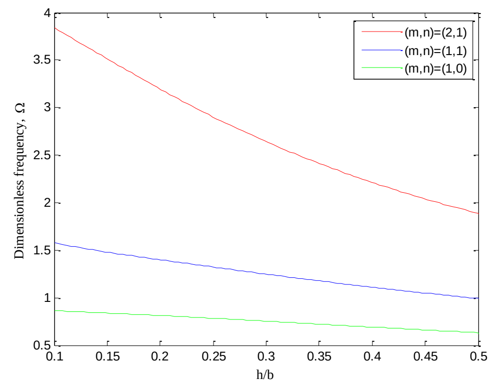


شکل (۱۴): تغییرات پارامتر فرکانسی بر حسب h/b برای توزیع نانولوله‌ها به‌صورتFG و UD، $V^{*}_{CN}=0.12$ P=0.5, .a/b=1, (m,n)= (1,0)

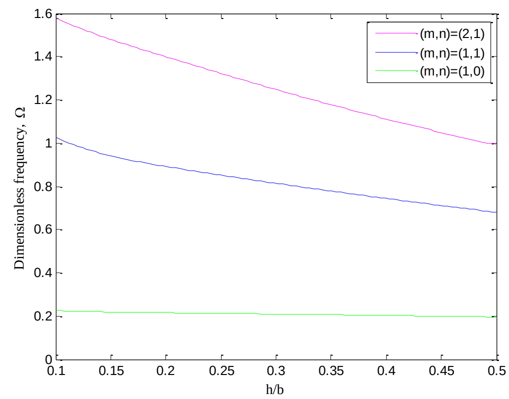
۱۰-مقایسه تأثیر اعداد موج بر پارامتر فرکانسی

در نمودارهای **۲۰-۱۵** تأثیر اعداد موج (۲،۱) ، (۱و۱) و(۱،۰) در کسرهای حجمی ۰/۱۲، ۰/۱۷ و ۰/۲۸ مورد بررسی

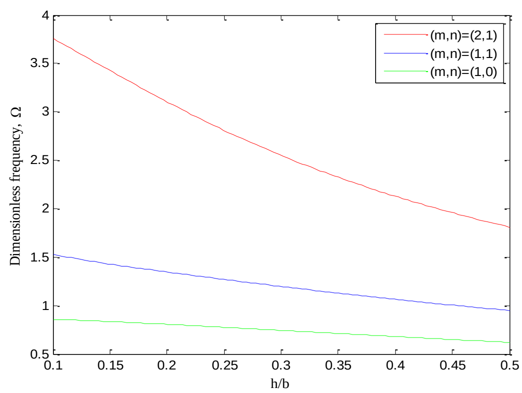
قرار گرفته است. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود با افزایش عدد موج، مقدار فرکانس بی‌بعد افزایش داشته به‌طوری که بیشترین مقدار تغییرات پارامتر فرکانس مربوط به عدد موج (۲,۱) در کسر حجمی ۰/۱۲ وکمترین مقدار آن مربوط به عدد موج (۱,۰) در کسر حجمی ۰/۲۸ می‌باشد.



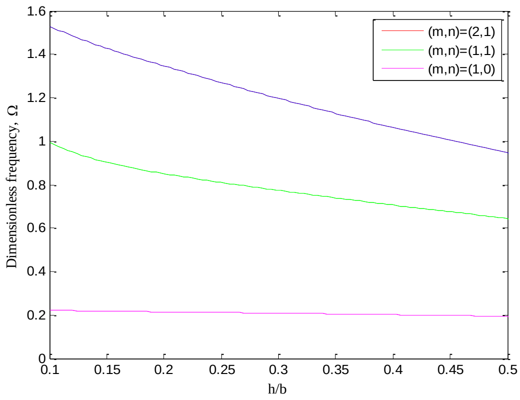
شکل (۱۵): تغییرات پارامتر فرکانسی بر حسب h/b برای ورق مربعی $FG, V^*_{CN}=0.12, P=0.5, a/b=1$.



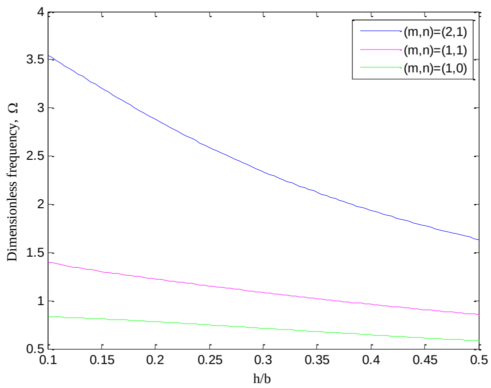
شکل(۱۶):تغییرات پارامتر فرکانسی بر حسب h/b برای ورق مستطیلی $FG, V^*_{CN}=0.12, P=0.5, a/b=2$.



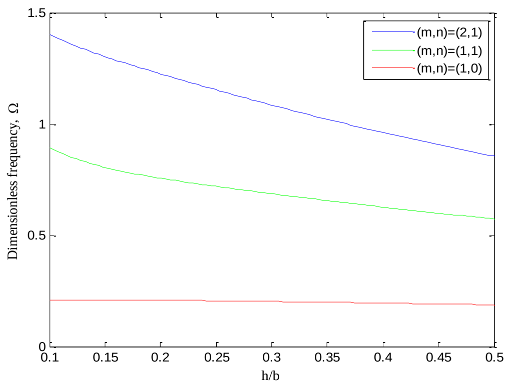
شکل (۱۷):تغییرات پارامتر فرکانسی بر حسب h/b برای ورق مربعی $FG, V^*_{CN}=0.17, P=0.5, a/b=1$.



شکل (۱۸): تغییرات پارامتر فرکانسی بر حسب h/b برای ورق مستطیلی $FG, V^*_{CN}=0.17, P=0.5, a/b=2$.



شکل (۱۹):تغییرات پارامتر فرکانسی بر حسب h/b برای ورق مربعی $FG, V^*_{CN}=0.28, P=0.5, a/b=1$.



شکل(۲۰): تغییرات پارامتر فرکانسی بر حسب h/b برای ورق مستطیلی $FG, V^*_{CN}=0.28, P=0.5, a/b=1$.

۱۱- نتیجه‌گیری

در این مقاله، تحلیل ارتعاشات آزاد ورق تابعی مدرج (FGM) تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تک جداره با شرایط مرزی،

تکیه‌گاه ساده براساس تئوری الاستیسیته سه‌بعدی با استفاده از روش دیفرانسیل کوادریچر مورد بررسی قرار گرفته است، نتایج زیر قابل جمع‌بندی و ارائه می‌باشد:

۱- با افزایش عدد موج (m,n) برای مقادیر مشخص از نسبت کسر h/b ، فرکانس بی بعد ورق افزایش می‌یابد،

۲- در مقادیر مشخص از نسبت کسر h/b، فرکانس بی‌بعد ورق مربعی از فرکانس بی بعد ورق مستطیلی بیشتر می‌باشد،

۳- با افزایش نسبت h/b، فرکانس بی‌بعد ورق مربعی تغییرات بیشتری نسبت به ورق مستطیلی داشته است،

۴- با افزایش ضریب اندیس توان، p، در اعداد موج مختلف، مقدار فرکانس بی‌بعد کاهش می‌یابد،

۵- با افزایش ضریب اندیس توان، p، در هر دو حالت از توزیع نانولوله‌ها مقدار فرکانس بی بعد ورق کاهش می‌یابد که این کاهش فرکانس در حالت توزیع یکنواخت نانولوله‌ها بیشتر از حالت توزیع تابعی مدرج است،

۶- با افزایش ضریب اندیس توانی، p، و افزایش نسبت کسرh/b، مقدار تغییرات فرکانس بی‌بعد برای ضریب اندیس توانی $0 \le p \le 1$ کمتر از محدوده $p > 1$ است،

۷- در مقادیر مشخص از نسبت کسر h/b، با افزایش کسر حجمی نانولوله‌ها در هر دو حالت از توزیع نانو لوله‌ها (حالت یکنواخت و حالت مدرج تابعی) فرکانس بی‌بعد سیستم کاهش یافته است،

۸- در مقادیرمشخص از نسبت کسر h/b، با افزایش کسر حجمی نانولوله‌ها به‌صورت توزیع یکنواخت و مدرج تابعی، فرکانس بی بعد کاهش می‌یابد،

۹- در مقادیر مشخص از عدد موج (m,n)، مقدار فرکانس بی‌بعد برای توزیع نانولوله‌ها به‌صورت تابعی مدرج بیشتر از حالت توزیع یکنواخت آنها است،

۱۰-با افزایش ضریب اندیس توان، p، مقدار فرکانس بی‌بعد برای توزیع نانولوله‌ها به‌صورت تابعی مدرج بیشتر از حالت توزیع یکنواخت است،

۱۱- در عدد موج (m,n)=(۱و۱)، با افزایش نسبت کسر h/b، کاهش مقدار اختلاف فرکانس بین دو حالت توزیع تابعی مدرج و توزیع یکنواخت بیشتر از دو عدد موج (m,n)=(۱و۰) و (m,n)=(۱و۲) است و

۱۲- بیشترین مقدار فرکانس بی‌بعد مربوط به عدد موج (m,n)=(۱و۲) در کسر حجمی ۰/۱۲ و کمترین مقدار آن مربوط به عدد موج (m,n)=(۱و۰) در کسر حجمی ۰/۲۸ می‌باشد که این موضوع در مسائل طراحی می‌تواند مدنظر قرار گیرد.

۱۲- مراجع

1. Yang, J. and Shen, H.S. "Dynamic Response of Initially Stressed Functionally Graded Rectangular Thin Plates", J. Composite Structures, Vol. 54, No. 4, pp. 497-508, 2001.
2. Ghugal, Y.M. and Shimpi, R.P. "A Review of Refined Shear Deformation Theories of Isotropic and Anisotropic Laminated Plates", J. Reinforced Plastics and Composites, Vol. 21, No. 9, pp. 775-813, 2002.
3. Batra, R.C. and Jin, J. "Natural Frequencies of a Functionally Graded Anisotropic Rectangular Plate", J. Sound and Vibration, Vol. 282, No's. 1-2, pp. 509-516, 2005.
4. Chen, Z.Q. and Batra, R.C. "Exact Correspondence Between Eigenvalues of Membranes and Functionally Graded Simply Supported Polygonal Plates", J. Sound and Vibration, Vol. 229, No. 4, pp. 879-895, 2000.
5. Yang, J. and Shen, H.S. "Vibration Characteristics and Transient Response of Shear Deformation Functionally Graded Plates in Thermal Environment", J. Sound and Vibration, Vol. 255, No. 3, pp. 579-602, 2002.
6. Qian, L.F., Batra, R.C., and Chen, L.M. "Static and Dynamic Deformations of Thick Functionally Graded Elastic Plates by Using Higher-Order Shear and Meshless Local Petrov-Galerkin Method", J. Composite Part B: Engaineering, Vol. 35, No's. 6-8, pp. 685-697, 2004.
7. Khdeir, A.A. and Reddy, J.N. "Dynamic Response of Antisymmetric Angle-Ply Laminated Plates Subjected to Arbitrary Loading", J. Sound and Vibration, Vol. 126, No. 3, pp. 437-445, 1988.
8. Roque, C.M.C., Ferreira, A.J.M. and Jorge, R.M.N. "A Radial basis Function Approach for the Free vibration Analysis of Functionally Graded Plates using a Refined Theory", J. Sound and Vibration, Vol. 300, No's. 3-5, pp. 1048-1070, 2007.
9. Malekzadeh, P. "Three-Dimensional Free Vibration Analysis of Thick Functionally Graded Plates on Elastic Foundations", J. Composite Structures, Vol. 89, No. 3, pp. 367-373 ,2009.
10. Matsunaga, H. "Free Vibration and Stability of Functionally Graded Plates Accordingto a 2-D Higher-Order Deformation Theory", J. Composite Structures, Vol. 82, No. 4, pp. 499-512, 2008.
11. Woo, J., Meguid, S.A., and Ong, L.S. "Nonlinear Free Vibration Behavior of Functionally Graded Plates", J. Sound and Vibration, Vol. 289, No. 3, pp. 595-611, 2006.
12. Hosseini Hashemi, S. and Arsanjani, M. "Exact Characteristic Equationfor Some of Classical Boundary Conditions of Vibrating Moderately Thick Rectangular Plates", Int. J. Solids and Structures, Vol. 42, No. 4, pp. 819-853, 2005.
13. Yas, M.H. and Sobhani, B. "Free Vibration Analysis of Continuous Grading Fiber Reinforced Plate on Elastic Foundation", Int. J. Engineering Science, Vol. 48, No. 12, pp. 1881-1895, 2009.
14. Hosseini Hashemi, S., Rokni Damavandi Taher, H., Akavan, H., and Omidi, M. "Free Vibration of Thick Functionally Graded Rectangular Plates Using First-

Order Shear Deformation Plate Theory", J. Appl. Math. Model, Vol. 34, No. 5, pp. 1276-1291, 2004.
15. Shu, C. "Differential Quadratureand Its Application in Engineering", Springer, Berlin, 2000.
16. Dong Li, Sh. and Yonggana, Y.H. "The Effect of Nanotube Waviness and Agglomeration on the Elastic Property of Carbon Nanotube-Reinforced Composites", J. ASME, Vol. 126, No. 3, pp. 250-257, 2004.
17. Jafari Mehrabadi, S., Kargarnovin, M.H., and Najafizadeh, M.M. "Free Vibration Analysis of Functionally Graded Coupled Circular Plate With Piezoelectric Layers", J. Mechanical Science and Technology. Vol. 23, No. 8, pp. 2008-2021, 2009.
18. Hosseini Hashemi, S., Fadaee, M., and Atashipour, S.R. "Study on the Free Vibration of Thick Functionally Graded Rectangular Plates According to a New Exact Closed-Form Procedure", J. Composite Structures, Vol. 93, No. 3, pp. 722-735, 2011.
19. Bert, C.W. and Malik, M. "Differential Quadrature Method in Computational Mechanics: a Review", J. Appl. Mech. Rev, Vol. 49, No. 1, pp. 1-27, 1996.

پیوست الف-روش DQ

روش‌های تقریبی عددی، کاربرد زیادی برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای در زمینه‌های مختلف مهندسی دارند.در میان این روش‌ها، روش‌های کلاسیک مانند روش تفاضل‌های محدود و اجزاء محدود به‌خوبی شناخته شده و کاربرد آنها توسعه داده شده است. دراین روش‌ها، استفاده از تعداد زیادی نقاط شبکه می‌تواند منجر به نتایج دقیقی شود که البته این امر مستلزم استفاده از رایانه‌های با ظرفیت بالا می‌باشد. پژوهش در مورد یافتن روش‌های عددی با محاسبات کمتر همواره مطرح بوده است. یکی از این روش‌ها، روش DQ می‌باشد.

روش DQ در سال ۱۹۷۱ توسط بلمن و کاستی ابداع شد. پایه و اساس این روش، بیان مشتق یک تابع نسبت به یک راستای مختصات به‌صورت یک جمع خطی وزنی از مقادیر تابع در تمام نقاط شبکه می‌باشد. روش DQ دارای توان تعیین جواب گسسته شده با کمترین حجم محاسبات می‌باشد. مطالعات انجام شده در مورد این روش، نشان داده است که DQM دارای پتانسیل لازم برای رقابت با روش اجزاء محدود و روش تفاضل‌های محدود است.

اساسی‌ترین قدم در کاربرد روش DQ یافتن ضرایب وزنی است. برای یافتن ضرایب وزنی از یک سری توابع آزمایشی استفاده می‌شود، به این ترتیب که این توابع و مشتقات آنها در معادله (A.1) قرار گرفته که ارضای این معادلات، منجر به حل دستگاهی می‌شود که از آن، ضرایب وزنی به‌دست می‌آید.

$$\frac{\partial^n f\left(x_i\right)}{\partial x^n}=\sum_{j=1}^{N} A_{ij}^{n} f\left(x_j\right), i=1,\ldots,N, \quad n=1,\ldots,N-1, \tag{A.1}$$

در این معادله، N تعداد نقاط شبکه، n مرتبه مشتق‌گیری و A_{ij} ضرایب وزنی است.

برای تعیین ضرایب وزنی، لازم است تعداد نقاط شبکه برابر با تعداد توابع آزمایشی باشد. این توابع یک جمله‌ای‌های یک چندجمله‌ای با یک درجه کمتر از تعداد نقاط شبکه هستند. علاوه بر این «کامل بودن» توابع آزمایشی ایجاب می‌نماید، حداقل تعداد نقاط شبکه مساوی با بزرگ‌ترین درجه مشتق نسبت به متغیر در معادله دیفرانسیل، به علاوه یک باشد.

ضرایب وزنی با درونیابی لاگرانژ قابل محاسبه‌اند، که این ضرایب به‌صورت زیر می‌باشد:

$$A_{ij}^{(1)}=\frac{M\left(x_i\right)}{\left(x_i-x_j\right)M\left(x_j\right)},$$

$$i, j=1,\ldots,N, and j\neq i,$$

$$A_{ij}^{k}=k\left[A_{ii}^{(k-1)}.A_{ij}^{(1)}-\frac{A_{ij}^{(k-1)}}{x_i-x_j}\right], 2\leq k\leq N-1,$$

$$A_{ii}^{m}=-\sum_{j=1\, j\neq i}^{N} A_{ij}^{m}, m=1,\ldots,N-1,$$

$$M\left(x_i\right)=\prod_{j=1\, j\neq i}^{N}\left(x_i-x_j\right) \tag{A.2}$$

انتخاب نقاط شبکه و چگونگی توزیع آنها از عوامل مهم و مؤثر در بازده روش دیفرانسیل کوادریچر است. در حقیقت دقت این روش به گستردگی نقاط شبکه بسیار حساس است. توزیع بهینه نقاط شبکه به مرتبه مشتق در شرایط مرزی و تعداد نقاط شبکه وابسته است. توزیع نقاط شبکه نقش حیاتی دربه‌دست آوردن سرعت همگرایی و پایداری روش دیفرانسیل کوادریچر تعمیم یافته بازی می‌کند. معمولاً توزیع غیریکنواخت شبکه نسبت به توزیع یکنواخت آن نتایج بهتری را به همراه دارد. برت و مالک (۱۹۹۶) نشان دادند توزیع نقاط شبکه با توجه به مسئله فرق می‌کند و پیشنهاد کردند که برای مسائل مکانیک سازه‌ای از روش Chebyshev–Gauss–Lobatto برای توزیع نقاط شبکه استفاده شود.

نقاط نمونه Chebyshev–Gauss–Lobatto توسط رابطه زیر تعریف می‌شوند(C-G-L):

(A.3)

$$z_i = \frac{h}{2}\left(1-\cos\left(\frac{i-1}{N-1}\pi\right)\right),$$

$$i = 1,\ldots, N,$$

با تعیین ضرایب وزنی (A.2) و استفاده از توزیع نقاط شبکه (A.3) و جایگذاری این ضرایب در رابطه (A.1)، هدف اصلی از کاربرد این روش که حل معادله دیفرانسیل حاکم بر مسئله می‌باشد، حاصل می‌شود.

پیوست ب- خواص نانولوله ها

خواص الکتریکی، مولکولی و ساختاری نانولوله‌ها تا حد زیادی از ساختار تقریباً یک بعدی آنها ناشی می‌شود. در اینجا به مهم‌ترین خواص نانولوله‌های کربنی و علت مولکولی آنها اشاره می‌کنیم.

ب-۱- واکنش‌پذیری شیمیایی

به‌دلیل وجود انحنا و قوسی شکل بودن سطح CNT، آنها واکنش‌پذیری بهتری در مقایسه با صفحه گرافیتی دارند. واکنش‌پذیری نانولوله‌های کربنی مستقیماً به بهم ریختن توازن اوربیتال پی[1] آنها که در اثر انحنای سطحی ایجاد می‌شود، بستگی دارد.

ب-۲- استحکام و مقاومت

نانولوله‌های کربنی، هم از نظر مقاومت کششی و هم از نظر ضریب کشسانی، یکی از محکم‌ترین موادی هستند که تاکنون شناخته شده‌اند. این استحکام برگرفته از پیوندهای کووالانسی بین اتم‌های کربن است. مدول یانگ نانولوله‌های کربنی در راستای محورشان بسیار زیاد است.

ب-۳-خواص حرکتی

نانولوله‌های کربنی چند جداره، نانولوله‌های هم محوری‌اند که دقیقاً داخل یکدیگر قرار گرفته‌اند و دارای خاصیتی برجسته‌اند. به این ترتیب که یک نانولوله در هسته مرکزی می‌تواند درون لوله بیرونی، بدون هیچ اصطکاکی بلغزد و یک یاتاقان خطی و یا چرخشی ایده‌آل اتمی را به‌وجود می‌آورد. این، یکی از اولین مثال‌های واقعی نانوفناوری مولکولی است (جاگذاری دقیق اتم‌ها برای ساخت ماشین‌های مفید). این خاصیت، هم‌اکنون برای ساخت کوچک‌ترین موتور چرخشی جهان[2] و یک نانورئوستات[3] استفاده می‌شود. در کاربردهای آینده دورنمای جالبی نظیر نوسان‌سازهای مکانیکی گیگاهرتزی به چشم می‌خورد.

ب-۴- خواص الکتریکی

به‌دلیل تقارن و ساختار منحصر به فرد گرافیت، خواص الکتریکی نانولوله به‌شدت تحت تأثیر ساختار نانولوله است. بسته به بردار کایرال آنها، نانولوله‌های کربنی با قطری کم می‌توانند نیمه‌هادی یا فلزی باشند. تفاوت در هدایت الکتریکی به‌دلیل ساختمان مولکولی آنهاست که ساختار باند انرژی متفاوت و در نتیجه شکاف باند متفاوتی را نتیجه می‌دهد.

ب-۵- خواص حرارتی

تمام نانولوله‌ها هدایت گرمایی خوبی در راستای طول‌شان دارند؛ در حالی که در راستای عرض لوله، عایق حرارت‌هستند و به این ترتیب می‌توانند گرما را از مسیرهای هدایت‌شده انتقال دهند.

ب-۶- رفتار الاستیکی نانولوله

بررسی رفتار الاستیکی SWNTها، یکی از بحث‌های جنجالی سال‌های اخیر بوده است. در مجموع SWNTها از فولاد سخت‌تر و در برابر نیروهای فیزیکی مقاوم‌تر هستند. فشار بر سر نانولوله، بدون اعمال هیچ صدمه‌ای به نانولوله، باعث خم شدن آن می‌شود. با برداشتن فشار، سر نانولوله به موقعیت اولیه‌اش برمی‌گردد. فرمول‌بندی این رفتار نسبتاً مشکل است و توافق روی مقدار عددی دقیقی حاصل نشده است. مدول یانگ (الاستیسیته) نانولوله‌ای تک جداره نزدیک یک تراپاسکال است و حداکثر استحکام کششی آن نزدیک ۳۰ گیگاپاسکال است.

1- Pi-Orbital

2- Nanorotor

3- Nanorheostat