تحلیل پدیده آشوب در حرکت انتقالی- دورانی ماهواره ژیروستات به روش ملنیکف

سید مهدی ابطحی[۱]
دانشکده مهندسی صنایع و مکانیک
دانشگاه آزاد اسلامی، واحد قزوین

سید حسین ساداتی[۲]
دانشکده مهندسی مکانیک
دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی

حسن سالاریه[۳]
دانشکده مکانیک مهندسی
دانشگاه صنعتی شریف

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۱/۱۰/۲۰؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۱/۲۱)

چکیده

در این مقاله به بررسی تأثیر حرکت انتقالی ماهواره ژیروستات بر روی دینامیک دورانی آن پرداخته شده است. پس از مدل‌سازی ریاضی سیستم ماهواره در حرکت انتقالی- دورانی با استفاده از روش همیلتون، معادلات کاهش یافته سیستم در حرکت کوپله شده وضعی و مداری با استفاده از تبدیل کانونی دپریت محاسبه شد. به‌منظور بررسی پدیده‌های غیرخطی آشوب و دوشاخگی هیتروکلینیک، از روش تحلیلی دقیق ملنیکف در کنار روش‌های عددی همچون روش نمای لیاپانف، بررسی مقاطع پوانکاره، مسیرهای صفحه فازی سیستم و پاسخ‌های سری زمانی استفاده شده است. نتایج حاصل از روش‌های تحلیلی ریاضی و عددی سیستم همگی مبین وجود رخداد آشوب در سیستم می‌باشند. همچنین بر اساس نتایج به‌دست‌آمده از روش تحلیلی ملنیکف، می‌توان پارامترهای مؤثر بر طراحی ماهواره را طوری انتخاب نمود تا از وقوع دوشاخگی هیتروکلینیک و ایجاد رفتار آشوبناک در سیستم ماهواره ژیروستات جلوگیری کند بدون آنکه نیاز به سیستم کنترل کننده آشوب باشد.

واژه‌های کلیدی: ماهواره ژیروستات، حرکت انتقالی- دورانی، ملنیکف، نمای لیاپانف، آشوب

Chaos Analysis for Roto-Translatory Motion of a Gyrostat Satellite Using Melnikov Method

S.M. Abtahi
Faculty of Industrial and Mechanical Engineering
Qazvin Branch, Islamic Azad University

S.H. Sadati
Faculty of Mechanical Engineering
K.N.Toosi University of Technology

H. Salarieh
Department of Mechanical Engineering,
Sharif University of Technology

(Received: 9/January/2013; Accepted: 10/April/2014)

ABSTRACT

Interactions of the translational motion of a gyrostat satellite on its attitude dynamics is considered in this paper. The mathematical model is first derived using the Hamiltonian method for the rotation-Translation motion of the gyrostat satellite followed by the reduction of the coupled equations of motion using the extended Deprit canonical transformation. The analytical Melnikov method along with the numerical Lyapunov exponent criterion, Poincare' section, trajectories of phase portrait, and the time history responses are used to study the heteroclinic bifurcation and chaos phenomena on the reduced model. On the basis of the results obtained from Melnikov integral, the parameters of the gyrostat satellite can be designed to prevent chaos in the system in the absence of a control system.

Keywords: Gyrostat Satellite, Coupled Roto-Translatory Motion, Melnikov, Lyapunov Exponent, Chaos

۱- استادیار (نویسنده پاسخگو): m_abtahi@dena.kntu.ac.ir
۲- استادیار: sadati@kntu.ac.ir
۳- دانشیار: salarieh@sharif.ir

فهرست علائم و اختصارات

R_O	فاصله بین مرکز جرم ماهواره تا زمین
I	ممان اینرسی ماهواره
T	انرژی جنبشی کل ماهواره
H	ممنتوم زاویه‌ای کل ماهواره مرکز جرم
m_B	جرم بدنه ماهواره
m_g	جرم چرخ عکس العملی
m_S	جرم کل ماهواره ژیروستات
ω	سرعت زاویه‌ای بدنه اصلی ماهواره
ω_O	سرعت زاویه‌ای حرکت دورانی ماهواره
μ_O	آنومالی خارج از مرکز
φ,θ,ψ	زوایای اولر

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر، توجه زیادی به تحلیل پدیده آشوب[1] در دینامیک ماهواره شده است. اما در مدل‌سازی‌های انجام شده، تنها حرکت وضعی (دورانی) ماهواره در نظر گرفته شده و در هیچ یک تأثیرات حرکت مداری (انتقالی) بر روی دینامیک دورانی ماهواره بررسی نشده است [۶-۱]. از آنجایی که دینامیک ماهواره یک سیستم همیلتونی است، روش ملنیکف[2] به‌عنوان ابزاری مناسب برای بررسی تحلیلی و دقیق پدیده آشوب استفاده شده است. همچنین از روش نمای لیاپانف و تحلیل روی مقاطع پوانکاره برای مطالعه، اثبات و بررسی عددی آشوب در سیستم ماهواره بهره برده شده است [۸و۷].

ماهواره‌های ژیروستات با توجه به ساختار دینامیکی و همچینن وجود سیستم پایدارساز داخلی، در مأموریت‌های بسیار حساس مورد استفاده قرار می‌گیرد. از طرف دیگر ایجاد رفتار آشوبناک در سیستم ماهواره ژیروستات موجب ایجاد بی‌نظمی دینامیکی در پاسخ‌های سیستم و مختل شدن مأموریت دقیق ماهواره ژیروستات می‌گردد. تأثیرات اغتشاشی در دینامیک‌های همیلتونی می‌تواند در وقوع رفتار آشوب‌گونه مؤثر باشد. از طرفی، اضافه کردن دینامیک مداری ماهواره ژیروستات به حرکت دورانی آن، در حکم اغتشاشات جزیی برای سیستم همیلتونی تلقی می‌گردد که یکی از عوامل بی‌نظمی در سیستم محسوب می‌شود. در میان تمامی پژوهش‌هایی که در زمینه تحلیل آشوب در ماهواره ژیروستات صورت گرفته است، از تأثیرات حرکت مداری (انتقالی) بر دینامیک وضعی ماهواره صرف‌نظر شده است و در واقع هیچ یک مسئله دینامیک انتقالی- دورانی[3] را برای ماهواره ژیروستات بررسی نکرده اند [۱۳-۹].

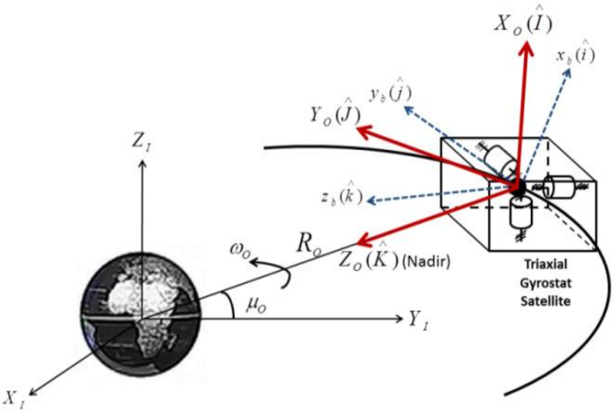
ساختار دینامیکی ماهواره‌های ژیروستات به‌دلیل وجود پایدارسازهای سه محوره از پیچیدگی زیادی برخوردار هستند. همچنین اضافه کردن حرکت انتقالی ماهواره به دینامیک دورانی آن قطعاً بر پیچیدگی‌های دینامیکی سیستم خواهد افزود. بنابراین، به‌کارگیری روشی به‌منظور کاهش مرتبه معادلات سیستم[4] ضروری به‌نظر می‌رسد که یکی از این روش‌ها توسط تبدیل کانونی دپریت[5] انجام می‌گیرد[۱۴].

در این مقاله، تأثیر حرکت مداری بر روی دینامیک وضعی ماهواره ژیروستات از منظر تأثیرات اغتشاشی در ایجاد رفتار آشوبناک در دینامیک سیستم مورد بررسی قرار گرفته است. معادلات کوپله شده حرکت انتقالی- دورانی ماهواره ژیروستات به‌وسیله روش همیلتون استخراج شد. به‌منظور تحلیل مدل پیچیده سیستم، از تبدیل کانونی دپریت که تنها در دینامیک دورانی ماهواره استفاده شده بود، در این کار برای حرکت انتقالی- دورانی ماهواره ژیروستات توسعه داده شد. کاهش مرتبه سیستم با تعریف مختصات سرت- آندویر[6] برای پارامترهای حرکت انتقالی-دورانی انجام گرفت. پدیده آشوب در سیستم همیلتونی توسط قضیه اسمیل- بریخوف و رفتار نگاشت نعل اسبی با وجود تقاطع در مدارات هیتروکلینیک تحلیل می‌گردد. بنابراین به‌وسیله روش تحلیلی ملنیکف، دوشاخگی هیتروکلینیک[7] و پدیده آشوب بر روی معادله همیلتونین کاهش یافته سیستم بررسی شد. برای تایید نتایج حاصل از انتگرال ملنیکف، روش‌های عددی مانند نمای لیاپانف، مقطع پوانکاره، مسیرهای صفحه فازی و پاسخ‌های سری زمانی مورد استفاده قرار گرفتند که همگی موید وجود آشوب و ایجاد جاذب شگفت[8] در سیستم ماهواره ژیروستات می‌باشند. در نهایت بر اساس نتایج به‌دست آمده از روش ملنیکف، پارامترهای طراحی سیستم مثل جرم و ممان اینرسی را می‌توان طوری طراحی نمود که بدون استفاده از سیستم کنترلی فعال، از وقوع آشوب در سیستم ماهواره جلوگیری کند.

1- Chaos
2- Melnikov Method
3- Roto-Translatory motion
4- Reduction Method
5- Deprit Canonical Transformation
6- Serret-Andoyer
7- Heteroclinic Bifurcation
8- Strange Attractor

۲- مدل‌سازی دینامیکی ماهواره ژیروستات

ماهواره ژیروستات متشکل از یک بدنه اصلی صلب و سه روتور به‌عنوان چرخ عکس‌العملی[1] تشکیل شده است که روتورها به‌عنوان پایدارساز در اهداف کنترلی ماهواره استفاده می‌گردد. با قرار دادن روتورها در راستای محور اصلی ماهواره ژیروستات، تانسور ممان اینرسی کل قطری می‌شود. همچنین حرکت انتقالی ماهواره در مداری دایروی- استوایی با صرفنظر از تأثیرات اغتشاشی مفروض است. در این مدل، R_O فاصله بین مرکز جرم ماهواره و زمین و ω_O سرعت زاویه ای ماهواره حول زمین تحت رابطه $\omega_O = d\mu_O/dt$ است که در آن μ_O معادل آنومالی خارج از مرکز تعریف می‌شود که در شکل **۱** قابل مشاهده است [۱۵].



شکل (۱): دستگاه‌های مختصات در مدل‌سازی حرکت انتقالی- دورانی ماهواره ژیروستات.

به‌منظور تحلیل دینامیک حرکت کوپله شده انتقالی- دورانی در ماهواره ژیروستات از سه دستگاه مختصات متعامد مطابق شکل **۱** استفاده شده است. دستگاه اول، دستگاه مختصات اینرسی $I\{X_I, Y_I, Z_I\}$ است که مرکز آن منطبق بر مرکز جرم زمین بوده و محور X_I از محور اعتدال بهاری[2] می‌گذرد. دستگاه دوم، دستگاه مختصات مداری $O\{X_O, Y_O, Z_O\}$ با بردارهای یکه I, J, K است که مرکز آن منطبق بر مرکز جرم ماهواره ژیروستات بوده، محور X_O عمود بر صفحه مدار در راستای مثبت ممنتوم زاویه ای حرکت مداری، محور Y_O مماس بر راستای حرکت مداری و محور Z_O در راستای مرکز جرم زمین[3] می‌باشد. دستگاه مختصات بدنی $B\{X_b, Y_b, Z_b\}$ با بردارهای یکه $\hat{i}, j, k$ که متصل به بدنه ماهواره است و مرکز آن در مرکز جرم ماهواره ژیروستات قرار دارد و محورهای متعامد آن منطبق بر محورهای اصلی ماهواره ژیروستات می‌باشد.

1- Reaction Wheel
2- Ascending Node
3- Nadir

دینامیک حرکت انتقالی- دورانی ماهواره ژیروستات با استفاده از روش همیلتون مدل‌سازی می‌گردد. برای این منظور، ماهواره ژیروستات سه محوره را در مدار دایروی تحت گشتاورهای اغتشاشی گرادیان جاذبه زمین در نظر می‌گیریم. جهت گیری زاویه ای بین دستگاه‌های مختصات مداری و بدنی توسط زوایای اولر φ, θ, ψ با ترتیب کلاسیک $x \rightarrow y \rightarrow z$ بیان می‌شود و توسط آن مدل سینماتیکی ماهواره ژیروستات به‌صورت زیر استخراج می‌گردد:

$$\omega_x = \dot{\varphi}\cos\psi\cos\theta + \dot{\theta}\sin\psi \qquad (۱)$$

$$\omega_y = -\dot{\varphi}\sin\psi\cos\theta + \dot{\theta}\cos\psi \qquad (۲)$$

بدنه اصلی ماهواره در دستگاه بدنی است. مدل سینتیکی حرکت انتقالی- دورانی ماهواره ژیروستات به روش همیلتون استخراج می‌گردد. با این فرض که حرکت مداری به‌صورت صفحه‌ای بوده و دو متغیر R_O و μ_O تنها به حرکت انتقالی اختصاص داده می‌شود. برای استخراج مدل دینامیکی به روش همیلتون، اولین گام، محاسبه لاگرانژین سیستم تحت رابطه زیر است:

$$L = T - U_g = L(\varphi, \theta, \psi, \mu_O, R_O, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\mu}_O, \dot{R}_O) \qquad (۴)$$

که در آن، T انرژی جنبشی و U_g انرژی پتانسیل ماهواره ژیروستات است. انرژی پتانسیل گرانشی سیستم توسط رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$U_g = -\frac{GMm_s}{R_O} \qquad (۵)$$

که G ثابت جهانی گرانش و M جرم زمین است. انرژی جنبشی سیستم، شامل ترم‌های مربوط به حرکت‌های انتقالی و دورانی است که به‌دلیل سادگی در محاسبات به صورت معادله اغتشاشی[4] نوشته می‌شود که در حالت مدار باز (بدون اعمال گشتاورهای کنترلی) به‌صورت زیر می‌باشد [۱۶و۱۵]:

$$T = T_0 + \omega_O T_1 + \omega_O^2 T_2 \qquad (۶)$$

که در آن،

$$T_0 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\omega_x & \omega_y & \omega_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_x & \omega_y & \omega_z\end{bmatrix}^T + \frac{1}{2}m_s R_O^2 \omega_O^2 + \frac{1}{2}m_s \dot{R}_O^2 \qquad (۷)$$

4- Perturbation

$$T_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} C_\theta C_\psi & -C_\theta S_\psi & S_\theta \end{bmatrix}[\tilde{I}]\begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix}^T \quad (۸)$$

$$T_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} C_\theta C_\psi & -C_\theta S_\psi & S_\theta \end{bmatrix}\left[\tilde{I}\right]\begin{bmatrix} C_\theta C_\psi & -C_\theta S_\psi & S_\theta \end{bmatrix}^T \quad (۹)$$

و ماتریس $\tilde{I}$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\tilde{I} = \begin{bmatrix} I_x & m_g^2 r^2 / m_s & m_g^2 r^2 / m_s \\ m_g^2 r^2 / m_s & I_y & m_g^2 r^2 / m_s \\ m_g^2 r^2 / m_s & m_g^2 r^2 / m_s & I_z \end{bmatrix} \quad (۱۰)$$

در رابطه (۱۰)، I_x ، I_y و I_z ممان اینرسی بدنه اصلی ماهواره نسبت به مرکز جرم آن و m_s جرم کل ماهواره ژیروستات با رابطه $m_s = m_B + 3m_g$ است که در آن m_B جرم بدنه اصلی ماهواره ژیروستات و m_g جرم هر چرخ عکس‌العملی می‌باشد. همچنینr فاصله بین مرکز جرم هر چرخ عکس العملی با مرکز جرم بدنه اصلی ماهواره ژیروستات است. در روابط فوق و تمامی معادلات دیگر، $C_{(.)}$ و $S_{(.)}$ به‌ترتیب معادل $\cos(.)$ و $\sin(.)$ هستند. ممنتوم‌های تعیمم‌یافته مربوط به مختصات انتقالی و دورانی سیستم توسط روابط زیر محاسبه می‌شوند.

$$P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}},\ P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}},\ P_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}},$$
$$P_{\mu_O} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mu}_O},\ P_{R_O} = \frac{\partial L}{\partial \dot{R}_O} \quad (۱۱)$$

همیلتونین سیستم نیز از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$H = \dot{\varphi} P_\varphi + \dot{\theta} P_\theta + \dot{\psi} P_\psi + \dot{\mu}_O P_{\mu_O} + \dot{R}_O P_{R_O} - L \quad (۱۲)$$

با جایگذاری روابط (۶) تا (۱۱) در رابطه (۱۲) و ساده سازی آن، رابطه (۱۳) برای همیلتونین سیستم استخراج می‌گردد [۱۶].

$$H = T_0 + \left(\omega_O\right)T_1 + \left(\omega_O^2\right)T_2 + U_g \quad (۱۳)$$

با استفاده از محورهای اصلی دستگاه مختصات (۱-۲-۳) به‌جای دستگاه مختصات (x-y-z)، ماتریس رابطه (۱۰) قطری شده و با جایگذاری معادلات (۵) تا (۱۰) در رابطه (۱۳)، همیلتونین در دستگاه مختصات اصلی جدید به‌صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$H_n = H_0 + (\omega_0)H_1 + (\omega_0^2)H_2 \quad (۱۴)$$

که در آن،

$$H_0 = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 + \frac{1}{2}\left(m_s R_O^2\right)\omega_O^2 + \frac{1}{2}m_s \dot{R}_O^2 + \frac{GMm_s}{R_O} \quad (۱۵)$$

$$H_1 = I_1 C_\Theta C_\Psi \omega_1 - I_2 C_\Theta S_\Psi \omega_2 + I_3 S_\Theta \omega_3 \quad (۱۶)$$

$$H_2 = \frac{1}{2}I_1 C_\Theta^2 C_\Psi^2 - \frac{1}{2}I_2 C_\Theta^2 S_\Psi^2 + \frac{1}{2}I_3 S_\Theta^2 \quad (۱۷)$$

همچنین ω_1 ، ω_2 و ω_3 مؤلفه‌های سرعت‌های زاویه‌ای ماهواره ژیروستات در راستای محورهای دستگاه مختصات اصلی ماتریس $\tilde{I}$ است و I_1 ، I_2 و I_3 ممان‌های اینرسی در صفحه اصلی‌اند که همان مقادیر ویژه ماتریس $\tilde{I}$ می‌باشند. پس از تبدیل به مختصات اصلی جدید، مجموعه جدید زوایای اولر Φ,Θ,Ψ در راستای محورهای اصلی ماتریس $\tilde{I}$ جایگزین زوایای φ,θ,ψ می‌گردند. ممنتوم‌های تعمیم‌یافته بر اساس زوایای اولر جدید Φ,Θ,Ψ مطابق روابط بیان شده در معادلات (۱۱) محاسبه می‌شوند. در این معادلات، ممنتوم‌های تعمیم‌یافته بر حسب سرعت‌های تعمیم یافته به‌دست می‌آیند. با حل سرعت‌های تعمیم یافته برحسب ممنتوم‌های تعمیم یافته و قرار دادن در معادله (۱۴)، همیلتونین سیستم تنها برحسب ممنتوم‌های تعمیم‌یافته و به‌صورت معادلات اغتشاشی به شکل زیر محاسبه می‌گردد:

$$H_n = H_{up} + \varepsilon_1 H_{p1} + \varepsilon_2 H_{p2} \quad (۱۸)$$

که در آن،

$$H_{up} = \frac{P_\Psi^2}{2I_3} + \frac{P_{R_O}^2}{2m_s} + P_\Theta^2\left(\frac{C_\Psi^2}{2I_2} + \frac{S_\Psi^2}{2I_1}\right) + \frac{GMm_s}{R_O} + \left(\frac{P_\Phi}{C_\Theta} - P_\Psi tan\Theta\right)^2 \left(\frac{C_\Psi^2}{2I_1} + \frac{S_\Psi^2}{2I_2}\right) + \left(\frac{P_\Phi}{C_\Theta} - P_\Psi tan\Theta\right) P_\Theta S_\Psi C_\Psi \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2}\right) \quad (۱۹)$$

$$H_{p1} = \frac{1}{2}I_1 C_\Theta^2 C_\Psi^2 - \frac{1}{2}I_2 C_\Theta^2 S_\Psi^2 + \frac{1}{2}I_3 S_\Theta^2 \quad (۲۰)$$

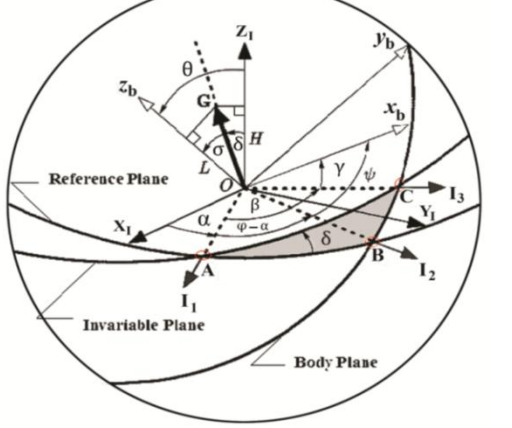
$$H_{p2} = 2P_\Phi P_\Psi S_\Theta - 4P_\Phi P_\Psi S_\Theta S_\Psi^2 + \frac{1}{2}\left(P_\Phi - P_{\mu_0}\right)^2 - P_\Phi^2 S_\Psi^2 \quad (۲۱)$$

که در روابط فوق، $\varepsilon_1 = \omega_0^2$ و $\varepsilon_2 = 1/m_s R_O^2$ پارامترهای اغتشاشی سیستم هستند. همچنین ترم‌های اغتشاشی H_{p1} و H_{p2} مربوط به حرکت مداری ماهواره ژیروستات می‌باشد که شامل متغیرهای انتقالی ω_O و R_O می‌باشند. بنابراین حرکت مداری ماهواره نسبت به حرکت وضعی آن دارای تأثیر بسیار کمی است. به عبارت دیگر، انرژی مربوط به حرکت دورانی ماهواره ژیروستات به‌طور کاملاً محسوس از انرژی حرکت انتقالی آن بیشتر است. با وجود نوشتن همیلتونین سیستم به شکل معادلات اغتشاشی، به‌دلیل پیچیدگی زیاد در مدل

ریاضی سیستم، تحلیل حرکت انتقالی- دورانی ماهواره بسیار دشوار بوده. از طرف دیگر، وجود ثوابت حرکتی[1] مانند معادله انرژی (به‌دلیل پایستار بودن سیستم) و ممنتوم زاویه‌ای کل (به‌دلیل عدم اعمال ورودی)، منجر به کاهش مرتبه همیلتونین سیستم می‌شود.

۳- کاهش مرتبه همیلتونین سیستم

مطابق همیلتونین سیستم که در معادله (۱۸) بیان شده است، از آنجایی که متغیر Φ به‌طور صریح در رابطه همیلتونین وارد نشده، در نتیجه Φ یک متغیر تناوبی[2] برای سیستم محسوب می‌شود و ممنتوم تعمیم‌یافته مربوط به آن یعنی P_Φ یکی از ثوابت حرکت سیستم می‌باشد. در نتیجه امکان کاهش مرتبه همیلتونین سیستم وجود دارد و این کار با استفاده از تبدیل کانونی دپریت که برای حرکت انتقالی- دورانی توسعه داده شده انجام می‌گیرد. در این روش کاهش، متغیرهای سرت- آندویر شامل پارامترهای حرکت وضعی و مداری براساس مثلث کروی که در شکل **۲** نشان داده شده تعریف می‌گردد[۱۲]. با استفاده از تبدیل کانونی دپریت تعمیم یافته، متغیرهای حالت سیستم شامل $\Phi, \Theta, \Psi, \mu_O, R_O$ به‌ترتیب به متغیرهای جدید $\alpha, \beta, \gamma, \rho_O, \lambda_O$ توسط روابط سرت- آندویر توسعه یافته مطابق رابطه (۲۲) تبدیل می‌شود.



شکل (۲): تعریف متغیرهای سرت- آندویر در تبدیل کانونی دپریت توسعه‌یافته.

$$P_\Phi = P_\alpha,\quad P_\Theta = P_\beta S_\sigma S_{\Psi-\gamma},\quad P_\Psi = P_\gamma,\quad P_{\mu_O} = P_{\lambda_O},\quad P_{R_O} = P_{\rho_O}. \qquad (۲۲)$$

1- Constant of Motion
2- Cyclic Coordinate

جزئیات مربوط به روابط موجود در تبدیل که براساس مثلث کروی ABC استخراج شده اند به‌صورت زیر به‌دست می‌آید [۱۴و۱۷].

$$\cos(\Theta) = \cos(\delta)\cos(\sigma) - \sin(\delta)\sin(\sigma)\cos(\beta) \qquad (۲۳)$$

$$\cos(\Psi-\gamma) = \cos(\Phi-\alpha)\cos(\beta) + sin(\Phi-\alpha)\sin(\beta)\cos(\delta) \qquad (۲۴)$$

$$\cos(\Phi-\alpha) = \cos(\Psi-\gamma)\cos(\beta) + sin(\Psi-\gamma)\sin(\beta)\cos(\sigma) \qquad (۲۵)$$

که در آن،

$$\cos(\delta) = \frac{P_\alpha}{P_\beta},\quad \cos(\sigma) = \frac{P_\gamma}{P_\beta}. \qquad (۲۶)$$

با جایگذاری معادلات (۲۲-۲۶) در روابط (۱۸-۲۱)، همیلتونین کاهش یافته به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$H'_n = H'_{up} + \varepsilon_1 H'_{p1} + \varepsilon_2 H'_{p2} \qquad (۲۷)$$

که،

$$H'_{up} = \frac{P_\gamma^2}{2I_3} + \frac{P_{\rho_O}^2}{2m_s} + \frac{GMm_s}{\rho_O} + \frac{1}{2}(P_\beta^2 - P_\gamma^2)\left(\frac{S_\gamma^2}{I_1} + \frac{C_\gamma^2}{I_2}\right) \qquad (۲۸)$$

$$H'_{p1} = \frac{1}{2}[I_3 - I_3 C_\delta^2 C_\sigma^2 - I_3 S_\delta^2 S_\sigma^2 C_\beta^2 + \frac{1}{2}(I_3 - I_1) S_{2\delta} S_{2\sigma} + (I_1 - I_2)(S_\delta^2 S_\sigma C_\beta + C_\delta S_\sigma C_\gamma) - I_1 S_\sigma^2 + I_2 C_\delta^2 S_\beta] \qquad (۲۹)$$

$$H'_{p2} = \frac{1}{2}P_{\lambda_O}^2 + P_{\lambda_O}\left(S_\sigma^2 S_\delta^2 + \frac{1}{2}S_{2\delta}C_{2\sigma}\right) + P_\gamma\left(S_\delta^2 S_\sigma + S_\delta S_\beta S_\gamma\right) + S_\beta C_\gamma + S_\delta^2 - S_\delta S_\sigma \qquad (۳۰)$$

در نهایت، معادلات کانونی حرکت سیستم براساس همیلتونین کاهش‌یافته در غیاب گشتاورهای کنترلی اعمالی بر سیستم توسط معادلات زیر محاسبه می‌شود.

$$\dot{q} = \frac{\partial H'_n}{\partial P_q},\quad \dot{P}_q = -\frac{\partial H'_n}{\partial q} \qquad (۳۱)$$

که، qها مختصات تعمیم‌یافته و P_qها ممنتوم‌های تعمیم یافته‌اند. معادلات (۳۱) شامل ۱۰ معادله حرکت در فضای حالت است. در حالت غیراغتشاشی، دو پارامتر α و λ_O ثابت‌اند و P_α و P_{λ_O} ثوابت حرکت می‌باشند. در نتیجه با استفاده از تبدیل دپریت توسعه یافته، سیستم ۵ درجه آزادی

به سیستم ۳ درجه آزادی تبدیل می‌شود. از آنجایی که حرکت انتقالی ماهواره ژیروستات به‌صورت ترم‌های اغتشاشی در همیلتونین سیستم کاهش‌یافته تأثیر می‌گذارد، در نتیجه براساس معادلات (۳۱)، معادلات حرکت سیستم در حالت غیر اغتشاشی تنها شامل دینامیک حرکت دورانی می‌باشد. همچنین با توجه به اینکه متغیر α ثابت است، معادلات حرکت وضعی ماهواره ژیروستات به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$\dot{\beta} = \frac{\partial H_n'}{\partial P_\beta} = P_\beta\left(\frac{S_\gamma^2}{I_1} + \frac{C_\gamma^2}{I_2}\right) \tag{۳۲}$$

$$\dot{P}_\beta = -\frac{\partial H_n'}{\partial \beta} = \varepsilon_1[-I_3 S_\delta^2 S_\sigma^2 S_\beta C_\beta + \frac{1}{2}\left(I_1 - I_2\right) S_\delta^2 S_\sigma S_\beta - \frac{1}{2} I_2 C_\delta^2 C_\beta] + \varepsilon_2(-P_\gamma(S_\delta C_\beta S_\gamma) - C_\beta C_\gamma) + \varepsilon_g (N_{gg,\beta}) \tag{۳۳}$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial H_n'}{\partial P_\gamma} = P_\gamma\left(\frac{1}{I_3} - \frac{S_\gamma^2}{I_1} - \frac{C_\gamma^2}{I_2}\right) + \varepsilon_2(S_\delta^2 S_\sigma + S_\delta S_\beta S_\sigma) \tag{۳۴}$$

$$\dot{P}_\gamma = -\frac{\partial H_n'}{\partial \gamma} = -\left(P_\beta^2 - P_\gamma^2\right) S_\gamma C_\gamma \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2}\right) + \varepsilon_1\left(\frac{1}{2}\left(I_1 - I_2\right) C_\delta S_\sigma S_\gamma\right) + \varepsilon_2(S_\beta S_\gamma - P_\gamma S_\delta S_\beta C_\gamma) + \varepsilon_g (N_{gg,\gamma}) \tag{۳۵}$$

که در آن، $\varepsilon_g = 3\mu / 2\rho_O^3$ پارامتر اغتشاشی مربوط به گشتاورهای گرادیان جاذبه زمین است و $\overrightarrow{N}_{gg}$ بردار گشتاور اغتشاشی گرادیان جاذبه زمین مطابق رابطه زیر است که باید توسط متغیرهای سرت- آندویر تبدیل شود:

$$\overrightarrow{N}_{gg} = \frac{3\mu}{2R_O^3}[\left(I_3 - I_2\right) S_{2\varphi} C_\theta^2 \hat{i} + \left(I_3 - I_1\right) S_{2\theta} C_\varphi j + \left(I_1 - I_2\right) S_{2\theta} C_\theta k] \tag{۳۶}$$

که در آن، μ ثابت گرانش است. مطابق روابط (۳۲-۳۵) رفتار آشوبناک سیستم همیلتونی توسط قضیه اسمیل- بریخوف و رفتار نگاشت نعل اسبی براساس تقاطع در مدارات هیتروکلینیک تحلیل می‌گردد. در نتیجه به‌عنوان یک ابزار مناسب تحلیل آشوب، معیار ملنیکف برای مطالعه و طراحی مطلوب سیستم مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۴- تحلیل آشوب به روش ملنیکف

روش ملنیکف، یک روش اغتشاشی برای اثبات وجود تقاطع در مدارات هیتروکلینیک است که وجود آشوب در نزدیکی مدارات هیتروکلینیک غیراغتشاشی سیستم را بر اساس قضیه اسمیل-بریخوف نشان می‌دهد. مسئله مهم در استفاده از روش ملنیکف حل مدارات هیتروکلینیک سیستم است. براساس قضایای حاکم بر روش ملنیکف، به‌جای حل سیستم اغتشاشی از سیستم غیراغتشاشی می‌توان استفاده نمود. از آنجائیکه حرکت مداری تنها در ترم‌های اغتشاشی ظاهر می‌شود، از معادلات حرکت دورانی ماهواره ژیروستات به همراه حل آنها در روش ملنیکف استفاده می‌گردد. دینامیک دورانی ماهواره ژیروستات بر پایه معادلات اولر به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$h'_x + \left(\frac{1-\bar{I}_1}{\bar{I}_1}\right) h_y h_z = 0 \tag{۳۷}$$

$$h'_y + \left(\frac{\bar{I}_1 - \bar{I}_2}{\bar{I}_1 \bar{I}_2}\right) h_x h_z = 0 \tag{۳۸}$$

$$h'_z + \left(\frac{\bar{I}_2 - 1}{\bar{I}_2}\right) h_x h_y = 0 \tag{۳۹}$$

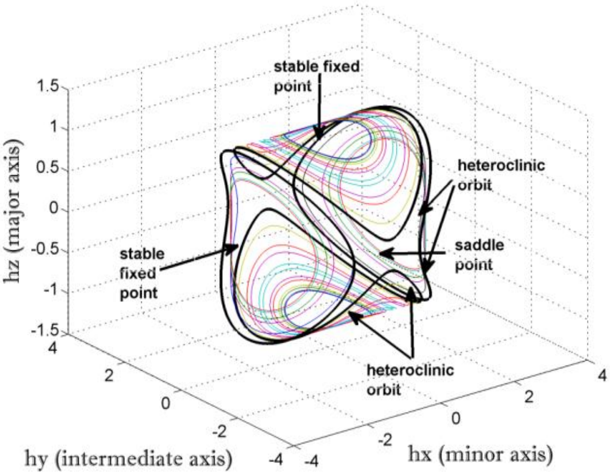
که در آن، $h_i\,(i: x, y, z)$ها ممنتوم‌های زاویه‌ای بی‌بعد هستند که به‌صورت $h_i \triangleq H_i / H_T$ تعریف می‌شوند که H_i اجزاء بردار ممنتوم زاویه ای و H_T ممنتوم زاویه‌ای کل سیستم می‌باشند. همچنین $\bar{I}_1 \triangleq I_3 / I_2$ و $\bar{I}_2 \triangleq I_1 / I_2$ ممان‌های اینرسی بی بعد، τ زمان بی‌بعد سیسستم که به‌صورت $\tau \triangleq t H_T / I_2$ و همچینن عملگر مشتق هم به‌صورت $()' \triangleq I_2 / H_T\, \dot{()}$ تعریف می‌گردد. از آنجایی که در به‌کارگیری روش ملنیکف حرکت سیستم بدون در نظر گرفتن ورودی مورد مطالعه قرار می‌گیرد، در نتیجه H_T ثابت می‌باشد. همچنین ممنتوم زاویه‌ای سیستم که مربوط به حرکت مداری است ثابت می‌باشد که به‌دلیل حرکت ماهواره ژیروستات در مدار دایروی غیراغتشاشی است. بنابراین ممنتوم زاویه‌ای کل سیستم در حالت بی‌بعد به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$h^2 = h_x^2 + h_y^2 + h_z^2 = 1 \tag{۴۰}$$

در معادله انرژی سیستم، بدلیل حرکت مداری دایره‌ای غیراغتشاشی، ترم‌های مربوط به انرژی جنبشی حرکت مداری و انرژی پتانسیل ماهواره ژیروستات ثابت می‌باشد. در نتیجه معادله انرژی متغیر سیستم تنها شامل انرژی جنبشی مربوط به حرکت دورانی ماهواره به‌صورت زیر است:

$$\bar{T} = \frac{h_x^2}{\bar{I}_2} + h_y^2 + \frac{h_z^2}{\bar{I}_1} \tag{۴۱}$$

که، $\overline{T}$ انرژی جنبشی بدون بعد شده است که به‌صورت $\overline{T} \cong 2I_2T / H^2$ تعریف می‌شود که در آن T انرژی جنبشی کل سیستم است. مسیرهای صفحه فازی ممنتوم زاویه‌ای سیستم بر اساس معادلات (۳۷-۳۹) که به کره ممنتوم معروف است در شکل **۳** نشان داده شده است. مدارات هیتروکلینیک سیستم در اطراف نقطه زینی هذلولی در کره ممنتوم در سیستم غیر اغتشاشی نشان داده شده است. مدارات هیتروکلینیک سیستم از تقاطع کره ممنتوم براساس معادله (۳۹) با شعاع $h=1$ و معادله بیضی انرژی مطابق رابطه (۴۱) به‌صورت مماس بر نقطه زینی $0,\pm1,0$ به‌دست می‌آید. در این‌صورت سطح انرژی برای مدارات هیتروکلینیک سیستم برابر $\overline{T}=1$ می‌شود.



شکل (۳): مسیرهای فازی کره ممنتوم سیستم به همراه مدارات هیتروکلینیک و نقاط زینی.

ممنتوم‌های زاویه‌ای با توجه به معادلات (۳۷-۴۱) برای مقادیر $I_1 > I_2 > I_3$ در طول مدارات هیتروکلینیک به‌صورت زیر حل می‌شوند [۳و۴]:

$$h_x = \pm\chi_1 \operatorname{sech}(\Delta\tau) \qquad (۴۲)$$

$$h_y = \pm\tanh(\Delta\tau) \qquad (۴۳)$$

$$h_z = \pm\chi_2 \operatorname{sech}(\Delta\tau) \qquad (۴۴)$$

که ، $\Delta = \sqrt{\left(\overline{I}_1 - 1\right)\left(1 - \overline{I}_2\right) / \overline{I}_1 \overline{I}_2}$ ، $\chi_1 = \sqrt{\overline{I}_2\left(1 - \overline{I}_1\right) / (\overline{I}_2 - \overline{I}}$ ، و $\chi_2 = \sqrt{\overline{I}_1\left(\overline{I}_2 - 1\right) / (\overline{I}_2 - \overline{I}_1)}$ و علامت‌های $\pm$ چهار مدار هیتروکلینیک در اطراف نقطه زینی را نشان می‌دهد. حل مدارات هیتروکلینیک در معادلات (۴۲) تا (۴۴) با استفاده از متغیرهای سرت- آندویر بر مبنای معادلات (۲۲) تا (۲۶) به مختصات تعریف شده در تبدیل دپریت نوشته می‌شوند که در فرم کلی مختصات کروی به‌صورت زیر محاسبه می‌گردند:

$$h_x = P_\beta \sin\sigma \sin\gamma = \pm\chi_1 \operatorname{sech}(\Delta\tau) \qquad (۴۵)$$

$$h_y = P_\beta \sin\sigma \cos\gamma = \pm\tanh(\Delta\tau) \qquad (۴۶)$$

$$h_z = P_\beta \cos\sigma = \pm\chi_2 \operatorname{sech}(\Delta\tau) = P_\gamma \qquad (۴۷)$$

همچنین با توجه به معادلات (۳۱) و (۴۵-۴۷) داریم:

$$\cos\gamma = \frac{\chi_2}{\chi_1} \operatorname{csch}(\Delta\tau) \qquad (۴۸)$$

$$\cos\sigma = \operatorname{sech}(\Delta\tau) \qquad (۴۹)$$

از آنجایی که، P_β مقداری ثابت است و برای مقادیر $\overline{I}_1$ نزدیک به $\overline{I}_2$، پارامتر β به‌کمک رابطه $\dot\beta = \partial H_n' / \partial P_\beta$ به‌صورت $g \cong \Omega\tau$ تخمین زده می‌شود. در نتیجه به‌منظور به‌کارگیری روش ملنیکف، معادلات حرکت طبق روابط (۳۲-۳۵) به صورت معادلات اغتشاشی به شکل:

$$\dot q = F_1 + \varepsilon G_1, \quad \dot P_q = F_2 + \varepsilon G_2 \qquad (۵۰)$$

نوشته می‌شود که، $\varepsilon = 1/\rho_O^2$ پارامتر اغتشاشی واحد شامل ترکیبی از پارامترهای اغتشاشی $\varepsilon_1 = {v_0}^2(1/{\rho_0}^2)$ ، $\varepsilon_2 = (1/m_s)(1/\rho_O^2)$ و $\varepsilon_g = (3\mu / 2\rho_0)(1/\rho_0^2)$ می‌باشد که v_0 سرعت مداری ماهواره ژیروستات است. سپس انتگرال ملنیکف به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$M(\tau_O) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(q_O(t)) \wedge G(q_O(t), t + t_0)\,dt \qquad (۵۱)$$

که، F یک میدان برداری همیلتونی، G ترم اغتشاشات کوچک، $q_O(t)$ حل مدارات هیتروکلینیک در سیستم غیر اغتشاشی و علامت $\wedge$ اپراتور گوه[1] است که به‌صورت $a \wedge b = a_1b_2 - a_2b_1$ تعریف می‌گردد [۶-۳]. معادلات (۳۲) تا (۳۵) در فرم معادله اغتشاشی (۵۰) نوشته و در معادله ملنیکف (۵۱) قرار می‌دهیم. با تغییر متغیر در حل مدارات هیتروکلینیک که در روابط (۴۲-۴۹) آورده شده است، تابع ملنیکف به‌وسیله حل انتگرال (۵۱) با استفاده از جداول انتگرال، انتگرال جزء به جزء، انتگرال کوشی و تئوری باقیمانده‌ها به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد [۱۷].

$$M(\tau_0) = \xi_1 + \xi_2 \sin(2\Omega\tau_0) + \xi_3 \sin(\Omega\tau_0 + \Gamma) \qquad (۵۲)$$

که در آن،

$$\xi_1 = \left(3\mu(\overline{I}_1 - \overline{I}_2) / 4\Delta\rho_O\chi_1\right)\left((1/\overline{I}_2) - \chi_2^2\right)$$

1- Wedge Operator

$$\xi_2 = \left(v_0^2 \bar{I}_1 / 8\Omega\chi_1\right)\left((1/\bar{I}_2\chi_1) + \chi_2^2\right)$$

$$\xi_3 = \sqrt{\xi_4^2 + \xi_5^2}$$

$$\Gamma = Arctan(\xi_4 / \xi_5)$$

که،

$$\xi_4 = -\frac{\pi\Omega\chi_2^2}{\bar{m}_s\chi_1^2} + \mathrm{sech}\left(\frac{\pi\Omega}{2\Delta}\right)\{(\frac{\pi}{\bar{m}_s\Delta}) (\frac{1}{\bar{I}_2\chi_1^2} - \frac{1}{\bar{I}_1}) + \frac{9\pi\mu}{16\rho_O\Delta}[\chi_1(\frac{\bar{I}_2 - 1}{\bar{I}_1}) + (\frac{1}{\chi_1} + \chi_2)(1 - \frac{1}{\bar{I}_2}) - \frac{\chi_2^2}{\chi_1}(\bar{I}_2 - 1)]\} + tanh\left(\frac{\pi\Omega}{2\Delta}\right)\{(\frac{\pi\chi_2}{\bar{m}_s\Delta\chi_1^2})[\frac{1}{\bar{I}_2} - \chi_2^2]\}$$

$$\xi_5 = \mathrm{sech}\left(\frac{\pi\Omega}{2\Delta}\right)\{(\frac{\pi\Omega}{\bar{m}_s\Delta^2})[-\frac{\chi_1\chi_2}{\bar{I}_1} + \frac{\chi_2}{2\bar{I}_2\chi_1} - \frac{\chi_2}{\chi_1}(\frac{1}{\bar{I}_2} - 1)] - (\frac{3v_0^2}{4\chi_1\Delta})[\frac{1}{\bar{I}_2} - \chi_2^2] - (\frac{\pi}{2\bar{m}_s\Delta\chi_1})[\frac{1}{\bar{I}_2\chi_1} - \chi_2^2]\} + tanh\left(\frac{\pi\Omega}{2\Delta}\right)\{(\frac{\pi}{2\bar{m}_s\Delta})[\frac{\chi_1\chi_2}{\bar{I}_1} - \frac{\chi_2}{2\chi_1\bar{I}_2}]\}$$

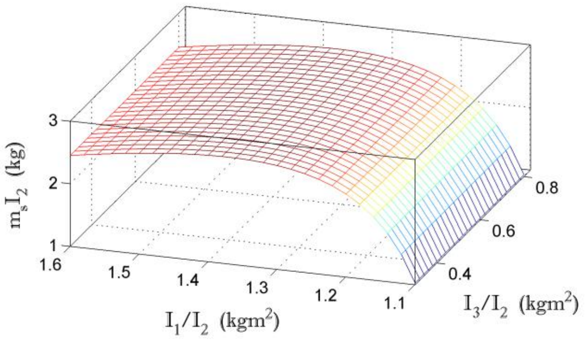
و $\bar{m}_s \square m_s I_2$. مطابق معادله (۵۲)، بازاء مقادیر منطبق با شرط زیر، مقدار تابع ملنیکف صفر می‌شود:

$$|\xi_2| + |\xi_3| > \xi_1 \qquad (۵۳)$$

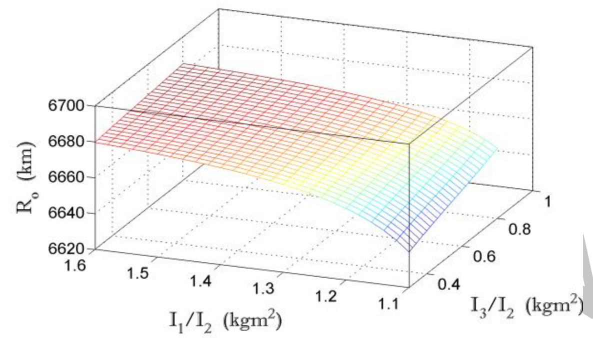
با ارضاء شدن شرط (۵۳)، تقاطع در مدارات هیتروکلینیک و احتمال وقوع آشوب در سیستم اثبات می‌شود. همچنین به ازاء مقادیر رابطه زیر:

$$\xi_2 + \xi_3 < \xi_1 \qquad (۵۴)$$

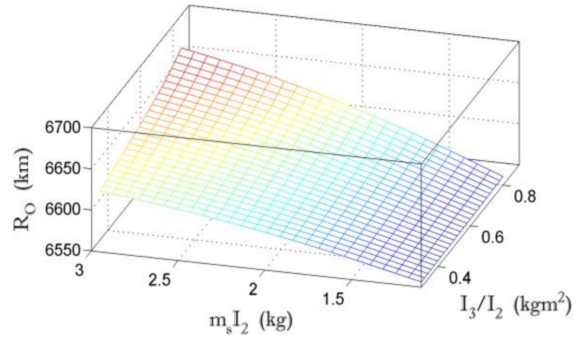
رابطه ملنیکف در معادله (۵۲) صفر نشده و در سیستم قطعاً آشوب رخ نمی‌دهد. در نتیجه به‌وسیله روش ملنیکف، پارامترهای سیستم مانند $\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{m}_s, \rho_o$ را می‌توان طوری طراحی کرد که شرط (۵۴) را ارضا نموده تا از وقوع آشوب در رفتار سیستم جلوگیری کند. براساس معادلات (۵۳) و (۵۴)، نواحی آشوبناک و غیر آشوبی در شکل‌های **۴** تا **۷** نشان داده شده است. در نمامی نمودارهای **۴** تا **۷**، قسمت بالایی سطح جداکننده، ناحیه آشوبناک را نشان می‌دهد و بازاء مقادیر منطبق بر قسمت پایینی این سطوح، آشوب در سیستم رخ نمی‌دهد. مطابق نمودار **۴** کاهش مقادیر $\bar{I}_1$، $\bar{I}_2$ و $\bar{m}_s$ باعث افزایش احتمال آشوب در سیستم می‌شود. همچنین R_O نیز نقش اصلی در پارامتر اغتشاشی سیستم دارد. همان‌طور که در نمودارهای **۵** تا **۷** قابل مشاهده است، با افزایش R_O تأثیر اغتشاشات خارجی و به‌دنبال آن احتمال آشوب در سیستم کاهش می‌یابد.



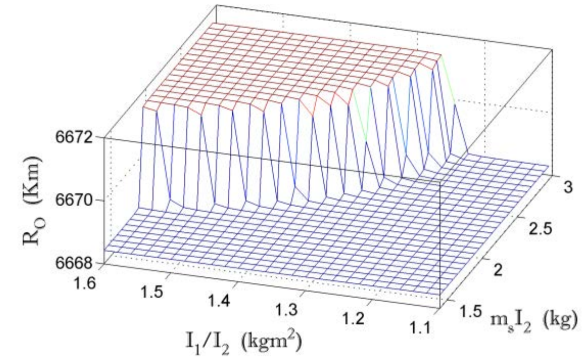
شکل (۴): سطح جداکننده نواحی آشوبی و غیرآشوبی برحسب پارامترهای $\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{m}_s$.



شکل (۵): سطح جداکننده نواحی آشوبی و غیرآشوبی برحسب پارامترهای $\bar{I}_1, \bar{I}_2, R_O$.



شکل (۶): سطح جداکننده نواحی آشوبی و غیرآشوبی برحسب پارامترهای $\bar{I}_1, \bar{m}_s, R_O$.



شکل (۷): سطح جداکننده نواحی آشوبی و غیرآشوبی برحسب پارامترهای $\bar{I}_2, \bar{m}_s, R_O$.

در نمودار **۵**، کاهش $\bar{I}_1$ و $\bar{I}_2$ موجب پدید آمدن آشوب در سیستم می‌شود. مطابق شکل **۶**، افزایش $\bar{m}_s$، پاسخ‌های سیستم را منظم‌تر نموده و نهایتاً با توجه به نمودار **۷**، برای مقادیر $\bar{m}_s \geq 2$، $\bar{I}_2 \geq 1.4$ و هر مقدار R_O سیستم کاملاً رفتاری منظم و غیرآشوبی خواهد داشت.

۵- نمای لیاپانف

نمای لیاپانف ابزاری عددی برای تحلیل آشوب در سیستم‌های دینامیکی است. در روش نمای لیاپانف، فاصله دو مدار کنار هم در یک لحظه زمانی اندازه‌گیری می‌شود که می‌تواند حساسیت سیستم را به تغییر در شرایط اولیه به‌طور نمایی در صفحه فازی نشان دهد. نمای لیاپانف (λ) برای هر یک از متغیرهای حالت $q_i(t)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

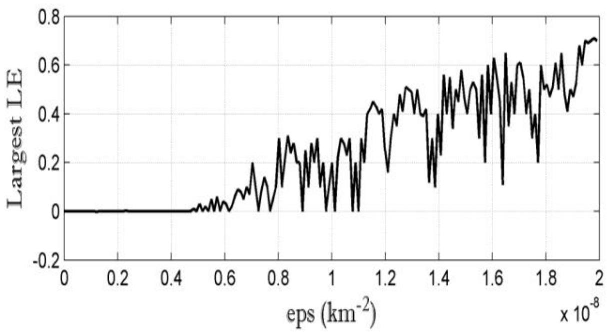
$$\lambda = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t E_i\left(q\left(\tau\right)\right)d\tau = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}ln\left|\frac{\delta q_i(t)}{\delta q_i(0)}\right| \qquad (۵۵)$$

که، $q_i\left(0\right)$ شرایط اولیه متغیر حالت $q_i\left(t\right)$ و $E_i(q(t))$ مقادیر ویژه حقیقی ماتریس ژاکوبین مربوط به نرخ واگرایی مسیرهای سیستم است. مقادیر نمای لیاپانف برای هر متغیر حالت محاسبه شده بازاء پارامتر اغتشاشی $\varepsilon = 2\times10^{-8}$ در جدول **۱** مشاهده می‌شود.

جدول (۱): مقادیر نمای لیاپانف بازاء $\varepsilon = 2\times10^{-8}$.

λ_h	λ_g	λ_l	λ_{λ_O}	λ_{r_O}
۰	+۱/۴۶	-۲/۸۳	+/۹۵	-۱/۴۱

علامت مثبت و منفی برای مقادیر نمای لیاپانف، نشان دهنده وجود جاذب شگفت و ایجاد پدیده آشوب در سیستم است. همچنین نمودار بیشترین مقدار نمای لیاپانف نسبت به پارامتر اغتشاشی ε در شکل **۸** نشان داده شده است. مثبت بودن مقدار بیشترین نمای لیاپانف با توجه به افزایش پارامتر ε مبین این موضوع است که فاصله بین مدارات مجاور هم به‌طور نمایی افزایش پیدا می‌کند. بنابراین رفتار آشوبناک در سیستم تایید شده و در واقع نتایج حاصل از تحلیل ریاضی سیستم توسط روش انتگرال ملنیکف صحه گذاری می‌شود [۸].



شکل (۸): مقدار بیشترین نمای لیاپانف سیستم نسبت به پارامتر اغتشاشی ε.

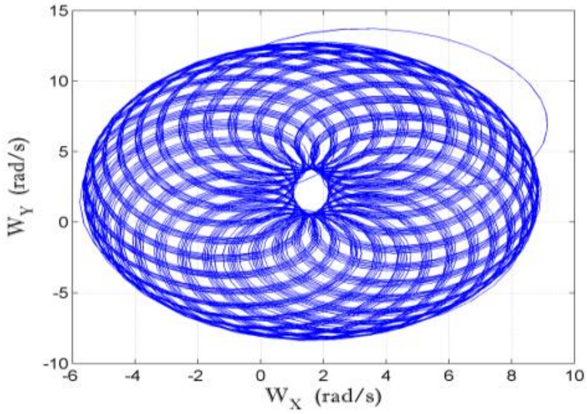
۶- نتایج شبیه‌سازی سیستم

در این قسمت، با شبیه‌سازی سیستم مدار باز، رفتار آشوبناک حرکت انتقالی- دورانی ماهواره ژیروستات تحت گشتاورهای اغتشاشی گرادیان جاذبه زمین نشان داده شده است. در واقع با تأثیر حرکت مداری بر دینامیک دورانی ماهواره، معادلات کوپله شده انتقالی- دورانی ماهواره مطابق معادلات (۳۱) توسط روش رانگ- کوتا[1] تحت گشتاورهای گرادیان جاذبه با مقدار پارامتر اغتشاشی $\boldsymbol{\varepsilon} = 2\times10^{-8}$ حل عددی شدند. برای حل عددی، مقادیر ثابت سیستم به‌صورت $I_1 = 1.2$، $I_2 = 0.8$، $I_3 = 0.6$، $m_s = 4$ و مقادیر اولیه سیستم هم برابر $\gamma_0 = 0$، $\beta_0 = 0.01$، $\alpha_0 = 0.1$، $\rho_{O_0} = 6675$، $\lambda_{O_0} = 1$، $P_{\gamma_0} = 0$، $P_{\beta_0} = 1$، $P_{\alpha_0} = 1$، $P_{\rho_{O_0}} = 2$ و $P_{\lambda_{O_0}} = 0.3$ در نظر گرفته شده‌اند.

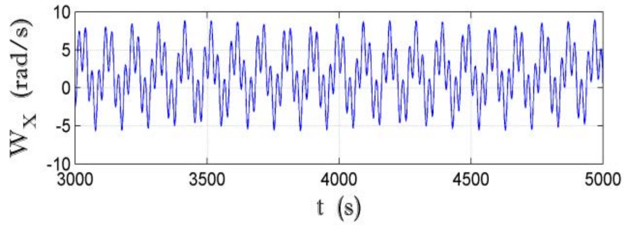
رفتار شبه پریودیک و پاسخ‌های آشوبناک سیستم ماهواره ژیروستات در حرکت انتقالی- دورانی در شکل‌های **۹** تا **۱۹** نمایش داده شده است. در شکل‌های **۹** و **۱۰**، مسیر صفحه فازی و پاسخ زمانی سیستم با رفتار شبه پریودیک نشان داده شده است. همچنین شکل‌های **۱۱** تا **۱۹** شامل مسیرهای صفحه فازی، مقاطع پوانکاره و پاسخ‌های سری زمانی آشوبناک

1- Range-Kutta

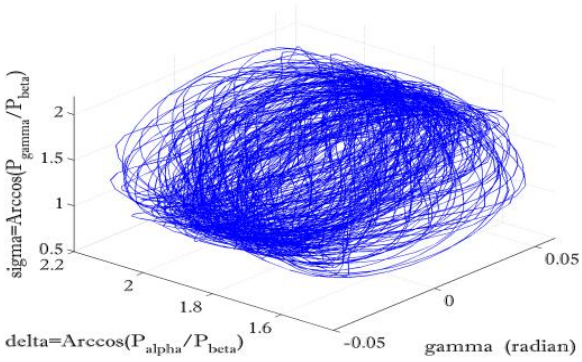
سیستم بازاء مقدار $\varepsilon=2\times10^{-8}$ نشان داده شده است که نتایج حاصل از شبیه‌سازی سیستم همگی مبین رفتاری آشوبناک در سیستم می‌باشند. این مطلب می‌تواند موید نتایج حاصل از تحلیل‌های ریاضی و عددی آشوب در این سیستم باشد.



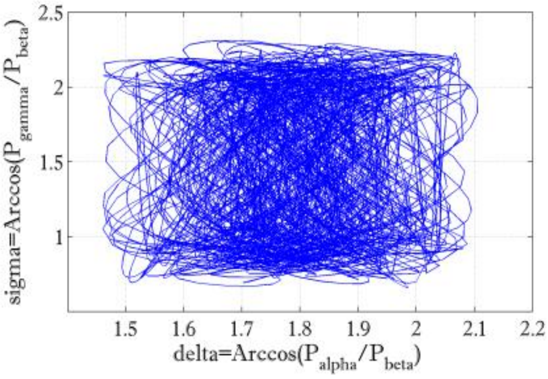
شکل (۹): مسیرهای شبه پریودیک صفحه فازی $\omega_x-\omega_y$.



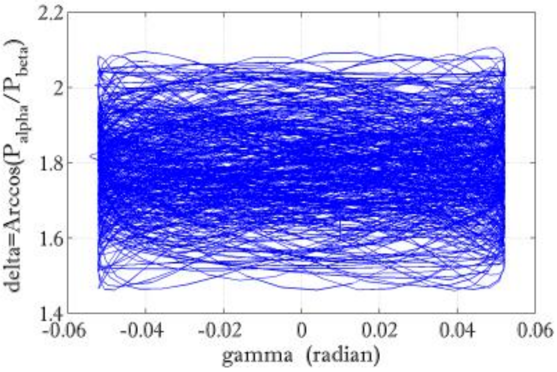
شکل (۱۰): پاسخ سری زمانی شبه پریودیک ω_x.



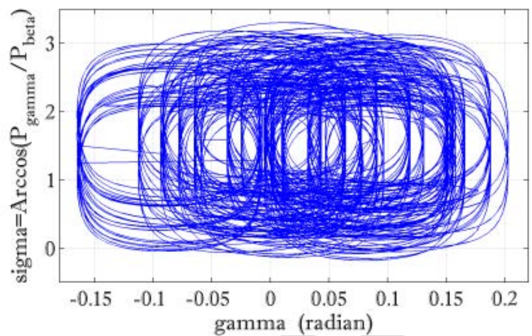
شکل (۱۱): مسیرهای آشوبناک صفحه فازی $\gamma-\delta-\sigma$.



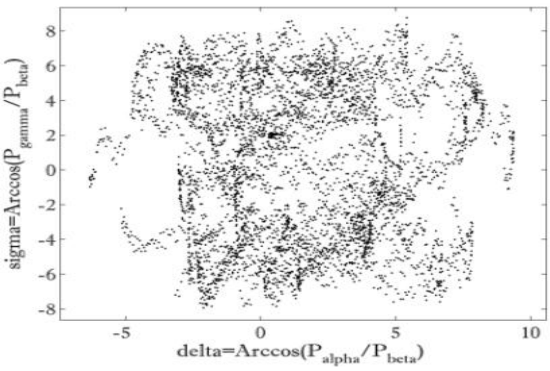
شکل (۱۲): مسیرهای آشوبناک صفحه فازی $\delta-\sigma$.



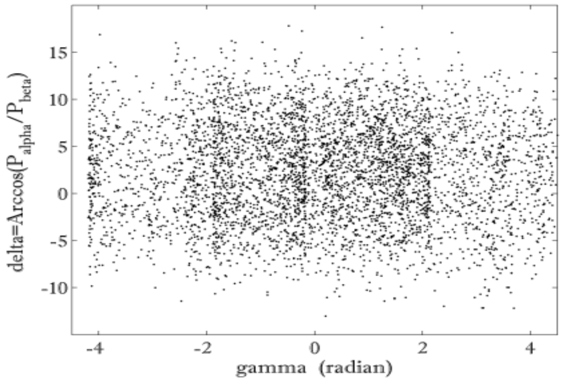
شکل (۱۳): مسیرهای آشوبناک صفحه فازی $\gamma-\delta$.



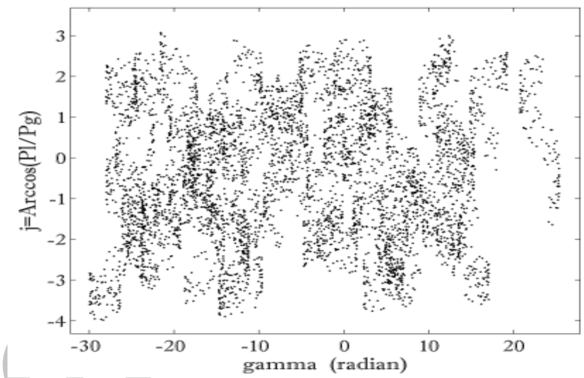
شکل (۱۴): مسیرهای آشوبناک صفحه فازی $\gamma-\sigma$.



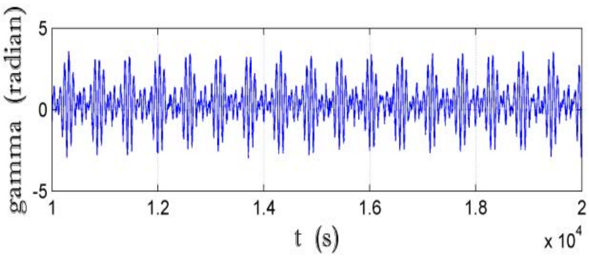
شکل (۱۵): مقطع پوانکاره آشوبناک ناشی از تقاطع مسیرهای فازی $\gamma-\delta-\sigma$ با صفحه $\gamma=\pi/2$.



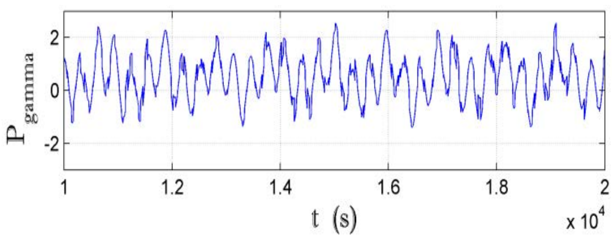
شکل (۱۶): مقطع پوانکاره آشوبناک ناشی از تقاطع مسیرهای فازی $\gamma-\delta-\sigma$ با صفحه $\sigma=2.7$.



شکل (۱۷): مقطع پوانکاره آشوبناک ناشی از تقاطع مسیرهای فازی $\gamma-\delta-\sigma$ با صفحه $\delta=0.8$.

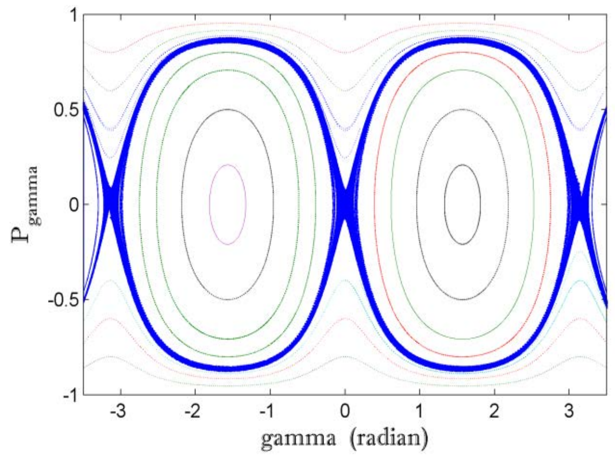


شکل (۱۸): پاسخ سری زمانی آشوبناک γ.

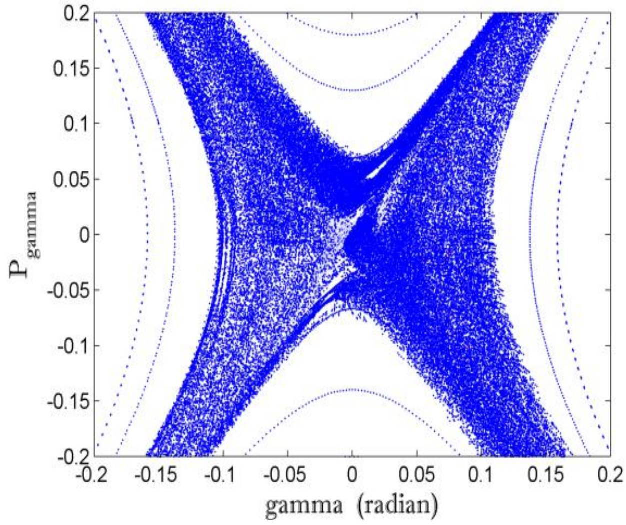


شکل (۱۹): پاسخ سری زمانی آشوبناک P_γ.

همچنین به‌منظور نمایش تقاطع مدارات هیتروکلینیک در روش تحلیلی ملنیکف، مقطع پوانکاره $\gamma-P_\gamma$ که حاصل تقاطع مسیرهای صفحه فازی سه‌بعدی $\gamma-\beta-P_\gamma$ با صفحه $\beta=\pi$ در مد 2π می‌باشد در شکل‌های **۲۰** و **۲۱** نشان داده شده است. مقاطع پوانکاره در این نمودارها حاکی از وجود تقاطع در منیفلدهای پایدار و ناپایدار در مدارات هیتروکلینیک می‌باشند که در نتیجه رفتار آشوبناک را در سیستم همیلتونی اثبات می‌نماید. با توجه به تقاطع هیتروکلینیک، به‌وسیله رفتار نگاشت نعل اسبی و قضیه اسمیل-بریخوف، آشوب در سیستم تایید می‌گردد. بنابراین مدارات هیتروکلینیک سیستم در هم پیچیده شده و مسیرهای فازی سیستم در اطراف نقطه زینی به‌طور اتفاقی منحرف می‌شوند. همچنین انقباض، انبساط و چین خوردگی در مسیرهای فازی سیستم، بستر جاذب آشوبناک را اطراف نقطه زینی نشان می‌دهد. در شکل **۲۱**، باند آشوب و پنجره‌های آشوب به‌وضوح دیده می‌شود.



شکل (۲۰): مقطع پوانکاره $\gamma-P_\gamma$ برای سیستم آشوبناک ماهواره ژیروستات در حرکت انتقالی- دورانی.



شکل (۲۱): بزرگنمایی مقطع پوانکاره $\gamma-P_\gamma$ به همراه باند آشوب در اطراف نقطه تعادل زینی.

۷- نتیجه‌گیری

حرکت آشوبناک انتقالی- دورانی ماهواره ژیروستات تحت گشتاور گرادیان جاذبه زمین مورد مطالعه قرار گرفت. به‌منظور بررسی تأثیر حرکت مداری در دینامیک دورانی ماهواره ژیروستات، مدل ریاضی مربوط به معادلات کوپله شده حرکت انتقالی و دورانی با استفاده از روش همیلتون استخراج شد. کاهش مرتبه معادله همیلتونین سیستم به‌دلیل پیچیدگی‌های موجود در معادلات کوپله شده سیستم انجام گرفت. برای این منظور، تبدیل کانونی توسعه یافته دپریت به‌کمک متغیرهای سرت- آندویر برای پارامترهای حرکت انتقالی- دورانی مورد استفاده قرار گرفت که در نهایت دو درجه آزادی از سیستم را پس از تبدیل کاهش داد. تقاطع در مدارات هیتروکلینیک، وجود رفتاری شبیه رفتار نگاشت نعل اسبی و نهایتاً ایجاد آشوب در سیستم به روش تحلیلی دقیق انتگرال ملنیکف بر اساس قضیه اسمیل- بریخوف اثبات شد. با استفاده از نتایج حاصل از روش ملنیکف، مقادیر مناسب برای طراحی پارامترهای سیستم را می‌توان طوری انتخاب کرد تا از قرار گرفتن سیستم در ناحیه آشوبناک جلوگیری کند. به این ترتیب که مطابق نمودار شکل‌های **۴** تا **۷**، بازاء مقادیر کمی مربوط به ممان‌های اینرسی، جرم و مدار حرکتی ماهواره ژیروستات که در زیر سطوح جداکننده منحنی قرار دارند و در واقع مقادیر مربوط به فصل مشترک منحنی‌ها که زیر سطوح جدا کننده قرار دارند، از وقوع آشوب در سیستم و همچنین ارتعاشات ناشی از آن جلوگیری بعمل می‌آید که منجر به حذف رفتار آشوب‌گونه در سیستم بدون استفاده از سیستم کنترلی می‌شود. همچنین با اعمال روش‌های عددی روی سیستم کاهش یافته مانند نمای لیاپانف، بررسی مقاطع پوانکاره، مسیرهای صفحه فازی و پاسخ‌های سری زمانی، همگی مؤید وجود دوشاخگی هیتروکلینیک و آشوب در سیستم می‌باشند.

۸- مراجع

1. Inarrea, M. "Chaos and its Control in the Pitch Motion of an Asymmetric Magnetic Spacecraft in Polar Elliptic Orbit", Chaos Solitons and Fractals, Vol. 40, No. 1, pp. 1637–1652, 2009.
2. Zhou, L., Chen, Y. and Chen, F. "Stability and Chaos of a Damped Satellite Partially Filled with Liquid", Acta Astronautica, Vol. 65, No. 2, pp. 1628–1638, 2009.
3. Baozeng, Y. "Heteroclinic Bifurcations in Completely Liquid-filled Spacecraft with Flexible Appendage", Nonlinear Dynamics, Vol. 51, No. 1, pp. 317–327, 2008.
4. Kuang, J., Meehan, P.A., Leung, A.Y.T., and Tan, S. "Nonlinear Dynamics of a Satellite with Deployable Solar Panel Arrays", Int. J. of Non-Linear Mechanics, Vol. 39, No. 1, pp. 1161−1179, 2004.
5. Moosavian, S.A.A., Sadati, S.H., and Homaeinejad, M.R. "Regulated Sliding Mode Control of Satellite Rotation: Trade-off between Tracking Precision and Energy Consumption", Mech. & Aerospace Eng. J. Vol. 89 1, No. 1, pp.89-100, 2005 (In Persian).
6. Moradi, M., Moosavian, S.A.A., and Daneshvar, A. "Orbital Dynamics Modeling, Based on Separating Orbital Elements to Control Low-Altitude Satellites", Mech. & Aerospace Eng., Vol. 7, No. 1, pp. 41-53, 2011 (In Persian).
7. Liu, Y.Z., Yua, H. J., and Chen, L. "Chaotic Attitude Motion and its Control of Spacecraft in Elliptic Orbit and Geomagnetic", Acta Astronautica, Vol. 55, No. 1, pp. 487−494, 2004.
8. Wiggins, S. "Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos", Springer-Verlag, New York, 2003.
9. Kuang, J. Leung, A.Y.T. and Tan, S. "Hamiltonian and Chaotic Attitude Dynamics of an Orbiting Gyrostat Satellite under Gravity Gradient Torques", Physica D, Vol. 186, No. 1, pp. 1–19, 2003.
10. Shirazi, K.H. and Ghaffari-Saadat M.H. "Bifurcation and Chaos in an Apparent-Type Gyrostat Satellite", Nonlinear Dynamics, Vol. 39, No. 1, pp. 259–274, 2005.
11. Kuang, J.L., Meehan, P.A. and Leung, A.Y.T. "On the Chaotic Rotation of a Liquid-filled Gyrostat Via the Melnikov–Holmes–Marsden Integral", Int. J. of Non-Linear Mechanics, Vol. 41, No. 4, pp. 475–490, 2006.
12. Elipe, A. and Lanchares, V. "Exact Solution of a Triaxial Gyrostat with one Rotor", Celestial Mechanics and Dynamic Astronomy, Vol. 101, No. 1, pp. 49–68, 2008.
13. Doroshin, A.V. "Analysis of Attitude Motion Evolutions of Variable Mass Gyrostats and Coaxial Rigid Bodies System", Int. J. of Non-Linear Mechanics, Vol. 45, No. 1, pp. 193–205, 2010.
14. Gurfil, P., Elipe, A., Tangren, W., and Efroimsky, M. "the Serret-Andoyer Formalism in Rigid-Body Dynamics: I. Symmetries and Perturbations", Regular and Chaotic Dynamics, Vol. 12, No. 1, pp. 389-425, 2007.

15. Sidi, M.J. "Spacecraft Dynamics and Control: A Practical Engineering Approach", Cambridge University Press, London, 1997.
16. Meirovitch, L. "Methods of Analytical Dynamics", McGraw-Hill, New York, 1970.
17. Spiegel, M., Lipschitz, S., and Liu, J. "Mathematical Handbook of Formulas and Tables", McGraw-Hill, New York, 1998.