# تحلیل پدیده آشوب در حرکت انتقالی– دورانی ماهواره ژیروستات به روش ملنيكف

حسن سالار به <sup>۳</sup>

دانشکدہ مکانیک مہندسی دانشگاه صنعتی شریف

سيد حسين ساداتي

دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی (تاریخ دریافت: ۱۳۹۱/۱۰/۲۰؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۱/۲۱)

سيد مهدي ابطحي دانشکده مهندسی صنایع و مکانیک دانشگاه آزاد اسلامی، واحد قزوین

چکیدہ

در این مقاله به بررسی تأثیر حرکت انتقالی ماهواره ژیروستات بر روی دینامیک دورانی آن پرداخته شده است. پس از مدلسازی ریاضی سیستم ماهواره در حرکت انتقالی- دورانی با استفاده از روش همیلتون، معادلات کاهش یافته سیستم در حرکت کویله شده وضعی و مداری با استفاده از تبدیل کانونی دپریت محاسبه شد. بهمنظور بررسی پدیدههای غیرخطی آشوب و دوشاخگی هیتروکلینیک، از روش تحلیلی دقیق ملنیکف در کنار روشهای عددی همچون روش نمای لیایانف، بررسی مقاطع پوانکاره، مسیرهای صفحه فازی سیستم و پاسخهای سری زمانی استفاده شده است. نتایج حاصل از روشهای تحلیلی ریاضی و عددی سیستم همگی مبین وجود رخداد آشوب در سیستم میباشند. همچنین بر اساس نتایج بهدستآمده از روش تحلیلی ملنیکف، میتوان پارامترهای مؤثر بر طراحی ماهواره را طوری انتخاب نمود تا از وقوع دوشاخگی هیتروکلینیک و ایجاد رفتار آشوبناک در سیستم ماهواره ژیروستات جلوگیری کند بدون آنکه نیاز به سیستم کنترل کننده آشوب باشد.

واژههای کلیدی: ماهواره ژیروستات، حرکت انتقالی- دورانی، ملنیکف، نمای لیاپانف، آشوب

# **Chaos Analysis for Roto-Translatory Motion of a Gyrostat Satellite Using**

S.M. Abtahi Faculty of Industrial and Mechanical Engineering Qazvin Branch, Islamic Azad University (Received: 9/January/2013; Accepted: 10/April/2014)

**Melnikov Method** S.H. Sadati

Faculty of Mechanical Engineering K.N.Toosi University of Technology

H. Salarieh Department of Mechanical Engineering, Sharif University of Technology

#### ABSTRACT

Interactions of the translational motion of a gyrostat satellite on its attitude dynamics is considered in this paper. The mathematical model is first derived using the Hamiltonian method for the rotation-Translation motion of the gyrostat satellite followed by the reduction of the coupled equations of motion using the extended Deprit canonical transformation. The analytical Melnikov method along with the numerical Lyapunov exponent criterion, Poincare' section, trajectories of phase portrait, and the time history responses are used to study the heteroclinic bifurcation and chaos phenomena on the reduced model. On the basis of the results obtained from Melnikov integral, the parameters of the gyrostat satellite can be designed to prevent chaos in the system in the absence of a control system.

Keywords: Gyrostat Satellite, Coupled Roto-Translatory Motion, Melnikov, Lyapunov Exponent, Chaos

m\_abtahi@dena.kntu.ac.ir - استاديار (نويسنده پاسخگو): m\_abtahi

r- استادیار: sadati@kntu.ac.ir

۳- دانشیار: salarieh@sharif.ir

فهرست علائم و اختصارات

$R_o$	فاصله بین مرکز جرم ماهواره تا زمین
Ι	ممان اينرسي ماهواره
Т	انرژی جنبشی کل ماهواره
H	ممنتوم زاویهای کل ماهواره مرکز جرم
$m_{B}$	جرم بدنه ماهواره
$m_{g}$	جرم چرخ عکس العملی
$m_s$	جرم کل ماهواره ژیروستات
ω	سرعت زاویهای بدنه اصلی ماهواره
$\omega_o$	سرعت زاویهای حرکت دورانی ماهواره
$\mu_o$	آنومالی خارج از مرکز
<i>ω.θ.</i> ψ	زوایای اولر

#### ۱– مقدمه

در سالهای اخیر، توجه زیادی به تحلیل پدیده آشوب در دینامیک ماهواره شده است. اما در مدل سازیهای انجام شده، تنها حرکت وضعی (دورانی) ماهواره در نظر گرفته شده و در هیچ یک تأثیرات حرکت مداری (انتقالی) بر روی دینامیک دورانی ماهواره بررسی نشده است [۶–۱]. از آنجایی که ديناميک ماهواره يک سيستم هميلتوني است، روش ملنيکف ً بهعنوان ابزاری مناسب برای بررسی تحلیلی و دقیق پدیده آشوب استفاده شده است. همچنین از روش نمای لیاپانف و تحلیل روی مقاطع پوانکاره برای مطالعه، اثبات و بررسی عددی آشوب در سیستم ماهواره بهره برده شده است [۸و۷]. ماهوارههای ژیروستات با توجه به ساختار دینامیکی و همچینن وجود سیستم پایدارساز داخلی، در مأموریتهای بسیار حساس مورد استفاده قرار می گیرد. از طرف دیگر ایجاد رفتار آشوبناک در سیستم ماهواره ژیروستات موجب ایجاد بینظمی دینامیکی در پاسخهای سیستم و مختل شدن مأموريت دقيق ماهواره ژيروستات مي گردد. تأثيرات اغتشاشي در دینامیکهای همیلتونی میتواند در وقوع رفتار آشوبگونه مؤثر باشد. از طرفی، اضافه کردن دینامیک مداری ماهواره ژیروستات به حرکت دورانی آن، در حکم اغتشاشات جزیی برای سیستم همیلتونی تلقی می گردد که یکی از عوامل بینظمی در سیستم محسوب می شود. در میان تمامی

- پژوهشهایی که در زمینه تحلیل آشوب در ماهواره ژیروستات صورت گرفته است، از تأثیرات حرکت مداری (انتقالی) بر
- 1- Chaos

ساختار ديناميكي ماهوارههاى زيروستات بهدليل وجود پایدارسازهای سه محوره از پیچیدگی زیادی برخوردار هستند. همچنین اضافه کردن حرکت انتقالی ماهواره به دینامیک دورانی آن قطعاً بر پیچیدگیهای دینامیکی سیستم خواهد افزود. بنابراین، به کارگیری روشی بهمنظور کاهش مرتبه معادلات سیستم ٔ ضروری بهنظر میرسد که یکی از این روشها توسط تبدیل کانونی دپریت<sup>6</sup> انجام میگیرد[۱۴].

در این مقاله، تأثیر حرکت مداری بر روی دینامیک وضعی ماهواره ژیروستات از منظر تأثیرات اغتشاشی در ایجاد رفتار آشوبناک در دینامیک سیستم مورد بررسی قرار گرفته است. معادلات كويله شده حركت انتقالى- دورانى ماهواره ژيروستات بهوسيله روش هميلتون استخراج شد. بهمنظور تحليل مدل پیچیده سیستم، از تبدیل کانونی دپریت که تنها در دینامیک دورانی ماهواره استفاده شده بود، در این کار برای حرکت انتقالى- دورانى ماهواره ژيروستات توسعه داده شد. كاهش مرتبه سیستم با تعریف مختصات سرت- آندویر ٔ برای یارامترهای حرکت انتقالی-دورانی انجام گرفت. یدیده آشوب در سیستم همیلتونی توسط قضیه اسمیل- بریخوف و رفتار نگاشت نعل اسبی با وجود تقاطع در مدارات هیتروکلینیک تحليل مى گردد. بنابراين بەوسىلە روش تحليلى ملنيكف، دوشاخگی هیتروکلینیک<sup>۷</sup> و پدیده آشوب بر روی معادله همیلتونین کاهش یافته سیستم بررسی شد. برای تایید نتایج حاصل از انتگرال ملنیکف، روشهای عددی مانند نمای لیاپانف، مقطع پوانکاره، مسیرهای صفحه فازی و پاسخهای سری زمانی مورد استفاده قرار گرفتند که همگی موید وجود آشوب و ایجاد جاذب شگفت^ در سیستم ماهواره ژیروستات مىباشند. در نهايت بر اساس نتايج بهدست آمده از روش ملنیکف، پارامترهای طراحی سیستم مثل جرم و ممان اینرسی را میتوان طوری طراحی نمود که بدون استفاده از سیستم کنترلی فعال، از وقوع آشوب در سیستم ماهواره جلوگیری کند.

- 3- Roto-Translatory motion
- 4- Reduction Method
- 5- Deprit Canonical Transformation
- 6- Serret-Andoyer
- 7- Heteroclinic Bifurcation
- 8- Strange Attractor

<sup>2-</sup> Melnikov Method

**Y** – **مدلسازی دینامیکی ماهواره ژیروستات** ماهواره ژیروستات متشکل از یک بدنه اصلی صلب و سه روتور به ماهواره ژیروستات متشکل از یک بدنه اصلی صلب و سه روتور به عنوان چرخ عکسالعملی<sup>۱</sup> تشکیل شده است که رتورها به عنوان پایدارساز در اهداف کنترلی ماهواره استفاده می گردد. با قرار دادن رتورها در راستای محور اصلی ماهواره ژیروستات، با قرار دادن رتورها در راستای محور اصلی ماهواره ژیروستات، با قرار دادن رتورها در راستای محور اصلی ماهواره ژیروستات، به عنوان پایدارساز در اهداف کنترلی ماهواره استفاده می گردد. با قرار دادن رتورها در راستای محور اصلی ماهواره ژیروستات، با قرار دادن رتورها در راستای محور اصلی ماهواره ژیروستات، با قرار دادن رتورها در راستای محور اصلی ماهواره ژیروستات، تانسور ممان اینرسی کل قطری می شود. همچنین حرکت انتقالی ماهواره در مداری دایروی – استوایی با صرفنظر از مرکز جرم ماهواره و زمین و  $_{0}$  سرعت زاویه ای ماهواره مواره ماواره و زمین و  $_{0}$  سرعت زاویه ای ماهواره اس که در آن  $_{0}$  معادل آنومالی خارج از مرکز تعریف می شود که در شکل **۱** قابل مشاهده است [10]



**شکل (۱):** دستگاههای مختصات در مدلسازی حرکت انتقالی- دورانی ماهواره ژیروستات.

بهمنظور تحلیل دینامیک حرکت کوپله شده انتقالی- دورانی در ماهواره ژیروستات از سه دستگاه مختصات متعامد مطابق شکل ۱ استفاده شده است. دستگاه اول، دستگاه مختصات اینرسی  $I\{X_I,Y_I,Z_I\}$  است که مرکز آن منطبق بر مرکز جرم زمین بوده و محور I از محور اعتدال بهاری میگذرد. دستگاه دوم، دستگاه مختصات مداری  $O\{X_0,Y_0,Z_0\}$  با بردارهای یکه I,J,K است که مرکز آن منطبق بر مرکز بردارهای یکه I,J,K است که مرکز آن منطبق بر مرکز بردارهای یکه معود بر صفحه مدار بردارهای یکه محور محور محور محود بر مفحه مدار بردارهای یکه آI,J,K است که مرکز آن منطبق بر مرکز جرم ماهواره ژیروستات بوده، محور محور کت مداری، محور  $Y_0$  مماس بر راستای حرکت مداری و محور  $Z_0$  در راستای مرکز مرکز آر مین<sup>7</sup> میباشد. دستگاه مختصات بدنی  $\{X_b,Y_b,Z_b\}$  با برم زمین<sup>7</sup> میباشد. دستگاه مختصات بدنی در راستای مرکز ماهواره است و مرکز آن در مرکز جرم ماهواره ژیروستات قرار

- 2- Ascending Node
- 3- Nadir

**(**Δ)

دارد و محورهای متعامد آن منطبق بر محورهای اصلی ماهواره ژیروستات میباشد.

دینامیک حرکت انتقالی- دورانی ماهواره ژیروستات با استفاده از روش همیلتون مدلسازی می گردد. برای این منظور، ماهواره ژیروستات سه محوره را در مدار دایروی تحت گشتاورهای اغتشاشی گرادیان جاذبه زمین در نظر می گیریم. جهت گیری زاویه ای بین دستگاههای مختصات مداری و بدنی توسط زوایای اولر  $\varphi, \theta, \psi$  با ترتیب کلاسیک بدنی توسط زوایای اولر  $\varphi, \theta, \psi$  با ترتیب کلاسیک ماهواره ژیروستات به صورت زیر استخراج می گردد:

$$\omega_x = \varphi \cos \psi \cos \theta + \theta \sin \psi \tag{1}$$

$$\omega_{y} = -\varphi \sin \psi \cos \theta + \theta \cos \psi \tag{(7)}$$

بدنه اصلی ماهواره در دستگاه بدنی است. مدل سینتیکی حرکت انتقالی– دورانی ماهواره ژیروستات به روش همیلتون استخراج می گردد. با این فرض که حرکت مداری بهصورت صفحهای بوده و دو متغیر  $R_0$  و  $\mu_0$  تنها به حرکت انتقالی اختصاص داده می شود. برای استخراج مدل دینامیکی به روش همیلتون، اولین گام، محاسبه لاگرانژین سیستم تحت رابطه زیر است:

 $L = T - U_g = L(\varphi, \theta, \psi, \mu_o, R_o, \varphi, \theta, \psi, \mu_o, R_o)$  (۴) که در آن، T انرژی جنبشی و  $U_g$  انرژی پتانسیل ماهواره ژیروستات است. انرژی پتانسیل گرانشی سیستم توسط رابطه زیر بهدست میآید:

 $U_{g} = -\frac{GMm_{s}}{R_{o}}$ 

که 
$$G$$
 ثابت جهانی گرانش و  $M$  جرم زمین است. انرژی  
جنبشی سیستم، شامل ترمهای مربوط به حرکتهای انتقالی  
و دورانی است که بهدلیل سادگی در محاسبات به صورت  
معادله اغتشاشی<sup><sup>3</sup></sup> نوشته میشود که در حالت مدار باز (بدون  
اعمال گشتاورهای کنترلی) بهصورت زیر می باشد [۱۵و۱۵]:

$$T = T_0 + \omega_0 T_1 + \omega_0^2 T_2 \tag{(?)}$$

$$T_{0} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \omega_{x} & \omega_{y} & \omega_{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{x} & \omega_{y} & \omega_{z} \end{bmatrix}^{T}$$
(Y)  
+  $\frac{1}{2} m_{s} R_{o}^{2} \omega_{o}^{2} + \frac{1}{2} m_{s} R_{o}^{2}$ 

4- Perturbation

۲۷

<sup>1-</sup> Reaction Wheel

$$H_1 = I_1 C_{\Theta} C_{\Psi} \omega_1 - I_2 C_{\Theta} S_{\Psi} \omega_2 + I_3 S_{\Theta} \omega_3 \tag{19}$$

$$H_{2} = \frac{1}{2}I_{1}C_{\Theta}^{2}C_{\Psi}^{2} - \frac{1}{2}I_{2}C_{\Theta}^{2}S_{\Psi}^{2} + \frac{1}{2}I_{3}S_{\Theta}^{2}$$
(1Y)

همچنین  ${}_{0} {}_{0} {}_{2} {}_{0} {}_{2} {}_{0}$  مؤلفههای سرعتهای زاویهای مهمچنین  ${}_{0} {}_{0} {}_{2} {}_{0} {}_{2} {}_{0}$  ماهواره ژیروستات در راستای محورهای دستگاه مختصات اصلی ماتریس  ${}_{1}I$  است و  ${}_{1}I {}_{2} {}_{1}I {}_{2}$  و  ${}_{1}I {}_{3}$  ممانهای اینرسی در صفحه اصلیاند که همان مقادیر ویژه ماتریس  ${}_{1}I {}_{1}$  میباشند. پس از تبدیل به مختصات اصلی جدید، مجموعه جدید زوایای پس از تبدیل به مختصات اصلی محورهای اصلی ماتریس  ${}_{1}I {}_{1}$  میباشند. I پس از تبدیل به مختصات اصلی محورهای اصلی ماتریس  ${}_{1}I {}_{2}$  می باشند. منتومهای تعمیم یافته جایگزین زوایای  ${}_{0}, {}_{0}, {}_{0}, {}_{0}, {}_{0}$  میگردند. ممنتومهای تعمیم یافته بر اساس زوایای اولر جدید  ${}_{1}, {}_{0}, {}_{0}, {}_{0}$  مطابق روابط بیان شده در معادلات (۱۱) محاسبه میشوند. در این معادلات، ممنتومهای تعمیم یافته بر مسب میتومهای تعمیم یافته بر حسب ممنتومهای تعمیم یافته برحسب ممنتومهای تعمیم یافته برحسب ممنتومهای تعمیم یافته برحسب ممنتومهای تعمیم یافته برحسب ممنتومهای تعمیم یافته و قرار دادن در معادله (۱۰)، محاسبه می می منتومهای تعمیم یافته برحسب ممنتومهای تعمیم یافته بر حسب ممنتومهای تعمیم یافته برحسب ممنتومهای تعمیم یافته برحسب ممنتومهای تعمیم یافته و قرار دادن در معادله (۱۰)،

$$H_n = H_{up} + \varepsilon_1 H_{p1} + \varepsilon_2 H_{p2}$$
 (۱۸)  
که در آن،

$$\begin{split} H_{up} &= \frac{P_{\Psi}^{2}}{2I_{3}} + \frac{P_{R_{o}}^{2}}{2m_{s}} + P_{\Theta}^{2} \left( \frac{C_{\Psi}^{2}}{2I_{2}} + \frac{S_{\Psi}^{2}}{2I_{1}} \right) \quad (19) \\ &+ \frac{GMm_{s}}{R_{o}} + \left( \frac{P_{\Phi}}{C_{\Theta}} - P_{\Psi}tan\Theta \right)^{2} \\ &\left( \frac{C_{\Psi}^{2}}{2I_{1}} + \frac{S_{\Psi}^{2}}{2I_{2}} \right) + \left( \frac{P_{\Phi}}{C_{\Theta}} - P_{\Psi}tan\Theta \right) \\ &P_{\Theta}S_{\Psi}C_{\Psi} \left( \frac{1}{I_{1}} - \frac{1}{I_{2}} \right) \\ H_{p1} &= \frac{1}{2}I_{1}C_{\Theta}^{2}C_{\Psi}^{2} - \frac{1}{2}I_{2}C_{\Theta}^{2}S_{\Psi}^{2} + \frac{1}{2}I_{3}S_{\Theta}^{2} \qquad (7 \cdot) \\ H_{p2} &= 2P_{\Phi}P_{\Psi}S_{\Theta} - 4P_{\Phi}P_{\Psi}S_{\Theta}S_{\Psi}^{2} + \\ &\frac{1}{2}\left(P_{\Phi} - P_{\mu_{0}}\right)^{2} - P_{\Phi}^{2}S_{\Psi}^{2} \qquad (7 \cdot) \end{split}$$

که در روابط فوق،  ${}^{2}_{0} = {}^{2}_{1} = {}^{2}_{0} e_{1}^{2} = {}^{2}_{0}$  پارامترهای اغتشاشی سیستم هستند. همچنین ترمهای اغتشاشی  ${}^{H}_{p1}$  و اغتشاشی اغتشاشی ا ${}^{H}_{p1}$  و  ${}^{H}_{p2}$  مربوط به حرکت مداری ماهواره ژیروستات میباشد که شامل متغیرهای انتقالی  ${}^{0}_{0}$  و  ${}^{0}_{0}$  میباشند. بنابراین حرکت مداری ماهواره نسبت به حرکت وضعی آن دارای تأثیر بسیار کمی است. به عبارت دیگر، انرژی مربوط به حرکت دورانی ماهواره ژیروستات به طور کاملاً محسوس از انرژی حرکت دارای تأثیر میستم انتقالی آن بیشتر است. به دیگر، انرژی مربوط به حرکت دورانی ماهواره ژیروستات به طور کاملاً محسوس از انرژی حرکت درکت ماهواره ژیروستات به میلتونین سیستم به مکل معادلات اغتشاشی، به دلیل پیچیدگی زیاد در مدل

$$T_{1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} C_{\theta} C_{\psi} & -C_{\theta} S_{\psi} & S_{\theta} \end{bmatrix} [\tilde{I}] \begin{bmatrix} \omega_{x} & \omega_{y} & \omega_{z} \end{bmatrix}^{T}$$
(A)

$$T_{2} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} C_{\theta} C_{\psi} & -C_{\theta} S_{\psi} & S_{\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{\theta} C_{\psi} & -C_{\theta} S_{\psi} & S_{\theta} \end{bmatrix}^{T}$$
(9)

و ماتریس I بهصورت زیر میباشد:

$$\tilde{I} = \begin{bmatrix} I_x & m_g^2 r^2 / m_s & m_g^2 r^2 / m_s \\ m_g^2 r^2 / m_s & I_y & m_g^2 r^2 / m_s \\ m_g^2 r^2 / m_s & m_g^2 r^2 / m_s & I_z \end{bmatrix}$$
(1.)

در رابطه (۱۰)،  $I_x$  ,  $I_z$  و  $I_z$  ممان اینرسی بدنه اصلی ماهواره نسبت به مرکز جرم آن و  $m_s = m_a$  جرم کل ماهواره ژیروستات با رابطه  $m_s = m_B + 3m_e$  است که در آن  $m_s = m_e + 3m_e$  بدنه اصلی ماهواره ژیروستات و  $m_s = m_a$  جرم هر چرخ عکس العملی میباشد. همچنینr فاصله بین مرکز جرم هر چرخ عکس العملی می باشد. مرکز جرم بدنه اصلی ماهواره ژیروستات است. در روابط فوق و تمامی معادلات دیگر، () و () بهترتیب معادل (.)cos و (.) sample مربوط به مختصات انتقالی و دورانی سیستم توسط روابط زیر محاسبه می شوند.

$$P_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \varphi}, \quad P_{\theta} = \frac{\partial L}{\partial \theta}, \quad P_{\psi} = \frac{\partial L}{\partial \psi},$$
$$P_{\mu_0} = \frac{\partial L}{\partial \mu_0}, \quad P_{R_0} = \frac{\partial L}{\partial R_0} \quad (11)$$

همیلتونین سیستم نیز از رابطه زیر بهدست میآید:

$$H = \varphi P_{\varphi} + \theta P_{\theta} + \psi P_{\psi} + \mu_{o} P_{\mu_{o}} + R_{o} P_{R_{o}} - L$$

$$(17)$$

با جایگذاری روابط (۶) تا (۱۱) در رابطه (۱۲) و ساده سازی آن، رابطه (۱۳) برای همیلتونین سیستم استخراج میگردد [۱۶].

$$H = T_0 + \left(\omega_0\right)T_1 + \left(\omega_0^2\right)T_2 + U_g \tag{17}$$

با استفاده از محورهای اصلی دستگاه مختصات (۱-۲-۳) بهجای دستگاه مختصات (X-Y-Z)، ماتریس رابطه (۱۰) قطری شده و با جایگذاری معادلات (۵) تا (۱۰) در رابطه (۱۳)، همیلتونین در دستگاه مختصات اصلی جدید بهصورت زیر خلاصه می شود:

$$H_{n} = H_{0} + (\omega_{0})H_{1} + (\omega_{0}^{2})H_{2}$$
(15)

$$H_{0} = \frac{1}{2}I_{1}\omega_{1}^{2} + \frac{1}{2}I_{2}\omega_{2}^{2} + \frac{1}{2}I_{3}\omega_{3}^{2} +$$
(10)  
$$\frac{1}{2}(m_{s}R_{o}^{2})\omega_{o}^{2} + \frac{1}{2}m_{s}R_{o}^{2} + \frac{GMm_{s}}{R_{o}}$$
  
www.SID.ir

ریاضی سیستم، تحلیل حرکت انتقالی- دورانی ماهواره بسیار دشوار بوده. از طرف دیگر، وجود ثوابت حرکتی<sup>۱</sup> مانند معادله انرژی (بهدلیل پایستار بودن سیستم) و ممنتوم زاویهای کل (بهدلیل عدم اعمال ورودی)، منجر به کاهش مرتبه همیلتونین سیستم میشود.

## ۳- کاهش مرتبه همیلتونین سیستم

مطابق همیلتونین سیستم که در معادله (۱۸) بیان شده است، از آنجایی که متغیر  $\Phi$  بهطور صریح در رابطه همیلتونین وارد نشده، در نتیجه  $\Phi$  یک متغیر تناوبی<sup>۲</sup> برای سیستم محسوب میشود و ممنتوم تعمیمیافته مربوط به آن یعنی  $\Phi_{\Phi}$  یکی از ثوابت حرکت سیستم میباشد. در نتیجه امکان کاهش مرتبه همیلتونین سیستم وجود دارد و این کار با استفاده از تبدیل کانونی دپریت که برای حرکت انتقالی- دورانی توسعه داده شده انجام میگیرد. در این روش کاهش، متغیرهای سرت-آندویر شامل پارامترهای حرکت وضعی و مداری براساس مثلث کروی که در شکل ۲ نشان داده شده تعریف میگردد[۲۱]. با استفاده از تبدیل کانونی دپریت تعمیم یافته، متغیرهای حالت سیستم شامل م $\Theta, \Psi, \mu_o, R_o$  به متغیرهای حالت جدید م $\sigma, \beta, \gamma, \rho_o, \lambda_o$  یوسعه یافته مطابق رابطه (۲۲) تبدیل میشود.



شکل (۲): تعریف متغیرهای سرت- آندویر در تبدیل کانونی دپریت توسعهیافته.

$$\begin{split} P_{\Phi} &= P_{\alpha}, \quad P_{\Theta} = P_{\beta} S_{\sigma} S_{\Psi-\gamma}, \quad P_{\Psi} = P_{\gamma}, \\ P_{\mu_{0}} &= P_{\lambda_{0}}, \quad P_{R_{0}} = P_{\rho_{0}}. \end{split} \tag{YY}$$

1- Constant of Motion

2- Cyclic Coordinate

جزئیات مربوط به روابط موجود در تبدیل که براساس مثلث کروی ABC استخراج شده اند به صورت زیر بهدست می آید [۱۴و۱۲].

 $\sin(\sigma)\cos(\beta)$ 

$$\cos(\Theta) = \cos(\delta)\cos(\sigma) - \sin(\delta) \tag{(77)}$$

$$\cos(\Psi - \gamma) = \cos(\Phi - \alpha)\cos(\beta) + (\Upsilon^{*})$$
  
$$\sin(\Phi - \alpha)\sin(\beta)\cos(\delta)$$

$$\cos(\Phi - \alpha) = \cos(\Psi - \gamma)\cos(\beta) + (\Upsilon \Delta)$$
  
$$\sin(\Psi - \gamma)\sin(\beta)\cos(\sigma)$$

که در آن،

$$\cos(\delta) = \frac{P_{\alpha}}{P_{\beta}}, \ \cos(\sigma) = \frac{P_{\gamma}}{P_{\beta}}.$$
 (19)

با جایگذاری معادلات (۲۲–۲۶) در روابط (۱۸–۲۱)، همیلتونین کاهش یافته بهصورت زیر محاسبه می شود.

$$H_{n} = H_{up} + \varepsilon_{1}H_{p1} + \varepsilon_{2}H_{p2}$$
(YY)

که،

$$H_{up}^{'} = \frac{P_{\gamma}^{2}}{2I_{3}} + \frac{P_{\rho_{0}}^{2}}{2m_{s}} + \frac{GMm_{s}}{\rho_{0}} + (\uparrow \Lambda)$$

$$\frac{1}{2}(P_{\beta}^{2} - P_{\gamma}^{2}) \left( \frac{S_{\gamma}^{2}}{I_{1}} + \frac{C_{\gamma}^{2}}{I_{2}} \right)$$

$$H_{p1}^{'} = \frac{1}{2} [I_{3} - I_{3}C_{\delta}^{2}C_{\sigma}^{2} - I_{3}S_{\delta}^{2}S_{\sigma}^{2}C_{\beta}^{2} + \frac{1}{2}(I_{3} - I_{1}) \qquad (\uparrow \Lambda)$$

$$S_{2\delta}S_{2\sigma} + (I_{1} - I_{2})(S_{\delta}^{2}S_{\sigma}C_{\beta} + C_{\delta}S_{\sigma}C_{\gamma}) - I_{1}S_{\sigma}^{2} + I_{2}C_{\delta}^{2}S_{\beta}]$$

$$H_{p2}^{'} = \frac{1}{2}P_{\lambda_{0}}^{2} + P_{\lambda_{0}} \left( S_{\sigma}^{2}S_{\delta}^{2} + \frac{1}{2}S_{2\delta}C_{2\sigma} \right) \qquad (\uparrow \cdot)$$

$$+ P_{\gamma} \left( S_{\delta}^{2}S_{\sigma} + S_{\delta}S_{\beta}S_{\gamma} \right) + S_{\beta}C_{\gamma} + S_{\delta}^{2} - S_{\delta}S_{\sigma}$$

در نهایت، معادلات کانونی حرکت سیستم براساس همیلتونین کاهشیافته در غیاب گشتاورهای کنترلی اعمالی بر سیستم توسط معادلات زیر محاسبه میشود.

$$q = \frac{\partial H_n}{\partial P_q}, \quad P_q = -\frac{\partial H_n}{\partial q} \tag{71}$$

که، pها مختصات تعمیمیافته و  $P_q$ ها ممنتومهای تعمیم یافتهاند. معادلات (۳۱) شامل ۱۰ معادله حرکت در فضای  $\lambda_o$  و  $\lambda_o$  حالت است. در حالت غیراغتشاشی، دو پارامتر  $\alpha$  و  $\lambda_o$  ثابت اند و  $P_{\alpha}$  و  $P_{\alpha}$  ثابت حرکت می باشند. در نتیجه با استفاده از تبدیل دپریت توسعه یافته، سیستم ۵ درجه آزادی

روش ملنیکف، یک روش اغتشاشی برای اثبات وجود تقاطع در مدارات هیتروکلینیک است که وجود آشوب در نزدیکی مدارات هیتروکلینیک غیراغتشاشی سیستم را بر اساس قضیه اسمیل-بریخوف نشان میدهد. مسئله مهم در استفاده از روش ملنیکف حل مدارات هیتروکلینیک سیستم است. براساس قضایای حاکم بر روش ملنیکف، بهجای حل سیستم اغتشاشی از سیستم غیراغتشاشی میتوان استفاده نمود. از آنجائیکه محرکت مداری تنها در ترمهای اغتشاشی ظاهر میشود، از معادلات حرکت دورانی ماهواره ژیروستات به همراه حل آنها در روش ملنیکف استفاده میگردد. دینامیک دورانی ماهواره ژیروستات بر پایه معادلات اولر بهصورت زیر بیان میشوند:

$$h'_{x} + (\frac{1 - \overline{I}_{1}}{\overline{I}_{1}})h_{y}h_{z} = 0$$
 (YY)

$$h'_{y} + (\frac{\overline{I}_{1} - \overline{I}_{2}}{\overline{I}_{1}\overline{I}_{2}})h_{x}h_{z} = 0$$
(\mathcal{T} \Lambda)

$$h'_{z} + (\frac{I_{2} - 1}{\overline{I}_{2}})h_{x}h_{y} = 0$$
 (٣٩)

که در آن، (i:x,y,z)ها ممنتومهای زاویهای بیبعد هستند که بهصورت  $h_i \mid H_i / H_T$  تعریف میشوند که ب $H_i$  مهستند که بهصورت  $H_i \mid H_i / H_T$  ممنتوم زاویهای کل اجزاء بردار ممنتوم زاویه ای و  $T_1 \mid I_3 \mid I_1$  و  $I_1 \mid I_2 \mid I_2$ ممانهای اینرسی بی بعد،  $\tau$  زمان بیبعد سیسستم که بهصورت  $I_1 \mid I_2 \mid T$  و همچینن عملگر مشتق هم بهصورت بهصورت  $I_2 / I_1 \mid T$  و همچینن عملگر مشتق هم بهصورت روش ملنیکف حرکت سیستم بدون در نظر گرفتن ورودی روش ملنیکف حرکت سیستم بدون در نظر گرفتن ورودی مورد مطالعه قرار می گیرد، در نتیجه  $T_1$  ثابت می باشد. همچنین ممنتوم زاویهای سیستم که مربوط به حرکت مداری مدار دایروی غیراغتشاشی است. بنابراین ممنتوم زاویهای کل سیستم در حالت بیبعد بهصورت زیر تعریف می گردد:

$$h^2 = h_x^2 + h_y^2 + h_z^2 = 1$$
 (f.)

در معادله انرژی سیستم، بدلیل حرکت مداری دایرهای غیراغتشاشی، ترمهای مربوط به انرژی جنبشی حرکت مداری و انرژی پتانسیل ماهواره ژیروستات ثابت میباشد. در نتیجه معادله انرژی متغیر سیستم تنها شامل انرژی جنبشی مربوط به حرکت دورانی ماهواره بهصورت زیر است:

$$\overline{T} = \frac{h_x^2}{\overline{I}_2} + h_y^2 + \frac{h_z^2}{\overline{I}_1}$$
(۴۱)

به سیستم ۳ درجه آزادی تبدیل می شود. از آنجایی که حرکت انتقالی ماهواره ژیروستات به صورت ترمهای اغتشاشی در همیلتونین سیستم کاهشیافته تأثیر می گذارد، در نتیجه براساس معادلات (۳۱)، معادلات حرکت سیستم در حالت غیر اغتشاشی تنها شامل دینامیک حرکت دورانی می باشد. همچنین با توجه به اینکه متغیر α ثابت است، معادلات حرکت وضعی ماهواره ژیروستات به صورت زیر بیان می شود.

$$\mathcal{B} = \frac{\partial H_n}{\partial P_{\beta}} = P_{\beta} \left( \frac{S_{\gamma}^2}{I_1} + \frac{C_{\gamma}^2}{I_2} \right) \tag{(47)}$$

$$P_{\beta}^{\Box} = -\frac{\partial H_{n}^{'}}{\partial \beta} = \varepsilon_{1} \left[ -I_{3} S_{\beta}^{2} S_{\beta} C_{\beta} + \frac{1}{2} \left( I_{1} - I_{2} \right) \right]$$
(77)

$$S_{\delta}^{2}S_{\sigma}S_{\beta} - \frac{1}{2}I_{2}C_{\delta}^{2}C_{\beta}] + \varepsilon_{2}(-P_{\gamma}(S_{\delta}C_{\beta}S_{\gamma}))$$
$$-C_{\beta}C_{\gamma}) + \varepsilon_{g}(N_{gg,\beta})$$
$$\gamma = \frac{\partial H_{n}}{\partial P_{\gamma}} = P_{\gamma}(\frac{1}{I_{3}} - \frac{S_{\gamma}^{2}}{I_{1}} - \frac{C_{\gamma}^{2}}{I_{2}})$$
$$+ \varepsilon_{2}(S_{\delta}^{2}S_{\sigma} + S_{\delta}S_{\beta}S_{\sigma})$$
(°\*f)

$$P_{\gamma} = -\frac{\partial H_{n}}{\partial \gamma} = -\left(P_{\beta}^{2} - P_{\gamma}^{2}\right)S_{\gamma}C_{\gamma}\left(\frac{1}{I_{1}} - \frac{1}{I_{2}}\right) + \varepsilon_{1}\left(\frac{1}{2}\left(I_{1} - I_{2}\right)C_{\delta}S_{\sigma}S_{\gamma}\right) + \varepsilon_{2}\left(S_{\beta}S_{\gamma} - P_{\gamma}S_{\delta}S_{\beta}C_{\gamma}\right) + \varepsilon_{g}\left(N_{gg,\gamma}\right)$$

$$(\Upsilon\Delta)$$

که در آن،  $\mathcal{E}_{g} = 3\mu/2\rho_{o}^{3}$  پارامتر اغتشاشی مربوط به گشتاورهای گرادیان جاذبه زمین است و  $\overline{N}_{gg}$  بردار گشتاور اغتشاشی گرادیان جاذبه زمین مطابق رابطه زیر است که باید توسط متغیرهای سرت–آندویر تبدیل شود:

$$\overline{N}_{gg} = \frac{3\mu}{2R_o^3} [(I_3 - I_2)S_{2\varphi}C_{\theta}^2 \hat{i} + (I_3 - I_1) \qquad (\mbox{(\sc P)} \\ S_{2\theta}C_{\varphi}j + (I_1 - I_2)S_{2\theta}C_{\theta}k]$$

که در آن،  $\mu$  ثابت گرانش است. مطابق روابط (۳۲–۳۵) رفتار آشوبناک سیستم همیلتونی توسط قضیه اسمیل- بریخوف و رفتار نگاشت نعل اسبی براساس تقاطع در مدارات هیتروکلینیک تحلیل می گردد. در نتیجه بهعنوان یک ابزار مناسب تحلیل آشوب، معیار ملنیکف برای مطالعه و طراحی مطلوب سیستم مورد استفاده قرار می گیرد.

که،  $\overline{T}$  انرژی جنبشی بدون بعد شده است که بهصورت  $\overline{T}$  انرژی جنبشی T تعریف میشود که در آن T انرژی جنبشی کل سیستم است. مسیرهای صفحه فازی ممنتوم زاویهای سیستم بر اساس معادلات (۳۷–۳۹) که به کره ممنتوم معروف است در شکل  $\mathbf{T}$  نشان داده شده است. مدارات هیتروکلینیک سیستم در اطراف نقطه زینی هذلولی در کره ممنتوم در سیستم غیر اغتشاشی نشان داده شده است. مدارات هیتروکلینیک سیستم غیر اغتشاشی نشان داده شده است. مدارات معادلات (۴۹) معروکلینیک سیستم از تقاطع کره ممنتوم براساس معادله بهصورت مماس بر نقطه زینی مدارات هیتروکلینیک سیستم بهصورت مماس بر نقطه زینی مدارات هیتروکلینیک سیستم بیرابر از f به دست می آید. در برای مدارات هیتروکلینیک سیستم برای مدارات می انرژی مطابق رابطه (۲۹) به صورت مماس بر نقطه زینی مدارات هیتروکلینیک سیستم بیرابر f این مدارات هیتروکلینیک سیستم برابر T می شود.



ممنتومهای زاویهای با توجه به معادلات (۳۷–۴۱) برای مقادیر 1<sub>2</sub> > *I*<sub>1</sub> در طول مدارات هیتروکلینیک بهصورت زیر حل میشوند [۴و۳]:

$$h_x = \pm \chi_1 \operatorname{sech}(\Delta \tau) \tag{FT}$$

$$h_{v} = \pm \tanh(\Delta \tau) \tag{47}$$

$$h_z = \pm \chi_2 \operatorname{sech}(\Delta \tau) \tag{ff}$$

 $\chi_1 = \sqrt{\overline{I}_2(1-\overline{I}_1)} / \overline{(I_2-\overline{I})}$  ،  $\Delta = \sqrt{(\overline{I}_1-1)(1-\overline{I}_2)} / \overline{I}_1\overline{I}_2$  ، کک  $\lambda_1 = \sqrt{\overline{I}_2(1-\overline{I}_1)} / \overline{(I_2-\overline{I})}$  ،  $\Delta = \sqrt{\overline{I}_1(\overline{I}_2-1)} / \overline{(I_2-\overline{I}_1)}$   $\chi_2 = \sqrt{\overline{I}_1(\overline{I}_2-1)} / \overline{(I_2-\overline{I}_1)}$  $\chi_2 = \sqrt{\overline{I}_1(\overline{I}_2-$ 

$$h_{x} = P_{\beta} \sin \sigma \sin \gamma = \pm \chi_{1} \operatorname{sech}(\Delta \tau)$$
 (4)

$$h_{y} = P_{\beta} \sin \sigma \cos \gamma = \pm \tanh(\Delta \tau) \tag{69}$$

$$h_{z} = P_{\beta} \cos \sigma = \pm \chi_{2} \operatorname{sech}(\Delta \tau) = P_{\gamma}$$
 (FY)

همچنین با توجه به معادلات (۳۱) و (۴۵-۴۷) داریم:

$$\cos \gamma = \frac{\chi_2}{\chi_1} \operatorname{csch}(\Delta \tau) \tag{f}{}$$

$$\cos\sigma = \operatorname{sech}(\Delta\tau)$$
 (۴۹)

 $\overline{I}_1$  از آنجایی که،  $P_{\beta}$  مقداری ثابت است و برای مقادیر  $\overline{I}_1$   $\ddot{\beta} = \partial H_n^{'} / \partial P_{\beta}$  به کمک رابطه  $\partial P_{\beta} / \overline{I}_2$  ، نزدیک به  $\overline{I}_2$  ، پارامتر  $\beta$  به کمک رابطه مورت  $\overline{P} \cong \Omega \tau$ به صورت  $\tau = \Omega \tau$  تخمین زده می شود. در نتیجه به منظور به کارگیری روش ملنیکف، معادلات حرکت طبق روابط (۳۲-۳۵) به صورت معادلات اغتشاشی به شکل:

$$\stackrel{\square}{q} = F_1 + \varepsilon G_1, \quad \stackrel{\square}{P}_q = F_2 + \varepsilon G_2 \tag{(a.)}$$

نوشته میشود که،  $\rho_0^2 = \frac{3}{\rho_0} / \epsilon = 3$  پارامتر اغتشاشی واحد شامل ترکیبی از پارامترهای اغتشاشی  $(\epsilon_1 = v_0^2 (1/\rho_0^2))$  $\epsilon_2 = (1/m_s)(1/\rho_0^2)$  و  $\epsilon_2 = (1/m_s)(1/\rho_0^2)$  میباشد که  $v_0$  سرعت مداری ماهواره ژیروستات است. سپس انتگرال ملنیکف به صورت زیر تعریف می شود:

$$M\left(\tau_{O}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(q_{O}(t)) \wedge G(q_{O}(t), t+t_{0}) dt \qquad (\Delta t)$$

که، F یک میدان برداری همیلتونی، G ترم اغتشاشات کوچک،  $(t) q_o(t)$  حل مدارات هیتروکلینیک در سیستم غیر اغتشاشی و علامت  $\wedge$  اپراتور گوه<sup>(۱</sup> است که بهصورت اغتشاشی و علامت  $\wedge$  اپراتور گوه<sup>(۱</sup> است که بهصورت (۳۰) معادلات (۳۲) معادلات (۳۲) تا (۳۵) در فرم معادله اغتشاشی (۵۰) نوشته و در معادله مانیکف (۵۱) قرار میدهیم. با تغییر متغیر در حل مدارات هیتروکلینیک که در روابط (۴۲–۴۹) آورده شده است، تابع ملنیکف بهوسیله حل انتگرال (۵۱) با استفاده از جداول انتگرال، انتگرال جزء به جزء، انتگرال کوشی و تئوری باقیماندهها بهصورت زیر محاسبه می گردد [۱۷].

$$M(\tau_0) = \xi_1 + \xi_2 \sin(2\Omega\tau_0) + \xi_3 \sin(\Omega\tau_0 + \Gamma) \quad (\Delta \tau)$$
 که در آن،

$$\xi_1 = \left(3\mu(\overline{I}_1 - \overline{I}_2) / 4\Delta\rho_0 \chi_1\right) \left((1/\overline{I}_2) - \chi_2^2\right)$$

1- Wedge Operator

$$\xi_{2} = \left(v_{0}^{2}\overline{I}_{1} / 8\Omega\chi_{1}\right)\left(\left(1/\overline{I}_{2}\chi_{1}\right) + \chi_{2}^{2}\right)$$
$$\xi_{3} = \sqrt{\xi_{4}^{2} + \xi_{5}^{2}}$$
$$\Gamma = Arctan(\xi_{4} / \xi_{5})$$

كە،

$$\begin{aligned} \xi_{4} &= -\frac{\pi\Omega\chi_{2}^{2}}{\overline{m}_{s}\chi_{1}^{2}} + \operatorname{sech}\left(\frac{\pi\Omega}{2\Delta}\right) \{(\frac{\pi}{\overline{m}_{s}\Delta}) \\ &(\frac{1}{\overline{I}_{2}\chi_{1}^{2}} - \frac{1}{\overline{I}_{1}}) + \frac{9\pi\mu}{16\rho_{0}\Delta} [\chi_{1}(\overline{I}_{2} - 1)] + \\ &(\frac{1}{\overline{I}_{2}\chi_{1}^{2}} - \frac{1}{\overline{I}_{1}}) + \frac{9\pi\mu}{16\rho_{0}\Delta} [\chi_{1}(\overline{I}_{2} - 1)] \} \\ &+ (\frac{1}{\chi_{1}} + \chi_{2})(1 - \frac{1}{\overline{I}_{2}}) - \frac{\chi_{2}^{2}}{\chi_{1}}(\overline{I}_{2} - 1)] \} \\ &+ tanh\left(\frac{\pi\Omega}{2\Delta}\right) \{(\frac{\pi\chi_{2}}{\overline{m}_{s}\Delta\chi_{1}^{2}})[\frac{1}{\overline{I}_{2}} - \chi_{2}^{2}] \} \\ \xi_{5} &= \operatorname{sech}\left(\frac{\pi\Omega}{2\Delta}\right) \{(\frac{\pi\Omega}{\overline{m}_{s}\Delta^{2}})[-\frac{\chi_{1}\chi_{2}}{\overline{I}_{1}} + \frac{\chi_{2}}{2\overline{I}_{2}\chi_{1}} - \frac{\chi_{2}}{\chi_{1}}(\frac{1}{\overline{I}_{2}} - 1)] - (\frac{3v_{0}^{2}}{4\chi_{1}\Delta})[\frac{1}{\overline{I}_{2}} - \chi_{2}^{2}] - \\ &(\frac{\pi}{2\overline{m}_{s}}\Delta\chi_{1})[\frac{1}{\overline{I}_{2}}\chi_{1}} - \chi_{2}^{2}] \} + tanh\left(\frac{\pi\Omega}{2\Delta}\right) \\ &\{(\frac{\pi}{2\overline{m}_{s}\Delta})[\frac{\chi_{1}\chi_{2}}{\overline{I}_{1}} - \frac{\chi_{2}}{2\chi_{1}\overline{I}_{2}}] \} \end{aligned}$$

و  $m_s \ \square \ m_s \ \square \ m_s \ I_2$  و  $m_s \ \square \ m_s \ I_2$  . مطابق معادله (۵۲)، بازاء مقادیر منطبق با شرط زیر، مقدار تابع ملنیکف صفر می شود:

$$\xi_2 + \xi_3 < \xi_1 \tag{af}$$

رابطه ملنیکف در معادله (۵۲) صفر نشده و در سیستم قطعا آشوب رخ نمی دهد. در نتیجه بهوسیله روش ملنیکف، پارامترهای سیستم مانند  $\overline{I}_{1}, \overline{I}_{2}, \overline{m}_{s}, \rho_{o}$  می توان طوری طراحی کرد که شرط (۵۴) را ارضا نموده تا از وقوع آشوب در رفتار سیستم جلوگیری کند. براساس معادلات (۵۳) و (۵۴)، نواحی آشوبناک و غیر آشوبی در شکلهای ۴ تا ۷ نشان داده شده است. در نمامی نمودارهای ۴ تا ۷، قسمت بالایی سطح جداکننده، ناحیه آشوبناک را نشان می دهد و بازاء مقادیر منطبق بر قسمت پایینی این سطوح، آشوب در سیستم رخ نمی دهد. مطابق نمودار ۴ کاهش مقادیر  $\overline{I}$ ،  $\overline{I}$  و  $\overline{I}$ 

www.SID.ir

مقادیر رابطه زیر:

باعث افزایش احتمال آشوب در سیستم می شود. همچنین  $R_o$  نیز نقش اصلی در پارامتر اغتشاشی سیستم دارد. همان طور که در نمودارهای  $\Delta$  تا  $\forall$  قابل مشاهده است، با افزایش  $R_o$  تأثیر اغتشاشات خارجی و به دنبال آن احتمال آشوب در سیستم کاهش می یابد.



 $.\overline{I}_{1},\overline{m}_{s},R_{o}$  برحسب پارامترهای



در نمودار **۵**، کاهش  $\overline{I}_1$  و  $\overline{I}_2$  موجب پدید آمدن آشوب در سیستم میشود. مطابق شکل ۶، افزایش  $\overline{m}$ ، پاسخهای سیستم را منظمتر نموده و نهایتاً با توجه به نمودار ۲، برای مقادیر 2 $\overline{I}_2 = \overline{I}_2$  و هر مقدار  $R_o$  سیستم کاملاً رفتاری منظم و غیرآشوبی خواهد داشت.

#### ۵- نمای لیاپانف

نمای لیاپانف ابزاری عددی برای تحلیل آشوب در سیستمهای دینامیکی است. در روش نمای لیاپانف، فاصله دو مدار کنار هم در یک لحظه زمانی اندازه گیری می شود که می تواند حساسیت سیستم را به تغییر در شرایط اولیه به طور نمایی در صفحه فازی نشان دهد. نمای لیاپانف  $(\lambda)$  برای هر یک از متغیرهای حالت  $q_i(t)$  به صورت زیر به دست می آید:

$$\lambda = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_{0}^{t} E_{i}\left(q\left(\tau\right)\right) d\tau = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} ln \left|\frac{\delta q_{i}\left(t\right)}{\delta q_{i}\left(0\right)}\right| \qquad (\Delta\Delta)$$

 $E_i(q(t))$  و  $q_i(t)$  حالت  $q_i(0)$  و  $Q_i(t)$  و  $q_i(t)$  مقادیر ویژه حقیقی ماتریس ژاکوبین مربوط به نرخ واگرایی مسیرهای سیستم است. مقادیر نمای لیاپانف برای هر متغیر حالت محاسبه شده بازاء پارامتر اغتشاشی  $s^{-1} = 2 \times 10^{-8}$  در جدول **۱** مشاهده می شود.

#### $\mathbf{s} = \mathbf{s} = \mathbf{s} + \mathbf{s}$ . $\mathbf{s} = \mathbf{s} + \mathbf{s}$

$$\begin{array}{c|c} \lambda_h & \lambda_g & \lambda_l & \lambda_{\lambda_0} & \lambda_{r_0} \\ \hline \cdot & +1/\$\$ & -\Upsilon/\Lambda & +./\$ & -1/\$ \\ \end{array}$$

علامت مثبت و منفی برای مقادیر نمای لیاپانف، نشان دهنده وجود جاذب شگفت و ایجاد پدیده آشوب در سیستم است. همچنین نمودار بیشترین مقدار نمای لیاپانف نسبت به www.SID.ir

پارامتر اغتشاشی ع در شکل ۸ نشان داده شده است. مثبت بودن مقدار بیشترین نمای لیاپانف با توجه به افزایش پارامتر ع مبین این موضوع است که فاصله بین مدارات مجاور هم بهطور نمایی افزایش پیدا میکند. بنابراین رفتار آشوبناک در سیستم تایید شده و در واقع نتایج حاصل از تحلیل ریاضی سیستم توسط روش انتگرال ملنیکف صحه گذاری میشود [۸].



**شکل (۸):** مقدار بیشترین نمای لیاپانف سیستم نسبت به پارامتر اغتشاشی *ε*.

## ۶- نتایج شبیهسازی سیستم

رفتار شبه پریودیک و پاسخهای آشوبناک سیستم ماهواره ژیروستات در حرکت انتقالی- دورانی در شکلهای ۹ تا ۱۹ نمایش داده شده است. در شکلهای ۹ و ۱۰، مسیر صفحه فازی و پاسخ زمانی سیستم با رفتار شبه پریودیک نشان داده شده است. همچنین شکلهای ۱۱ تا ۱۹ شامل مسیرهای صفحه فازی، مقاطع پوانکاره و پاسخهای سری زمانی آشوبناک

سیستم بازاء مقدار  $\varepsilon = 2 imes 10^{-8}$  نشان داده شده است که نتایج حاصل از شبیهسازی سیستم همگی مبین رفتاری آشوبناک در سیستم میباشند. این مطلب میتواند موید نتایج حاصل از تحلیلهای ریاضی و عددی آشوب در این سیستم باشد.













همچنین بهمنظور نمایش تقاطع مدارات هیتروکلینیک در روش تحلیلی ملنیکف، مقطع پوانکاره  $\gamma - P_{\gamma}$  که حاصل تقاطع مسیرهای صفحه فازی سهبعدی  $\gamma - \beta - P_{\gamma}$  با صفحه  $\beta = \pi$  مسیرهای صفحه فازی سهبعدی  $\gamma - \beta - P_{\gamma}$  با صفحه در در مدر مدر مدر معلیهای **۲۰** و **۲۱** نشان داده شده است. مقاطع پوانکاره در این نمودارها حاکی از وجود تقاطع در

منیفلدهای پایدار و ناپایدار در مدارات هیتروکلینیک میباشند که در نتیجه رفتار آشوبناک را در سیستم همیلتونی اثبات مینماید. با توجه به تقاطع هیتروکلینیک، بهوسیله رفتار نگاشت نعل اسبی و قضیه اسمیل-بریخوف، آشوب در سیستم تایید میگردد. بنابراین مدارات هیتروکلینیک سیستم در هم پیچیده شده و مسیرهای فازی سیستم در اطراف نقطه زینی بهطور اتفاقی منحرف میشوند. همچنین انقباض، انبساط و چین خوردگی در مسیرهای فازی سیستم، بستر جاذب آشوبناک را اطراف نقطه زینی نشان میدهد. در شکل ۲۱، باند آشوب و پنجرههای آشوب بهوضوح دیده میشود.



- Baozeng, Y. "Heteroclinic Bifurcations in Completely Liquid-filled Spacecraft with Flexible Appendage", Nonlinear Dynamics, Vol. 51, No. 1, pp. 317–327, 2008.
- Kuang, J., Meehan, P.A., Leung, A.Y.T., and Tan, S. "Nonlinear Dynamics of a Satellite with Deployable Solar Panel Arrays", Int. J. of Non-Linear Mechanics, Vol. 39, No. 1, pp. 1161–1179, 2004.
- Moosavian, S.A.A., Sadati, S.H., and Homaeinejad, M.R. "Regulated Sliding Mode Control of Satellite Rotation: Trade-off between Tracking Precision and Energy Consumption", Mech. & Aerospace Eng. J. Vol. 89 1, No. 1, pp.89-100, 2005 (In Persian).
- Moradi, M., Moosavian, S.A.A., and Daneshvar, A. "Orbital Dynamics Modeling, Based on Separating Orbital Elements to Control Low-Altitude Satellites", Mech. & Aerospace Eng., Vol. 7, No. 1, pp. 41-53, 2011 (In Persian).
- Liu, Y.Z., Yua, H. J., and Chen, L. "Chaotic Attitude Motion and its Control of Spacecraft in Elliptic Orbit and Geomagnetic", Acta Astronautica, Vol. 55, No. 1, pp. 487–494, 2004.
- Wiggins, S. "Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos", Springer-Verlag, New York, 2003.
- Kuang, J. Leung, A.Y.T. and Tan, S. "Hamiltonian and Chaotic Attitude Dynamics of an Orbiting Gyrostat Satellite under Gravity Gradient Torques", Physica D, Vol. 186, No. 1, pp. 1–19, 2003.
- Shirazi, K.H. and Ghaffari-Saadat M.H. "Bifurcation and Chaos in an Apparent-Type Gyrostat Satellite", Nonlinear Dynamics, Vol. 39, No. 1, pp. 259–274, 2005.
- Kuang, J.L., Meehan, P.A. and Leung, A.Y.T. "On the Chaotic Rotation of a Liquid-filled Gyrostat Via the Melnikov–Holmes–Marsden Integral", Int. J. of Non-Linear Mechanics, Vol. 41, No. 4, pp. 475–490, 2006.
- Elipe, A. and Lanchares, V. "Exact Solution of a Triaxial Gyrostat with one Rotor", Celestial Mechanics and Dynamic Astronomy, Vol. 101, No. 1, pp. 49–68, 2008.
- Doroshin, A.V. "Analysis of Attitude Motion Evolutions of Variable Mass Gyrostats and Coaxial Rigid Bodies System", Int. J. of Non-Linear Mechanics, Vol. 45, No. 1, pp. 193–205, 2010.
- Gurfil, P., Elipe, A., Tangren, W., and Efroimsky, M. "the Serret-Andoyer Formalism in Rigid-Body Dynamics: I. Symmetries and Perturbations", Regular and Chaotic Dynamics, Vol. 12, No. 1, pp. 389-425, 2007.

#### ۷- نتیجهگیری

حركت آشوبناك انتقالى- دورانى ماهواره ژيروستات تحت گشتاور گرادیان جاذبه زمین مورد مطالعه قرار گرفت. بهمنظور بررسی تأثیر حرکت مداری در دینامیک دورانی ماهواره ژیروستات، مدل ریاضی مربوط به معادلات کویله شده حرکت انتقالی و دورانی با استفاده از روش همیلتون استخراج شد. كاهش مرتبه معادله هميلتونين سيستم بهدليل ييچيدگيهاي موجود در معادلات کوپله شده سیستم انجام گرفت. برای این منظور، تبديل كانونى توسعه يافته ديريت بهكمك متغيرهاي سرت- آندویر برای پارامترهای حرکت انتقالی- دورانی مورد استفاده قرار گرفت که در نهایت دو درجه آزادی از سیستم را یس از تبدیل کاهش داد. تقاطع در مدارات هیتروکلینیک، وجود رفتاری شبیه رفتار نگاشت نعل اسبی و نهایتاً ایجاد آشوب در سیستم به روش تحلیلی دقیق انتگرال ملنیکف بر اساس قضيه اسميل- بريخوف اثبات شد. با استفاده از نتايج حاصل از روش ملنیکف، مقادیر مناسب برای طراحی یارامترهای سیستم را میتوان طوری انتخاب کرد تا از قرار گرفتن سیستم در ناحیه آشوبناک جلوگیری کند. به این ترتیب که مطابق نمودار شکلهای ۴ تا ۷، بازاء مقادیر کمی مربوط به ممانهای اینرسی، جرم و مدار حرکتی ماهواره ژیروستات که در زیر سطوح جداکننده منحنی قرار دارند و در واقع مقادير مربوط به فصل مشترك منحنىها كه زير سطوح جدا کننده قرار دارند، از وقوع آشوب در سیستم و همچنین ارتعاشات ناشی از آن جلوگیری بعمل میآید که منجر به حذف رفتار آشوبگونه در سیستم بدون استفاده از سیستم کنترلی می شود. همچنین با اعمال روشهای عددی روی سیستم کاهش یافته مانند نمای لیاپانف، بررسی مقاطع پوانکاره، مسیرهای صفحه فازی و پاسخهای سری زمانی، همگی مؤید وجود دوشاخگی هیتروکلینیک و آشوب در سيستم مي باشند.

#### ۸- مراجع

- Inarrea, M. "Chaos and its Control in the Pitch Motion of an Asymmetric Magnetic Spacecraft in Polar Elliptic Orbit", Chaos Solitons and Fractals, Vol. 40, No. 1, pp. 1637–1652, 2009.
- Zhou, L., Chen, Y. and Chen, F. "Stability and Chaos of a Damped Satellite Partially Filled with Liquid", Acta Astronautica, Vol. 65, No. 2, pp. 1628–1638, 2009.

تحلیل پدیده آشوب در حرکت انتقالی – دورانی ماهواره ژیروستات ...

- Spiegel, M., Lipschitz, S., and Liu, J. "Mathematical Handbook of Formulas and Tables", McGraw-Hill, New York, 1998.
- Sidi, M.J. "Spacecraft Dynamics and Control: A Practical Engineering Approach", Cambridge University Press, London, 1997.
- Meirovitch, L. "Methods of Analytical Dynamics", McGraw-Hill, New York, 1970.